Классы пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре*

М. А. ПАРИНОВ
Ивановский государственный университет
e-mail: parinov@ivanovo.ac.ru

УДК 514.83+514.7

Ключевые слова: пространство Минковского, группа Пуанкаре, уравнения Максвелла, симплектическая структура, пространство Максвелла, классификация.

Аннотация

Пространство Максвелла — это тройка (M, g, F), где M — четырёхмерное пространство Минковского или область в нём, g — псевдоевклидова метрика на M, а F — замкнутая внешняя дифференциальная 2-форма на M. Получена полная классификация пространств Максвелла, допускающих подгруппы группы Пуанкаре. Найдены представители для всех классов.

Abstract

M. A. Parinov, Classes of Maxwell spaces that admit subgroups of the Poincaré group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 183—237.

A Maxwell space is a triple (M, g, F), where M is the four-dimensional Minkowski space or a domain in it, g is a pseudo-Euclidean metric on M, and F is a closed exterior 2-form on M. In this paper, we give an exhaustive description of classes of Maxwell spaces that admit subgroups of the Poincaré group. Representatives of all classes are constructed.

1. Введение

В классической теории электромагнитное поле описывается антисимметричным тензором F_{ij} на четырёхмерном вещественном многообразии $M \subset \mathbb{R}^4_1$ (области пространства Минковского), удовлетворяющим уравнениям Максвелла [8]

$$\partial_{[i}F_{jk]} = 0, \quad \nabla_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} J^i \quad (i, j, k = 1, \ldots, 4)$$

(для тока J^i должно выполняться уравнение непрерывности $\nabla_i J^i = 0$).

Под *пространством Максвелла* будем понимать тройку (M, g, F), где M — гладкое вещественное четырёхмерное многообразие, $F = \frac{1}{2} F_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ — обобщённая симплектическая структура на M, $g = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ — псевдоевклидова метрика на M лоренцевой сигнатуры $(- - - +)$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (проект 97-0-1.3-99).

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 183—237.
© 2004 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

Уравнение $dF = 0$, означающее замкнутость формы F, эквивалентно первому из уравнений Максвелла. При выполнении второго уравнения Максвелла для тензора F_{ij} и уравнения непрерывности пространство Максвелла ассоциируется с электромагнитным полем.

Пусть G_S — группа диффеоморфизмов многообразия M, сохраняющих как g, так и F. Она является подгруппой группы G_g движений пространства Минковского (группы Пуанкаре) и группы G_F симплектоморфизмов структуры (M, F), причём $G_S = G_g \cap G_F$. Пространства Максвелла с нетривиальными группами G_S представляют интерес, например, в связи с известным методом получения первых интегралов уравнений Лоренца [6].

Электромагнитные поля, допускающие группы G_S, активно изучались в 60—70-х годах XX столетия [16—21]. Так, в работах [19—21] найдены максимальные подгруппы группы Пуанкаре преобразований, сохраняющих тензор F_{ij} (релятивистские группы симметрий), для конкретных видов полей F_{ij} (однородных, плоских волн и др.), а также исследованы структуры этих подгрупп. В работах [16—18] изучались связные подгруппы группы Пуанкаре, являющиеся инвариантными группами преобразований электромагнитных полей (то же самое, что и релятивистские группы симметрий). В частности, установлено, что размерность такой группы не превосходит шести [18], представлена классификация таких групп [16,17]. Задача классификации связных подгрупп группы Пуанкаре с точностью до сопряжённости решена в [2] (вне связи с электродинамикой).

В [12, 13] поставлена проблема классификации пространств Эйнштейна—Максвелла по группам G_S в связи с авторским методом получения первых интегралов уравнений Лоренца [6]. При этом под пространством Эйнштейна—Максвелла понимается более общий объект, чем пространство Максвелла (когда g есть псевдориманова метрика, такая что пара (M, g) — пространство Эйнштейна [3]). В случае плоской метрики G_g есть группа Пуанкаре, G_S — её подгруппы и мы имеем проблему классификации пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре.

2. Постановка задачи и метод решения

Прежде всего заметим, что описать класс пространств Максвелла, допускающих группу G_S, можно следующим образом. Пусть $\mathcal{L}_S$ — алгебра Ли векторных полей на M, соответствующая группе G_S. Тензор F_{ij}, задающий этот класс, является решением первого из уравнений Максвелла

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad (i, j, k = 1, \ldots, 4) \tag{2.1}$$

и уравнений (условий инвариантности F_{ij} относительно G_S)

$$L_{\xi_\alpha} F_{ij} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, p = \dim \mathcal{L}_S), \tag{2.2}$$

где ξ_α — базисные векторы в $\mathcal{L}_S$, а L_{ξ_α} — производная Ли.

Заметим, что ввиду линейности уравнений (2.1) и (2.2) множество решений этой системы образует линейное пространство (класс), каждый элемент F_{ij} которого задаёт пространство Максвелла с группой симметрий не меньше G_S. Однако на самом деле для некоторых из пространств Максвелла этого класса (иногда для всех) группа симметрий оказывается шире, чем G_S, для которой он найден. Поэтому для нахождения истинной группы симметрий приходится решать уравнение $L_\xi F_{ij} = 0$ относительно $\xi \in \mathcal{L}_g$ при заданном F_{ij} ($\mathcal{L}_g$ — алгебра Ли векторных полей, соответствующая группе G_g[1]). Пространство его решений и будет алгеброй Ли группы симметрий.

Заметим, далее, что группа Пуанкаре имеет бесконечное множество подгрупп, поэтому невозможно составить список классов пространств Максвелла, инвариантных относительно G_S. Однако можно выделить конечный список в некотором смысле типичных подгрупп и для них описать классы пространств Максвелла. Таким естественно получаемым множеством является список представителей классов сопряжённых подгрупп группы Пуанкаре. Действительно, если подгруппа G'_S сопряжена с G_S, то существует такое преобразование координат $A \in G_g$, $x^i = A^i_{i'} x^{i'} + a^i$, что $G'_S = A^{-1} G_S A$. Это означает, что класс пространств Максвелла с группой симметрий G_S, задаваемый тензором F_{ij}, переходит в класс с группой симметрий G'_S, задаваемый тензором $F_{i'j'} = F_{ij} A^i_{i'} A^j_{j'}$.

Примем за основу классификацию подгрупп группы Пуанкаре с точностью до сопряжённости, представленную в [2]. Список подалгебр размерностей от 1 до 6 алгебры Ли $\mathcal{L}_g$ группы Пуанкаре содержит 76 пунктов, в некоторых из которых более одной алгебры[2]. Алгебры будем обозначать $\mathcal{L}_{p,q}$ (p — размерность алгебры, q — номер в списке подалгебр размерности p), добавляя в случае необходимости к числу q букву $a, b, c, \ldots$. Соответствующие им подгруппы группы Пуанкаре будем обозначать $G_{p,q}$. Задача описания классов пространств Максвелла сводится к решению для каждой подалгебры $\mathcal{L}_{p,q}$ системы уравнений (2.1), (2.2).

Обозначим через $C_{p,q}$ класс пространств Максвелла, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{p,q}$. Очевидно, что если алгебры $\mathcal{L}_{p_1,q_1}$ и $\mathcal{L}_{p_2,q_2}$ связаны включением $\mathcal{L}_{p_1,q_1} \subset \mathcal{L}_{p_2,q_2}$ ($p_1 < p_2$), то соответствующие классы связаны обратным включением $C_{p_2,q_2} \subset C_{p_1,q_1}$. Возьмём базис алгебры Ли группы Пуанкаре в виде:

$$\begin{gathered}
e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \quad e_4 = (0,0,0,1),\\
e_{12} = (-x^2, x^1, 0, 0), \quad e_{13} = (x^3, 0, -x^1, 0), \quad e_{23} = (0, -x^3, x^2, 0),\\
e_{14} = (x^4, 0, 0, x^1), \quad e_{24} = (0, x^4, 0, x^2), \quad e_{34} = (0, 0, x^4, x^3).
\end{gathered}$$

Здесь $\{x^i\}$ — галилеевы координаты (в которых $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,1)$). Выражение $L\{\xi_1, \ldots, \xi_p\}$ всюду означает линейную оболочку векторов $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

В [1, 4, 7, 9—11, 22, 23] описаны классы пространств Максвелла в частных случаях: в [1] — 22 класса статических пространств Максвелла, т. е. пространств, допускающих смещения вдоль оси времени (минимальная из подал-

---

[1]Алгебра $\mathcal{L}_g$ состоит из векторов вида $\xi^i = a^i_{\cdot j} x^j + b^i$, где $a^i_{\cdot j} = g^{ik} a_{kj}$, а $a_{kj} = -a_{jk}$ и b^i — произвольные действительные числа.

[2]В действительности этих алгебр бесконечное множество. Например, эллиптические, гиперболические, параболические винты, пропорциональные бивращения зависят от параметра, принимающего континуум значений, и эти подгруппы не являются сопряжёнными.

гебр $\mathcal{L}_S^{\min}$— это $L\{e_4\}$); в [4, 23] — 9 классов пространств Максвелла, допускающих гиперболические винты ($\mathcal{L}_S^{\min} = L\{e_{24} + \lambda e_1 + \mu e_3\}$, $\lambda, \mu = \text{const}$); в [7] — 15 классов пространств Максвелла, допускающих эллиптические винты ($\mathcal{L}_S^{\min} = L\{e_{13} + \lambda e_2 + \mu e_4\}$); в [9] — 18 классов пространств Максвелла, допускающих параболические вращения ($\mathcal{L}_S^{\min} = L\{e_{12} - e_{14}\}$); в [10] — 9 классов пространств Максвелла, допускающих смещение вдоль изотропной прямой ($\mathcal{L}_S^{\min} = L\{e_2 + e_4\}$); в [11] — 10 классов пространств Максвелла, допускающих пропорциональные бивращения ($\mathcal{L}_S^{\min} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}\}$); в [22] — 10 классов пространств Максвелла, допускающих трансляции. В [14] приведена полная классификация пространств Максвелла по подгруппам группы Пуанкаре, включающая все результаты, упомянутые в предыдущем абзаце. Во всех этих работах не указаны в явном виде представители классов, т. е. пространства Максвелла, допускающие в точности группу $G_{p,q}$. В настоящей работе найдены представители классов, описанных в [14].

В случаях отсутствия явного описания классов $C_{p,q}$ поиск представителей осуществлялся по следующей схеме. Для каждой группы $G_{p,q}$ был описан класс $P_{p,q}$ потенциалов A_i, инвариантных относительно этой группы, т. е. удовлетворяющих условию $L_{\xi_\alpha} A_i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$, найден представитель этого класса, допускающий именно эту группу (не шире!) [5, 15], для него найден тензор $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ и проверено, что его группа G_S совпадает с $G_{p,q}$. Используются те же обозначения групп, алгебр и классов, что и в [14].

Пример. В случае общего положения пространство Максвелла имеет тривиальную группу симметрий G_S. Найдём пример такого пространства. Возьмём потенциал в виде $A_i = (0, 0, 0, \Phi)$, где $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Решая уравнение $L_\xi A_i = 0$ в классе $\mathcal{L}_g$, получим, что группа $G_A \cap G_g$ тривиальна при условии линейной независимости производных $\Phi_i = \partial_i \Phi$ и ещё трёх функций $x^2\Phi_1 - x^1\Phi_2$, $x^3\Phi_1 - x^1\Phi_3$, $x^3\Phi_2 - x^2\Phi_3$. (Например, это условие выполнено для $\Phi = x^1x^2x^3x^4$.) Вычисляя алгебру $\mathcal{L}_S$ для соответствующего поля F_{ij} ($F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0$, $F_{14} = \Phi_1$, $F_{24} = \Phi_2$, $F_{34} = \Phi_3$), получим, что *достаточным условием для тривиальности группы G_S является линейная независимость функций* Φ_1, Φ_2, Φ_{12}, Φ_{13}, Φ_{14}, $x^2\Phi_{11} - x^1\Phi_{12}$, $x^3\Phi_{11} - x^1\Phi_{13}$, $x^3\Phi_{12} - x^2\Phi_{13}$ ($\Phi_{ij} = \partial_i\partial_j\Phi$). Это условие выполнено для функции $\Phi = x^1x^2x^3x^4$.

Замечание. Всюду компоненты тензора F_{ij} отнесены к галилеевым координатам, даже если представлены как функции других координат.

3. Классы пространств Максвелла с одномерными группами G_S

В этом разделе описаны классы пространств Максвелла, допускающих одномерные подгруппы группы Пуанкаре из списка в [2] (подробности см. в [14]). Найдены представители классов.

3.1. Трансляции

Существует три вида попарно несопряжённых одномерных подгрупп трансляций.

3.1.1. Класс $C_{1,1a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{1,1a} = L\{e_1\}$ соответствует группа $G_{1,1a}$ трансляций в направлении оси Ox^1. Класс $C_{1,1a}$ пространств Максвелла задаётся тензором F_{ij}, компоненты которого удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0, \quad \partial_2 F_{41} + \partial_4 F_{12} = 0, \quad \partial_3 F_{41} + \partial_4 F_{13} = 0, \\ \partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23} = 0 \quad (F_{ij} = F_{ij}(x^2, x^3, x^4)). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Класс $P_{1,1a}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1a}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^2, x^3, x^4)$. Полагая $A_i = (0, 0, 0, \Phi)$, $\Phi = \Phi(x^2, x^3, x^4)$, получим тензор F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = F_{14} = 0, \quad F_{24} = \partial_2 \Phi, \quad F_{34} = \partial_3 \Phi. \tag{3.2}$$

Предложение 1. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.2)*, допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,1a}$ *при следующих условиях*: *производные* $\Phi_2 = \partial_2 \Phi$ *и* $\Phi_3 = \partial_3 \Phi$ *линейно независимы, функции* Φ_{23}, Φ_{24}, $x^3 \Phi_{22} - x^2 \Phi_{23} - \Phi_3$ *линейно независимы* ($\Phi_{ij} = \partial_i \partial_j \Phi$).

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi = x^2 x^3 x^4$.

3.1.2. Класс $C_{1,1b}$

Алгебре $\mathcal{L}_{1,1b} = L\{e_4\}$ соответствует группа $G_{1,1b}$ трансляций в направлении оси Ox^4. Класс $C_{1,1b}$ пространств Максвелла задаётся тензором F_{ij}, компоненты которого удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} \partial_1 F_{24} - \partial_2 F_{14} = 0, \quad \partial_1 F_{34} - \partial_3 F_{14} = 0, \quad \partial_2 F_{34} - \partial_3 F_{24} = 0, \\ \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \quad (F_{ij} = F_{ij}(x^1, x^2, x^3)). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Такие пространства называются *статическими*. В векторных обозначениях

$$\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3) = (F_{41}, F_{42}, F_{43}), \quad \mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = (F_{32}, F_{13}, F_{21}) \tag{3.4}$$

система (3.3) имеет вид $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. Отсюда, в частности, следует, что класс $C_{1,1b}$ содержит все электростатические и магнитостатические поля.

Класс $P_{1,1b}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{1,1b}$, состоит из полей вида $A_i = A_i(x^1, x^2, x^3)$. Полагая $A_i = (0, 0, 0, \Phi)$, $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3)$, получим общий вид электростатического поля:

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{\alpha 4} = \partial_\alpha \Phi \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{3.5}$$

Предложение 2. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.5), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,1b}$ *при следующих условиях*: *производные* $\Phi_1 = \partial_1\Phi$ *и* $\Phi_2 = \partial_2\Phi$ *линейно независимы, функции* Φ_{12}, Φ_{13}, $x^2\Phi_{11} - x^1\Phi_{12} - \Phi_2$, $x^3\Phi_{11} - x^1\Phi_{13} - \Phi_3$ *и* $x^3\Phi_{12} - x^2\Phi_{13}$ *линейно независимы* ($\Phi_{ij} = \partial_i\partial_j\Phi$).

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi = x^1x^2x^3$.

3.1.3. Класс $C_{1,1c}$

Алгебре $\mathcal{L}_{1,1c} = L\{e_2 + e_4\}$ соответствует группа $G_{1,1c}$ трансляций в направлении изотропного вектора $e_2 + e_4$. Здесь удобно использовать замену координат

$$v^1 = x^1, \quad v^2 = x^2 + x^4, \quad v^3 = x^3, \quad v^4 = x^2 - x^4. \tag{3.6}$$

Класс $C_{1,1c}$ пространств Максвелла задаётся тензором $F_{ij} = F_{ij}(v^1, v^3, v^4)$, компоненты которого удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{23}}{\partial v^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial v^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial v^1} - \frac{\partial F_{12}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{14}}{\partial v^4} = 0, \\ &\frac{\partial F_{34}}{\partial v^1} - \frac{\partial F_{14}}{\partial v^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial v^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{34}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{23}}{\partial v^4} - \frac{\partial F_{24}}{\partial v^3} = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Класс $P_{1,1c}$ потенциалов, инвариантных относительно $G_{1,1c}$, состоит из полей $A_i = A_i(v^1, v^3, v^4)$. Для поля $A_i = (0, 0, 0, \Phi)$, где $\Phi = \Phi(v^1, v^3, v^4) = \Phi(x^1, x^3, x^2 - x^4)$, получим

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = \frac{\partial\Phi}{\partial v^1}, \quad F_{24} = \frac{\partial\Phi}{\partial v^4}, \quad F_{34} = \frac{\partial\Phi}{\partial v^3}. \tag{3.8}$$

Предложение 3. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.8), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,1c}$ *при следующих условиях*: *производные* $\partial\Phi/\partial v^1$ *и* $\partial\Phi/\partial v^4$ *линейно независимы, функции* Φ_{13}, Φ_{14}, $x^2\Phi_{11} - x^1\Phi_{14} - \Phi_4$, $x^3\Phi_{11} - x^1\Phi_{13} - \Phi_3$ *и* $x^3\Phi_{14} - x^2\Phi_{13}$ *линейно независимы* ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial v^i\partial v^j$).

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi = v^1v^3v^4 = x^1x^3(x^2 - x^4)$.

3.2. Эллиптические винты

Алгебре $\mathcal{L}_{1,2} = L\{e_{13} + \lambda e_2 + \mu e_4\}$ $(\lambda\mu(\lambda - \mu) = 0)$ соответствует группа $G_{1,2}$ эллиптических винтов вида

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 &= \ x^1\cos a + x^3\sin a, \quad \hat{x}^2 = \lambda a + x^2, \\ \hat{x}^3 &= -x^1\sin a + x^3\cos a, \quad \hat{x}^4 = \mu a + x^4. \end{aligned} \tag{3.9}$$

При $\lambda = \mu = 0$ это повороты; при $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$ — винты с пространственноподобной осью; при $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$ — винты с времениподобной осью; при $\lambda = \mu \neq 0$ — винты с изотропной осью. Здесь используется система координат $\{\tilde{x}^i\} = \{r, \tilde{x}^2, \varphi, \tilde{x}^4\}$, связанная с $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \mu\varphi + \tilde{x}^4. \tag{3.10}$$

Класс $C_{1,2}$ пространств Максвелла задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi, \quad F_{13} = F_{13}(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \\ F_{14} = c_3 \cos\varphi + c_4 \sin\varphi, \quad F_{23} = c_1 \sin\varphi - c_2 \cos\varphi, \\ F_{24} = F_{24}(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \quad F_{34} = -c_3 \sin\varphi + c_4 \cos\varphi, \end{gathered} \tag{3.11}$$

где $c_i = c_i(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$ — гладкие функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \\ \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\ \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Для получения примеров используем тот факт, что класс $P_{1,2}$ потенциалов A_i, инвариантных относительно $G_{1,2}$, состоит из полей

$$\begin{gathered} A_1 = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi, \quad A_2 = A_2(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \\ A_3 = -C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi, \quad A_4 = A_4(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4), \end{gathered} \tag{3.13}$$

где $C_i = C_i(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$. Для поля $A_i = (0, 0, 0, \Phi)$, где $\Phi = \Phi(u^1, u^2, u^3) = \Phi(r, \tilde{x}^2, \tilde{x}^4)$, получим

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{13} = 0, \quad F_{14} = \Phi_1 \sin\varphi - \frac{\lambda}{r}\Phi_2 \cos\varphi - \frac{\mu}{r}\Phi_3 \cos\varphi, \\ F_{23} = 0, \quad F_{24} = \Phi_2, \quad F_{34} = \Phi_1 \cos\varphi + \frac{\lambda}{r}\Phi_2 \sin\varphi + \frac{\mu}{r}\Phi_3 \sin\varphi, \end{gathered} \tag{3.14}$$

где $\Phi_k = \partial\Phi/\partial u^k$. Рассмотрим следующие четыре геометрически различных случая.

