LP-проблемы для ранговых неравенств над полукольцами: граничные ранги*

Л. Б. БИСЛИ
Государственный университет Юты
e-mail: lbeasley@math.usu.edu

А. Э. ГУТЕРМАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: guterman@mmascience.ru

С.-Ч. ЙИ
Национальный университет Чангвая
e-mail: scyi@changwon.ac.kr

УДК 512.643

Ключевые слова: ранговые неравенства, эндоморфизмы матричных пространств, граничный ранг.

Аннотация

Получена характеризация линейных отображений матриц над полукольцами, сохраняющих множество упорядоченных наборов матриц, удовлетворяющих экстремальным ранговым свойствам для граничного и нулевого граничного рангов суммы и произведения матриц.

Abstract

L. B. Beasley, A. E. Guterman, S.-C. Yi, Linear preservers of extremes of rank inequalities over semirings: term-rank and zero-term-rank, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 2, pp. 3—21.

We characterize linear operators on matrices over semirings that preserve the extremal cases in the bounds on term- and zero-term-ranks of sums and products of matrices.

1. Введение

Определение 1.1. *Полукольцом* $\mathcal{S}$ называется алгебраическая система, состоящая из множества $\mathcal{S}$ и двух бинарных операций: сложения и умножения, удовлетворяющих следующим аксиомам:

- $\mathcal{S}$ является коммутативным моноидом по сложению (нейтральный элемент обозначается 0);

*Работа второго автора частично поддержана грантами РФФИ 02-01-00218, НШ-1910.2003.01 и INTAS YSF 03-55-1919.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 2, с. 3—21.

- $\mathcal{S}$ является полугруппой по умножению (если существует нейтральный элемент, то он обозначается 1);
- умножение дистрибутивно относительно сложения с двух сторон;
- $s0 = 0s = 0$ для всех $s \in \mathcal{S}$.

В этой статье мы предполагаем существование в полукольце $\mathcal{S}$ единицы 1, отличной от 0.

Определение 1.2. Полукольцо называется *антинегативным*, если в нём только нулевой элемент имеет аддитивный обратный.

Определение 1.3. Полукольцо называется *цепным*, если множество $\mathcal{S}$ является вполне упорядоченным с универсальными максимальным и минимальным элементами и операциями, заданными по правилам $a + b = \max\{a, b\}$ и $a \cdot b = \min\{a, b\}$.

Тривиальная проверка показывает, что цепное полукольцо коммутативно и антинегативно.

Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — множество всех $(m \times n)$-матриц с элементами из полукольца $\mathcal{S}$.

Определение 1.4. *Линией* в матрице A называется строка или столбец матрицы A.

Следующие ранговые функции часто используются для решения различных задач в теории матриц над полукольцами.

Определение 1.5. Матрица $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ имеет *граничный ранг* k ($t(A) = k$), если наименьшее число линий, необходимых, чтобы покрыть все ненулевые элементы матрицы A, равно k. Будем обозначать через $c(A)$ наименьшее число столбцов, необходимых, чтобы покрыть все ненулевые элементы матрицы A, и через $r(A)$ — наименьшее число строк, необходимых, чтобы покрыть все ненулевые элементы A.

Определение 1.6. Матрица $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ имеет *нулевой граничный ранг* k ($z(A) = k$), если наименьшее число линий, необходимых для покрытия всех нулевых элементов A, равно k.

Пусть $\mathcal{S}$ является подполукольцом некоторого поля. Тогда определена обычная функция матричного ранга $\rho(A)$ для любой матрицы $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Поведение функции ρ относительно матричного сложения и умножения устанавливается следующими классическими неравенствами:

неравенствами для суммы матриц:

$$|\rho(A) - \rho(B)| \leqslant \rho(A + B) \leqslant \rho(A) + \rho(B),$$

неравенствами Сильвестра:

$$\rho(A) + \rho(B) - n \leqslant \rho(AB) \leqslant \min\{\rho(A), \rho(B)\}$$

и *неравенством Фробениуса*:

$$\rho(AB) + \rho(BC) \leqslant \rho(ABC) + \rho(B),$$

где A, B, C — матрицы подходящих размеров с элементами из поля.

