К классификации условно интегрируемых эволюционных систем в размерности $(1+1)$*

А. СЕРГЕЕВ
Силезский университет, Опава
e-mail: Artur.Sergyeyev@math.slu.cz

УДК 517.95+514.763.85

Ключевые слова: точные решения, нелинейные эволюционные уравнения, условная интегрируемость, обобщённые симметрии, редукция, обобщённые условные симметрии.

Аннотация

В статье обобщены результаты Фокаса и Лью и найдены все $(1+1)$-мерные локально аналитические эволюционные уравнения порядка n, допускающие решение типа суперпозиции N ударных волн с $N \leqslant n+1$. Для этого нами была усовершенствована методика из нашей предыдущей статьи, в которой были полностью описаны все $(1+1)$-мерные эволюционные системы вида $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{F}(x, t, \boldsymbol{u}, \partial\boldsymbol{u}/\partial x, \ldots, \partial^n\boldsymbol{u}/\partial x^n)$, условно инвариантные по отношению к данному обобщённому векторному полю (векторному полю Ли—Беклунда) $\boldsymbol{Q}(x, t, \boldsymbol{u}, \partial\boldsymbol{u}/\partial x, \ldots, \partial^k\boldsymbol{u}/\partial x^k)\partial/\partial\boldsymbol{u}$, в предположении, что система ОДУ $\boldsymbol{Q}=0$ вполне невырожденна. Каждая такая эволюционная система допускает редукцию к системе ОДУ по t и, таким образом, является нелинейным аналогом квазиточнорешаемых моделей в квантовой механике.

Abstract

A. Sergyeyev, On the classification of conditionally integrable evolution systems in $(1+1)$ *dimensions*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 1, pp. 243—253.

We generalize earlier results of Fokas and Liu and find all locally analytic $(1+1)$-dimensional evolution equations of order n that admit an N-shock-type solution with $N \leqslant n+1$. For this, we develop a refinement of the technique from our earlier work, where we completely characterized all $(1+1)$-dimensional evolution systems $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{F}(x, t, \boldsymbol{u}, \partial\boldsymbol{u}/\partial x, \ldots, \partial^n\boldsymbol{u}/\partial x^n)$ that are conditionally invariant under a given generalized (Lie—Bäcklund) vector field $\boldsymbol{Q}(x, t, \boldsymbol{u}, \partial\boldsymbol{u}/\partial x, \ldots, \partial^k\boldsymbol{u}/\partial x^k)\partial/\partial\boldsymbol{u}$ under the assumption that the system of ODEs $\boldsymbol{Q}=0$ is totally nondegenerate. Every such conditionally invariant evolution system admits a reduction to a system of ODEs in t, thus being a nonlinear counterpart to quasi-exactly solvable models in quantum mechanics.

*Работа поддержана грантом GAČR 201/04/0538, а также грантом MSM:J10/98:192400002 Министерства образования, молодёжи и спорта Чешской республики.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 1, с. 243—253.

1. Введение

Для того чтобы математическая модель того или иного явления была адекватной, часто требуется, чтобы она допускала решения определённого вида (волновые решения, кинки, солитоны и т. д.). Как показали Фокас и Лью [7, 8] (см. также [15]), один из естественных способов добиться этого для эволюционных систем в размерности $(1 + 1)$ состоит в следующем. Нужно потребовать, чтобы рассматриваемая система допускала такую обобщённую условную симметрию (ОУС), что решения, инвариантные по отношению к этой симметрии, имеют желаемый вид.

Оказывается, что множество систем, допускающих ОУС (такие системы, или, ещё более общо, системы, обладающие интегрируемыми редукциями, часто называют *условно интегрируемыми*, см., например, [10]), намного больше множества систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния или прямой линеаризации (см., например, [7, 8]). Отметим также (см. [16]), что если $(1 + 1)$-мерное эволюционное уравнение допускает редукцию к системе ОДУ по параметру эволюции (времени t), то оно обладает ОУС, и наоборот.

Естественно задаться вопросом: как описать все эволюционные системы, допускающие данную ОУС? Для линейных ОУС с не зависящими от времени коэффициентами эта задача, переформулированная в терминах так называемых инвариантных модулей, была решена в основополагающей статье [9] (см. также более раннюю важную работу [14]). Для нелинейных ОУС некоторые результаты в этом направлении были получены в [5], а для ОУС, удовлетворяющих определённым условиям невырожденности, эта задача была полностью решена в [13], подробнее см. ниже (см. также обзор ранее полученных результатов и обсуждение роли ОУС в поиске точных решений в [9] и [13]).

