Новое гиперболическое уравнение, обладающее представлением нулевой кривизны*

М. ПОБОРЖИЛ
Силезский университет, Опава
e-mail: Milan.Poboril@math.slu.cz

УДК 517.95+514.763.85

Ключевые слова: гиперболические уравнения, представления нулевой кривизны.

Аннотация

Используя прямой метод вычисления представления нулевой кривизны (ПНК), мы нашли ранее неизвестное гиперболическое уравнение, обладающее ПНК со значениями в $\mathfrak{sl}_2$. Это ПНК не содержит параметров и не сводится к ПНК в собственной подалгебре $\mathfrak{sl}_2$.

Abstract

M. Pobořil, A new hyperbolic equation possessing a zero-curvature representation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 239—241.

Using a direct procedure to compute a zero-curvature representation (ZCR) we find a previously unknown hyperbolic equation which possesses an $\mathfrak{sl}_2$-valued ZCR. This ZCR admits no parameter and is not reducible to a proper subalgebra of $\mathfrak{sl}_2$.

Растущее число публикаций посвящено нелинейным гиперболическим уравнениям

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Задача классификации гиперболических уравнений, интегрируемых в том или ином смысле, до сих пор не решена полностью [1, 2].

Настоящая статья возникла в результате попытки классифицировать все гиперболические уравнения, обладающие невырожденным ПНК со значениями в $\mathfrak{sl}_2$, используя «прямой метод» из [3]. При этом мы нашли одно новое гиперболическое уравнение (4), которое, по-видимому, отсутствует в литературе. Его ПНК не содержит параметр, но тем не менее может быть использовано для построения линейных накрытий, преобразований Бэклунда и т. д.

Пусть E — нелинейное дифференциальное уравнение на функцию двух независимых переменных x, y. Пусть G — матричная группа Ли и $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли. Под представлением нулевой кривизны (ПНК) для уравнения E с коэффициентами из $\mathfrak{g}$ мы будем понимать пару (A, B) $\mathfrak{g}$-значных функций на E, для которых уравнение

$$D_y A - D_x B + [A, B] = 0 \tag{2}$$

*Работа поддержана грантом MSM:J10/98:192400002.

выполняется как следствие E. $\mathfrak{g}$-значное ПНК (A, B) называется приводимым, если (A, B) или любая калибровочно эквивалентная пара $(A^S, B^S) = (S_x S^{-1} + SAS^{-1}, S_x S^{-1} + SBS^{-1})$ принимает значения в собственной подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$, здесь S — произвольная G-значная функция на E. Для теории интегрируемых систем особый интерес представляют неприводимые ПНК с коэффициентами из полупростой алгебры Ли.

Рассмотрим гиперболическое уравнение (1) второго порядка с $\mathfrak{sl}_2$-матрицами A, B, удовлетворяющими уравнению (2), но не сводящимися калибровочным преобразованием к элементам разрешимой подалгебры в $\mathfrak{sl}_2$. Матрицам A и B можно сопоставить так называемую характеристическую матрицу R. Ограничимся рассмотрением нормальной формы J_r матрицы R следующего вида:

$$J_r = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}.$$

Предположим, что матрица A уже приведена к нормальной форме по отношению к действию стабилизатора матрицы J_r:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_2 \\ a_2 & -a_1 a_2 \end{pmatrix},$$

в то время как

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Для произвольной $\mathfrak{g}$-значной функции C на E положим $\hat{D}_x C = D_x C - [A, C]$, $\hat{D}_y C = D_y C - [B, C]$. Рассмотрим следующую систему уравнений в полных производных, состоящую из шести уравнений для шести неизвестных (a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, r):

$$D_y A - D_x B + [A, B] = 0, \quad \hat{D}_x \hat{D}_y J_r = \sum_I (-\hat{D})_I \left(\frac{\partial F}{\partial u_I} J_r \right) \tag{3}$$

(см. [3]). Операторы $\hat{D}_x$ и $\hat{D}_y$ зависят от функции F, которая также является неизвестной. Чтобы решить (3), мы использовали программу [4]. В результате мы получили гиперболическое уравнение

$$\begin{aligned} v_{xy} = \Bigg(-v v_x v_y + \frac{v_x}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial y} + 2\frac{\partial b}{\partial x} v\right) - v^2\left(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + 8v^2 - 16b\right) + \\ + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2 - 8b^2 \Bigg) \Bigg/ (b - v^2) \end{aligned} \tag{4}$$

и его ПНК

$$A = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{2\sqrt{v^2-b}} & 1 \\ 1 & -\frac{v_x}{2\sqrt{v^2-b}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{b_x}{2\sqrt{v^2-b}} & 2\sqrt{v^2-b} + 2v \\ -2\sqrt{v^2-b} + 2v & -\frac{b_x}{2\sqrt{v^2-b}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Утверждение 1. *Уравнение (4) имеет ПНК с матрицами A и B, приведёнными выше.*

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 2. *Представление нулевой кривизны* (5) *для уравнения* (4) *не является калибровочно эквивалентным нижнетреугольному.*

Утверждение 3. *ПНК из утверждения* 1 *не принадлежит ни к какому однопараметрическому семейству ПНК со значениями в* $\mathfrak{sl}_2$.

Утверждение 4. *Существуют различные функции* $b(x, y)$, *такие что уравнения* (4) *не сводятся друг к другу точечными преобразованиями.*

Автор благодарит М. Марвана, В. В. Соколова, А. Сергеева и С. Ю. Саковича за ценные обсуждения.

Литература

[1] Жибер А. В., Соколов В. В. Новый пример гиперболического нелинейного уравнения, обладающего интегралами // Теор. и матем. физ. — 1999. — Т. 120. — С. 20—26.

[2] Beals R., Rabelo M., Tenenblat K. Bäcklund transformations and inverse scattering solutions for some pseudospherical surface equations // Stud. Appl. Math. — 1989. — Vol. 8. — P. 125—151.

[3] Marvan M. A direct procedure to compute zero-curvature representations. The case $\mathfrak{sl}_2$ // Secondary Calculus and Cohomological Physics. Proc. Conf., Moscow, 1997. — 1998. — P. 10. Electronic version: `http://www.emis.de/proceedings/SCCP97`.

[4] Marvan M. Jets. A software for differential calculus on jet spaces and diffieties, ver. 4.9 (December 2003) for Maple V Release 4. — Opava, 2003.