Арифметические свойства граничного и нулевого граничного рангов описываются следующими неравенствами, доказанными в [3]:

1) $t(A+B) \leqslant t(A)+t(B)$;
2) $t(A+B) \geqslant \max\{t(A), t(B)\}$;
3) $t(AB) \leqslant \min(c(A), r(B))$;
4) $t(AB) \geqslant t(A)+t(B)-n$;
5) если $\mathcal{S}$ содержится в полукольце неотрицательных вещественных чисел, то $\rho(AB)+\rho(BC) \leqslant t(ABC)+t(B)$;
6) $z(A+B) \geqslant 0$;
7) $z(A+B) \leqslant \min\{z(A), z(B)\}$;
8) $z(AB) \geqslant 0$;
9) $z(AB) \leqslant z(A)+z(B)$.

2. Предварительные результаты

Мы будем использовать следующие обозначения для семейств матриц, возникающих в экстремальных случаях в вышеперечисленных неравенствах:

$$\mathcal{T}_1(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X+Y) = t(X)+t(Y)\};$$
$$\mathcal{T}_2(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X+Y) = \max(t(X), t(Y))\};$$
$$\mathcal{T}_3(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = \min\{r(X), c(Y)\}\};$$
$$\mathcal{T}_4(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{n}(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = t(X)+t(Y)-n\};$$
$$\mathcal{T}_5(\mathcal{S}) = \{(X,Y,Z) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^3 \mid t(XYZ)+t(Y) = \rho(XY)+\rho(YZ)\};$$
$$\mathcal{Z}_1(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X+Y) = \min\{z(X), z(Y)\}\};$$
$$\mathcal{Z}_2(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X+Y) = 0\};$$
$$\mathcal{Z}_3(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY) = 0\};$$
$$\mathcal{Z}_4(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY) = z(X)+z(Y).$$

Определение 2.1. Преобразование T *сохраняет* множество $\mathcal{P}$, если из $X \in \mathcal{P}$ следует, что $T(X) \in \mathcal{P}$, или, если $\mathcal{P}$ является множеством упорядоченных пар [троек], предполагается, что из условия $(X,Y) \in \mathcal{P}$ $[(X,Y,Z) \in \mathcal{P}]$ следует, что $(T(X),T(Y)) \in \mathcal{P}$ $[(T(X),T(Y),T(Z)) \in \mathcal{P}]$.

Определение 2.2. Преобразование T *строго сохраняет* множество $\mathcal{P}$, если $X \in \mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда $T(X) \in \mathcal{P}$, или, если $\mathcal{P}$ является множеством упорядоченных пар [троек], $(X,Y) \in \mathcal{P}$ $[(X,Y,Z) \in \mathcal{P}]$ эквивалентно $(T(X),T(Y)) \in \mathcal{P}$ $[(T(X),T(Y),T(Z)) \in \mathcal{P}]$.

Определение 2.3. Матрица $X \circ Y$ обозначает произведение Адамара, т. е. элемент (i,j) матрицы $X \circ Y$ есть $x_{i,j}y_{i,j}$.

Определение 2.4. Преобразование T называется (P, Q, B)-*оператором*, если существуют матрицы перестановки P и Q и матрица B без нулевых элементов, такие что $T(X) = P(X \circ B)Q$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, или, если $m = n$, $T(X) = P(X \circ B)^t Q$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.

Как было доказано в [3], неравенства 1—9 точны и неулучшаемы.