3.2.1. Класс $C_{1,2a}$ ($\mu = 0$, $\lambda \neq 0$)

Алгебре $\mathcal{L}_{1,2a} = L\{e_{13} + \lambda e_2\}$ соответствует группа $G_{1,2a}$ эллиптических винтов с пространственной осью Ox^2. Уравнения (3.12) и тензор (3.14) соответственно принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \\ \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0 \end{gathered} \tag{3.15}$$

и

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{13} = 0, \quad F_{14} = \Phi_1 \sin\varphi - \frac{\lambda}{r}\Phi_2 \cos\varphi, \\ F_{23} = 0, \quad F_{24} = \Phi_2, \quad F_{34} = \Phi_1 \cos\varphi + \frac{\lambda}{r}\Phi_2 \sin\varphi. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Предложение 4. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.16), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2a}$ *при следующих условиях: производные* Φ_{22} *и* Φ_{23} *линейно независимы, а* $\Phi_{21} \neq 0$ ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial u^i \partial u^j$).

3.2.2. Класс $C_{1,2b}$ ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$)

Алгебре $\mathcal{L}_{1,2b} = L\{e_{13} + \mu e_4\}$ соответствует группа $G_{1,2b}$ эллиптических винтов с временнóй осью Ox^4. Уравнения (3.12) и тензор (3.14) соответственно принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \\
\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0
\end{gathered} \tag{3.17}$$

и

$$\begin{gathered}
F_{12} = F_{13} = 0, \quad F_{14} = \Phi_1 \sin\varphi - \frac{\mu}{r}\Phi_3 \cos\varphi, \\
F_{23} = 0, \quad F_{24} = \Phi_2, \quad F_{34} = \Phi_1 \cos\varphi + \frac{\mu}{r}\Phi_3 \sin\varphi.
\end{gathered} \tag{3.18}$$

Предложение 5. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.18), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2b}$ *при следующих условиях: производные* Φ_{22} *и* Φ_{23} *линейно независимы, а* $\Phi_{21} \neq 0$ ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial u^i \partial u^j$).

3.2.3. Класс $C_{1,2c}$ ($\lambda = \mu \neq 0$)

Алгебре $\mathcal{L}_{1,2c} = L\{e_{13} + \lambda(e_2 + e_4)\}$ соответствует группа $G_{1,2c}$ эллиптических винтов с изотропной осью. Уравнения (3.12) и тензор (3.14) соответственно принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4}\right) - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \\
\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4}\right) - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\
\frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4}\right) + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0
\end{gathered} \tag{3.19}$$

и

$$\begin{gathered}
F_{12} = F_{13} = 0, \quad F_{14} = \Phi_1 \sin\varphi - \frac{\lambda}{r}\cos\varphi(\Phi_2 + \Phi_3), \\
F_{23} = 0, \quad F_{24} = \Phi_2, \quad F_{34} = \Phi_1 \cos\varphi + \frac{\lambda}{r}\sin\varphi(\Phi_2 + \Phi_3).
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Предложение 6. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.20), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2c}$ *при следующих условиях на производные:* $\Phi_{21} \neq 0$ *и* $\Phi_{22} + \Phi_{23} \neq 0$ ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial u^i \partial u^j$).

3.2.4. Класс $C_{1,2d}$ ($\lambda = \mu = 0$)

Алгебре $\mathcal{L}_{1,2d} = L\{e_{13}\}$ соответствует группа $G_{1,2d}$ поворотов в плоскости Ox^1x^3. Уравнения (3.12) и тензор (3.14) соответственно принимают вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2} = 0,\\ \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0\end{gathered} \tag{3.21}$$

и

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0, \quad F_{14} = \Phi_1 \sin\varphi, \quad F_{24} = \Phi_2, \quad F_{34} = \Phi_1 \cos\varphi. \tag{3.22}$$

Предложение 7. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.22), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,2d}$ *при следующих условиях на производные*: $\Phi_{21} \neq 0$, $\tilde{x}^2\Phi_{21} - r\Phi_{22} + \Phi_1 \neq 0$, *а* Φ_{22} *и* Φ_{23} *линейно независимы* ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial u^i \partial u^j$).

3.3. Гиперболические винты

Алгебра $\mathcal{L}_{1,3} = L\{e_{24} + \lambda e_1\}$ соответствует группе $G_{1,3}$ гиперболических винтов с осью Ox^1:

$$\hat{x}^1 = x^1 + \lambda a, \quad \hat{x}^2 = x^2 \operatorname{ch} a + x^4 \operatorname{sh} a, \quad \hat{x}^3 = x^3, \quad \hat{x}^4 = x^2 \operatorname{sh} a + x^4 \operatorname{ch} a. \tag{3.23}$$

При $\lambda = 0$ это псевдовращения (преобразования Лоренца). Здесь используется система координат $\{\tilde{x}^i\} = \{\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3, \varphi\}$, связанная с $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = \lambda\varphi + \tilde{x}^1, \quad x^2 = r \operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r \operatorname{sh}\varphi. \tag{3.24}$$

3.3.1.

Класс $C_{1,3}$ ($\lambda \neq 0$) пространств Максвелла задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered}F_{12} = c_1 \operatorname{ch}\varphi + c_2 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{13} = F_{13}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad F_{14} = -c_1 \operatorname{sh}\varphi - c_2 \operatorname{ch}\varphi,\\ F_{23} = c_3 \operatorname{ch}\varphi + c_4 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{24} = F_{24}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad F_{34} = c_3 \operatorname{sh}\varphi + c_4 \operatorname{ch}\varphi,\end{gathered} \tag{3.25}$$

где $c_i = c_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$ ($i = 1, \ldots, 4$) — гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{c_2}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^1} = 0,\\ \frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{c_4}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0.\end{gathered} \tag{3.26}$$

Для получения примеров используем тот факт, что класс $P_{1,3}$ потенциалов A_i, инвариантных относительно $G_{1,3}$, состоит из полей вида

$$\begin{gathered}A_1 = A_1(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad A_2 = C_1 \operatorname{ch}\varphi + C_2 \operatorname{sh}\varphi,\\ A_3 = A_3(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad A_4 = -C_1 \operatorname{sh}\varphi - C_2 \operatorname{ch}\varphi,\end{gathered} \tag{3.27}$$

где $C_i = C_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$. Для поля $A_i = (-\Phi, 0, 0, 0)$, где $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$, получим

$$F_{12} = \frac{\lambda}{r}\Phi_1 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{13} = \Phi_3, \quad F_{14} = -\frac{\lambda}{r}\Phi_1 \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0, \tag{3.28}$$

где $\Phi_i = \partial\Phi/\partial\tilde{x}^i$ $(i = 1, 3)$.

Предложение 8. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.28), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,3}$, *если производные* Φ_{31} *и* Φ_{33} *линейно независимы* ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j$).

3.3.2. Класс $C_{1,3b}$

При $\lambda = 0$ класс пространств Максвелла, соответствующий алгебре[1] $\mathcal{L}_{1,3b} = L\{e_{24}\}$, задаётся тензором (3.25), где функции $c_i = c_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$ удовлетворяют вместо (3.26) уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{c_2}{r} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \\ \frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{c_4}{r} - \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0,\end{gathered} \tag{3.29}$$

а вместо замены (3.24) используется следующая:

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r\operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = \tilde{x}^3, \quad x^4 = r\operatorname{sh}\varphi. \tag{3.30}$$

Для поля $A_i = (\Phi, 0, 0, 0)$, где $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$, получим

$$F_{12} = \Phi_r \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{13} = \Phi_3, \quad F_{14} = -\Phi_r \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0 \tag{3.31}$$

($\Phi_r = \partial\Phi/\partial r$).

Предложение 9. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (3.31), *допускает одномерную группу* $G_S = G_{1,3}$, *если производные* Φ_{31}, Φ_{3r} *и* Φ_{33} *линейно независимы* ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j$).

3.4. Параболические винты

Здесь мы опишем класс $C_{1,4}$ пространств Максвелла, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{1,4} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3\}$ ($\lambda, \mu = \mathrm{const}$, $\lambda\mu = 0$). Он задаётся системой уравнений (2.1) и (2.2) для вектора $\xi = e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3$. Последнее из них представляет собой систему

$$\begin{gathered}XF_{12} + F_{24} = 0, \quad XF_{13} + F_{23} + F_{34} = 0, \quad XF_{14} + F_{24} = 0, \\ XF_{23} - F_{13} = 0, \quad XF_{24} + F_{12} - F_{14} = 0, \quad XF_{34} + F_{13} = 0,\end{gathered} \tag{3.32}$$

где

$$X = -(x^2 + x^4)\partial_1 + (x^1 + \lambda)\partial_2 + \mu\partial_3 - x^1\partial_4. \tag{3.33}$$

Рассмотрим три случая: а) $\lambda = \mu = 0$; б) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$; в) $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$.

[1]Класс $C_{1,3a}$, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{1,3a} = L\{e_{24} + \lambda e_3\}$, здесь не приводится, так как группы $G_{1,3a}$ и $G_{1,3}$ являются сопряжёнными; в [4, 14, 23] он используется для описания других классов.

3.4.1. Класс $C_{1,4a}$

Группа $G_{1,4a}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{1,4a} = L\{e_{12} - e_{14}\}$, состоит из параболических вращений вида

$$\hat{x}^1 = x^1 - a(x^2 + x^4), \quad \hat{x}^2 = x^2 + ax^1 - \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4),$$
$$\hat{x}^3 = x^3, \quad \hat{x}^4 = x^4 - ax^1 + \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4).$$

Пусть $\{\tilde{x}^i\}$ — система координат, связанная с $\{x^i\}$ формулами

$$\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^3 = x^3, \quad \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4). \tag{3.34}$$

Тогда оператор (3.33) заменяется на дифференцирование по $\tilde{x}^2$, а решение системы уравнений, полученной из (3.32), задаётся формулами

$$\begin{gathered} F_{13} = C_1\tilde{x}^2 + C_2, \quad F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_6, \\ F_{23} = \frac{C_1}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 + C_2\tilde{x}^2 + C_3, \quad F_{12} = -\frac{C_5}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_7, \\ F_{34} = -\frac{C_1}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_2\tilde{x}^2 + C_4, \quad F_{14} = -\frac{C_5}{2}\left(\tilde{x}^2\right)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_8, \end{gathered} \tag{3.35}$$

где $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ — гладкие функции, причём

$$C_1 + C_3 + C_4 = 0, \quad C_5 + C_7 - C_8 = 0. \tag{3.36}$$

Подставляя (3.35) в уравнения Максвелла (2.1), учитывая, что функции C_k не зависят от $\tilde{x}^2$, группируя в уравнениях слагаемые с одинаковыми степенями $\tilde{x}^2$ и пользуясь линейной независимостью 1, $\tilde{x}^2$, $(\tilde{x}^2)^2$, $(\tilde{x}^2)^3$ и $(\tilde{x}^2)^4$, получим, что функции C_k удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.37a}$$

$$\tilde{x}^1\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.37b}$$

$$-\frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.37c}$$

$$-\frac{C_5}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{3.37d}$$

$$-\tilde{x}^1\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{3.37e}$$

$$\frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.37f}$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \tag{3.37g}$$

Итак, пространство Максвелла класса $C_{1,4a}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{1,4a}$, задаётся тензором F_{ij} вида (3.35) при выполнении условий (3.36) и (3.37).

Предложение 10. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = x^1\Phi_3,$$
$$F_{23} = \Phi_1 + (2x^2 + x^4)\Phi_3, \quad F_{34} = -\Phi_1 - x^2\Phi_3,$$

где

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4) = \Phi\left(x^2 + x^4, x^3, \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4)\right),$$

$\Phi_1 = \partial\Phi/\partial t_1$, $\Phi_3 = \partial\Phi/\partial t_3$, *допускает одномерную группу $G_S = G_{1,4a}$ при условии, что производные второго порядка $\partial^2\Phi/\partial t_3\partial t_1$, $\partial^2\Phi/\partial t_3\partial t_2$ и $\partial^2\Phi/\partial t_3^2$ линейно независимы.*

Это условие выполнено, например, для функции $\Phi(t_1, t_2, t_3) = (t_1 + t_2^2 + t_3^2)t_3$.

3.4.2. Класс $C_{1,4b}$

Группа $G_{1,4b}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{1,4b} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3\}$, состоит из параболических винтов вида

$$\hat{x}^1 = x^1 - a(x^2 + x^4), \quad \hat{x}^2 = x^2 + ax^1 - \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4),$$
$$\hat{x}^3 = x^3 + \mu a, \quad \hat{x}^4 = x^4 - ax^1 + \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4),$$

переходящих в параболические вращения при $\mu = 0$. В этом случае преобразование координат $\{x^i\} \to \{\tilde{x}^i\}$,

$$\begin{gathered}\tilde{x}^1 = x^2 + x^4, \quad \tilde{x}^2 = -\frac{x^1}{x^2 + x^4}, \\ \tilde{x}^3 = x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2 + x^4}, \quad \tilde{x}^4 = \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4),\end{gathered} \tag{3.38}$$

совпадающее при $\mu = 0$ с (3.34), приводит к замене оператора (3.33) ($\lambda = 0$) на дифференцирование по $\tilde{x}^2$. Выполняя те же действия, что и в случае класса $C_{1,4a}$, получим, что пространство Максвелла класса $C_{1,4b}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где вместо замены (3.34) используется (3.38), а функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (3.36), (3.37b), (3.37e), (3.37g) и

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + \tilde{x}^1\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.39a}$$

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.39b}$$

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_5}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{(\tilde{x}^1)^2 + \tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{3.39c}$$

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_4}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\tilde{x}^4}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial C_8}{\partial \tilde{x}^3} = 0. \tag{3.39d}$$

Отметим, что последние четыре уравнения при $\mu = 0$ совпадают с (3.37a), (3.37c), (3.37d) и (3.37f) соответственно.

Предложение 11. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{\mu}{x^2 + x^4}\Phi_2 + x^1\Phi_3,$$

$$F_{23} = \Phi_1 - \frac{\mu x^1}{(x^2 + x^4)^2}\Phi_2 + (2x^2 + x^4)\Phi_3, \quad F_{34} = -\Phi_1 + \frac{\mu x^1}{(x^2 + x^4)^2}\Phi_2 - x^2\Phi_3,$$

где

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = \Phi\left(x^2 + x^4, x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2 + x^4}\Phi_2, \frac{1}{2}(x^1)^2 + x^2(x^2 + x^4)\right),$$

$\Phi_i = \partial\Phi/\partial t_i$, допускает одномерную группу $G_S = G_{1,4b}$ при условии, что производные второго порядка $\partial^2\Phi/\partial t_3\partial t_1$, $\partial^2\Phi/\partial t_3\partial t_2$ и $\partial^2\Phi/\partial t_3^2$ линейно независимы.

Например, это выполнено для функции $\Phi(t_1, t_2, t_3) = (t_1 + t_2^2 + t_3^2)t_3$.

3.4.3. Класс $C_{1,4c}$

Группа $G_{1,4c}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{1,4c} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2\}$, состоит из параболических винтов вида

$$\hat{x}^1 = x^1 - a(x^2 + x^4) - \lambda\frac{a^2}{2},$$
$$\hat{x}^2 = x^2 + a(x^1 + \lambda) - \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4) - \lambda\frac{a^3}{6},$$
$$\hat{x}^3 = x^3, \quad \hat{x}^4 = x^4 - ax^1 + \frac{a^2}{2}(x^2 + x^4) + \lambda\frac{a^3}{6},$$

переходящих в параболические вращения при $\lambda = 0$. Совершая преобразование координат $\{x^i\} \to \{\tilde{x}^i\}$ вида

$$\begin{gathered}\tilde{x}^1 = 2\lambda x^1 + (x^2 + x^4)^2, \quad \tilde{x}^2 = \frac{x^2 + x^4}{\lambda}, \\ \tilde{x}^3 = x^3, \quad \tilde{x}^4 = \lambda x^4 + x^1(x^2 + x^4) + \frac{1}{3\lambda}(x^2 + x^4)^3,\end{gathered} \tag{3.40}$$

переводящее оператор (3.33) ($\mu = 0$) в дифференцирование по $\tilde{x}^2$, а также действия, как и в случае класса $C_{1,4a}$, получим, что пространство Максвелла класса $C_{1,4c}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где вместо замены (3.34) используется (3.40), а функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют (3.36) и следующим уравнениям:

$$\frac{C_1}{\lambda} + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - 2\lambda\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.41a}$$

$$\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} - \lambda\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.41b}$$

$$2\lambda\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} - \lambda\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{3.41c}$$

$$\frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} - 2\lambda\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} - \lambda\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0. \tag{3.41d}$$

Предложение 12. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = 2(x^2+x^4)\Phi_1 + \left(x^1 + \frac{(x^2+x^4)^2}{\lambda}\right)\Phi_3,$$

$$F_{13} = 2\lambda\Phi_1 + (x^2+x^4)\Phi_3, \quad F_{34} = -2(x^2+x^4)\Phi_1 - \left(\lambda + x^1 + \frac{(x^2+x^4)^2}{\lambda}\right)\Phi_3,$$

где

$$\Phi(t_1,t_2,t_3) = \Phi\left(2\lambda x^1 + (x^2+x^4)^2, x^3, \lambda x^4 + x^1(x^2+x^4) + \frac{1}{3\lambda}(x^2+x^4)^3\right),$$

допускает одномерную группу $G_S = G_{1,4c}$ при условии, что производные $\Phi_i = \partial\Phi/\partial t_i$ и Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{13} линейно независимы ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial t_i \partial t_j$).

Например, это выполнено для функции $\Phi(t_1,t_2,t_3) = t_1(t_1^2+t_2^2+t_3^2)$.