Однако полученные в [13] формулы не слишком удобны для практического применения. В настоящей статье мы приводим более удобные «альтернативные» формулы для локально аналитических $(1 + 1)$-мерных эволюционных систем, инвариантных по отношению к заданной *аналитической* ОУС. Это сделано в разделе 4. В разделе 5 мы иллюстрируем применение наших результатов рядом примеров. В частности, мы находим все локально аналитические $(1+1)$-мерные эволюционные уравнения, допускающие решение типа суперпозиции N ударных волн с $N \leqslant n + 1$.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим эволюционную систему

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{F}(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n), \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

для s-компонентной вектор-функции $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^s)^{\mathrm{T}}$, где $\boldsymbol{u}_l = \partial^l \boldsymbol{u}/\partial x^l$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $\boldsymbol{u}_0 \equiv \boldsymbol{u}$, а индекс T обозначает транспонированную матрицу.

Гладкая функция переменных $x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots$ называется *локальной* (см. [2]; ср. также [1, 3]), если она зависит только от конечного числа переменных $\boldsymbol{u}_j$. Наибольшее целое m, такое что $\partial f/\partial \boldsymbol{u}_m \neq 0$, называется *порядком* локальной функции f и обозначается $m = \operatorname{ord} f$. Если f зависит только от x и t, то мы будем предполагать, что $\operatorname{ord} f = 0$. Все функции, рассматриваемые ниже, считаются локальными, если явно не оговорено противное.

Обобщённое векторное поле $\mathcal{Q} = \boldsymbol{Q}\partial/\partial\boldsymbol{u}$, где $\boldsymbol{Q}$ — s-компонентная локальная вектор-функция, называется [7, 8, 15] *обобщённой условной симметрией* (ОУС) для (1), если система $\boldsymbol{Q} = 0$ совместна с (1).

Система (1) совместна с $\boldsymbol{Q} = 0$ тогда и только тогда, когда (см., например, [7, 15])

$$D_t(\boldsymbol{Q})|_{\mathcal{M}} = 0, \tag{2}$$

где

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^{\infty} D^i(\boldsymbol{F})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i} \quad \text{и} \quad D = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{u}_{i+1}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i} \,—$$

полные производные по t и x, а $\mathcal{M}$ — это многообразие решений системы $\boldsymbol{Q} = 0$.

Ниже мы будем рассматривать $\boldsymbol{Q} = 0$ как систему ОДУ, включающую дополнительный параметр t, и будем предполагать, что эта система вполне невырожденна, т. е. системы $D^j(\boldsymbol{Q}) = 0$ локально разрешимы и имеют максимальный ранг для всех $j = 0, 1, 2, \ldots$ (подробнее см. [3, глава 2]). В таком случае условие (2) эквивалентно [3] следующему: существуют s-компонентные локальные вектор-функции $\boldsymbol{\eta}_{\alpha,j}$ и целое число p, такие что

$$D_t(\boldsymbol{Q}) = \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{j=0}^{p} \boldsymbol{\eta}_{\alpha,j} D^j(Q^\alpha). \tag{3}$$

Найти все ОУС, допускаемые данной системой (1) — это весьма сложная задача, сравнимая по своей трудности с задачей нахождения всех решений (1). Однако в [13] нам удалось полностью решить обратную задачу — описать все системы вида (1), допускающие заданную ОУС $\mathcal{Q} = \boldsymbol{Q}\partial/\partial\boldsymbol{u}$, при условии, что система $\boldsymbol{Q} = 0$, рассматриваемая как система ОДУ, является вполне невырожденной.

Напомним вкратце результаты [13]. Рассмотрим систему ОДУ

$$\boldsymbol{Q}(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k) = 0, \tag{4}$$

включающую t как параметр. Здесь $\boldsymbol{Q} = (Q^1, \ldots, Q^s)^{\mathrm{T}}$ — это s-компонентная локальная вектор-функция.