Естественный вопрос состоит в характеризации случаев равенства в рассматриваемых неравенствах. Даже для матриц над полями это открытый вопрос (см. [12, 13, 16, 17]). Структура матричных многообразий, возникающих в качестве экстремальных случаев в этих неравенствах, неизвестна ни над полями, ни над полукольцами. Стандартный способ выбора элементов таких многообразий состоит в применении линейных преобразований, сохраняющих данное многообразие, к семействам матриц, заведомо ему принадлежащих. Классификация аналогичных преобразований матриц над полями была получена в [1, 4, 6, 11]. Исследование соответствующей проблемы над полукольцами было начато в работе [2], где предпочтение было отдано факторизационному рангу. Эта работа является продолжением [2]. Она посвящается изучению линейных преобразований, сохраняющих экстремальные случаи в ранговых неравенствах для граничного и нулевого граничного рангов. Другие результаты по теории линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты над полями и кольцами, можно найти в работе [15] и приведённых там ссылках. Граничный и нулевой граничный ранги подробно изучаются в [10, 14]. В частности, линейные отображения, сохраняющие граничные ранги, изучались в [5, 7—9].

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{S}$ — не обязательно коммутативное полукольцо. Преобразование $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ называется *линейным*, если оно аддитивно и, кроме того, $T(\alpha X) = \alpha T(X)$ и $T(X\alpha) = T(X)\alpha$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, $\alpha \in \mathcal{S}$.

Определение 2.6. Матрица A *мажорирует* матрицу B, если из $b_{i,j} \neq 0$ следует, что $a_{i,j} \neq 0$, что обозначается $A \geqslant B$ или $B \leqslant A$.

Определение 2.7. Если A и B — матрицы, причём $A \geqslant B$, то $A \backslash B$ обозначает матрицу C, где

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } b_{i,j} \neq 0, \\ a_{i,j} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обозначает центр полукольца $\mathcal{S}$. Будем предполагать, что $m \leqslant n$. Пусть I_n — тождественная $(n \times n)$-матрица, $J_{m,n}$ — $(m \times n)$-матрица, все элементы которой — единицы, $O_{m,n}$ — нулевая $(m \times n)$-матрица. Мы будем опускать нижние индексы для обозначения размеров матриц, если это не приводит к недоразумениям, и будем писать I, J, O соответственно. Пусть $E_{i,j}$ обозначает матрицу, у которой на (i, j)-м месте стоит единица, а все остальные элементы нулевые, такая матрица называется *клеткой*. Пусть R_i обозначает матрицу, у которой i-я строка целиком состоит из единиц, а на всех остальных позициях находятся нули, C_j обозначает матрицу, у которой j-й столбец целиком состоит из единиц, а на всех остальных позициях находятся нули. Мы обозначаем через $|A|$ число ненулевых элементов в матрице A. Пусть $A[i, j \mid k, l]$ обозначает (2×2)-подматрицу A, которая лежит на пересечении i-й и j-й строк с k-м и l-м столбцами.

Приведём без доказательства некоторые результаты, доказанные в [2], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 2.8 ([2, теорема 2.14]). *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — линейный оператор. Следующие утверждения являются эквивалентными*:

1) *отображение T является биективным*;
2) *отображение T является сюръективным*;
3) *существуют перестановка σ на множестве $\{(i, j) \mid i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ и обратимые элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, такие что $T(E_{i,j}) = b_{i,j} E_{\sigma(i,j)}$.*

Замечание 2.9. Непосредственно проверяется, что при $m = 1$ или $n = 1$ все рассматриваемые линейные преобразования являются (P, Q, B)-операторами, а если $m = n = 1$, то (P, P^t, B)-операторами.

Далее мы будем предполагать, что $m, n \geqslant 2$.

Лемма 2.10 ([2, лемма 2.16]). *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо, $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — линейное преобразование, отображающее линии в линии, задаваемое формулой $T(E_{i,j}) = b_{i,j} E_{\sigma(i,j)}$, где σ является перестановкой на множестве $\{(i, j) \mid i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ и $b_{i,j} \in \mathcal{S}$ — некоторые ненулевые элементы, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда T является (P, Q, B)-оператором.*

3. Граничный ранг

Напомним, что

$$\mathcal{T}_1(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X + Y) = t(X) + t(Y)\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{T}_1(\mathcal{S})$ в том и только том случае, когда T является (P, Q, B)-оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.*

Доказательство. Легко видеть, что все (P, Q, B)-операторы сохраняют граничный ранг. Следовательно, они сохраняют множество $\mathcal{T}_1$.