3.5. Пропорциональные бивращения

Алгебра $\mathcal{L}_{1,5} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}\}$ ($\lambda \neq 0$) соответствует группе $G_{1,5}$ пропорциональных бивращений следующего вида:

$$\hat{x}^1 = x^3 \sin a + x^1 \cos a, \quad \hat{x}^2 = x^2 \operatorname{ch}\lambda a + x^4 \operatorname{sh}\lambda a,$$
$$\hat{x}^3 = x^3 \cos a - x^1 \sin a, \quad \hat{x}^4 = x^2 \operatorname{sh}\lambda a + x^4 \operatorname{ch}\lambda a.$$

В системе координат $\{r,\rho,\theta,\varphi\}$, связанной с галилеевой системой $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = r\cos(\theta-\varphi), \quad x^2 = \rho\operatorname{ch}(\lambda\varphi), \quad x^3 = r\sin(\theta-\varphi), \quad x^4 = \rho\operatorname{sh}(\lambda\varphi), \tag{3.42}$$

тензор F_{ij}, задающий пространство Максвелла класса $C_{1,5}$, определяется формулами

$$\begin{aligned}
F_{12} &= (-c_1\operatorname{ch}\lambda\varphi - c_2\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi + (c_3\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi,\\
F_{14} &= (c_2\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi - (c_4\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi,\\
F_{23} &= (c_1\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_2\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_3\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_4\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi,\\
F_{34} &= (c_2\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_1\operatorname{sh}\lambda\varphi)\cos\varphi + (c_4\operatorname{ch}\lambda\varphi + c_3\operatorname{sh}\lambda\varphi)\sin\varphi,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$F_{13} = F_{13}(\rho,r,\theta), \quad F_{24} = F_{24}(\rho,r,\theta), \tag{3.44}$$

где функции $c_i = c_i(\rho, r, \theta)$, $F_{13}(\rho, r, \theta)$ и $F_{24}(\rho, r, \theta)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta} - \cos\theta\frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{c_1}{\lambda\rho} - \frac{c_4}{\rho} - \frac{\partial c_4}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} = 0,\\
&\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial F_{24}}{\partial r} - \frac{c_3}{\lambda\rho} - \frac{c_2}{\rho} - \frac{\partial c_2}{\partial\rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} = 0,\\
&\cos\theta\frac{\partial c_1}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial c_3}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_1}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_3}{\partial\theta} - \frac{\partial F_{13}}{\partial\rho} = 0,\\
&\cos\theta\frac{\partial c_2}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial c_4}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial c_2}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial c_4}{\partial\theta} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{13}}{\partial\theta} = 0.
\end{aligned}\tag{3.45}$$

Часть класса $P_{1,5}$ можно задать формулой

$$A_i = (0, \Phi\,\mathrm{ch}(\lambda\varphi), 0, -\Phi\,\mathrm{sh}(\lambda\varphi)),$$

где $\Phi = \Phi(r, \rho, \theta)$ — произвольная функция. Этому потенциалу соответствует следующий тензор F_{ij}:

$$\begin{aligned}
F_{12} &= \left(\Phi'_r\cos(\theta-\varphi) - \frac{1}{r}\Phi'_\theta\sin(\theta-\varphi)\right)\mathrm{ch}\,\lambda\varphi, \quad F_{13} = 0,\\
F_{14} &= \left(-\Phi'_r\cos(\theta-\varphi) + \frac{1}{r}\Phi'_\theta\sin(\theta-\varphi)\right)\mathrm{sh}\,\lambda\varphi,\\
F_{23} &= \left(-\Phi'_r\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{r}\Phi'_\theta\cos(\theta-\varphi)\right)\mathrm{ch}\,\lambda\varphi, \quad F_{24} = \frac{1}{\lambda\rho}\Phi'_\theta,\\
F_{34} &= \left(-\Phi'_r\sin(\theta-\varphi) - \frac{1}{r}\Phi'_\theta\cos(\theta-\varphi)\right)\mathrm{sh}\,\lambda\varphi.
\end{aligned}\tag{3.46}$$

Предложение 13. *Если функции Φ'_r, Φ''_{rr}, $\Phi''_{r\rho}$ и $\Phi''_{\theta\theta}$ линейно независимы, то тензор* (3.46) *задаёт пространство Максвелла с группой симметрий $G_S = G_{1,5}$.*

4. Пространства Максвелла, допускающие группы трансляций

Здесь опишем классы пространств Максвелла, инвариантных относительно групп трансляций размерностей от 2 до 4.

4.1. Двумерные подгруппы

4.1.1. Класс $C_{2,1a}$

Алгебра $\mathcal{L}_{2,1a} = L\{e_1, e_2\}$ соответствует группе $G_{2,1a}$ трансляций в направлениях векторов евклидовой плоскости Ox^1x^2. Так как $\mathcal{L}_{1,1a} \subset \mathcal{L}_{2,1a}$, то класс $C_{2,1a}$ является подклассом класса $C_{1,1a}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,1a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = \mathrm{const}, \quad F_{13} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^3}, \quad F_{14} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^4}, \\ F_{23} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^3}, \quad F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^4}, \quad F_{34} = \Theta, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $\Phi = \Phi(x^3, x^4)$, $\Psi = \Psi(x^3, x^4)$, $\Theta = \Theta(x^3, x^4)$ — произвольные гладкие функции.

Предложение 14. *Пространство Максвелла, задаваемое тензором* (4.1), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,1a}$ *при выполнении следующих условий: производные* $\partial_3\Phi$, $\partial_4\Phi$, $\partial_3\Psi$ *и* $\partial_4\Psi$ *линейно независимы, функции* $\partial_3\Theta$, $\partial_4\Theta$ *и* $x^3\partial_4\Theta + x^4\partial_3\Theta$ *линейно независимы.*

4.1.2. Класс $C_{2,1b}$

Алгебра $\mathcal{L}_{2,1b} = L\{e_2, e_4\}$ соответствует группе $G_{2,1b}$ трансляций в направлениях векторов псевдоевклидовой плоскости Ox^2x^4. Так как $\mathcal{L}_{1,1b} \subset \mathcal{L}_{2,1b}$, то класс $C_{2,1b}$ является подклассом класса $C_{1,1b}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,1b}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^1}, \quad F_{13} = \Theta, \quad F_{14} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^1}, \\ F_{23} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^3}, \quad F_{24} = \mathrm{const}, \quad F_{34} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^3}, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $\Phi = \Phi(x^1, x^3)$, $\Psi = \Psi(x^1, x^3)$, $\Theta = \Theta(x^1, x^3)$ — произвольные гладкие функции.

Предложение 15. *Пространство Максвелла, задаваемое тензором* (4.2), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,1b}$ *при выполнении следующих условий: производные* $\partial_1\Phi$, $\partial_3\Phi$, $\partial_1\Psi$ *и* $\partial_3\Psi$ *линейно независимы, функции* $\partial_1\Theta$, $\partial_3\Theta$ *и* $x^3\partial_1\Theta - x^1\partial_3\Theta$ *линейно независимы.*

4.1.3. Класс $C_{2,1c}$

Алгебра $\mathcal{L}_{2,1c} = L\{e_1, e_2 + e_4\}$ соответствует группе $G_{2,1c}$ трансляций в направлениях векторов изотропной плоскости. Так как $\mathcal{L}_{1,1c} \subset \mathcal{L}_{2,1c}$, то класс $C_{2,1c}$ является подклассом класса $C_{1,1c}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,1c}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = C - \frac{\partial \Phi}{\partial v^4}, \quad F_{13} = -\frac{\partial \Phi}{\partial v^3}, \quad F_{14} = \frac{\partial \Phi}{\partial v^4}, \\ F_{23} = \Theta, \ F_{24} = \frac{\partial \Psi}{\partial v^4}, \quad F_{34} = \Theta + \frac{\partial \Psi}{\partial v^3}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где $C = \text{const}$, а $\Phi = \Phi(v^3, v^4)$, $\Psi = \Psi(v^3, v^4)$, $\Theta = \Theta(v^3, v^4)$ — произвольные гладкие функции ($v^3 = x^3$, $v^4 = x^2 - x^4$).

Положим в (4.3) $C = 0$ и $\Theta = 0$:

$$\begin{gathered} F_{12} = -\frac{\partial\Phi}{\partial v^4}, \quad F_{13} = -\frac{\partial\Phi}{\partial v^3}, \quad F_{14} = \frac{\partial\Phi}{\partial v^4}, \\ F_{23} = 0, \; F_{24} = \frac{\partial\Psi}{\partial v^4}, \quad F_{34} = \frac{\partial\Psi}{\partial v^3}. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Предложение 16. *Пространство Максвелла, задаваемое тензором* (4.4), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,1c}$ при выполнении следующих условий: производные $\partial\Phi/\partial v^3$, $\partial\Phi/\partial v^4$, $\partial\Psi/\partial v^3$ и $\partial\Psi/\partial v^4$ линейно независимы, функции $\Phi_{34} = \partial^2\Phi/\partial v^3\partial v^4$, $\Phi_{44} = \partial^2\Phi/\partial v^4\partial v^4$ и $x^3\Phi_{44} - x^2\Phi_{34}$ линейно независимы.*

4.2. Трёхмерные подгруппы

4.2.1. Класс $C_{3,1a}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,1a} = L\{e_1, e_2, e_3\}$ соответствует группе $G_{3,1a}$ трансляций в направлениях векторов трёхмерного евклидова пространства $Ox^1x^2x^3$. Класс $C_{3,1a}$ является подклассом класса $C_{2,1a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,1a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = C_3, \quad F_{23} = C_2, \quad F_{13} = C_1, \quad F_{14} = \varphi'(x^4), \\ F_{24} = \psi'(x^4), \quad F_{34} = \chi(x^4), \end{gathered} \tag{4.5}$$

где $C_k = \text{const}$, а $\varphi(x^4)$, $\psi(x^4)$, $\chi(x^4)$ — произвольные гладкие функции. (Штрих означает дифференцирование.) В частности, пространствам Максвелла класса $C_{3,1a}$ соответствуют однородные магнитные поля, скрещённые с электрическими полями, зависящими только от времени.

Предложение 17. *Пространство Максвелла, задаваемое тензором* (4.5), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,1a}$, если функции $\varphi(x^4)$, $\varphi'(x^4)$ и $\psi(x^4)$ линейно независимы, а $\chi(x^4) \neq 0$.*

4.2.2. Класс $C_{3,1b}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,1b} = L\{e_1, e_2, e_4\}$ соответствует группе $G_{3,1b}$ трансляций трёхмерного псевдоевклидова пространства $Ox^1x^2x^4$. Класс $C_{3,1b}$ является подклассом класса $C_{2,1b}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,1b}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = C_1, \quad F_{13} = \varphi(x^3), \quad F_{14} = C_2, \\ F_{23} = \psi(x^3), \quad F_{24} = C_3, \quad F_{34} = \chi(x^3), \end{gathered} \tag{4.6}$$

где $C_k = \text{const}$ и $\varphi(x^3)$, $\psi(x^3)$, $\chi(x^3)$ — произвольные гладкие функции.

Предложение 18. *Если функции $\varphi(x^3)$, $\varphi'(x^3)$, $\psi(x^3)$ и $\chi(x^3)$ линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (4.6), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,1b}$.*

Например, эти условия выполнены для функций $\varphi = x^3$, $\psi = \sin x^3$, $\chi = \cos x^3$.

4.2.3. Класс $C_{3,1c}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,1c} = L\{e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует группе $G_{3,1c}$ трансляций в направлениях векторов трёхмерного изотропного пространства. Класс $C_{3,1c}$ является подклассом класса $C_{2,1c}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,1c}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{ij} = F_{ij}(v^4) \quad (ij = 12, 23, 24), \\ F_{13} = C_1, \quad F_{14} = C_2 - F_{12}, \quad F_{34} = C_3 + F_{23}, \end{gathered} \tag{4.7}$$

где $C_k = \mathrm{const}$, а $F_{ij} = F_{ij}(v^4) = F_{ij}(x^2 - x^4)$ — гладкие функции.

Предложение 19. *Если функции $F_{ij} = F_{ij}(v^4)$ $(ij = 12, 23, 24)$ линейно независимы и $F_{24} \neq \mathrm{const}$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (4.7), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,1c}$.*

4.3. Четырёхмерная подгруппа

Алгебра $\mathcal{L}_{4,1} = L\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ соответствует группе $G_{4,1}$ трансляций пространства Минковского $\mathbb{R}^4_1$. Пространство Максвелла класса $C_{4,1}$ задаётся постоянным тензором F_{ij}. Таким образом, $C_{4,1}$ — класс *однородных пространств Максвелла.*

Замечание. Можно показать, что в действительности группа G_S для каждого однородного пространства Максвелла шестимерна [22]. Таким образом, пространств Максвелла с группой симметрий $G_S = G_{4,1}$ не существует.

5. Классы статических пространств Максвелла

В этом разделе описаны классы статических пространств Максвелла, не вошедшие в разделы 3 и 4. Подробности см. в [14].

5.1. Двумерная подгруппа

Алгебре $\mathcal{L}_{2,3} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_4\}$ соответствует группа $G_{2,3}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций вдоль времениподобной прямой. Пространство Максвелла класса $C_{2,3}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi, \quad F_{13} = F_{13}(r, \tilde{x}^2), \\ F_{14} = c_3 \cos\varphi + c_4 \sin\varphi, \quad F_{23} = c_1 \sin\varphi - c_2 \cos\varphi, \\ F_{24} = F_{24}(r, \tilde{x}^2), \quad F_{34} = -c_3 \sin\varphi + c_4 \cos\varphi, \end{gathered} \tag{5.1}$$

где функции $F_{13}(r,\tilde{x}^2)$, $F_{24}(r,\tilde{x}^2)$ и $c_i = c_i(r,\tilde{x}^2)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial c_1}{\partial r}+\frac{c_1}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^2}-\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^2}=0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r}-\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2}=0,\\ \frac{\partial c_3}{\partial r}+\frac{c_3}{r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^2}=0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^2}+\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^2}=0,\end{gathered} \tag{5.2}$$

а связь координат $\{x^i\}$ и $\{r,\tilde{x}^2,\varphi,\tilde{x}^4\}$ задаётся соотношениями (3.10) при $\mu=0$:

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2=\lambda\varphi+\tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4=\tilde{x}^4. \tag{5.3}$$

Класс $P_{2,3}$ потенциалов, инвариантных относительно группы $G_{2,3}$, состоит из полей вида

$$\begin{gathered}A_1 = b_1\cos\varphi + b_2\sin\varphi, \quad A_2 = A_2(r,\tilde{x}^2),\\ A_3 = -b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi, \quad A_4 = A_4(r,\tilde{x}^2),\end{gathered} \tag{5.4}$$

где $b_k = b_k(r,\tilde{x}^2)$, $A_2(r,\tilde{x}^2)$ и $A_4(r,\tilde{x}^2)$ — произвольные гладкие функции. Полагая $A_1=A_2=A_3=0$, $A_4=\Phi(r,\tilde{x}^2)\equiv\Phi(t_1,t_2)$, получим следующее множество электростатических полей:

$$\begin{gathered}F_{12}=F_{13}=F_{23}=0, \quad F_{14}=\Phi_1\sin\varphi-\frac{\lambda\Phi_2}{r}\cos\varphi,\\ F_{24}=\Phi_2, \quad F_{34}=\Phi_1\cos\varphi+\frac{\lambda\Phi_2}{r}\sin\varphi,\end{gathered} \tag{5.5}$$

где $\Phi_\alpha = \partial\Phi/\partial t_\alpha$. Положим $\Phi_{\alpha\beta}=\partial^2\Phi/\partial t_\alpha\partial t_\beta$.

Предложение 20. *Если частные производные* Φ_1, Φ_2, Φ_{11}, Φ_{12} *и* Φ_{22} *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.5), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,3}$.

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi(t_1,t_2) = t_1^3+t_2^3+t_1^2+t_1t_2+t_2^2$.

5.2. Трёхмерная подгруппа

Алгебре $\mathcal{L}_{3,6} = L\{e_{24}+\lambda e_3, e_2, e_4\}$ соответствует группа $G_{3,6}$, состоящая из композиций гиперболических винтов и трансляций в направлениях векторов двумерной псевдоевклидовой плоскости. Пространство Максвелла класса $C_{3,6}$ задаётся тензором F_{ij} следующего вида:

а) при $\lambda\neq 0$ (класс $C_{3,6a}$)

$$\begin{gathered}F_{12}=-\lambda c_1'(x^1)\,\mathrm{ch}\,\frac{x^3}{\lambda}-\lambda c_2'(x^1)\,\mathrm{sh}\,\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{13}=F_{13}(x^1),\\ F_{14}=\lambda c_1'(x^1)\,\mathrm{sh}\,\frac{x^3}{\lambda}+\lambda c_2'(x^1)\,\mathrm{ch}\,\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{24}=\mathrm{const},\\ F_{23}=c_1(x^1)\,\mathrm{sh}\,\frac{x^3}{\lambda}+c_2(x^1)\,\mathrm{ch}\,\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{34}=c_1(x^1)\,\mathrm{ch}\,\frac{x^3}{\lambda}+c_2(x^1)\,\mathrm{sh}\,\frac{x^3}{\lambda},\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $c_1(x^1)$ и $c_2(x^1)$ — произвольные функции (штрих означает дифференцирование);

б) при $\lambda = 0$ (класс $C_{3,6b}$)

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = F_{13}(x^1, x^3), \quad F_{24} = \mathrm{const}. \tag{5.7}$$

Положим в (5.6) $c_2 = F_{13} = F_{24} = 0$:

$$\begin{gathered} F_{12} = -\lambda c_1'(x^1)\,\mathrm{ch}\,\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{14} = \lambda c_1'(x^1)\,\mathrm{sh}\,\frac{x^3}{\lambda}, \\ F_{23} = c_1(x^1)\,\mathrm{sh}\,\frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{24} = 0, \quad F_{34} = c_1(x^1)\,\mathrm{ch}\,\frac{x^3}{\lambda}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Предложение 21. *Если функции $c_1(x^1)$ и $c_1'(x^1)$ линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.8), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,6a}$.*

Предложение 22. *Если функции $\partial_1 F_{13}$, $\partial_3 F_{13}$ и $x^3\partial_1 F_{13} - x^1\partial_3 F_{13}$ линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.7), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,6b}$.*

5.3. Четырёхмерные подгруппы

5.3.1. Класс $C_{4,3}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,3} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_4\}$ соответствует группа $G_{4,3}$, состоящая из композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций в направлениях векторов псевдоевклидовой гиперплоскости. Пространство Максвелла класса $C_{4,3}$ задаётся тензором F_{ij} следующего вида:

а) при $\lambda \neq 0$ (класс $C_{4,3a}$)

$$\begin{gathered} F_{12} = a_1 \sin\frac{x^2}{\lambda} - a_2 \cos\frac{x^2}{\lambda}, \quad F_{32} = a_1 \cos\frac{x^2}{\lambda} + a_2 \sin\frac{x^2}{\lambda}, \\ F_{14} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = a_3, \quad F_{24} = a_4 \qquad (a_i = \mathrm{const}); \end{gathered} \tag{5.9}$$

б) при $\lambda = 0$ (класс $C_{4,3b}$)

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi(x^2), \quad F_{24} = \Psi(x^2), \tag{5.10}$$

где $\Phi(x^2)$ и $\Psi(x^2)$ — произвольные гладкие функции.

Предложение 23. *Если $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.9), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,3a}$.*

Предложение 24. *Если функции $\Phi(x^2)$ и $\Psi(x^2)$ линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.10), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,3b}$.*

5.3.2. Класс $C_{4,6}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$ соответствует группа $G_{4,6}$, состоящая из композиций гиперболических винтов и трансляций в направлениях векторов псевдоевклидовой гиперплоскости. Пространство Максвелла класса $C_{4,6}$ задаётся тензором F_{ij} следующего вида:

а) при $\lambda \neq 0$ (класс $C_{4,6a}$)

$$\begin{gathered} F_{23} = a_1 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda} + a_2 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda}, \quad F_{34} = a_1 \operatorname{sh} \frac{x^3}{\lambda} + a_2 \operatorname{ch} \frac{x^3}{\lambda}, \\ F_{12} = F_{14} = 0, \quad F_{24} = a_3, \quad F_{13} = a_4 \qquad (a_i = \mathrm{const}); \end{gathered} \tag{5.11}$$

б) при $\lambda = 0$ (класс $C_{4,6b}$)

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = F_{13}(x^3), \quad F_{24} = \mathrm{const}. \tag{5.12}$$

Предложение 25. *Если $a_1 \neq 0$ или $a_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.11), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,6a}$.*

Предложение 26. *Если $F_{13}(x^3) \neq \mathrm{const}$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.12), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,6b}$.*

5.3.3. Класс $C_{4,8}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3,\ e_1,\ e_2,\ e_4\}$ соответствует группа $G_{4,8}$, состоящая из композиций параболических винтов и трансляций в направлениях векторов псевдоевклидовой гиперплоскости. Пространство Максвелла класса $C_{4,8}$ задаётся тензором F_{ij} следующего вида:

а) при $\lambda = 0$ (класс $C_{4,8a}$)

$$F_{12} = F_{14} = \mathrm{const}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34}(x^3); \tag{5.13}$$

б) при $\lambda \neq 0$ (класс $C_{4,8b}$)

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = C_1, \quad F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{C_2}{\lambda} x^3 + C_3, \\ F_{23} = \frac{C_2}{2\lambda^2}(x^3)^2 + \frac{C_3}{\lambda} x^3 + C_4, \quad F_{34} = -F_{23} - C_2, \end{gathered} \tag{5.14}$$

где $C_1, \ldots, C_4$ — произвольные постоянные.