Предположим, что общее решение системы (4) в неявном виде можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{G}(x, t, \boldsymbol{u}, c_1(t), \ldots, c_N(t)) = 0. \tag{5}$$

Число N иногда называют суммарным порядком системы (4). Здесь и далее предполагается, что $\boldsymbol{G}$ существенно зависит от всех N произвольных функций

$c_i(t)$, $i=1,\ldots,N$, и что $\det \partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{u} \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции мы можем, по крайней мере локально, записать общее решение системы (4) в явном виде: $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{P}(x,t,c_1(t),\ldots,c_N(t))$, откуда получаем

$$u_j^\alpha = \frac{\partial^j P^\alpha(x,t,c_1(t),\ldots,c_N(t))}{\partial x^j}.$$

Используя эти формулы, можно выразить c_i как функции $x,t,u^1,\ldots,u^1_{n_1-1},\ldots,u^s,\ldots,u^s_{n_s-1}$ для некоторых $n_1,\ldots,n_s$:

$$c_i = h_i(x,t,u^1,\ldots,u^1_{n_1-1},\ldots,u^s,\ldots,u^s_{n_s-1}),\quad i=1,\ldots,N.$$

Положим $\tilde{\boldsymbol{B}}_i = -(\partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{u})^{-1}\partial\boldsymbol{G}/\partial c_i$, $\tilde{\boldsymbol{R}} = -(\partial\boldsymbol{G}/\partial\boldsymbol{u})^{-1}\partial\boldsymbol{G}/\partial t$, и пусть $\boldsymbol{B}_i = \tilde{\boldsymbol{B}}_i(x,t,h_1,\ldots,h_N)$ и $\boldsymbol{R}(x,t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_r) \equiv \tilde{\boldsymbol{R}}(x,t,h_1,\ldots,h_N)$, т. е. $\boldsymbol{B}_i$ и $\boldsymbol{R}$ получаются из $\tilde{\boldsymbol{B}}_i$ и $\tilde{\boldsymbol{R}}$ подстановкой h_i вместо c_i. Здесь предполагается, что c_i *не* дифференцируются по t при вычислении $\partial\boldsymbol{G}/\partial t$.

Пусть V — открытая область в пространстве $\mathcal{V}$ переменных $x,t,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_1,\ldots$, и пусть W — множество всех точек из V, удовлетворяющих уравнениям $D^j(\boldsymbol{Q})=0$, $j=0,1,2,\ldots$, рассматриваемым как алгебраические.

Теорема 1 ([13]). *Пусть система $\boldsymbol{Q}(x,t,\boldsymbol{u},\ldots,\boldsymbol{u}_k)=0$, рассматриваемая как система ОДУ, аналитична на V, полностью невырожденна на W и имеет одинаковый суммарный порядок N на всём W.*

Если система $\boldsymbol{Q}=0$ совместна с (1), т. е. $\boldsymbol{Q}\partial/\partial\boldsymbol{u}$ — ОУС для (1), то функция $\boldsymbol{F}$ на V может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} + \sum_{i=1}^{N}\zeta_i(t,h_1,\ldots,h_N)\boldsymbol{B}_i + \sum_{p=0}^{m}\sum_{\alpha=1}^{s}\boldsymbol{\chi}_{p,\alpha}(t,x,\boldsymbol{u},\ldots,\boldsymbol{u}_{j_{p,\alpha}})D^p(Q^\alpha), \qquad (6)$$

где m и $j_{p,\alpha}$ — неотрицательные целые числа, а ζ_i и $\boldsymbol{\chi}_{p,\alpha}$ — гладкие функции своих аргументов.

Система $\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{F}$ с функцией $\boldsymbol{F}$ вида (6) по построению [13] допускает решение того же вида, что и общее решение (5) системы $\boldsymbol{Q}=0$, т. е.

$$\boldsymbol{G}(x,t,\boldsymbol{u},c_1(t),\ldots,c_N(t))=0,$$

однако здесь $c_i(t)$ уже не являются произвольными функциями t: они должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{dc_i}{dt} = \zeta_i(t,c_1,\ldots,c_N),\quad i=1,\ldots,N. \qquad (7)$$

Другими словами, если выполнены условия теоремы 1 и $\boldsymbol{Q}\partial/\partial\boldsymbol{u}$ является ОУС для $\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{F}$, то подстановка общего решения (5) системы $\boldsymbol{Q}=0$ в систему $\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{F}$ сводит последнюю к системе ОДУ (7).

3. Решение обратной задачи: какие системы допускают данную ОУС?

Как выбрать среди функций $\boldsymbol{F}$ вида (6) те, которые имеют порядок $\leqslant n$, где n — заданное натуральное число? Для этого можно воспользоваться следующим результатом.