По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j}) = b_{i,j} E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i, j).

Покажем, что отображение T переводит линии в линии. Допустим, что образы двух клеток лежат в одной линии, тогда как сами клетки не лежат, т. е. пусть существуют такие клетки $E_{i,j}$, $E_{k,l}$, что $t(E_{i,j}+E_{k,l})=2$, а $t(T(E_{i,j}+E_{k,l}))=1$. Тогда $(E_{i,j},E_{k,l})\in\mathcal{T}_1$, однако $(T(E_{i,j}),T(E_{k,l}))\notin\mathcal{T}_1$ — противоречие. Таким образом, отображение T переводит линии в линии. Следовательно, по лемме 2.10 отображение T является (P,Q,B)-оператором, где P и Q — перестановочные матрицы подходящих размеров, элементы $b_{ij}\in\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы. □

Для некоторых классов полуколец теорема 3.1 может быть усилена следующим образом.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{S}$ — конечное антинегативное или произвольное цепное полукольцо. Линейное отображение $T\colon\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})\to\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ строго сохраняет множество $\mathcal{T}_1(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда T является (P,Q,B)-оператором, где элементы $b_{i,j}\in\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ не являются делителями нуля.*

Доказательство. Если все элементы $b_{i,j}$ не являются делителями нуля, то любой (P,Q,B)-оператор сохраняет граничный ранг и, следовательно, строго сохраняет множество $\mathcal{T}_1(\mathcal{S})$.

Пусть отображение T строго сохраняет множество $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{S}$ — конечное антинегативное полукольцо с 1 или цепное полукольцо. Непосредственная проверка показывает, что существуют такие положительные целые $\alpha>\beta$, что $\alpha\cdot 1_{\mathcal{S}}=\beta\cdot 1_{\mathcal{S}}$. В [8] доказано, что в конечном полукольце существует степень T, являющаяся идемпотентом. Аналогичное доказательство справедливо для цепных полуколец. В самом деле, согласно определениям умножения и сложения в цепном полукольце, элементы каждой степени данной матрицы A содержатся в множестве элементов A. Поэтому множество различных матриц среди степеней A является конечным. Следовательно, существуют положительные целые s и t, такие что для всех $p,q>s$, $p\equiv q\pmod t$ справедливо, что $A^p=A^q$. В частности, $A^{st}=A^{2st}$. Следовательно, у каждого оператора над цепным полукольцом найдётся идемпотентная степень. В обоих случаях обозначим $L=T^d$ и $L^2=L$. Легко проверяется, что L строго сохраняет множество $\mathcal{T}_1$.

Заметим, что если $X\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ и $(X,X)\in\mathcal{T}_1$, то $X=O$. Следовательно, если $A\neq O$, то $L(A)\neq O$, так как L строго сохраняет $\mathcal{T}_1$.

Предположим, что существует такой индекс i, $1\leqslant i\leqslant m$, что $L(R_i)$ не мажорируется R_i. Тогда существуют такая пара индексов (r,s), что $E_{r,s}\leqslant L(R_i)$, тогда как $E_{r,s}\nleqslant R_i$. Легко видеть, что $(R_i,E_{r,s})\in\mathcal{F}_1$ и существует матрица $X=(x_{i,j})\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ с $x_{r,s}=0$, такая что $L(R_i)=aE_{r,s}+X$ для некоторого $0\neq a\in\mathcal{S}$. Тогда $(R_i,E_{r,s})\in\mathcal{T}_1$, $L(R_i)=aE_{r,s}+X$, здесь $x_{r,s}=0$.