Предложение 27. *Если $F_{23} \neq \mathrm{const}$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.13), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,8a}$.*

Предложение 28. *Если $C_1 \neq 0$ и $C_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.14), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,8b}$.*

5.3.4. Класс $C_{4,18}$

Группа $G_{4,18}$, соответствующая алгебре $\mathcal{L}_{4,18} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_4\}$, состоит из композиций всех поворотов относительно точки O в евклидовом пространстве

$Ox^1x^2x^3$ и трансляций относительно оси времени Ox^4. Пространство Максвелла класса $C_{4,18}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = -A\frac{x^3}{r^3}, \quad F_{13} = A\frac{x^2}{r^3}, \quad F_{23} = -A\frac{x^1}{r^3}, \\ F_{14} = x^1 C(r), \quad F_{24} = x^2 C(r), \quad F_{34} = x^3 C(r), \end{gathered} \tag{5.15}$$

где $A = \mathrm{const}$, $C(r)$ — произвольная функция, а $\{r, \varphi, \theta, x^4\}$ — «сферические» координаты, связанные с координатами $\{x^i\}$ формулами

$$x^1 = r\cos\varphi\cos\theta, \quad x^2 = r\sin\varphi\cos\theta, \quad x^3 = r\sin\theta. \tag{5.16}$$

Пример. Поле (5.15) будет кулоновским при $A = 0$ и $C(r) = K/r^3$ ($K = \mathrm{const}$). Оно допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,18}$.

5.4. Пяти- и шестимерные подгруппы

5.4.1.

Алгебрам $\mathcal{L}_{5,1} = L\{e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\mathcal{L}_{5,2} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $\mathcal{L}_{6,2} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ соответствует один и тот же класс $C_{6,2}$ однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = C_1, \quad F_{24} = C_2, \tag{5.17}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Предложение 29. *Если $C_1 \neq 0$ или $C_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.17), *допускает шестимерную группу $G_S = G_{6,2}$, соответствующую алгебре $\mathcal{L}_{6,2}$. Пространств Максвелла с группами симметрий $G_S = G_{5,1}$ и $G_S = G_{5,2}$ не существует.*

5.4.2.

Алгебрам $\mathcal{L}_{5,3} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $\mathcal{L}_{6,3} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ соответствует один и тот же класс $C_{6,3}$ однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами

$$F_{12} = F_{14} = C_1, \quad F_{23} = -F_{34} = C_2, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \tag{5.18}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

Предложение 30. *Если $C_1 \neq 0$ или $C_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.18), *допускает шестимерную группу $G_S = G_{6,3}$, соответствующую алгебре $\mathcal{L}_{6,3}$. Пространств Максвелла с группой симметрий $G_S = G_{5,3}$ не существует.*

5.4.3.

Алгебре $\mathcal{L}_{5,6} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2, e_4\}$ соответствует группа $G_{5,6}$, порождаемая гиперболическими винтами, параболическими вращениями и трансляциями в направлениях векторов псевдоевклидовой гиперплоскости. Так как $\mathcal{L}_{4,6} \subset \mathcal{L}_{5,6}$, то $C_{5,6} \subset C_{4,6}$. Пространство Максвелла класса $C_{5,6}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{13} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = Ke^{-x^3/\lambda} \qquad (K = \mathrm{const}). \tag{5.19}$$

При $\lambda = 0$ этот класс пуст.

Предложение 31. *При $K \neq 0$ пространство Максвелла, определяемое тензором* (5.19), *допускает пятимерную группу $G_S = G_{5,6}$.*

5.4.4.

Для алгебр $\mathcal{L}_{6,4} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и $\mathcal{L}_{6,9} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_4\}$ соответствующие классы пространств Максвелла пусты.

6. Пространства Максвелла, допускающие эллиптические винты

В этом разделе описаны классы пространств Максвелла, допускающих эллиптические винты, не вошедшие в предыдущие разделы. Подробности см. в [14].

6.1. Двумерные подгруппы

6.1.1. Класс $C_{2,2}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,2} = L\{e_{13} + \mu e_4,\ e_2\}$ соответствует группа $G_{2,2}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с времениподобной осью и трансляций вдоль пространственноподобной прямой. Так как $\mathcal{L}_{1,2b} \subset \mathcal{L}_{2,2}$, то $C_{2,2} \subset C_{1,2b}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,2}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi, \quad F_{13} = F_{13}(r, \tilde{x}^4), \quad F_{14} = c_3 \cos\varphi + c_4 \sin\varphi, \\ F_{23} = c_1 \sin\varphi - c_2 \cos\varphi, \quad F_{24} = F_{24}(r, \tilde{x}^4), \quad F_{34} = -c_3 \sin\varphi + c_4 \cos\varphi, \end{gathered} \tag{6.1}$$

где $c_i = c_i(r, \tilde{x}^4)$ — гладкие функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{c_1}{r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\ \frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{c_3}{r} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\mu}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^4} - \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \end{gathered} \tag{6.2}$$

а связь между координатами $\{x^i\}$ и $\{\tilde{x}^i\} = \{r, \tilde{x}^2, \varphi, \tilde{x}^4\}$ задаётся соотношениями (3.10) при $\lambda = 0$:

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \mu\varphi + \tilde{x}^4. \tag{6.3}$$

Для потенциала $A_i = (0,0,0,\Phi)$, где $\Phi = \Phi(r, \tilde{x}^4)$, получим вместо (3.18)

$$\begin{aligned} &F_{14} = \Phi_r \sin\varphi - \frac{\mu}{r}\Phi_4 \cos\varphi, \quad F_{12} = F_{13} = F_{23} = F_{24} = 0, \\ &F_{34} = \Phi_r \cos\varphi + \frac{\mu}{r}\Phi_4 \sin\varphi \quad \left(\Phi_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad \Phi_4 = \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{x}^4}\right). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Предложение 32. *Если* $\partial^2\Phi/\partial r\partial\tilde{x}^4 \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.4), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,2}$.

6.1.2. Класс $C_{2,4}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,4} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_2 + e_4\}$ соответствует группа $G_{2,4}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций вдоль изотропной прямой. Класс $C_{2,4}$ является пересечением классов $C_{1,2a}$ и $C_{1,1c}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,4}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} &= c_1\cos\varphi + c_2\sin\varphi, \quad F_{13} = F_{13}(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4), \\ F_{14} &= c_3\cos\varphi + c_4\sin\varphi, \quad F_{23} = c_1\sin\varphi - c_2\cos\varphi, \\ F_{24} &= F_{24}(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4), \quad F_{34} = -c_3\sin\varphi + c_4\cos\varphi, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где функции $c_i = c_i(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ удовлетворяют уравнениям (3.15), а связь между координатами задаётся соотношениями (3.10) при $\mu = 0$:

$$x^1 = r\sin\varphi, \quad x^2 = \lambda\varphi + \tilde{x}^2, \quad x^3 = r\cos\varphi, \quad x^4 = \tilde{x}^4. \tag{6.6}$$

Для поля $A_i = (0,0,0,\Phi)$, где $\Phi = \Phi(r, \tilde{x}^2 - \tilde{x}^4) = \Phi(r, u)$, получим вместо (3.16)

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{13} = 0, \quad F_{14} = \Phi_r\sin\varphi - \frac{\lambda}{r}\Phi_u\cos\varphi, \\ &F_{23} = 0, \quad F_{24} = \Phi_u, \quad F_{34} = \Phi_r\cos\varphi + \frac{\lambda}{r}\Phi_u\sin\varphi. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Предложение 33. *Если* $\partial^2\Phi/\partial r\partial u \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.7), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,4}$.

6.2. Трёхмерные подгруппы

6.2.1. Класс $C_{3,2}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,2} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3\}$ $(\lambda \neq 0)$ соответствует группа $G_{3,2}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций в направлениях векторов двумерной евклидовой плоскости. Так как $\mathcal{L}_{1,2a} \subset \mathcal{L}_{3,2}$ и $\mathcal{L}_{1,1a} \subset \mathcal{L}_{3,2}$, то $C_{3,2} \subset C_{1,2a}$ и $C_{3,2} \subset C_{1,1a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,2}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = a_1(x^4)\sin\frac{x^2}{\lambda} - a_2(x^4)\cos\frac{x^2}{\lambda}, \quad F_{13} = \mathrm{const}, \\ F_{23} = -a_1(x^4)\cos\frac{x^2}{\lambda} - a_2(x^4)\sin\frac{x^2}{\lambda}, \quad F_{24} = F_{24}(x^4), \\ F_{14} = -\lambda a_1'(x^4)\cos\frac{x^2}{\lambda} - \lambda a_2'(x^4)\sin\frac{x^2}{\lambda}, \\ F_{34} = \lambda a_1'(x^4)\sin\frac{x^2}{\lambda} - \lambda a_2'(x^4)\cos\frac{x^2}{\lambda}, \end{gathered} \tag{6.8}$$

где $a_k = a_k(x^4)$ — произвольные гладкие функции.

Предложение 34. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.8), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,2}$, если выполнено одно из следующих условий: функции $a_1(x^4)$ и $a_1'(x^4)$ линейно независимы, функции $a_2(x^4)$ и $a_2'(x^4)$ линейно независимы.*

6.2.2. Класс $C_{3,3}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,3} = L\{e_{13} + \mu e_4, e_1, e_3\}$ ($\mu \neq 0$) соответствует группа $G_{3,3}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с времениподобной осью и трансляций в направлениях векторов двумерной евклидовой плоскости. Так как $\mathcal{L}_{1,2b} \subset \mathcal{L}_{3,3}$ и $\mathcal{L}_{1,1a} \subset \mathcal{L}_{3,3}$, то $C_{3,3} \subset C_{1,2b}$ и $C_{3,3} \subset C_{1,1a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,3}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = \mu a_1'(x^2)\sin\frac{x^4}{\mu} - \mu a_2'(x^2)\cos\frac{x^4}{\mu}, \quad F_{13} = \mathrm{const}, \\ F_{23} = -\mu a_1'(x^2)\cos\frac{x^4}{\mu} - \mu a_2'(x^2)\sin\frac{x^4}{\mu}, \quad F_{24} = F_{24}(x^2), \\ F_{14} = a_1(x^2)\cos\frac{x^4}{\mu} + a_2(x^2)\sin\frac{x^4}{\mu}, \\ F_{34} = -a_1(x^2)\sin\frac{x^4}{\mu} + a_2(x^2)\cos\frac{x^4}{\mu}, \end{gathered} \tag{6.9}$$

где $a_1(x^2)$ и $a_2(x^2)$ — произвольные гладкие функции.

Предложение 35. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.9), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,3}$, если выполнено одно из следующих условий: функции $a_1(x^2)$ и $a_1'(x^2)$ линейно независимы, функции $a_2(x^2)$ и $a_2'(x^2)$ линейно независимы.*

6.2.3. Класс $C_{3,4a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,4a} = L\{e_{13} + \lambda(e_2 + e_4), e_1, e_3\}$ ($\lambda \neq 0$) соответствует группа $G_{3,4a}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с изотропной осью и трансляций в направлениях векторов двумерной евклидовой плоскости. Так как $\mathcal{L}_{1,2c} \subset \mathcal{L}_{3,4a}$ и $\mathcal{L}_{1,1a} \subset \mathcal{L}_{3,4a}$, то $C_{3,4a} \subset C_{1,2c}$ и $C_{3,4a} \subset C_{1,1a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,4a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = a_1 \sin \frac{x^2 + x^4}{2\lambda} - a_2 \cos \frac{x^2 + x^4}{2\lambda}, \quad F_{13} = \mathrm{const}, \\ F_{34} = -F_{23} = a_1 \cos \frac{x^2 + x^4}{2\lambda} + a_2 \sin \frac{x^2 + x^4}{2\lambda}, \quad F_{24} = \Phi(x^2 - x^4), \end{gathered} \tag{6.10}$$

где $a_1, a_2 = \mathrm{const}$, а $\Phi(u)$ — произвольная функция одной переменной.

Предложение 36. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.10), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,4a}$, если выполнено одно из следующих условий*: $a_1 \neq 0$ *и* $\Phi(u) \neq \mathrm{const}$; $a_2 \neq 0$ *и* $\Phi(u) \neq \mathrm{const}$.

6.2.4. Класс $C_{3,4b}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,4b} = L\{e_{13}, e_1, e_3\}$ соответствует группа $G_{3,4b}$ движений евклидовой плоскости Ox^1x^3. Так как $\mathcal{L}_{1,2d} \subset \mathcal{L}_{3,4b}$ и $\mathcal{L}_{1,1a} \subset \mathcal{L}_{3,4b}$, то $C_{3,4b} \subset C_{1,2d}$ и $C_{3,4b} \subset C_{1,1a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,4b}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi(x^2, x^4), \quad F_{24} = \Psi(x^2, x^4), \tag{6.11}$$

где $\Phi(x^2, x^4)$ и $\Psi(x^2, x^4)$ — произвольные гладкие функции.

Предложение 37. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.11), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,4b}$, если выполнены следующие два условия: функции $\Phi(x^2, x^4)$ и $\Psi(x^2, x^4)$ линейно независимы, производные $\partial\Phi/\partial x^2$ и $\partial\Phi/\partial x^4$ ($\partial\Psi/\partial x^2$ и $\partial\Psi/\partial x^4$) линейно независимы.*

6.3. Четырёхмерные подгруппы

6.3.1. Класс $C_{4,2a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,2a} = L\{e_{13} + \mu e_4, e_1, e_2, e_3\}$ ($\mu \neq 0$) соответствует группа $G_{4,2a}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с временниподобной осью и трансляций в направлениях векторов трёхмерной евклидовой гиперплоскости. Так как $\mathcal{L}_{3,3a} \subset \mathcal{L}_{4,2a}$, то $C_{4,2a} \subset C_{3,3a}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,2a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{14} = c_1 \cos \frac{x^4}{\mu} + c_2 \sin \frac{x^4}{\mu}, \quad F_{34} = -c_1 \sin \frac{x^4}{\mu} + c_2 \cos \frac{x^4}{\mu}, \\ F_{12} = F_{23} = 0, \quad F_{13} = c_3, \quad F_{24} = c_4 \qquad (c_k = \mathrm{const}). \end{gathered} \tag{6.12}$$

Предложение 38. *Если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.12), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,2a}$.*

6.3.2. Класс $C_{4,2b}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,2b} = L\{e_{13}, e_1, e_2, e_3\}$ соответствует группа $G_{4,2b}$, состоящая из всевозможных композиций поворотов в плоскости Ox^1x^3 и трансляций в направлениях векторов трёхмерной евклидовой гиперплоскости. Так как $\mathcal{L}_{3,4b} \subset \mathcal{L}_{4,2b}$, то $C_{4,2b} \subset C_{3,4b}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,2b}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = C = \mathrm{const}, \quad F_{24} = \Phi(x^4), \tag{6.13}$$

где $\Phi(x^4)$ — произвольная гладкая функция.

Предложение 39. *Если $C \neq 0$ и $\Phi(x^4) \neq \mathrm{const}$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.13), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,2b}$.*

6.3.3. Класс $C_{4,4a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,4a} = L\{e_{13} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ $(\lambda \neq 0)$ соответствует группа $G_{4,4a}$, состоящая из всевозможных композиций эллиптических винтов с пространственноподобной осью и трансляций в направлениях векторов трёхмерной изотропной гиперплоскости. Так как $\mathcal{L}_{3,2} \subset \mathcal{L}_{4,4a}$, то $C_{4,4a} \subset C_{3,2}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,4a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = -F_{14} = b_1 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda} - b_2 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \quad F_{13} = b_3, \\ F_{23} = F_{34} = b_1 \sin\frac{x^2 - x^4}{\lambda} + b_2 \cos\frac{x^2 - x^4}{\lambda}, \quad F_{24} = b_4 \qquad (b_i = \mathrm{const}). \end{gathered} \tag{6.14}$$

Предложение 40. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.14), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,4a}$, если выполнены следующие два условия: $b_1 \neq 0$ или $b_2 \neq 0$; $b_3 \neq 0$ или $b_4 \neq 0$.*

6.3.4. Класс $C_{4,4b}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,4b} = L\{e_{13}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует группа $G_{4,4b}$, состоящая из всевозможных композиций поворотов в плоскости Ox^1x^3 и трансляций в направлениях векторов трёхмерной изотропной гиперплоскости. Так как $\mathcal{L}_{3,4b} \subset \mathcal{L}_{4,4b}$, то $C_{4,4b} \subset C_{3,4b}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,4b}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = \Phi(x^2 - x^4), \quad F_{24} = \Psi(x^2 - x^4), \tag{6.15}$$

где $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ — произвольные гладкие функции одной переменной.

Предложение 41. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (6.15), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,4b}$, если выполнены следующие два условия: функции $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ линейно независимы; $\Phi(u) \neq \mathrm{const}$ или $\Psi(u) \neq \mathrm{const}$.*

6.4. Пяти- и шестимерные подгруппы

6.4.1.

Алгебре $\mathcal{L}_{5,4} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_3, e_2+e_4\}$ соответствует класс $C_{6,2}$ однородных пространств Максвелла, задаваемых тензорами вида (5.17).

Предложение 42. *Пространств Максвелла с группой симметрий $G_S = G_{5,4}$ не существует.*

6.4.2.

Классы пространств Максвелла, соответствующие алгебрам $\mathcal{L}_{6,5} = L\{e_{12}-e_{14}, e_{23}+e_{34}, e_{13}+\lambda e_2, e_1, e_3, e_2-e_4\}$ и $\mathcal{L}_{6,8} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_1, e_2, e_3\}$, пусты.

7. Пространства Максвелла, допускающие гиперболические винты

В этом разделе описаны классы пространств Максвелла, допускающих гиперболические винты, не вошедшие в предыдущие разделы.

7.1. Двумерные подгруппы

7.1.1. Класс $C_{2,5}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,5} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1\}$ соответствует группа $G_{2,5}$, состоящая из всевозможных композиций гиперболических винтов и трансляций вдоль пространственноподобной оси Ox^1. Пространство Максвелла класса $C_{2,5}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = c_1 \operatorname{ch}\varphi + c_2 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{13} = F_{13}(r, \tilde{x}^3), \quad F_{14} = -c_1 \operatorname{sh}\varphi - c_2 \operatorname{ch}\varphi, \\ F_{23} = c_3 \operatorname{ch}\varphi + c_4 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{24} = F_{24}(r, \tilde{x}^3), \quad F_{34} = c_3 \operatorname{sh}\varphi + c_4 \operatorname{ch}\varphi, \end{gathered} \tag{7.1}$$

где функции $c_i = c_i(r, \tilde{x}^3)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{c_2}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{c_4}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \end{gathered} \tag{7.2}$$

а замена координат определяется формулами

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r \operatorname{ch}\varphi, \quad x^3 = \lambda\varphi + \tilde{x}^3, \quad x^4 = r \operatorname{sh}\varphi. \tag{7.3}$$

Класс $P_{2,5}$ потенциалов A_i, инвариантных относительно группы $G_{2,5}$, состоит из полей вида [5]

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(r,\tilde{x}^3), \quad A_2 = C_1 \operatorname{ch}\varphi + C_2 \operatorname{sh}\varphi, \\ A_3 &= A_3(r,\tilde{x}^3), \quad A_4 = -C_1 \operatorname{sh}\varphi - C_2 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{7.4}$$

где $C_i = C_i(r,\tilde{x}^3)$. Для поля $A_i = (-\Phi,0,0,0)$, где $\Phi = \Phi(\tilde{x}^3)$, получим

$$F_{12} = \frac{\lambda}{r}\Phi' \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{13} = \Phi', \quad F_{14} = -\frac{\lambda}{r}\Phi' \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0, \tag{7.5}$$

где $\Phi' = d\Phi/d\tilde{x}^3$.