Теорема 2. *Пусть $\boldsymbol{Q}$ удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Предположим, что*

$$Q^\alpha = u^\alpha_{n_\alpha} - g^\alpha(x,t,\tilde{u}), \tag{8}$$

где g^α — аналитические функции своих аргументов и $\tilde{u} = (u^1, \ldots, u^1_{n_1-1}, \ldots, u^s, \ldots, u^s_{n_s-1})$. Тогда наиболее общая локально аналитическая функция $\boldsymbol{F}$ порядка $n \geqslant \max\bigl(\operatorname{ord}\boldsymbol{R}, \max\limits_{i=1,\ldots,N}\operatorname{ord}\boldsymbol{B}_i, \max\limits_{j=1,\ldots,N}\operatorname{ord}h_j\bigr)$, такая что система (1) *совместна с $\boldsymbol{Q} = 0$, локально представима в виде*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} + \sum_{i=1}^{N}\zeta_i(t,h_1,\ldots,h_N)\boldsymbol{B}_i + \\ + \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{m=0}^{n-n_\alpha} D^m(Q^\alpha)\boldsymbol{K}_{\alpha,m}(x,t,\tilde{u},Q^1,D(Q^1),\ldots,D^{n-n_1}(Q^1),\ldots, \\ Q^s, D(Q^s),\ldots,D^{n-n_s}(\tilde{Q}^s)),\end{aligned} \tag{9}$$

где $N = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} n_\alpha$, а ζ_i и $\boldsymbol{K}_{\alpha,m}$ — произвольные локально аналитические функции своих аргументов, причём $\boldsymbol{K}_{\alpha,m} \equiv 0$, если $n < n_\alpha$.

Доказательство. Имеем $u^\alpha_{n_\alpha} = Q^\alpha + g^\alpha(x,t,\tilde{u})$. По индукции получаем $u^\alpha_j = \psi^\alpha_j(x,t,\tilde{u},Q^1,\ldots,D^{j-n_1}(Q^1),\ldots,Q^s,\ldots,D^{j-n_s}(Q^s))$ для $j \geqslant \max\limits_\alpha n_\alpha$ и аналогичные формулы для $\max\limits_\alpha n_\alpha > j > n_\alpha$.

Подставим полученные формулы для u^α_j в (6) и разложим получившееся выражение в ряд Тейлора по переменным $D^j(Q^\alpha)$. Так как порядок $\boldsymbol{F}$ равен n и $\boldsymbol{F}$ локально аналитична, она не может зависеть от $D^j(Q^\alpha)$ при $j > n - n_\alpha$. Учитывая этот факт, мы можем представить (6) в виде (9), что и требовалось доказать. □

Легко видеть, что наиболее общая локально аналитическая функция $\boldsymbol{F}$ порядка $n < \tilde{n} \equiv \max\bigl(\operatorname{ord}\boldsymbol{R}, \max\limits_{i=1,\ldots,N}\operatorname{ord}\boldsymbol{B}_i, \max\limits_{j=1,\ldots,N}\operatorname{ord}h_j\bigr)$, такая что $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{F}$ допускает ОУС $\boldsymbol{Q}\partial/\partial\boldsymbol{u}$ с $\boldsymbol{Q}$, удовлетворяющим условиям теоремы 2, тоже локально представима в виде (9), где n заменено на $\tilde{n}$, а $\boldsymbol{K}_{\alpha,m}$ и ζ_i удовлетворяют дополнительным условиям $\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{u}_j = 0$ для $j > n$.

Заметим, что для $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{g}(x,t,\boldsymbol{u},\ldots,\boldsymbol{u}_{k-1})$ имеем $N = s\cdot k$, и формула (9) сводится к

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} + \sum_{i=1}^{N} \zeta_i(t, h_1, \ldots, h_N)\boldsymbol{B}_i +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{m=0}^{n-k} D^m(Q^\alpha)\boldsymbol{K}_{\alpha,m}(x, t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{Q}, D(\boldsymbol{Q}), \ldots, D^{n-k}(\boldsymbol{Q})). \quad (10)$$

4. Примеры

Пример 1. Пусть

$$Q^\alpha = u^\alpha_{n_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{s}\sum_{j=0}^{n_\beta - 1} g^\alpha_{\beta,j}(x,t)u^\beta_j, \quad \alpha = 1, \ldots, s. \quad (11)$$

Тогда $N = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} n_\alpha$ и общее решение системы $\boldsymbol{Q} = 0$ имеет вид $\boldsymbol{u} = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i(t)\boldsymbol{f}_i(x,t)$, где $c_i(t)$ — произвольные функции t и $\boldsymbol{f}_i \equiv (f^1_i, \ldots, f^s_i)^{\mathrm{T}}$ — линейно независимые решения системы $\boldsymbol{Q} = 0$.