Имеем

$$\begin{aligned}
&L(\beta R_i+(\alpha-\beta)aE_{r,s})=L(\beta R_i)+L((\alpha-\beta)aE_{r,s})=\\
&\quad=L^2(\beta R_i)+L((\alpha-\beta)aE_{r,s})=L(\beta L(R_i))+L((\alpha-\beta)aE_{r,s})=\\
&\quad=L(\beta(aE_{r,s}+X))+L((\alpha-\beta)aE_{r,s})=L(\beta aE_{r,s}+\beta X)+L((\alpha-\beta)aE_{r,s})=\\
&\quad=L(\beta X)+L(\beta aE_{r,s})+L((\alpha-\beta)aE_{r,s})=L(\beta X)+L(\beta aE_{r,s}+(\alpha-\beta)aE_{r,s})=\\
&\quad=L(\beta X)+L(\alpha aE_{r,s})=L(\alpha X)+L(\alpha aE_{r,s})=L(\alpha(X+aE_{r,s}))=\\
&\quad=L(\alpha L(R_i))=L^2(\alpha R_i)=L(\alpha R_i)=L(\beta R_i).
\end{aligned}$$

Таким образом, $(\beta R_i, (\alpha-\beta)aE_{r,s}) \in \mathcal{T}_1$, однако

$$L(\beta R_i) + L((\alpha-\beta)aE_{r,s}) = L(\beta R_i + (\alpha-\beta)aE_{r,s}) = L(\beta R_i).$$

Следовательно, $(L(\beta R_i), L((\alpha-\beta)aE_{r,s})) \notin \mathcal{T}_1$ — противоречие.

Мы установили, что $L(R_i) \leqslant R_i$ для всех i. Аналогично, $L(C_j) \leqslant C_j$ для всех j. Рассматривая матрицу $E_{i,j}$, которая мажорируется как R_i, так и C_j, имеем, что $L(E_{i,j}) \leqslant E_{i,j}$. В силу антинегативности $\mathcal{S}$ получаем, что T отображает клетки в клетки с весами, или $|T(E_{i,j})| = 1$ для всех i, j, и все элементы $T(J)$ ненулевые.

Следовательно, T индуцирует перестановку σ на множестве индексов $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, т. е. $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для некоторых скаляров $b_{i,j}$. Из линейности T следует, что $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$.

Повторяя доказательство теоремы 3.1, получим, что T является (P, Q, B)-оператором. ☐

Напомним, что

$$\mathcal{T}_2(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(X+Y) = \max(t(X), t(Y))\}.$$

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{T}_2(\mathcal{S})$ в том и только том случае, когда T является (P, Q, B)-оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.*

Доказательство. По теореме 2.8 имеем, что T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ — обратимые элементы, σ — перестановка на множестве пар (i, j).

Предположим, что образы двух клеток не лежат в одной линии, тогда как клетки лежат. Пусть $E_{i,j}$, $E_{i,l}$ — такие клетки, т. е. $T(E_{i,j})$, $T(E_{i,l})$ не лежат в одной линии. Это означает, что $t(T(E_{i,j} + E_{i,l})) = 2$. Тогда $(E_{i,j}, E_{i,l}) \in \mathcal{T}_2$, но $(T(E_{i,j}), T(E_{i,l})) \notin \mathcal{T}_2$ — противоречие. Следовательно, T^{-1} отображает линии в линии. По лемме 2.10 отсюда следует, что T^{-1} является (P, Q, B)-оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы. Следовательно, T также имеет такой вид.

Все (P, Q, B)-операторы сохраняют граничный ранг, а значит, и множество $\mathcal{T}_2(\mathcal{S})$. ☐

Напомним, что

$$\mathcal{T}_3(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = \min\{r(X), c(Y)\}\}.$$

Теорема 3.4. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{T}_3(\mathcal{S})$ в том и только том случае, когда существуют матрица перестановки $P \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ и матрица $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, такие что $T(X) = P(X \circ B)P^t$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Легко видеть, что все операторы рассматриваемого вида сохраняют $t(A)$, $c(A)$, $r(A)$ и, следовательно, так как $\mathcal{S}$ антинегативно, они сохраняют множество $\mathcal{T}_3$.