Предложение 43. *Если $\Phi''(\tilde{x}^3) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.5), *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,5}$.*

7.1.2. Класс $C_{2,6}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,6} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{2,6}$, состоящая из всевозможных композиций гиперболических винтов и трансляций вдоль изотропной прямой. Пространство Максвелла класса $C_{2,6}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} &= c_1 \operatorname{ch}\varphi + c_2 \operatorname{sh}\varphi, \quad F_{13} = F_{13}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \\ F_{14} &= -c_1 \operatorname{sh}\varphi - c_2 \operatorname{ch}\varphi, \quad F_{23} = c_3 \operatorname{ch}\varphi + c_4 \operatorname{sh}\varphi, \\ F_{24} &= F_{24}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3), \quad F_{34} = c_3 \operatorname{sh}\varphi + c_4 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{7.6}$$

где функции $F_{13}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$, $F_{24}(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$, $c_i = c_i(\tilde{x}^1, r, \tilde{x}^3)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{c_2}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \\ &\frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{c_4}{r} - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} = 0 \end{aligned} \tag{7.7}$$

и системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial c_1}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_1}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_2}{r} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_2}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_1}{r} = 0, \quad \frac{\partial F_{13}}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{13}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \\ &\frac{\partial c_3}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_4}{r} = 0, \quad \frac{\partial c_4}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{c_3}{r} = 0, \quad \frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\lambda}{r}\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \end{aligned} \tag{7.8}$$

а замена координат определяется формулами (7.3).

Класс $P_{2,6}$ потенциалов A_i, инвариантных относительно группы $G_{2,6}$, состоит из полей вида [5]

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r), \quad A_2 = C_1 \operatorname{ch}\varphi + C_2 \operatorname{sh}\varphi, \\ A_3 &= A_3(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r), \quad A_4 = -C_1 \operatorname{sh}\varphi - C_2 \operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{7.9}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{ch}\ln r + a_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{sh}\ln r, \\ C_2 &= a_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{sh}\ln r + a_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) \operatorname{ch}\ln r. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Для поля $A_i = (-\Phi, 0, 0, 0)$, где $\Phi = \Phi(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3 - \lambda \ln r) = \Phi(t_1, t_2)$, получим

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = -\frac{\lambda}{r}\Phi_2 e^{-\varphi}, \quad F_{13} = \Phi_2, \\ &F_{23} = F_{24} = F_{34} = 0 \quad \left(\Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial t_2}\right). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Предложение 44. *Если производные* Φ_{21} *и* Φ_{22} ($\Phi_{ij} = \partial^2\Phi/\partial t_i \partial t_j$) *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.11), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,6}$.

7.2. Трёхмерные подгруппы

7.2.1. Класс $C_{3,5}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,5} = L\{e_{24}, e_1, e_3\}$ соответствует группа $G_{3,5}$, состоящая из всевозможных композиций псевдовращений в плоскости Ox^2x^4 и трансляций в направлениях векторов евклидовой плоскости Ox^1x^3. Пространство Максвелла класса $C_{3,5}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = a_1(r)\operatorname{ch}\varphi + \frac{b_1}{r}\operatorname{sh}\varphi, \quad F_{13} = b_3, \quad F_{14} = -a_1(r)\operatorname{sh}\varphi - \frac{b_1}{r}\operatorname{ch}\varphi, \\ &F_{23} = a_2(r)\operatorname{ch}\varphi + \frac{b_2}{r}\operatorname{sh}\varphi, \quad F_{24} = F_{24}(r), \quad F_{34} = a_2(r)\operatorname{sh}\varphi + \frac{b_2}{r}\operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{7.12}$$

где $a_1(r)$, $a_2(r)$ и $F_{24}(r)$ — произвольные функции, $b_k = \mathrm{const}$, а связь между координатами имеет вид (3.30).

Предложение 45. *Если* $F'_{24}(r) \neq 0$, *а функции* $a_1(r)$, $a_2(r)$ *и* $1/r$ *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.12), *допускает двумерную группу* $G_S = G_{3,5}$.

7.2.2. Класс $C_{3,7}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,7} = L\{e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{3,7}$, состоящая из всевозможных композиций гиперболических винтов и трансляций в направлениях векторов изотропной плоскости. $C_{3,7} = C_{2,5} \cap C_{2,6}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,7}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} &F_{12} = F_{14} = \frac{\lambda}{r} e^{-\varphi}\Phi(re^{-\tilde{x}^3/\lambda}), \\ &F_{13} = \Phi(re^{-\tilde{x}^3/\lambda}), \quad F_{24} = \Psi(re^{-\tilde{x}^3/\lambda}), \\ &F_{23} = c_3(r, \tilde{x}^3)\operatorname{ch}\varphi + c_4(r, \tilde{x}^3)\operatorname{sh}\varphi, \\ &F_{34} = c_3(r, \tilde{x}^3)\operatorname{sh}\varphi + c_4(r, \tilde{x}^3)\operatorname{ch}\varphi, \end{aligned} \tag{7.13}$$

где $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ — произвольные функции одной переменной, функции $c_3 = c_3(r, \tilde{x}^3)$ и $c_4 = c_4(r, \tilde{x}^3)$ удовлетворяют уравнениям

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial c_4}{\partial r}+\frac{c_4}{r}-\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3}-\frac{\partial F_{24}}{\partial \tilde{x}^3}=0,\\
\frac{\partial c_3}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_3}{\partial \tilde{x}^3}-\frac{c_4}{r}=0,\quad \frac{\partial c_4}{\partial r}+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial c_4}{\partial \tilde{x}^3}-\frac{c_3}{r}=0,
\end{gathered}
\tag{7.14}
$$

а связь между координатами задаётся формулами (7.3).

Класс $P_{3,7}$ потенциалов A_i, инвариантных относительно группы $G_{3,7}$, состоит из полей, задаваемых формулами (7.9) и (7.10), но входящие в них функции не зависят от $\tilde{x}^1$. Для поля $A_i=(-\Phi,0,0,0)$, где $\Phi=\Phi(\tilde{x}^3-\lambda\ln r)=\Phi(t)$, получим

$$
\begin{gathered}
F_{12}=F_{14}=-\frac{\lambda}{r}\Phi' e^{-\varphi},\quad F_{13}=\Phi',\\
F_{23}=F_{24}=F_{34}=0\quad \left(\Phi'=\frac{d\Phi}{dt}\right).
\end{gathered}
\tag{7.15}
$$

Предложение 46. *Если $\Phi''\neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.15)*, допускает трёхмерную группу $G_S=G_{3,7}$.*

7.2.3. Класс $C_{3,16}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,16}=L\{e_{12}-e_{14},e_{24}+\lambda e_1+\mu e_3,e_2-e_4\}$ соответствует группа $G_{3,16}$, состоящая из всевозможных композиций параболических вращений, гиперболических винтов и трансляций в направлении изотропной прямой. Для описания класса $C_{3,16}$ потребуется замена координат

$$
x^1=\lambda\varphi+\tilde{x}^1,\quad x^2=r\operatorname{ch}\varphi,\quad x^3=\mu\varphi+\tilde{x}^3,\quad x^4=r\operatorname{sh}\varphi,
\tag{7.16}
$$

содержащая как частные случаи замены (3.24), (3.30) и (7.3). Пространство Максвелла задаётся тензором F_{ij} вида

$$
\begin{gathered}
F_{12}=c_1\operatorname{ch}\varphi+c_2\operatorname{sh}\varphi,\quad F_{14}=-c_1\operatorname{sh}\varphi-c_2\operatorname{ch}\varphi,\quad F_{13}=b_1\tilde{x}^1+b_2,\\
F_{23}=c_3\operatorname{ch}\varphi+c_4\operatorname{sh}\varphi,\quad F_{34}=c_3\operatorname{sh}\varphi+c_4\operatorname{ch}\varphi,\quad F_{24}=a_2,
\end{gathered}
\tag{7.17}
$$

где

$$
c_1=-c_2=\frac{a_2\tilde{x}^1+a_3}{r},\quad c_3=-\frac{1}{r}\left(\frac{b_1}{2}\left(\tilde{x}^1\right)^2+b_2\tilde{x}^1+b_3\right),\quad c_4=b_1r-c_3,
\tag{7.18}
$$

а функции $a_k=a_k(r,\tilde{x}^3)$ $(k=2,3)$ и $b_l=b_l(r,\tilde{x}^3)$ $(l=1,2,3)$ определяются следующими формулами:

а) для класса $C_{3,16a}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{3,16a}=L\{e_{12}-e_{14},e_{24},e_2-e_4\}$ ($\mathcal{L}_{3,16}$ при $\lambda=\mu=0$),

$$
\begin{gathered}
a_2=\Phi_1(\tilde{x}^3),\quad a_3=\Phi_2(\tilde{x}^3),\\
b_1=\Phi_1'(\tilde{x}^3),\quad b_2=\Phi_2'(\tilde{x}^3),\quad b_3=\Phi_3(\tilde{x}^3)-\frac{r^2}{2}\Phi_1'(\tilde{x}^3),
\end{gathered}
\tag{7.19}
$$

где $\Phi_1(\tilde{x}^3)$, $\Phi_2(\tilde{x}^3)$ и $\Phi_3(\tilde{x}^3)$ — произвольные функции, а замена координат определяется соотношениями (3.30);

б) для класса $C_{3,16b}$, соответствующего алгебре $L\{e_{12}-e_{14}, e_{24}+\lambda e_1, e_2-e_4\}$ ($\mathcal{L}_{3,16}$ при $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$),

$$\begin{gathered} a_2 = \Phi_1(\tilde{x}^3), \quad a_3 = \Phi_2(\tilde{x}^3) - \lambda \ln r \Phi_1(\tilde{x}^3), \\ b_2 = \Phi_2'(\tilde{x}^3) + (\lambda - \lambda \ln r)\Phi_1'(\tilde{x}^3), \quad b_1 = \Phi_1'(\tilde{x}^3), \\ b_3 = \Phi_3(\tilde{x}^3) + \left(\frac{\lambda^2}{2}\ln^2 r - \lambda^2 \ln r - \frac{r^2}{2}\right)\Phi_1'(\tilde{x}^3) - \lambda \ln r \Phi_2'(\tilde{x}^3), \end{gathered} \tag{7.20}$$

а связь между координатами задаётся соотношениями (3.24) (формулы (7.20) переходят в (7.19) при $\lambda = 0$);

в) для класса $C_{3,16c}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{3,16c} = \mathcal{L}_{3,16}$ ($\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$),

$$\begin{gathered} a_2 = \Phi_1(u), \quad a_3 = \Phi_2(u) - \frac{\lambda v}{2\mu}\Phi_1(u), \quad b_2 = \Phi_4(u) - \frac{\lambda v}{2\mu}\Phi_3(u), \\ b_1 = \Phi_3(u), \quad b_3 = \frac{\lambda^2 v^2}{8\mu^2}\Phi_3(u) - \frac{\lambda v}{2\mu}\Phi_4(u) - \frac{r^2}{2}\Phi_3(u) + \Phi_5(u), \end{gathered} \tag{7.21}$$

где

$$u = \tilde{x}^3 - \mu \ln r, \quad v = \tilde{x}^3 + \mu \ln r, \tag{7.22}$$

$\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$ и $\Phi_5(u)$ — произвольные гладкие функции,

$$\begin{gathered} \Phi_3(u) = -\frac{1}{\mu}e^{u/\mu}\int \Phi_1'(u)e^{-u/\mu}\,du, \\ \Phi_4(u) = -\frac{1}{\mu}e^{u/\mu}\int \left(\Phi_2'(u) - \frac{\lambda}{2\mu}\Phi_1(u) + \frac{\lambda}{2}\Phi_3(u)\right)e^{-u/\mu}\,du, \end{gathered} \tag{7.23}$$

а связь между координатами задаётся соотношениями (7.16);

г) для класса $C_{3,16d}$, соответствующего алгебре $L\{e_{12}-e_{14}, e_{24}+\mu e_3, e_2-e_4\}$ ($\mathcal{L}_{3,16}$ при $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$),

$$\begin{gathered} a_2 = \Phi_1(u), \quad a_3 = \Phi_2(u), \\ b_1 = \Phi_3(u), \quad b_2 = \Phi_4(u), \quad b_3 = -\frac{r^2}{2}\Phi_3(u) + \Phi_5(u), \end{gathered} \tag{7.24}$$

где u определено в (7.22), $\Phi_1(u)$, $\Phi_2(u)$ и $\Phi_5(u)$ — произвольные гладкие функции,

$$\Phi_3(u) = -\frac{1}{\mu}e^{u/\mu}\int \Phi_1'(u)e^{-u/\mu}\,du, \quad \Phi_4(u) = -\frac{1}{\mu}e^{u/\mu}\int \Phi_2'(u)e^{-u/\mu}\,du, \tag{7.25}$$

а связь между координатами задаётся соотношениями (7.3) ($\lambda \mapsto \mu$)

$$x^1 = \tilde{x}^1, \quad x^2 = r\,\mathrm{ch}\,\varphi, \quad x^3 = \mu\varphi + \tilde{x}^3, \quad x^4 = r\,\mathrm{sh}\,\varphi. \tag{7.26}$$

Формулы (7.21) и (7.23) переходят в (7.24) и (7.25) при $\lambda = 0$.

В случае классов $C_{3,16a}$ и $C_{3,16b}$ положим $\Phi_1 = \Phi_3 = 0$ и $\Phi_2 = \Phi(\tilde{x}^3)$. Получим следующие примеры тензоров F_{ij}:

$$
\begin{aligned}
F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r}\Phi(\tilde{x}^3)e^{-\varphi}, \quad F_{13} = \Phi'(\tilde{x}^3),\\
F_{24} = 0, \quad F_{34} = -F_{23} = \frac{1}{r}\tilde{x}^1\Phi'(\tilde{x}^3)e^{-\varphi}
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

и

$$
\begin{aligned}
F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r}\Phi(\tilde{x}^3)e^{-\varphi}, \quad F_{13} = \Phi'(\tilde{x}^3), \quad F_{24} = 0,\\
F_{34} = -F_{23} = \frac{1}{r}(\tilde{x}^1 - \lambda \ln r)\Phi'(\tilde{x}^3)e^{-\varphi}.
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

Предложение 47. *Если $\Phi''(\tilde{x}^3) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.27), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,16a}$, а пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.28), *— группу $G_S = G_{3,16b}$.*

В случае классов $C_{3,16c}$ и $C_{3,16d}$ положим $\Phi_2 = \Phi(u) = \Phi(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)$ и $\Phi_1 = \Phi_5 = 0$. Тогда $\Phi_3 = 0$ и

$$
\Phi_4(u) = -\frac{1}{\mu}e^{u/\mu}\int \Phi'(u)e^{-u/\mu}\,du. \tag{7.29}
$$

Получим следующие примеры тензоров F_{ij}:

$$
\begin{aligned}
F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r}\Phi(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)e^{-\varphi}, \quad F_{13} = \Phi_4(\tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad F_{24} = 0,\\
F_{34} = -F_{23} = \frac{1}{2\mu r}e^{-\varphi}\Phi_4(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)\cdot(2\mu\tilde{x}^1 - \lambda\tilde{x}^3 - \lambda\mu \ln r)
\end{aligned}
\tag{7.30}
$$

и

$$
\begin{aligned}
F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r}\Phi(\tilde{x}^3 - \mu \ln r)e^{-\varphi}, \quad F_{13} = \Phi_4(\tilde{x}^3 - \mu \ln r),\\
F_{34} = -F_{23} = \frac{\tilde{x}^1}{2r}e^{-\varphi}\Phi_4(\tilde{x}^3 - \mu \ln r), \quad F_{24} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.31}
$$

Предложение 48. *Если $\Phi''(u) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.30), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,16c}$, а пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.31), *— группу $G_S = G_{3,16d}$.*

7.2.4. Класс $C_{3,21}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,21} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}\}$ соответствует группа $G_{3,21}$, порождаемая поворотами в плоскости Ox^1x^2 и псевдовращениями в плоскостях Ox^1x^4 и Ox^2x^4. Пространство Максвелла класса $C_{3,21}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$
\begin{aligned}
F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = x^1\Phi(x^3),\\
F_{23} = x^2\Phi(x^3), \quad F_{34} = x^4\Phi(x^3),
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

где $\Phi(x^3)$ — произвольная функция.

Предложение 49. *Если $\Phi(x^3) \neq \mathrm{const}$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.32), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,21}$.*

7.3. Четырёхмерные подгруппы

7.3.1. Класс $C_{4,5}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,5} = L\{e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ соответствует группа $G_{4,5}$, порождаемая псевдовращениями в плоскости Ox^2x^4 и трансляциями в направлениях векторов изотропной гиперплоскости. Так как $\mathcal{L}_{3,5} \subset \mathcal{L}_{4,5}$, то $C_{4,5} \subset C_{3,5}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,5}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = -F_{14} = \frac{b_1}{x^2 - x^4}, \quad F_{23} = F_{34} = \frac{b_2}{x^2 - x^4}, \\ F_{13} = b_3, \quad F_{24} = b_4 \qquad (b_k = \mathrm{const}). \end{gathered} \tag{7.33}$$

Предложение 50. *Пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.33), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,5}$, если выполнено любое из следующих условий: $b_1 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$; $b_1 \neq 0$ и $b_4 \neq 0$; $b_2 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$; $b_2 \neq 0$ и $b_4 \neq 0$.*

7.3.2. Класс $C_{4,13}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,13} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,13}$, порождаемая гиперболическими винтами, параболическими вращениями и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости. Так как $\mathcal{L}_{3,16b} \subset \mathcal{L}_{4,13}$, то $C_{4,13} \subset C_{3,16b}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,13}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r}(K_1\tilde{x}^1 - K_1\lambda \ln r + K_2)e^{-\varphi}, \\ F_{23} = -F_{34} = \frac{K_3}{r}e^{-\varphi}, \quad F_{13} = 0, \quad F_{24} = K_1, \end{gathered} \tag{7.34}$$

где K_1, K_2 и K_3 — произвольные константы, а связь между координатами задаётся соотношениями (3.24).

Предложение 51. *Если $K_1 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.34), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,13}$.*

7.3.3. Класс $C_{4,14}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,14} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1 + \nu e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,14}$, порождаемая гиперболическими винтами, параболическими вращениями и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости (группы $G_{4,14}$ и $G_{4,13}$ не являются сопряжёнными). Так как $\mathcal{L}_{3,16d} \subset \mathcal{L}_{4,14}$, то $C_{4,14} \subset C_{3,16d}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,14}$ ($\nu \neq 0$) задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r}\left(K_1\tilde{x}^1 - \frac{K_1}{\nu}(\tilde{x}^3 - \lambda \ln r) + K_2\right)e^{-\varphi}, \quad F_{13} = -\frac{K_2}{\nu}, \\ F_{23} = -F_{34} = \frac{1}{r}\left(\frac{K_1}{\nu}\tilde{x}^1 - \frac{K_1}{\nu^2}(\tilde{x}^3 - \lambda \ln r) + K_3\right)e^{-\varphi}, \quad F_{24} = K_1, \end{gathered} \tag{7.35}$$

где $K_i = \mathrm{const}$, а связь между координатами задаётся формулами (7.3).

Предложение 52. *Если $K_1 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.35), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,14}$.*

При $\nu = 0$, т. е. для алгебры $\mathcal{L}_{4,14a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3, e_1, e_2 - e_4\}$ класс $C_{4,14a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \frac{K_1}{r} e^{-\varphi}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{23} = -F_{34} = -\frac{1}{r} \Psi(\tilde{x}^3 - \lambda \ln r) e^{-\varphi}, \end{gathered} \tag{7.36}$$

где $\Psi(u)$ — произвольная функция.

Предложение 53. *Если $\Psi'(u) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.36), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,14a}$.*

7.3.4. Класс $C_{4,15}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,15} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24} + \lambda e_1, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{4,15}$, порождаемая гиперболическими винтами, параболическими вращениями двух видов и трансляциями вдоль изотропной прямой. Так как $\mathcal{L}_{3,16b} \subset \mathcal{L}_{4,15}$, то $C_{4,15} \subset C_{3,16b}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,15}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \frac{1}{r} e^{-\varphi} (K_1 \tilde{x}^1 - \lambda K_1 \ln r + K_2), \quad F_{13} = 0, \\ F_{23} = -F_{34} = -\frac{1}{r} e^{-\varphi} (K_1 \tilde{x}^3 + K_3), \quad F_{24} = K_1, \end{gathered} \tag{7.37}$$

где K_i $(i = 1, 2, 3)$ — произвольные константы, а связь между координатами задаётся формулами (3.24).