Имеем [11, 12] $h_i = Z_i/Z$, где

$$Z = \begin{vmatrix} f^1_1 & \ldots & f^1_i & \ldots & f^1_N \\ \partial f^1_1/\partial x & \ldots & \partial f^1_i/\partial x & \ldots & \partial f^1_N/\partial x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^{n_1-1} f^1_1/\partial x^{n_1-1} & \ldots & \partial^{n_1-1} f^1_i/\partial x^{n_1-1} & \ldots & \partial^{n_1-1} f^1_N/\partial x^{n_1-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f^s_1 & \ldots & f^s_i & \ldots & f^s_N \\ \partial f^s_1/\partial x & \ldots & \partial f^s_i/\partial x & \ldots & \partial f^s_N/\partial x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^{n_s-1} f^s_1/\partial x^{n_s-1} & \ldots & \partial^{n_s-1} f^s_i/\partial x^{n_s-1} & \ldots & \partial^{n_s-1} f^s_N/\partial x^{n_s-1} \end{vmatrix},$$

а Z_i получаются из Z заменой $\partial^j f^\alpha_i/\partial x^j$ на u^α_j. Легко видеть, что $\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{f}_i(x,t)$ и $\boldsymbol{R} = \sum\limits_{i=1}^{N}(Z_i/Z)\partial \boldsymbol{f}_i(x,t)/\partial t$.

Если функции $g^\alpha_{\beta,j}$ аналитичны по x и t, то по теореме 2 наиболее общая локально аналитическая функция $\boldsymbol{F}$ порядка $n \geqslant \max\limits_i \operatorname{ord} Z_i/Z$, допускающая ОУС $\boldsymbol{Q}\partial/\partial\boldsymbol{u}$ с $\boldsymbol{Q}$ (11), локально может быть представлена в виде

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i}{Z}\frac{\partial \boldsymbol{f}_i(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \zeta_i(t, Z_1/Z, \ldots, Z_N/Z)\boldsymbol{f}_i(x,t) +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{m=0}^{n-n_\alpha} D^m(Q^\alpha)\boldsymbol{K}_{\alpha,m}(x, t, \tilde{u}, Q^1, D(Q^1), \ldots, D^{n-n_1}(Q^1), \ldots,$$
$$Q^s, D(Q^s), \ldots, D^{n-n_s}(Q^s)), \quad (12)$$

где ζ_i и $\boldsymbol{K}_{\alpha,m}$ — произвольные локально аналитические функции своих аргументов, $\tilde{u} = (u^1, \ldots, u^1_{n_1-1}, \ldots, u^s, \ldots, u^s_{n_s-1})$ и для $n < n_\alpha$ $\boldsymbol{K}_{\alpha,m} \equiv 0$.

С этого момента и до конца раздела мы будем предполагать, что $s = 1$, и для простоты будем использовать следующие обозначения: $\boldsymbol{u} \equiv u$, $\boldsymbol{Q} \equiv Q$, $\boldsymbol{F} \equiv F$.

Пример 2. Пусть $Q = L(u)$, где $L = \prod\limits_{j=1}^{N}(D - k_j)$, и k_i, $i = 1, \ldots, N$, — попарно различные ($k_i \neq k_j$, если $i \neq j$) постоянные, отличные от нуля. Тогда общее решение уравнения $Q = 0$ имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i(t)\exp(k_i x)$, и мы получаем

$$h_i = \frac{\exp(-k_i x)}{\prod\limits_{j=1,\, j\neq i}^{N}(k_i - k_j)} L_i(u),$$

где $L_i = \prod\limits_{j=1,\, j\neq i}^{N}(D - k_j)$. Таким образом, наиболее общая локально аналитическая F порядка $n \geqslant N-1$, такая что $u_t = F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q = L(u)$, локально представима в виде

$$F = \sum_{i=1}^{N} \zeta_i(t, h_1, \ldots, h_N)\exp(k_i x) + \\ + \sum_{m=0}^{n-N} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, \ldots, u_{N-1}, Q, D(Q), \ldots, D^{n-N}(Q)), \quad (13)$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов и при $n < N$ имеем $K_m \equiv 0$ для всех m.