По теореме 2.8 получаем, что $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ в этом случае.

Покажем, что T переводит линии в линии. Для всех k имеем $(E_{i,j}, E_{j,k}) \in \mathcal{T}_3$, так как
$$t(E_{i,j}E_{j,k}) = t(E_{i,k}) = 1 = \min\{r(E_{i,j}), c(E_{j,k})\}.$$
Следовательно, $t(T(E_{i,j})T(E_{j,k})) = \min\{r(T(E_{i,j})), c(T(E_{j,k}))\} = 1$ поскольку T отображает клетки в клетки. Однако $T(E_{i,j})T(E_{j,k}) = b_{i,j}b_{j,k}E_{\sigma(i,j)}E_{\sigma(j,k)}$, т. е. $E_{\sigma(j,k)}$ лежит в той же строке, что и $E_{\sigma(j,1)}$, для каждого k. Значит, T отображает строки матрицы в строки. Аналогично проверяется, что T отображает столбцы в столбцы. Тогда $T(X) = P(X \circ B)Q$ для подходящих матриц перестановки P и Q.

Следовательно, $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i),\tau(j)}$, где σ — перестановка, соответствующая матрице P, τ — перестановка, соответствующая матрице Q^t. Однако $(E_{1,i}, E_{i,1}) \in \mathcal{T}_3$. Следовательно, $(E_{\sigma(1),\tau(i)}, E_{\sigma(i),\tau(1)}) \in \mathcal{T}_3$, т. е. $\sigma \equiv \tau$, откуда $Q = P^t$. □

Заметим, что если существует ненулевой мультипликативно необратимый элемент $s \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, то отображение $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, заданное формулой $T(X) = sX$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, сохраняет все матричные множества, упомянутые в этой работе, однако не является сюръективным. Таким образом, представляется интересным указать неинъективные и вырожденные (обладающие нетривиальным ядром) линейные отображения, сохраняющие указанные множества, или доказать их отсутствие.

Покажем, что существуют вырожденные линейные отображения, сохраняющие множество $\mathcal{T}_3$.

Пример 3.5. Пусть $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное отображение, определяемое на множестве клеток следующим образом: $T(E_{n,n}) = 0$, $T(E_{i,j}) = E_{1,1}$ для всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $(i,j) \neq (n,n)$. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{T}_3$.

Доказательство. Результат следует из того, что все пары матриц, принадлежащих образу отображения T, лежат в множестве $\mathcal{T}_3$. □

Напомним, что
$$\mathcal{T}_4(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})^2 \mid t(XY) = t(X) + t(Y) - n\}.$$

Для изучения случая равенства в нижней оценке на ранг произведения нам понадобится следующая редукция.

Лемма 3.6. *Пусть $\mathcal{S}$ — произвольное полукольцо, линейное отображение $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Тогда T сохраняет множество матриц граничного ранга n.*

Доказательство. Пусть $A = 0$, B — произвольная матрица граничного ранга n. Тогда $t(A) = 0$, $t(AB) = 0$, т. е. $t(AB) = t(A) + t(B) - n$. Отсюда

$t(T(A)T(B)) = t(T(A)) + t(T(B)) - n$. Таким образом, $0 = 0 + t(T(B)) - n$. Следовательно, $t(T(B)) = n$. Значит, отображение T сохраняет множество матриц граничного ранга n. □

Лемма 3.7. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда T сохраняет множество матриц граничного ранга n тогда и только тогда, когда T является (P, Q, B)-оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.*

Доказательство. Легко видеть, что все (P, Q, B)-операторы с обратимыми матрицами P, Q и элементами $b_{i,j}$, не являющимися делителями нуля, сохраняют граничный ранг.