Предложение 54. *Если $K_1 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.37), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,15}$.*

7.3.5. Класс $C_{4,19}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,19} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}, e_3\}$ соответствует группа $G_{4,19}$, порождаемая поворотами, псевдовращениями и трансляциями вдоль пространственноподобной прямой. Так как $\mathcal{L}_{3,21} \subset \mathcal{L}_{4,19}$, то $C_{4,19} \subset C_{3,21}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,19}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = Kx^1, \\ F_{23} = Kx^2, \quad F_{34} = Kx^4 \qquad (K = \text{const}). \end{gathered} \tag{7.38}$$

Предложение 55. *Если $K \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.38), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,19}$.*

7.4. Пяти- и шестимерные подгруппы

7.4.1.

Алгебрам $\mathcal{L}_{5,7} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$, $\mathcal{L}_{5,8} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{24}+\lambda e_3, e_1, e_2 - e_4\}$ и $\mathcal{L}_{6,6} = L\{e_{12}-e_{14}, e_{23}+e_{34}, e_{24}, e_1, e_3, e_2-e_4\}$ соответствует один и тот же класс пространств Максвелла $C_{6,6}$, задаваемый тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{14} &= \frac{K_1}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{23} = -F_{34} &= \frac{K_2}{x^2 + x^4} \qquad (K_1, K_2 = \mathrm{const}). \end{aligned} \tag{7.39}$$

Предложение 56. *Если $K_1 \neq 0$ или $K_2 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором* (7.39), *допускает шестимерную группу $G_S = G_{6,6}$.*

7.4.2.

Класс пространств Максвелла, соответствующий алгебре $\mathcal{L}_{6,9} = L\{e_{12}, e_{14}, e_{24}, e_1, e_2, e_4\}$, является пустым.

8. Пространства Максвелла, допускающие параболические винты

В этом разделе описаны классы пространств Максвелла, допускающих параболические винты и параболические вращения, не вошедшие в предыдущие разделы.

8.1. Двумерные подгруппы

8.1.1. Классы $C_{2,7a}$ и $C_{2,7b}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,7} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{2,7}$, состоящая из всевозможных композиций параболических винтов и трансляций вдоль изотропной прямой. Алгебра $\mathcal{L}_{2,7}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{1,4}$ с помощью вектора $\xi = e_2 - e_4$. Поэтому соответствующие ей при различных значениях параметров λ и μ классы $C_{2,7a}$, $C_{2,7b}$ и $C_{2,7c}$ получаются сужением классов $C_{1,4a}$, $C_{1,4b}$ и $C_{1,4c}$ путём наложения дополнительного условия (2.2) для вектора $\xi = e_2 - e_4$: $\partial_2 F_{ij} - \partial_4 F_{ij} = 0$.

Пространство Максвелла класса $C_{2,7b}$ ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$) задаётся тензором F_{ij} вида (3.35) при выполнении (3.36), где $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ — гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0,$$
$$\frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_2}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\mu}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} - \frac{C_5}{\tilde{x}^1} - \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} \tag{8.1}$$

(замена координат задаётся формулами (3.38)).

При $\mu = 0$ система уравнений (8.1) упрощается и частично интегрируется. В результате получаем, что пространство Максвелла класса $C_{2,7a}$ ($\lambda = 0$, $\mu = 0$) задаётся тензором F_{ij} вида (3.35) при выполнении (3.36), где $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ ($k \neq 5$) — гладкие функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{C_2}{\tilde{x}^1} + \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{8.2}$$

а $C_5 = A/\tilde{x}^1$ ($A = \mathrm{const}$, замена координат задаётся формулами (3.34)).

Предложение 57. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = -\Phi_1 - \frac{\Phi}{x^2 + x^4}, \quad F_{13} = -\Phi_2,$$
$$F_{23} = -F_{34} = \frac{x^1}{x^2 + x^4}\Phi_2, \quad F_{24} = 0,$$

где функции $\Phi(t_1, t_2) = \Phi(x^2 + x^4, x^3)$, Φ_1, Φ_2, Φ_{12} и Φ_{22} линейно независимы, допускает двумерную группу $G_S = G_{2,7a}$ ($\Phi_k = \partial\Phi/\partial t_k$, $\Phi_{kl} = \partial^2\Phi/\partial t_k \partial t_l$).

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi(t_1, t_2) = (t_1^2 + t_2^3)t_2$.

Предложение 58. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{\mu}{x^2 + x^4}\Phi_2, \quad F_{23} = -F_{34} = \Phi_1 - \frac{\mu x^1}{(x^2 + x^4)^2}\Phi_2,$$

где

$$\Phi(t_1, t_2) = \Phi\left(x^2 + x^4, x^3 + \frac{\mu x^1}{x^2 + x^4}\right),$$

а производные Φ_2, Φ_{12} и Φ_{22} линейно независимы, допускает двумерную группу $G_S = G_{2,7b}$ ($\Phi_k = \partial\Phi/\partial t_k$, $\Phi_{kl} = \partial^2\Phi/\partial t_k \partial t_l$).

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi(t_1, t_2) = (t_1^2 + t_2)t_2$.

8.1.2. Класс $C_{2,7c}$

При $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$, имеем, что пространство Максвелла класса $C_{2,7c}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), (3.36), где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)$ ($k \neq 6$) удовлетворяют уравнениям

$$\frac{C_1}{\lambda} - 2\lambda\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad 2\lambda\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \tag{8.3}$$

а $C_6 = \mathrm{const}$ (координаты $\{\tilde{x}^i\}$ связаны с $\{x^i\}$ формулами (3.40)).

Предложение 59. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = 2\lambda\Phi_1, \quad F_{23} = -F_{34} = 2(x^2 + x^4)\Phi_1,$$

где $\Phi(t_1, t_2) = \Phi(2\lambda x^1 + (x^2 + x^4)^2, x^3)$, *а производные* Φ_1, Φ_{11} *и* Φ_{12} *линейно независимы, допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,7c}$ ($\Phi_k = \partial\Phi/\partial t_k$, $\Phi_{kl} = \partial^2\Phi/\partial t_k \partial t_l$).

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi(t_1, t_2) = t_1(t_1^2 + t_2^2)$.

8.1.3. Класс $C_{2,8}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_3\}$ соответствует группа $G_{2,8}$, порождаемая параболическими винтами и смещениями вдоль пространственноподобной прямой. Так как $\mathcal{L}_{1,4c} \subset \mathcal{L}_{2,8}$, то $C_{2,8} \subset C_{1,4c}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,8}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), (3.36), где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \frac{C_1}{\lambda} + \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} - 2\lambda\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} = 0, \quad \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} - \lambda\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \\ 2\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} - \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \frac{\tilde{x}^1}{2\lambda}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} - 2\lambda\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} - \lambda\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \end{gathered} \tag{8.4}$$

а связь между координатами задаётся формулами (3.40).

Предложение 60. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = 2(x^2 + x^4)\Phi_1 + \left(x^1 + \frac{(x^2 + x^4)^2}{\lambda}\right)\Phi_2,$$

$$F_{13} = 2\lambda\Phi_1 + (x^2 + x^4)\Phi_2, \quad F_{34} = -2(x^2 + x^4)\Phi_1 - \left(\lambda + x^1 + \frac{(x^2 + x^4)^2}{\lambda}\right)\Phi_2,$$

где

$$\Phi(t_1, t_2) = \Phi\left(2\lambda x^1 + (x^2 + x^4)^2, \lambda x^4 + x^1(x^2 + x^4) + \frac{1}{3\lambda}(x^2 + x^4)^3\right),$$

а производные $\Phi_k = \partial\Phi/\partial t_k$ *и* $\Phi_{kl} = \partial^2\Phi/\partial t_k \partial t_l$ *линейно независимы, допускает двумерную группу* $G_S = G_{2,8}$.

Например, эти условия выполнены для функции $\Phi(t_1, t_2) = t_1(t_1^2 + t_2^2)$.

8.1.4. Класс $C_{2,11}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,11} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1 + \mu e_3, e_{23} + e_{34} - \mu e_1 + \lambda e_3\}$ ($\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, эквивалентно $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$) соответствует группа $G_{2,11}$, порождаемая параболическими винтами с двумя различными осями. Пространство Максвелла класса $C_{2,11}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), (3.36), где функции

$$C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$$

удовлетворяют уравнениям (3.37b), (3.37e), (3.37g), (3.39) и

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4}=0, \tag{8.5a}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4}-C_1+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_5=0, \tag{8.5b}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4}+C_2-\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_6=0, \tag{8.5c}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4}=0, \tag{8.5d}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4}+C_5+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_1=0, \tag{8.5e}$$

$$\frac{(\tilde{x}^1)^2-\mu^2}{\tilde{x}^1}\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3}-\tilde{x}^1\tilde{x}^3\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4}+C_6+\frac{\mu}{\tilde{x}^1}C_2=0, \tag{8.5f}$$

связь между координатами задаётся формулами (3.38).

Предложение 61. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$\begin{aligned}
F_{12} &= \frac{1}{\mu^2-(x^2+x^4)^2}\Big\{\mu^3(\mu x^2-x^1x^3)+\\
&\quad+(x^2+x^4)(\mu^4-\mu^2(x^1)^2)+(x^2+x^4)^2(4\mu x^1x^3-5\mu^2x^2)+\\
&\quad(x^2+x^4)^3\left(\frac{5}{2}(x^1)^2+\frac{3}{2}(x^3)^2-2\mu^2\right)+4x^2(x^2+x^4)^4+(x^2+x^4)^5\Big\},\\
F_{13} &= -(x^2+x^4)(\mu x^1+x^3(x^2+x^4)),\\
F_{14} &= F_{12}-(x^2+x^4)(\mu^2-(x^2+x^4)^2),\\
F_{24} &= -(x^2+x^4)(\mu x^3+x^1(x^2+x^4)),\\
F_{34} &= -F_{23}=\frac{1}{\mu^2-(x^2+x^4)^2}\Big\{\mu^3x^2(x^2+x^4)+\\
&\quad+\frac{\mu}{2}((x^1)^2+(x^3)^2)(x^2+x^4)^2+(x^1x^3-\mu x^2)(x^2+x^4)^3\Big\},
\end{aligned}$$

допускает двумерную группу $G_S=G_{2,11}$.

8.1.5. Класс $C_{2,11a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,11a}=L\{e_{12}-e_{14},e_{23}+e_{34}\}$ ($\mathcal{L}_{2,11}$ при $\lambda=\mu=0$) соответствует группа $G_{2,11a}$, порождаемая параболическими вращениями в двух различных плоскостях. Пространство Максвелла класса $C_{2,11a}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), (3.36), где функции $C_k=C_k(\tilde{x}^1,\tilde{x}^3,\tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (3.37) и

$$\frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^3 \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \quad \tilde{x}^1 \left(\frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^3 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} \right) - C_1 = 0,$$
$$\tilde{x}^1 \left(\frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^3 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} \right) + C_2 = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^3 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{8.6}$$
$$\tilde{x}^1 \left(\frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^3 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} \right) + C_5 = 0, \quad \tilde{x}^1 \left(\frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} - \tilde{x}^3 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} \right) + C_6 = 0,$$

связь между координатами задаётся формулами (3.34).

Предложение 62. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида*

$$F_{12} = \frac{1}{x^2 + x^4}\Phi + \Phi_1 + \left(\frac{(x^1)^2}{x^2 + x^4} + 2x^2 + x^4 \right) \Phi_2, \quad F_{13} = x^3 \Phi_2, \quad F_{24} = x^1 \Phi_2,$$
$$F_{14} = \frac{1}{x^2 + x^4}\Phi + \Phi_1 + \left(\frac{(x^1)^2}{x^2 + x^4} + x^2 \right) \Phi_2, \quad F_{23} = -F_{34} = -\frac{x^1 x^3}{x^2 + x^4}\Phi_2,$$

где функция

$$\Phi = \Phi(t_1, t_2) = \Phi \left(x^2 + x^4, \frac{1}{2}((x^1)^2 + (x^3)^2) + x^2(x^2 + x^4) \right)$$

и её производные $\Phi_1 = \partial\Phi/\partial t_1$, $\Phi_2 = \partial\Phi/\partial t_2$ и $\Phi_{22} = \partial^2\Phi/\partial t_2^2$ линейно независимы, допускает двумерную группу $G_S = G_{2,11a}$.

8.1.6. Класс $C_{2,12}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,12} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24} + \lambda e_3\}$ соответствует группа $G_{2,12}$, порождаемая параболическими вращениями и гиперболическими винтами. Пространство Максвелла класса $C_{2,12}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), (3.36), где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3, \tilde{x}^4)$ удовлетворяют системе уравнений (3.37) и

$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_1}{\partial \tilde{x}^4} - C_1 = 0, \tag{8.7a}$$
$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_2}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{8.7b}$$
$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_3}{\partial \tilde{x}^4} - C_4 = 0, \tag{8.7c}$$
$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_5}{\partial \tilde{x}^4} - C_5 = 0, \tag{8.7d}$$
$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_6}{\partial \tilde{x}^4} = 0, \tag{8.7e}$$
$$\tilde{x}^1 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^1} + \lambda \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^3} + (\tilde{x}^1)^2 \frac{\partial C_7}{\partial \tilde{x}^4} + C_8 = 0, \tag{8.7f}$$

связь между координатами задаётся формулами (3.34).

8.1.7. Класс $C_{2,12a}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,12a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}\}$ ($\mathcal{L}_{2,12}$ при $\lambda = 0$) соответствует группа $G_{2,12a}$, порождаемая параболическими вращениями и псевдовращениями. Пространство Максвелла класса $C_{2,12a}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где функции

$$
\begin{gathered}
C_1 = \tilde{x}^1\Phi_1\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}\left(\tilde{x}^1\right)^2\right), \quad C_2 = \Phi_2\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}\left(\tilde{x}^1\right)^2\right), \\
C_3 = -\frac{\tilde{x}^1}{2}\Phi_1\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2\right) + \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_3\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2\right), \\
C_5 = \tilde{x}^1\Phi_4\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2\right), \quad C_6 = \Phi_5\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2\right), \\
C_7 = -\frac{\tilde{x}^1}{2}\Phi_4\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2\right) + \frac{1}{\tilde{x}^1}\Phi_6\left(\tilde{x}^3, \tilde{x}^4 - \frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2\right), \\
C_4 = -C_1 - C_3, \quad C_8 = C_5 + C_7,
\end{gathered}
\tag{8.8}
$$

удовлетворяют системе уравнений (3.37), а связь между координатами задаётся формулами (3.34).

Потенциал вида

$$
\begin{gathered}
A_i = \left(\Phi, -\frac{x^1}{x^2 + x^4}\Phi, 0, -\frac{x^1}{x^2 + x^4}\Phi\right), \\
\Phi = \Phi(t_1, t_2) = \Phi(x^3, (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^4)^2),
\end{gathered}
$$

принадлежит классу $P_{2,12a}$. Ему соответствует следующий тензор F_{ij}:

$$
\begin{gathered}
F_{12} = -\frac{1}{x^2 + x^4}\Phi - \left(\frac{2(x^1)^2}{x^2 + x^4} + 2(x^2)^2\right)\Phi_2, \quad F_{13} = -\Phi_1, \quad F_{24} = -2x^1\Phi_2, \\
F_{14} = -\frac{1}{x^2 + x^4}\Phi - \left(\frac{2(x^1)^2}{x^2 + x^4} - 2(x^4)^2\right)\Phi_2, \quad F_{23} = -F_{34} = \frac{x^1}{x^2 + x^4}\Phi_1
\end{gathered}
\tag{8.9}
$$

($\Phi_k = \partial\Phi/\partial t_k$, $\Phi_{kl} = \partial^2\Phi/\partial t_k \partial t_l$).

Предложение 63. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида (8.9) допускает двумерную группу $G_S = G_{2,12a}$ при условии линейной независимости функций $x^1\Phi_{11} - 2x^1x^3\Phi_{12}$, $F_{12} + x^2\Phi_{11} - 2x^2x^3\Phi_{12}$ и $2x^3x^4\Phi_{12} - x^4\Phi_{11}$.*

Это условие выполнено, например, для функции $\Phi = t_1t_2$.

8.2. Трёхмерные подгруппы

8.2.1. Класс $C_{3,8}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,8} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_3, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{3,8}$, порождаемая параболическими винтами и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости. Пространство Максвелла класса $C_{3,8}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где

$$C_1 = a_1, \quad C_3 = \frac{a_1}{2\lambda^2}\tilde{x}^1 + a_2, \quad C_6 = a_3 \qquad (a_i = \mathrm{const}), \tag{8.10}$$

а $C_k = C_k(\tilde{x}^1)$ $(k = 2,4,5,7,8)$ — функции, удовлетворяющие условию (3.36) (координаты $\{\tilde{x}^i\}$ связаны с $\{x^i\}$ формулами (3.40)).

Для получения примера положим $a_1 = A$, $a_2 = a_3 = 0$, $C_k = 0$ $(k = 2,4,5,7,8)$; получим, учитывая замену (3.40),

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{A}{\lambda}(x^2 + x^4), \\ F_{23} = \frac{A}{\lambda^2}(\lambda^2 + \lambda x^1 + (x^2 + x^4)^2), \quad F_{34} = -A - F_{23}. \end{gathered} \tag{8.11}$$

Предложение 64. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.11), *при $A \neq 0$ допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,8}$.*

8.2.2. Класс $C_{3,9}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,9} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2 + \mu e_3, e_1, e_2 - e_4\}$ соответствует группа $G_{3,9}$, порождаемая параболическими вращениями или параболическими винтами с разными осями и трансляциями в направлениях векторов изотропной плоскости. Имеют место три случая.

а) $\lambda = \mu = 0$. Пространство Максвелла класса $C_{3,9a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \Phi(x^2 + x^4), \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{34} = -F_{23} = \Psi(x^2 + x^4, x^3), \end{gathered} \tag{8.12}$$

где $\Phi(u)$ и $\Psi(u, v)$ — произвольные функции.

Предложение 65. *Если $\Phi(u) \neq \mathrm{const}$ и $\partial\Psi/\partial x^3 \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.12), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,9a}$.*

б) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$. Пространство Максвелла класса $C_{3,9b}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где

$$\begin{gathered} C_1 = -\frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^1 + a_2, \quad C_2 = \frac{\tilde{x}^3}{\mu}\left(-\frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^1 + a_2\right) + \mu\Phi(\tilde{x}^1), \\ C_3 = \frac{(\tilde{x}^3)^2}{2\mu^2}\left(-\frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^1 + a_2\right) + \tilde{x}^3\Phi(\tilde{x}^1) + \Psi_1(\tilde{x}^1), \\ C_4 = -C_1 - C_3, \quad C_5 = a_1, \quad C_6 = \frac{a_1}{\mu}\tilde{x}^3 - \mu^2\Phi'(\tilde{x}^1), \\ C_7 = -\frac{a_1}{2\mu^2}(\tilde{x}^3)^2 + \mu\tilde{x}^3\Phi'(\tilde{x}^1) + \Psi_2(\tilde{x}^1), \quad C_8 = C_5 + C_7, \end{gathered} \tag{8.13}$$

$a_1, a_2 = \mathrm{const}$, а $\Phi(\tilde{x}^1)$, $\Psi_1(\tilde{x}^1)$ и $\Psi_2(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции, координаты $\{\tilde{x}^i\}$ связаны с $\{x^i\}$ формулами (3.38).