Пример 3. Пусть $Q = u_2 - f(u,t)$, где f — произвольная аналитическая функция u и t. Положим $a(z,t) = \int f(z,t)\,dz$ и $\psi(y,z,t) = \int (2a(y,t) + z)^{-1/2}\,dy$. Тогда общее решение уравнения $Q = 0$ в неявном виде выглядит так: $\psi(u, c_1(t), t) = x + c_2(t)$, где $c_i(t)$ — произвольные функции t, и мы имеем $h_1 = u_1^2 - 2a(u,t)$, $h_2 = \psi(u,z,t)|_{z=h_1} - x$.

Следовательно, по теореме 2 наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n \geqslant 1$, такая что уравнение $u_t = F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q = u_2 - f(u,t)$, локально имеет вид

$$F = -(2a(u,t) + h_1)^{1/2}\Bigg(\bigg(\frac{\partial\psi(u,z,t)}{\partial t}\bigg)\bigg|_{z=h_1} - \\ - \zeta_1(t, h_1, h_2)\int^{u} \frac{dy}{2(2a(y,t) + h_1)^{3/2}} - \zeta_2(t, h_1, h_2)\Bigg) + \\ + \sum_{m=0}^{n-2} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, Q, D(Q), \ldots, D^{n-2}(Q)),$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов; если $n<2$, то $K_m\equiv 0$ для всех m.

Пример 4. Рассмотрим теперь несколько более сложный пример: $Q=u_2-\varphi(x,t)f(u_1,t)$, где φ и f — произвольные аналитические функции своих аргументов и $f\not\equiv 0$. Пусть $a(z,t)=\int dz/f(z,t)$, $\tilde\varphi(x,t)=\int\varphi(x,t)\,dx$, а $b(y,t)$ обозначает решение уравнения $a(z,t)=y$ по отношению к z, так что $a(b(z,t),t)\equiv z$. Тогда общее решение уравнения $Q=0$ имеет вид $u=c_1(t)+\chi(x,c_2(t),t)$, где $\chi(x,z,t)=\int b(\tilde\varphi(x,t)+z,t)\,dx$, $c_i(t)$ — произвольные функции времени t, и мы имеем $h_1=u-\chi(x,z,t)|_{z=h_2}$, $h_2=a(u_1,t)-\tilde\varphi(x,t)$.

Следовательно, наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n\geqslant 1$, такая что уравнение $u_t=F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q=u_2-\varphi(x,t)f(u_1,t)$, локально имеет вид

$$F=\left(\frac{\partial\chi(x,z,t)}{\partial t}\right)\Big|_{z=h_2}+\zeta_1(t,h_1,h_2)+\zeta_2(t,h_1,h_2)\left(\frac{\partial\chi(x,z,t)}{\partial z}\right)\Big|_{z=h_2}+\sum_{m=0}^{n-2}D^m(Q)K_m(x,t,u,u_1,Q,D(Q),\ldots,D^{n-2}(Q)),$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов и если $n<2$, то $K_m\equiv 0$ для всех m.

Пример 5. Пусть теперь $Q=M(1)$, где $M=\prod\limits_{j=1}^{N+1}(D-k_j-u)$. Общее решение уравнения $Q=0$ имеет вид $-v_x/v$, где $v\equiv\sum\limits_{i=1}^{N+1}b_i(t)\exp(k_ix)$. Заметим, что $-v_x/v$ на самом деле содержит только N независимых произвольных функций t. В самом деле, перенумеровав при необходимости b_i, можно без потери общности предположить, что $b_{N+1}(t)\neq 0$. Тогда мы можем записать $u=-v_x/v$ в виде

$$u=-D\left(\ln\left(\exp(k_{N+1}x)+\sum_{i=1}^{N}c_i(t)\exp(k_ix)\right)\right),\tag{14}$$

где $c_i(t)=b_i(t)/b_{N+1}(t)$, откуда получаем

$$h_i=\frac{\exp((k_{N+1}-k_i)x)M_i(1)\prod\limits_{j=1}^{N+1}(k_{N+1}-k_j)}{M_{N+1}(1)\prod\limits_{j=1,\,j\neq i}^{N+1}(k_i-k_j)},\quad i=1,\ldots,N,\tag{15}$$

где $M_i=\prod\limits_{j=1,\,j\neq i}^{N+1}(D-k_j-u)$.