По теореме 2.8 имеем, что отображение T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, где все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар индексов. Проверим, что отображение T^{-1} переводит линии в линии. Предположим, что прообраз некоторой строки не мажорируется ни одной линией. Тогда существуют такие индексы i, k, l, что $T^{-1}(E_{i,k})$ и $T^{-1}(E_{i,l})$ не лежат в одной линии, т. е. существуют такие индексы p, r, q, s, $p \neq r$, $q \neq s$, что $T^{-1}(E_{i,k}+E_{i,l}) \leqslant E_{r,s}+E_{p,q}$ и $T^{-1}(E_{i,k}+E_{i,l})$ не мажорируется ни одной из клеток $E_{r,s}$, $E_{p,q}$. Добавим к матрице $E_{r,s}+E_{p,q}$ сумму $n-2$ клеток таким образом, что получится матрица перестановки. Обозначим её A. Имеем $t(A) = n$. Поскольку отображение T сохраняет множество матриц граничного ранга n, имеем $t(T(A)) = n$. С другой стороны, $T(A)$ мажорируется $n-1$ линией, поскольку $T(E_{r,s}) = b_{r,s}E_{i,k}$ и $T(E_{p,q}) = b_{p,q}E_{i,l}$ лежат в одной строке. Это противоречит условию $t(T(A)) = n$. Следовательно, прообразами строк являются строки или столбцы. Аналогично, прообразами столбцов являются строки или столбцы. Из леммы 2.10 следует, что T является (P, Q, B)-оператором. □

Теорема 3.8. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Преобразование T сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$ тогда и только тогда, когда существуют матрица перестановки $P \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ и матрица $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$, такие что $T(X) = P(X \circ B)P^t$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Покажем, что отображения рассматриваемого типа сохраняют множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Легко видеть, что все (P, Q, B)-операторы сохраняют граничный ранг. Следовательно, правая часть равенства, определяющего множество $\mathcal{T}_4$, не меняется под действием T и остаётся только проверить, что $t(XY) = t(P(X \circ B)P^tP(Y \circ B)P^t)$. Однако $t(P(X \circ B)P^tP(Y \circ B)P^t) = t((X \circ B)(Y \circ B)) = t(XY)$, поскольку полукольцо $\mathcal{S}$ является антинегативным и все элементы матрицы B обратимы.

Проверим теперь, что все сюръективные линейные отображения, сохраняющие множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, являются (P, Q, B)-операторами. Для этого заметим, что по лемме 3.6 отображение T сохраняет множество матриц граничного ранга n.

Тогда по лемме 3.7 отображение T является (P, Q, B)-оператором, $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Покажем, что отображение $T(Z) = P(Z \circ B)^t Q$ не сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Действительно, поскольку подобие сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, можно вместо отображения T рассматривать отображение $T_1(Z) = P^t P(Z \circ B)^t QP = (Z \circ B)^t D$, где $D = QP$ — перестановочная матрица. Пусть $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$ для всех i, j. Тогда при $i \neq j$ справедливо $(X = ((D^{-1})^t E_{i,j}) \circ C, Y = I \setminus E_{j,j}) \in \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, так как $t(XY) = t(O) = 0 = 1 + (n-1) - n$. Однако $((X \circ B)^t D = E_{j,i}, (Y \circ B)^t D = ((I \setminus E_{j,j}) \circ B^t) D) \notin \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$, поскольку $t(E_{j,i}((I \setminus E_{j,j}) \circ B^t) D)) = t(E_{j,i}) = 1 \neq 0$.