Для получения примера положим в (8.13) $a_1 = a_2 = 0$, $\Psi_1(\tilde{x}^1) = \Psi_2(\tilde{x}^1) = 0$. Получим, учитывая замену (3.38),

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \mu x^3 \Phi'(x^2 + x^4), \quad F_{13} = \mu \Phi(x^2 + x^4), \\ F_{23} = -F_{34} = x^3 \Phi(x^2 + x^4), \quad F_{24} = -\mu^2 \Phi'(x^2 + x^4). \end{gathered} \tag{8.14}$$

Предложение 66. *Если функции $\Phi(\tilde{x}^1)$ и $\Phi'(\tilde{x}^1)$ линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.14), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,9b}$.*

в) $\lambda \neq 0$, $\mu = 0$. Пространство Максвелла класса $C_{3,9c}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где $C_2 = C_2(\tilde{x}^3)$, $C_3 = C_3(\tilde{x}^3)$ и $C_7 = C_7(\tilde{x}^3)$ — произвольные функции, а

$$\begin{gathered} C_1 = \lambda C_7'(\tilde{x}^3), \quad C_4 = -\lambda C_7'(\tilde{x}^3) - C_3(\tilde{x}^3), \quad C_5 = A, \\ C_6 = B, \quad C_8 = C_7(\tilde{x}^3) + A \qquad (A, B = \mathrm{const}), \end{gathered} \tag{8.15}$$

связь между координатами задаётся формулами (3.40), штрих означает дифференцирование по $\tilde{x}^3$.

Для получения примера положим $C_2 = \Phi(\tilde{x}^3)$, $C_3 = C_7 = A = B = 0$. Получим, учитывая замену (3.40),

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \Phi(x^3), \quad F_{23} = -F_{34} = \frac{x^2 + x^4}{\lambda} \Phi(x^3). \tag{8.16}$$

Предложение 67. *Если $\Phi'(x^3) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.16), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,9c}$.*

8.2.3. Класс $C_{3,10}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,10} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_1 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$ ($\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$) является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7c} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_2 - e_4\}$, соответствующей классу $C_{2,7c}$. Поэтому класс $C_{3,10}$ содержится в $C_{2,7c}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,10}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где $C_k = C_k(\mu\tilde{x}^1 - 2\lambda\tilde{x}^3)$ ($k = 2, 3, 7$) — произвольные функции, а остальные C_k выражаются из соотношений

$$\begin{gathered} C_1 = 2\lambda^2(\mu C_3' - C_7'), \quad C_4 = -C_1 - C_3, \quad C_5 = A + \mu C_1, \\ C_6 = B, \quad C_8 = C_5 + C_7 \qquad (A, B = \mathrm{const}), \end{gathered} \tag{8.17}$$

связь между координатами задаётся формулами (3.40), штрих означает дифференцирование.

Для получения примера положим $C_2 = \Phi(\mu\tilde{x}^1 - 2\lambda\tilde{x}^3)$, $C_3 = C_7 = A = B = 0$. Получим, учитывая замену (3.40),

$$F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \Phi(u), \quad F_{23} = -F_{34} = \frac{x^2 + x^4}{\lambda} \Phi(u), \tag{8.18}$$

где $u = \mu\tilde{x}^1 - 2\lambda\tilde{x}^3 = 2\lambda(\mu x^1 - x^3) + (x^2 + x^4)^2$.

Предложение 68. *Если $\Phi'(u) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.18), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,10}$.*

8.2.4. Класс $C_{3,10a}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,10a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1 + \mu e_3, e_2 - e_4\}$ ($\mathcal{L}_{3,10}$ при $\lambda = 0$ и $\mu \neq 0$) является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_2 - e_4\}$, соответствующей классу $C_{2,7a}$. Поэтому класс $C_{3,10a}$ содержится в $C_{2,7a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,10a}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где

$$\begin{gathered} C_1 = \frac{a_1}{\mu\tilde{x}^1} + a_2, \quad C_2 = \frac{\tilde{x}^3 C_1 - b_1(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1}, \quad C_3 = \frac{\tilde{x}^3 C_2}{\mu\tilde{x}^1} + b_2(\tilde{x}^1), \\ C_4 = -C_1 - C_3, \quad C_5 = \frac{a_1}{\tilde{x}^1}, \quad C_6 = \frac{a_1\tilde{x}^3}{\mu(\tilde{x}^1)^2} b_1'(\tilde{x}^1), \\ C_7 = -\frac{a_1(\tilde{x}^3)^2}{2\mu^2(\tilde{x}^1)^3} - \frac{\tilde{x}^3 b_1'(\tilde{x}^1)}{\mu\tilde{x}^1} + b_3(\tilde{x}^1), \quad C_8 = C_5 + C_7, \end{gathered} \tag{8.19}$$

$a_1, a_2 = \mathrm{const}$, $b_1(\tilde{x}^1)$, $b_2(\tilde{x}^1)$ и $b_3(\tilde{x}^1)$ — произвольные функции, а связь между координатами задаётся формулами (3.34), штрих означает дифференцирование по $\tilde{x}^1$.

Полагая в (8.19) $a_1 = 0$, $a_2 = A$, $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ и учитывая замену (3.34), получим

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = F_{24} = 0, \quad F_{13} = \frac{A}{\mu}\frac{x^3 - \mu x^1}{x^2 + x^4}, \\ F_{23} = \frac{A}{2\mu^2}\frac{(x^3 - \mu x^1)^2}{(x^2 + x^4)^2}, \quad F_{34} = -F_{23} - A. \end{gathered} \tag{8.20}$$

Предложение 69. *Если $A \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.20), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,10a}$.*

8.2.5. Класс $C_{3,15}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,15} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{24}, e_3\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,12a}$. Поэтому класс $C_{3,15}$ содержится в $C_{2,12a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,15}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = -\frac{C_5}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_7, \quad F_{13} = 0, \quad F_{24} = C_5\tilde{x}^2 + C_6, \\ F_{14} = -\frac{C_5}{2}(\tilde{x}^2)^2 - C_6\tilde{x}^2 + C_8, \quad F_{23} = -F_{34} = \frac{A}{\tilde{x}^1} \qquad (A = \mathrm{const}), \end{gathered} \tag{8.21}$$

где функции $C_k = C_k(\tilde{x}^1, \tilde{x}^4)$ ($k = 5, \ldots, 8$) удовлетворяют уравнению (3.37d), второму из уравнений (3.36) и системе

$$\begin{gathered} \tilde{x}^1\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^1} + (\tilde{x}^1)^2\frac{\partial C_5}{\partial\tilde{x}^4} - C_5 = 0, \\ \tilde{x}^1\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^1} + (\tilde{x}^1)^2\frac{\partial C_6}{\partial\tilde{x}^4} = 0, \quad \tilde{x}^1\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^1} + (\tilde{x}^1)^2\frac{\partial C_7}{\partial\tilde{x}^4} + C_8 = 0, \end{gathered} \tag{8.22}$$

связь между координатами задаётся формулами (3.34).

Пусть в (8.9) функция Φ не зависит от x^3. Тогда вместо (8.9) получим

$$\begin{gathered}F_{12}=-\frac{1}{x^2+x^4}\Phi-\left(\frac{2(x^1)^2}{x^2+x^4}+2(x^2)^2\right)\Phi',\quad F_{13}=F_{23}=F_{34}=0,\\ F_{14}=-\frac{1}{x^2+x^4}\Phi-\left(\frac{2(x^1)^2}{x^2+x^4}-2(x^4)^2\right)\Phi',\quad F_{24}=-2x^1\Phi',\end{gathered}\tag{8.23}$$

где $\Phi=\Phi(t)=\Phi((x^1)^2+(x^2)^2-(x^4)^2)$ — произвольная функция.

Предложение 70. *Если функции $\Phi(t)$ и $\Phi'(t)$ линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.23), *допускает трёхмерную группу $G_S=G_{3,15}$.*

8.2.6. Класс $C_{3,17}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,17}=L\{e_{12}-e_{14},e_{23}+e_{34},e_{24}\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,12a}$. Поэтому $C_{3,17}\subset C_{2,12a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,17}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.35), где

$$\begin{gathered}C_1=\frac{Ay_1}{y_4^2},\quad C_3=-\frac{A(y_1^2+y_3^2)}{2y_1y_4^2}-B\frac{y_3}{y_1},\quad C_4=-C_1-C_3,\\ C_6=\frac{Ay_3}{y_4^2}+B,\quad C_2=C_5=C_7=C_8=0\qquad(A,B=\mathrm{const}),\end{gathered}\tag{8.24}$$

а

$$y_1=\tilde{x}^1,\quad y_3=\tilde{x}^3,\quad y_4=\tilde{x}^4-\frac{1}{2}(\tilde{x}^1)^2+\frac{1}{2}(\tilde{x}^3)^2,$$

связь между координатами задаётся формулами (3.34).

Потенциал вида

$$\begin{gathered}A_i=\left(\Phi,-\frac{x^1}{x^2+x^4}\Phi,0,-\frac{x^1}{x^2+x^4}\Phi\right),\\ \Phi=\Phi(t)=\Phi((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2),\end{gathered}$$

принадлежит классу $P_{3,17}$. Ему соответствует следующий тензор F_{ij}:

$$\begin{gathered}F_{12}=-\frac{1}{x^2+x^4}\Phi-\left(\frac{2(x^1)^2}{x^2+x^4}+2x^2\right)\Phi',\quad F_{13}=-2x^3\Phi',\quad F_{24}=-2x^1\Phi',\\ F_{14}=-\frac{1}{x^2+x^4}\Phi-\left(\frac{2(x^1)^2}{x^2+x^4}-2x^4\right)\Phi',\quad F_{23}=-F_{34}=\frac{2x^1x^3}{x^2+x^4}\Phi'.\end{gathered}\tag{8.25}$$

Предложение 71. *Если $\Phi''(t)\neq0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.25), *допускает трёхмерную группу $G_S=G_{3,17}$.*

8.2.7. Класс $C_{3,18}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,18} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13} + \lambda(e_2 - e_4)\}$ есть расширение алгебры $\mathcal{L}_{2,11a}$. Поэтому $C_{3,18} \subset C_{2,11a}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,18}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \frac{x^1}{x^2 + x^4}\Phi(x^2 + x^4), \quad F_{24} = \Phi(x^2 + x^4), \\ F_{23} = -F_{34} = -\frac{x^3}{x^2 + x^4}\Phi(x^2 + x^4), \quad F_{13} = 0, \end{gathered} \tag{8.26}$$

где $\Phi(t)$ — произвольная функция.

Предложение 72. *Если $\Phi'(t) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.26), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,18}$.*

8.3. Четырёх- и пятимерные подгруппы

8.3.1. Класс $C_{4,9}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,9} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_2, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,8}$. Поэтому $C_{4,9} \subset C_{3,8}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,9}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = -\frac{b_3}{2}(\tilde{x}^2)^2 - b_4\tilde{x}^2 + b_5, \quad F_{13} = b_1, \quad F_{14} = F_{12} + b_3, \\ F_{23} = -F_{34} = b_1\tilde{x}^2 + b_2, \quad F_{24} = b_3\tilde{x}^2 + b_4 \qquad (b_k = \mathrm{const}), \end{gathered} \tag{8.27}$$

где $\tilde{x}^2 = (x^2 + x^4)/\lambda$.

Положим в (8.27) $b_3 = B = \mathrm{const}$, $b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = 0$:

$$\begin{gathered} F_{12} = -\frac{B}{2\lambda^2}(x^2 + x^4)^2, \quad F_{13} = F_{23} = F_{34} = 0, \\ F_{14} = F_{12} + B, \quad F_{24} = \frac{B}{\lambda}(x^2 + x^4). \end{gathered} \tag{8.28}$$

Предложение 73. *Если $B \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.28), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,9}$.*

8.3.2. Класс $C_{4,9a}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,9a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_1, e_3, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,7}$ (при $\lambda = \mu = 0$). Поэтому $C_{4,9a} \subset C_{2,7a}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,9a}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = \Phi(x^2 + x^4), \quad F_{13} = F_{24} = 0, \quad F_{23} = -F_{34} = \Psi(x^2 + x^4), \tag{8.29}$$

где $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ — произвольные функции.

Предложение 74. *Если функции* Φ, Ψ *и* $(x^2+x^4)\Phi'$ *линейно независимы, то пространство Максвелла, определяемое тензором* F_{ij} *вида* (8.29), *допускает пятимерную группу* G_S, *соответствующую алгебре*

$$L\{e_{12}-e_{14}, e_{23}+e_{34}, e_1, e_3, e_2-e_4\}. \tag{8.30}$$

Не существует пространств Максвелла с группой симметрий $G_S = G_{4,9a}$.

8.3.3. Классы $C_{4,12a}$ и $C_{4,12b}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,12} = L\{e_{12}-e_{14}+\mu e_3, e_{23}+e_{34}+\nu e_2, e_1, e_2-e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,9}$ (при $\lambda = 0$). Поэтому соответствующие ей классы при различных значениях параметров μ и ν содержатся в $C_{3,9a}$ или $C_{3,9b}$.

а) $\mu \neq 0$, $\nu = 0$. Пространство Максвелла класса $C_{4,12a}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{4,12a} = L\{e_{12}-e_{14}+\mu e_3, e_{23}+e_{34}, e_1, e_2-e_4\}$, задаётся тензором F_{ij} вида (8.29).

Предложение 75. *Не существует пространств Максвелла с группой симметрий* $G_S = G_{4,12a}$.

б) $\mu = 0$, $\nu \neq 0$. Пространство Максвелла класса $C_{4,12b}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{4,12b} = L\{e_{12}-e_{14}, e_{23}+e_{34}+\nu e_2, e_1, e_2-e_4\}$ ($\mathcal{L}_{4,12}$ при $\mu = 0$), задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = A = \mathrm{const}, \quad F_{13} = F_{24} = 0, \\ F_{34} = -F_{23} = \Psi\left(x^3 - \frac{1}{2\nu}(x^2+x^4)^2\right), \end{gathered} \tag{8.31}$$

где $\Psi(t)$ — произвольная функция.

Предложение 76. *Если* $A \neq 0$ *и* $\Psi'(t) \neq 0$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* F_{ij} *вида* (8.31), *допускает четырёхмерную группу* $G_S = G_{4,12b}$.

в) $\mu \neq 0$ и $\nu \neq 0$. В этом случае алгебре $\mathcal{L}_{4,12}$ соответствует класс пространств Максвелла $C_{6,3}$, задаваемый формулами (5.18).

Предложение 77. *Не существует пространств Максвелла с группой симметрий* $G_S = G_{4,12c}$ ($G_{4,12}$ *при* $\mu \neq 0$ *и* $\nu \neq 0$).

8.3.4. Класс $C_{4,20}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,20} = L\{e_{12}-e_{14}, e_{23}+e_{34}, e_{13}, e_{24}\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,17}$. Поэтому $C_{4,20} \subset C_{3,17}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,20}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = F_{14} = \frac{Bx^1}{x^2+x^4}, \quad F_{23} = -F_{34} = -\frac{Bx^3}{x^2+x^4}, \\ F_{13} = 0, \quad F_{24} = B \qquad (B = \mathrm{const} \neq 0). \end{gathered} \tag{8.32}$$

Предложение 78. *Пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (8.32)*, допускает пятимерную группу $G_S = G_{5,9}$, соответствующую алгебре $\mathcal{L}_{5,9} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_{13}, e_{24}, e_2 - e_4\}$. Не существует пространств Максвелла с группой симметрий $G_S = G_{4,20}$.*

8.3.5. Класс $C_{5,5}$

Алгебра $\mathcal{L}_{5,5} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34} + \lambda e_2, e_2 - e_4, e_1, e_3\}$ есть расширение алгебры $\mathcal{L}_{4,9a}$. Поэтому $C_{5,5} \subset C_{4,9a}$.

Предложение 79. *При $\lambda = 0$ класс пространств Максвелла $C_{5,5}$ совпадает с $C_{4,9a}$ и задаётся формулами* (8.29)*; при $\lambda \neq 0$ он совпадает с $C_{6,3}$ и задаётся формулами* (5.18).

9. Пространства Максвелла, допускающие пропорциональные бивращения

Здесь будут описаны классы пространств Максвелла, допускающих пропорциональное бивращение, не вошедшие в предыдущие разделы. Они получены Е. Г. Мороховой [11]. Всюду используется замена координат (3.42).

9.1. Двумерные подгруппы

9.1.1. Класс $C_{2,9}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,9} = L\{e_{13}+\lambda e_{24}, e_2-e_4\}$ соответствует группа $G_{2,9}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций вдоль изотропного направления. Так как $\mathcal{L}_{1,5} \subset \mathcal{L}_{2,9}$, то класс $C_{2,9}$ является подклассом класса $C_{1,5}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,9}$ задаётся тензором F_{ij} вида (3.43), (3.44) при выполнении следующих условий:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F_{13}}{\partial \rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial F_{13}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho}(c_1 + c_2) = \frac{\partial}{\partial \rho}(c_3 + c_4) = 0, \\
\frac{\partial c_1}{\partial \rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_1}{\partial \theta} - \frac{c_2}{\rho} - \frac{c_3}{\lambda\rho} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial \rho} - \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_2}{\partial \theta} - \frac{c_1}{\rho} - \frac{c_4}{\lambda\rho} = 0, \\
\frac{\partial c_3}{\partial \rho} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_3}{\partial \theta} + \frac{c_4}{\rho} - \frac{c_1}{\lambda\rho} = 0, \quad \frac{\partial c_4}{\partial \rho} + \frac{1}{\lambda\rho}\frac{\partial c_4}{\partial \theta} + \frac{c_3}{\rho} - \frac{c_2}{\lambda\rho} = 0.
\end{gathered} \tag{9.1}$$

Часть класса $P_{2,9}$ потенциалов A_i можно задать следующим образом:

$$A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = -A_4 = \rho\Phi(r, \lambda\theta + \ln\rho), \tag{9.2}$$

где Φ — произвольная функция двух переменных. В частном случае $\Phi = \Phi(r)$ этому потенциалу соответствует следующий тензор F_{ij}:

$$
\begin{gathered}
F_{12} = -F_{14} = \rho e^{\lambda\varphi}\Phi'(r)\cos(\theta-\varphi), \quad F_{13} = 0, \\
F_{23} = F_{34} = -\rho e^{\lambda\varphi}\Phi'(r)\sin(\theta-\varphi), \quad F_{24} = 2\Phi(r).
\end{gathered} \tag{9.3}
$$

Предложение 80. *Если $\Phi'(r) \neq 0$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (9.3) *допускает двумерную группу $G_S = G_{2,9}$.*

9.1.2. Класс $C_{2,10}$

Алгебре $\mathcal{L}_{2,10} = L\{e_{13}, e_{24}\} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_{24}\}$ соответствует группа $G_{2,10}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и псевдовращений. Так как $\mathcal{L}_{1,5} \subset \mathcal{L}_{2,10}$, то $C_{2,10} \subset C_{1,5}$. Пространство Максвелла класса $C_{2,10}$ задаётся тензором F_{ij}, определяемым формулами (3.43) и

$$
F_{13} = F_{13}(\rho, r), \quad F_{24} = F_{24}(\rho, r), \tag{9.4}
$$

где

$$
\begin{gathered}
c_1 = -k_3\sin\theta + k_4\cos\theta, \quad c_2 = -k_1\sin\theta + k_2\cos\theta, \\
c_3 = k_3\cos\theta + k_4\sin\theta, \quad c_4 = k_1\cos\theta + k_2\sin\theta,
\end{gathered} \tag{9.5}
$$

а функции $F_{13}(\rho, r)$, $F_{24}(\rho, r)$ и $k_i = k_i(\rho, r)$ удовлетворяют уравнениям

$$
\frac{\partial F_{24}}{\partial r} + \frac{\partial k_1}{\partial \rho} + \frac{k_1}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial F_{13}}{\partial \rho} - \frac{\partial k_4}{\partial r} - \frac{k_4}{r} = 0, \quad k_2 = \frac{K}{r\rho} \qquad (K = \mathrm{const}). \tag{9.6}
$$

Часть класса $P_{2,10}$ потенциалов можно задать следующим образом:

$$
A_i = (0, \Phi(r,\rho)e^{\lambda\varphi}, 0, -\Phi(r,\rho)e^{\lambda\varphi}),
$$

где $\Phi = \Phi(r, \rho)$ — произвольная функция. Этому потенциалу соответствует следующий тензор F_{ij}:

$$
\begin{gathered}
F_{12} = -F_{14} = e^{\lambda\varphi}\Phi'_r(r,\rho)\cos(\theta-\varphi), \quad F_{13} = 0, \\
F_{23} = F_{34} = -e^{\lambda\varphi}\Phi'_r(r,\rho)\sin(\theta-\varphi), \quad F_{24} = -\left(\Phi'_\rho(r,\rho) + \frac{1}{\rho}\Phi(r,\rho)\right).
\end{gathered} \tag{9.7}
$$