Наиболее общая локально аналитическая функция F порядка $n\geqslant N-1$, такая что уравнение $u_t=F$ допускает ОУС $Q\partial/\partial u$ с $Q=M(1)$ (и, следовательно, решение (14) типа суперпозиции N ударных волн), локально представима в виде

$$F=-\sum_{i=1}^{N}\zeta_i(t,h_1,\dots,h_N)\exp(k_ix)\frac{\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N+1}(k_i-k_j)h_j\exp(k_jx)\Bigr)}{\Bigl(\sum\limits_{q=1}^{N+1}h_q\exp(k_qx)\Bigr)^2}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-N}D^m(Q)K_m(x,t,u,u_1,\dots,u_{N-1},Q,D(Q),\dots,D^{n-N}(Q)),\quad(16)$$

где ζ_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов и если $n<N$, то $K_m\equiv 0$ для всех m. На этот раз h_i имеют вид (15), и для удобства мы положили $h_{N+1}=1$. Соответствующее решение уравнения $u_t=F$ типа суперпозиции N ударных волн имеет вид (14), где $c_i(t)$ удовлетворяют (7).

Заметим, что среди функций F (16) легко указать те, которые не зависят явно от x и t. Они имеют вид

$$F=-\sum_{i=1}^{N}\eta_i\biggl(\frac{\tilde h_1^{k_{N+1}-k_N}}{\tilde h_N^{k_{N+1}-k_1}},\dots,\frac{\tilde h_{N-1}^{k_{N+1}-k_N}}{\tilde h_N^{k_{N+1}-k_{N-1}}}\biggr)\frac{\tilde h_i\sum\limits_{j=1}^{N+1}(k_i-k_j)\tilde h_j}{\Bigl(\sum\limits_{q=1}^{N+1}\tilde h_q\Bigr)^2}+$$
$$+\sum_{m=0}^{n-N}D^m(Q)K_m(u,u_1,\dots,u_{N-1},Q,D(Q),\dots,D^{n-N}(Q)),\quad(17)$$

где $\tilde h_i=h_i\exp((k_i-k_{N+1})x)$, и η_i и K_m — произвольные локально аналитические функции своих аргументов.

Подстановка решения (14) в уравнение $u_t=F$ с F вида (17) сводит это уравнение к следующей системе ОДУ:

$$\frac{dc_i}{dt}=c_i\eta_i\biggl(\frac{c_1^{k_{N+1}-k_N}}{c_N^{k_{N+1}-k_1}},\dots,\frac{c_{N-1}^{k_{N+1}-k_N}}{c_N^{k_{N+1}-k_{N-1}}}\biggr),\quad i=1,\dots,N.$$

Если $\zeta_i=-h_i\sum\limits_{j=0}^{m}\alpha_j(k_i^j-k_{N+1}^j)$, где α_j — произвольные постоянные, то (16) задаёт наиболее общую F порядка $n\geqslant N-1$, такую что уравнение $u_t=F$ допускает суперпозицию N ударных волн вида [7]

$$u=-D\biggl(\ln\biggl(\sum_{i=1}^{N+1}A_i\exp\biggl(k_ix-t\sum_{j=0}^{m}\alpha_jk_i^j\biggr)\biggr)\biggr),\quad(18)$$

где A_i — произвольные постоянные.

Таким образом, класс эволюционных уравнений, допускающих решения (18), содержит не только уравнение

$$u_t=\sum_{j=0}^{m}\alpha_jD(D-u)^j(u),$$

но и бесконечное множество других уравнений [7]. В частности, если порядок n функции F больше $N-2$, из теоремы 2 следует, что соответствующие функции F имеют вид

$$F = \sum_{i=1}^{N} \sum_{r=0}^{m} \alpha_r (k_i^r - k_{N+1}^r) \frac{\tilde{h}_i \sum\limits_{j=1}^{N+1} (k_i - k_j) \tilde{h}_j}{\Big(\sum\limits_{q=1}^{N+1} \tilde{h}_q \Big)^2} + \\ + \sum_{m=0}^{n-N} D^m(Q) K_m(x, t, u, u_1, \ldots, u_{N-1}, Q, D(Q), \ldots, D^{n-N}(Q)).$$

5. Заключение

В теореме 2 настоящей статьи мы полностью описали локально аналитические эволюционные системы (1) заданного порядка $n \geqslant k-1$, допускающие обобщённую условную симметрию $\boldsymbol{Q}(x, t, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}_k)\partial/\partial\boldsymbol{u}$ с заданной аналитической вектор-функцией $\boldsymbol{Q}$ вида (8). В частности, для случая линейных ОУС, т. е. когда $\boldsymbol{Q}$ линейно по $\boldsymbol{u}_j$ для всех j, правые стороны $\boldsymbol{F}$ таких систем (1) задаются формулой (12).

Результаты настоящей статьи несколько удобнее для применения на практике, чем формулы, полученные нами ранее в [13]. Например, использование теоремы 2 позволило нам найти явный вид *всех* $(1+1)$-мерных локально аналитических эволюционных уравнений порядка $n \geqslant N-1$, допускающих решения в виде суперпозиции N ударных волн (и, более общо, решения вида (14)), и обобщить соответствующие результаты Фокаса и Лью [7].

Более того, теорему 2 можно использовать для классификации точно решаемых задач типа Коши в духе [6, 17] и нахождения эволюционных уравнений, симметрии которых совместны с граничными условиями заданного вида, и следовательно, можно найти точные решения соответствующих краевых задач, ср. [4] и обсуждение в [13]. Мы планируем рассмотреть эти вопросы в другой работе.

Литература

[1] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов и И. С. Красильщик. — М.: Факториал, 1997.

[2] Михайлов А. В., Шабат А. Б., Соколов В. В. Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. — Киев: Наукова думка, 1990. — С. 213—279.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.

[4] Adler V. E., Gürel B., Gürses M., Habibullin I. Boundary conditions for integrable equations // J. Phys. A. — 1997. — Vol. 30, no. 10. — P. 3505—3513.

[5] Andreytsev A. Classification of systems of nonlinear evolution equations admitting higher-order conditional symmetries // Proc. 4th Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, 2001). Part 1. — Kyiv: Institute of Mathematics, 2002. — P. 72—79.

[6] Basarab-Horwath P., Zhdanov R. Z. Initial-value problems for evolutionary partial differential equations and higher-order conditional symmetries // J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 42, no. 1. — P. 376—389.

[7] Fokas A. S., Liu Q. M. Generalized conditional symmetries and exact solutions of non-integrable equations // Theoret. and Math. Phys. — 1994. — Vol. 99. — P. 571—582.

[8] Fokas A. S., Liu Q. M. Nonlinear interaction of traveling waves of nonintegrable equations // Phys. Rev. Lett. — 1994. — Vol. 72. — P. 3293—3296.

[9] Kamran N., Milson N., Olver P. Invariant modules and the reduction of nonlinear partial differential equations to dynamical systems // Adv. Math. — 2000. — Vol. 156, no. 2. — P. 286—319.

[10] Rubin J., Winternitz P. Point symmetries of conditionally integrable nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 2085—2090.

[11] Samokhin A. V. Symmetries of linear and linearizable systems of differential equations // Acta Appl. Math. — 1999. — Vol. 56. — P. 253—300.

[12] Samokhin A. V. Full symmetry algebra for ODEs and control systems // Acta Appl. Math. — 2002. — Vol. 72, no. 1—2. — P. 87—99.

[13] Sergyeyev A. Constructing conditionally integrable evolution systems in $(1 + 1)$ dimensions: a generalization of invariant modules approach // J. Phys. A. — 2002. — Vol. 35, no. 35. — P. 7653—7660.

[14] Svirshchevskii S. R. Lie—Bäcklund symmetries of linear ODEs and invariant linear spaces // Modern Group Analysis — Moscow: MFTI, 1993. — P.75—83.

[15] Zhdanov R. Z. Conditional Lie—Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations // J. Phys. A. — 1995. — Vol. 28. — P. 3841—3850.

[16] Zhdanov R. Z. Higher conditional symmetries and reduction of initial value problems for nonlinear evolution equations // Proc. Int. Conf. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, 1999). Part 1. — Kyiv: Institute of Mathematics, 2000. — P. 255—263.

[17] Zhdanov R. Z. Higher conditional symmetry and reduction of initial value problems // Nonlinear Dynam. — 2002. — Vol. 28. — P. 17—27.