Предложение 81. *Если выполнены условия*

$$
\Phi''_{r\rho} + \frac{1}{\rho}\Phi'_r \neq 0, \quad \Phi''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\Phi'_\rho - \frac{1}{\rho^2}\Phi \neq 0,
$$

то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида (9.7)*, допускает двумерную группу $G_S = G_{2,10}$.*

9.2. Трёхмерные подгруппы

9.2.1. Класс $C_{3,11}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,11} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3\}$ соответствует группа $G_{3,11}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций в направлениях векторов евклидовой плоскости. Пространство Максвелла класса $C_{3,11}$ задаётся тензором F_{ij}, определяемым формулами (3.43) и

$$F_{13} = \mathrm{const}, \quad F_{24} = F_{24}(\rho), \tag{9.8}$$

где $F_{24}(\rho)$, $c_2 = c_2(\rho)$, $c_4 = c_4(\rho)$ — произвольные функции, а

$$c_1 = \lambda(c_4 + \rho c_4'), \quad c_3 = -\lambda(c_2 + \rho c_2'). \tag{9.9}$$

Полагая в (9.8), (9.9) и (3.43) $c_2 = \Phi(\rho)$, $c_4 = 0$ и $F_{24} = \Psi(\rho)$, получим пример тензора F_{ij} класса $C_{3,11}$:

$$\begin{gathered}
F_{12} = -\Phi(\rho)\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi - \lambda(\Phi(\rho) + \rho\Phi'(\rho))\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi,\\
F_{14} = \Phi(\rho)\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi + \lambda(\Phi(\rho) + \rho\Phi'(\rho))\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi,\\
F_{23} = \Phi(\rho)\operatorname{sh}\lambda\varphi\cos\varphi - \lambda(\Phi(\rho) + \rho\Phi'(\rho))\operatorname{ch}\lambda\varphi\sin\varphi,\\
F_{34} = \Phi(\rho)\operatorname{ch}\lambda\varphi\cos\varphi - \lambda(\Phi(\rho) + \rho\Phi'(\rho))\operatorname{sh}\lambda\varphi\sin\varphi,\\
F_{13} = \mathrm{const}, \quad F_{24} = \Psi(\rho).
\end{gathered} \tag{9.10}$$

Предложение 82. *Если $\Phi(\rho) \neq \mathrm{const}$ и $\Psi(\rho) \neq \mathrm{const}$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (9.10), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,11}$.*

9.2.2. Класс $C_{3,12}$

Алгебре $\mathcal{L}_{3,12} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_2, e_4\}$ соответствует группа $G_{3,12}$, состоящая из всевозможных композиций пропорциональных бивращений и трансляций в направлениях векторов псевдоевклидовой плоскости. Пространство Максвелла класса $C_{3,12}$ задаётся тензором F_{ij}, определяемым формулами (3.43) и

$$F_{13} = F_{13}(r), \quad F_{24} = \mathrm{const}, \tag{9.11}$$

где

$$\begin{gathered}
c_1 = \sin\theta(t_1\operatorname{ch}\lambda\theta + t_2\operatorname{sh}\lambda\theta) - \cos\theta(t_3\operatorname{ch}\lambda\theta + t_4\operatorname{sh}\lambda\theta),\\
c_2 = -\sin\theta(t_1\operatorname{sh}\lambda\theta + t_2\operatorname{ch}\lambda\theta) + \cos\theta(t_3\operatorname{sh}\lambda\theta + t_4\operatorname{ch}\lambda\theta),\\
c_3 = -\cos\theta(t_1\operatorname{ch}\lambda\theta + t_2\operatorname{sh}\lambda\theta) - \sin\theta(t_3\operatorname{ch}\lambda\theta + t_4\operatorname{sh}\lambda\theta),\\
c_4 = \cos\theta(t_1\operatorname{sh}\lambda\theta + t_2\operatorname{ch}\lambda\theta) + \sin\theta(t_3\operatorname{sh}\lambda\theta + t_4\operatorname{ch}\lambda\theta),
\end{gathered} \tag{9.12}$$

причём функции $F_{13}(r)$, $t_3 = t_3(r)$, $t_4 = t_4(r)$ произвольны, а

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda}(t_4 + rt_4'), \quad t_2 = -\frac{1}{\lambda}(t_3 + rt_3'). \tag{9.13}$$

Предложение 83. *Если $F_{13} \neq \mathrm{const}$ и $t_3 \neq \mathrm{const}$ (либо $t_4 \neq \mathrm{const}$), то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} по формулам* (3.43), (9.11), (9.12) *и* (9.13), *допускает трёхмерную группу $G_S = G_{3,12}$.*

9.2.3. Класс $C_{3,13}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,13} = L\{e_{13}, e_{24}, e_2 - e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,10}$, поэтому класс $C_{3,13}$ содержится в классе $C_{2,10}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,13}$ задаётся тензором F_{ij}, определяемым формулами (3.43), (9.5) и

$$F_{13} = \Phi_1(r), \quad F_{24} = \Phi_2(r), \tag{9.14}$$

где

$$k_1 = -\frac{1}{2}\Phi_2'(r)\rho^2 + \Phi_3(r), \quad k_2 = -k_4 = \frac{K}{r\rho}, \quad k_3 = -\frac{1}{2}\Phi_2'(r)\rho^2 - \Phi_3(r) \tag{9.15}$$

($K = \text{const}$, $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$, $\Phi_3(r)$ — произвольные функции).

9.3. Четырёхмерные подгруппы

9.3.1. Класс $C_{4,7}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,7} = L\{e_{13} + \lambda e_{24}, e_1, e_3, e_2 + e_4\}$ является расширением алгебры $\mathcal{L}_{3,11}$, поэтому класс $C_{4,7}$ содержится в классе $C_{3,11}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,7}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned} -F_{12} = F_{14} = (c_1 \sin\varphi - c_2 \cos\varphi)e^{\lambda\varphi}, \quad F_{13} = B = \text{const}, \\ F_{23} = F_{34} = (c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi)e^{\lambda\varphi}, \quad F_{24} = E = \text{const}, \end{aligned} \tag{9.16}$$

где $c_1 = c_1(\rho)$, $c_2 = c_2(\rho)$ — произвольные функции.

Предложение 84. *Пусть выполнены следующие два условия*: $c_1 \neq \text{const}$ *или* $c_2 \neq \text{const}$; $B \neq 0$ *или* $E \neq 0$. *Тогда пространство Максвелла, определяемое тензором* F_{ij} *вида* (9.16) *допускает четырёхмерную группу* $G_S = G_{4,7}$.

9.3.2. Класс $C_{4,10}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,10} = L\{e_{13}, e_{24}, e_1, e_3,\}$ содержит $\mathcal{L}_{2,10}$ в качестве подалгебры. Поэтому класс $C_{4,10}$ является подклассом класса $C_{2,10}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,10}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = B = \text{const}, \quad F_{24} = F_{24}(\rho) \tag{9.17}$$

($F_{24}(\rho)$ — произвольная функция).

Предложение 85. *Если* $B \neq 0$ *и* $F_{24}(\rho) \neq \text{const}$, *то пространство Максвелла, определяемое тензором* F_{ij} *вида* (9.17), *допускает четырёхмерную группу* $G_S = G_{4,10}$.

9.3.3. Класс $C_{4,11}$

Алгебра $\mathcal{L}_{4,11} = L\{e_{13}, e_{24}, e_2, e_4\}$ также является расширением алгебры $\mathcal{L}_{2,10}$. Поэтому $C_{4,11} \subset C_{2,10}$. Пространство Максвелла класса $C_{4,11}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$F_{12} = F_{14} = F_{23} = F_{34} = 0, \quad F_{13} = F_{13}(r), \quad F_{24} = E = \mathrm{const}. \tag{9.18}$$

($F_{13}(r)$ — произвольная функция).

Предложение 86. *Если $E \neq 0$ и $F_{13}(r) \neq \mathrm{const}$, то пространство Максвелла, определяемое тензором F_{ij} вида* (9.18), *допускает четырёхмерную группу $G_S = G_{4,11}$.*

10. Остальные классы

В настоящем разделе будут описаны классы пространств Максвелла, по разным причинам не вошедшие в предыдущие разделы.

10.1.1. Классы $C_{3,14a}$, $C_{3,14b}$ и $C_{3,14c}$

Алгебре

$$\mathcal{L}_{3,14} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1 + \mu e_3, e_{23} + e_{34} + \nu e_1 + \lambda e_3, e_2 - e_4\}$$

соответствует группа $G_{3,14}$, состоящая из всевозможных композиций параболических винтов двух видов и трансляций вдоль изотропного направления. Описание соответствующего класса пространств Максвелла удалось получить в трёх частных случаях.

а) $\lambda = \mu = \nu = 0$. Пространство Максвелла класса $C_{3,14a}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{3,14a} = L\{e_{12} - e_{14}, e_{23} + e_{34}, e_2 - e_4\}$, задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered}
F_{13} = \frac{K_1 x^1 + K_2 x^3 + K_3}{(x^2 + x^4)^2}, \quad F_{24} = \frac{K_2 x^1 - K_1 x^3}{(x^2 + x^4)^2} + \Phi_1(x^2 + x^4), \\
F_{14} = \frac{K_2((x^1)^2 - (x^3)^2) - 2K_1 x^1 x^3 - 2K_3 x^3}{2(x^2 + x^4)^3} + \frac{x^1 \Phi_1(x^2 + x^4)}{x^2 + x^4} + \Phi_2(x^2 + x^4), \\
F_{12} = F_{14} + \frac{K_2}{x^2 + x^4}, \\
F_{34} = \frac{K_1((x^1)^2 - (x^3)^2) + 2K_2 x^1 x^3 + 2K_3 x^1}{2(x^2 + x^4)^3} + \frac{x^3 \Phi_1(x^2 + x^4)}{x^2 + x^4} + \Phi_3(x^2 + x^4), \\
F_{23} = -F_{34} + \frac{K_1}{x^2 + x^4},
\end{gathered} \tag{10.1}$$

где $K_1, K_2, K_3 = \mathrm{const}$, а $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ и $\Phi_3(t)$ — произвольные функции одной переменной.

б) $\lambda \neq 0$ и $\mu = \nu = 0$. Пространство Максвелла класса $C_{3,14b}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{3,14b} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_1, e_{23} + e_{34} + \lambda e_3, e_2 - e_4\}$, задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{aligned}
&F_{12} = F_{14} + \frac{K_2}{x^2 + x^4 - \lambda}, \quad F_{13} = \frac{K_1 x^1 + K_2 x^3 + K_3}{(x^2 + x^4)^2 - \lambda^2},\\
&F_{14} = \frac{K_2\left(x^1\right)^2}{2(x^2 + x^4 - \lambda)^3} - \frac{2K_1 x^1 x^3 + K_2 (x^3)^2 + 2K_3 x^3}{2(x^2 + x^4 + \lambda)^2 (x^2 + x^4 - \lambda)} +\\
&\quad + \frac{x^1 \Phi_1(x^2 + x^4)}{x^2 + x^4 - \lambda} + \Phi_2(x^2 + x^4),\\
&F_{24} = \frac{K_2 x^1}{(x^2 + x^4 - \lambda)^2} - \frac{K_1 x^3}{(x^2 + x^4 + \lambda)^2} + \Phi_1(x^2 + x^4),\\
&F_{34} = -\frac{K_1 (x^3)^2}{2(x^2 + x^4 + \lambda)^3} + \frac{K_1 (x^1)^2 + 2K_2 x^1 x^3 + 2K_3 x^1}{2(x^2 + x^4 - \lambda)^2 (x^2 + x^4 + \lambda)} +\\
&\quad + \frac{x^3 \Phi_1(x^2 + x^4)}{x^2 + x^4 + \lambda} + \Phi_3(x^2 + x^4),\\
&F_{23} = -F_{34} + \frac{K_1}{x^2 + x^4 + \lambda}.
\end{aligned} \tag{10.2}$$

Формулы (10.2) переходят в (10.1) при $\lambda = 0$.

в) $\lambda = 0$ и $\mu = \nu \neq 0$. Пространство Максвелла класса $C_{3,14c}$, соответствующего алгебре $\mathcal{L}_{3,14c} = L\{e_{12} - e_{14} + \mu e_3, e_{23} + e_{34} + \mu e_1, e_2 - e_4\}$, задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered}
F_{12} = F_{14} + \mu\Psi_1(u) + u\Psi_2(u), \quad F_{13} = x^1\Psi_1(u) + x^3\Psi_2(u) + C_1(u),\\
F_{23} = -F_{34} + u\Psi_1(u) - \mu\Psi_2(u), \quad F_{24} = x^1\Psi_2(u) - x^3\Psi_1(u) + C_2(u),\\
F_{14} = F_{14}(x^1, x^3, u), \quad F_{34} = F_{34}(x^1, x^3, u) \qquad (u = x^2 + x^4),
\end{gathered} \tag{10.3}$$

где

$$\begin{aligned}
\Psi_1(u) &= \frac{(K_1 + 2K_2\mu)(u^2 - \mu^2) - 2K_3\mu u}{(u^2 + \mu^2)^2},\\
\Psi_2(u) &= -\frac{2K_1\mu u + 4K_2\mu^2 u + K_3(u^2 - \mu^2)}{(u^2 + \mu^2)^2},\\
C_1(u) &= \frac{K_4 - 2\mu\Phi(u)}{u^2 + \mu^2}, \quad C_2(u) = \Phi'(u)
\end{aligned} \tag{10.4}$$

($K_1, \ldots, K_4 = \text{const}$, $\Phi(u)$ — произвольная функция), а F_{14} и F_{34} удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
\partial_1 F_{14} = \partial_3 F_{34} &= -\frac{\mu F_{13} - u F_{24}}{u^2 + \mu^2},\\
\partial_3 F_{14} = -\partial_1 F_{34} &= \frac{u F_{13} + \mu F_{24}}{u^2 + \mu^2}.
\end{aligned} \tag{10.5}$$

10.1.2. Класс $C_{3,20}$

Алгебра $\mathcal{L}_{3,20} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$ соответствует трёхмерной группе $G_{3,20}$ всех поворотов относительно начала координат в подпространстве пространства Минковского $\mathbb{R}^3_0 = \{x \in \mathbb{R}^4_1 \colon x^4 = 0\}$. Пространство Максвелла класса $C_{3,20}$ задаётся тензором F_{ij} вида

$$\begin{gathered} F_{12} = -A\frac{x^3}{r^3}, \quad F_{13} = A\frac{x^2}{r^3}, \quad F_{23} = -A\frac{x^1}{r^3} \qquad (A = \mathrm{const}), \\ F_{14} = -x^1\Phi(r, x^4), \quad F_{24} = -x^2\Phi(r, x^4), \quad F_{34} = -x^1\Phi(r, x^4). \end{gathered} \tag{10.6}$$

10.1.3. Класс $C_{4,16}$

Алгебре $\mathcal{L}_{4,16} = L\{e_{12} - e_{14} + \lambda e_3, e_{23} + e_{34} + \lambda e_1, e_{13}, e_2 - e_4\}$ соответствует пустой класс $C_{4,16}$.

10.1.4. Класс $C_{6,1}$

Алгебра $\mathcal{L}_{6,1} = L\{e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{14}, e_{24}, e_{34}\}$ соответствует группе Лоренца. Класс пространств Максвелла, соответствующий группе $G_{6,1}$, пуст.

Автор признателен А. В. Болсинову и А. Т. Фоменко за конструктивные замечания, способствовавшие уточнению постановки задачи.

Литература

[1] Белова О. Г., Зарембо А. Н., Паринов М. А., Сергеева О. О., Угарова Ю. Г. Классификация статических электромагнитных полей по подгруппам группы Пуанкаре // Научные труды Ивановского гос. ун-та. Математика. Вып. 3. — 2000. — С. 11—22.

[2] Белько И. В. Подгруппы группы Лоренца—Пуанкаре // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1971. — № 1. — С. 5—13.

[3] Бессе А. Л. Многообразия Эйнштейна. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1990.

[4] Воробьёв А. И. Групповая классификация пространств Максвелла, допускающих гиперболические винты // Научные труды Ивановского гос. ун-та. Математика. Вып. 4. — 2001. — С. 35—42.

[5] Воробьёв А. И. Классификация потенциальных структур, инвариантных относительно гиперболических винтов // Математика и её приложения: Журнал Ивановского мат. об-ва. — 2004. — № 1. — С. 41—50.

[6] Иванова А. С., Паринов М. А. Первые интегралы уравнений Лоренца для некоторых классов электромагнитных полей // Труды МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2002. — Т. 236. — С. 197—203.

[7] Кошелева Н. А., Курамшина А. К., Паринов М. А. Групповая классификация пространств Максвелла, допускающих эллиптические винты // Научные труды Ивановского гос. ун-та. Математика. Вып. 4. — 2001. — С. 73—82.

[8] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1967.

[9] Львов Д. А., Паринов М. А. Групповая классификация пространств Максвелла, допускающих параболическое вращение // Научные труды Ивановского гос. ун-та. Математика. Вып. 5. — 2002. — С. 51—62.

[10] Морозова Е. В., Паринов М. А. Групповая классификация пространств Максвелла, допускающих трансляции вдоль изотропных прямых // Научные труды Ивановского гос. ун-та. Математика. Вып. 4. — 2001. — С. 87—94.

[11] Морохова Е. Г. Групповая классификация пространств Максвелла, допускающих пропорциональное бивращение // Научные труды Ивановского гос. ун-та. Математика. Вып. 5. — 2002. — С. 63—70.

[12] Паринов М. А. Задача групповой классификации электромагнитных полей // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. ВЗМШ. — Воронеж: ВГУ, 1999. — С. 156.

[13] Паринов М. А. Групповая классификация пространств Максвелла // Современный анализ и его приложения: Тез. докл. ВЗМШ. — Воронеж: ВГУ, 2000. — С. 129—130.

[14] Паринов М. А. Пространства Эйнштейна—Максвелла и уравнения Лоренца. — Иваново: Изд-во ИвГУ, 2003.

[15] Полежаева Н. С., Паринов М. А. Групповая классификация 4-потенциалов, допускающих параболические вращения. — Деп. в ВИНИТИ 31.07.2003, № 1489-В2003. — Иваново: ИвГУ, 2003.

[16] Bacry H., Combe Ph., Sorba P. Connected subgroups of the Poincare group. I // Rep. Math. Phys. — 1974. — Vol. 5, no. 2. — P. 145—186.

[17] Bacry H., Combe Ph., Sorba P. Connected subgroups of the Poincare group. II // Rep. Math. Phys. — 1974. — Vol. 5, no. 3. — P. 361—392.

[18] Combe Ph., Sorba P. Electromagnetic fields with symmetry // Physica. — 1975. — Vol. A80, no. 3. — P. 271—286.

[19] Janner A., Ascher E. Space-time symmetry of linearly polarized electromagnetic plane waves // Lett. Nuovo Cimento. — 1969. — Vol. 2, no. 15. — P. 703—705.

[20] Janner A., Ascher E. Relativistic symmetry groups of uniform electromagnetic fields // Physica. — 1970. — Vol. 48, no. 3. — P. 425—446.

[21] Janner A., Ascher E. Space-time symmetry of transverse electromagnetic plane waves // Helv. Phys. Acta. — 1970. — Vol. 43, no. 3. — P. 296—303.

[22] Parinov M. A. Classes of Maxwell spaces admitting translations // Proceedings of Intern. Conf. on Dynam. Systems and Diff. Equations. Vol. 10, Part 4. — 2003. — P. 157—166.

[23] Vorob'ev A. I. On the classification of Maxwell spaces admitting hyperbolic helices and first integrals of Lorentz equations // Proceedings of Intern. Conf. on Dynam. Systems and Diff. Equations. Vol. 10, Part 4. — 2003. — P. 39—47.