Остаётся проверить, что $PQ = I$. Предположим, что (P, Q, B)-оператор сохраняет множество $\mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Тогда $t(XY) = t((X \circ B)QPY)$ для всех пар $(X, Y) \in \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Матрица QP является матрицей перестановки, как произведение двух матриц перестановки. Предположим, что QP переставляет i-й и j-й столбцы матрицы X. Пусть $X = E_{i,i}$, $Y = \sum\limits_{j \neq i} E_{j,j}$. Тогда $t(X) = 1$, $t(Y) = n - 1$, $t(XY) = t(0) = 0 = t(X) + t(Y) - n$, т. е. $(X, Y) \in \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. С другой стороны, $(X \circ B)QP = b_{ii} E_{i,j}$. Следовательно, $(X \circ B)QP(Y \circ B) = b_{i,i} b_{j,j} E_{i,j} \neq 0$, откуда $(P(X \circ B)Q, P(Y \circ B)Q) \notin \mathcal{T}_4(\mathcal{S})$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Замечание 3.9. Рассматривая матрицы $(((QP)^{-1})^t E_{1,1}) \circ C$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$ для всех i, j, и $E_{2,1} + E_{3,2} + \ldots + E_{n,n-1}$, можно аналогичным образом убедиться, что отображение $T(Z) = P(Z \circ B)^t Q$ не сохраняет множество $\mathcal{F}_{4R}$ (см. [2, теорема 9.2]).

Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ содержится в множестве неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_+$.

Напомним, что

$$\mathcal{T}_5(\mathcal{S}) = \{(X, Y, Z) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^3 \mid t(XYZ) + t(Y) = \rho(XY) + \rho(YZ)\}.$$

Определение 3.10. Матрица $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ имеет *факторизационный ранг* k $(\operatorname{rank}(A) = k)$, если существуют такие матрицы $B \in \mathcal{M}_{m,k}(\mathcal{S})$ и $C \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathcal{S})$, что $A = BC$ и k — наименьшее положительное целое число, для которого существует такое разложение. По определению единственной матрицей, обладающей нулевым факторизационным рангом, является нулевая матрица O.

Лемма 3.11. *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, содержащееся в $\mathbb{R}_+$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, $m, n \geqslant 2$. Допустим, что $b_{i,j}$ обратимы для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Пусть (k, l) — произвольная фиксированная пара целых чисел, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant k \leqslant n$, $2 \leqslant l \leqslant m$. Предположим, что факторизационный ранг каждой $(l \times k)$-подматрицы матрицы B равен 1. Тогда факторизационный ранг каждой $((l+1) \times k)$-подматрицы (если она существует) равен 1 и факторизационный ранг каждой $(l \times (k+1))$-подматрицы (если она существует) равен 1.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную $(l \times (k+1))$-подматрицу матрицы B. Применяя, если это необходимо, перестановку строк и столбцов, можно предположить, что эта подматрица имеет вид

$$B' = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,k} & b_{1,k+1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,k} & b_{2,k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l,1} & b_{l,2} & \ldots & b_{l,k} & b_{l,k+1} \end{pmatrix}.$$

По условию теоремы существуют четыре вектора $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_l) \in \mathcal{S}^l$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{S}^k$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_l) \in \mathcal{S}^l$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathcal{S}^k$, такие что

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l,1} & b_{l,2} & \ldots & b_{l,k} \end{pmatrix} = \mathbf{s}^t \, \mathbf{t} \tag{1}$$

и

$$\begin{pmatrix} b_{1,2} & \ldots & b_{1,k} & b_{1,k+1} \\ b_{2,2} & \ldots & b_{2,k} & b_{2,k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l,2} & \ldots & b_{l,k} & b_{l,k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{u}^t \mathbf{v}. \tag{2}$$

Рассмотрим матрицу

$$B'' = \mathbf{s}^t \, (t_1, t_2, \ldots, t_k, s_1^{-1} u_1 v_k)$$

и проверим, что $B' = B''$. Первые k столбцов этих матриц совпадают по определению векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$. Рассмотрим последний столбец. Имеем

$$b''_{1,k+1} = s_1 \cdot s_1^{-1} u_1 v_k = u_1 v_k = b_{1,k+1},$$

где последнее равенство следует из формулы (2). Из определения векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и равенств (1), (2) следует, что $s_i t_j = b_{i,j} = u_i v_{j-1}$ для всех $i = 1, \ldots, l$, $j = 2, \ldots, k$. Тогда $s_i^{-1} u_i = t_j v_{j-1}^{-1}$ для всех $i = 1, \ldots, l$. Следовательно,

$$s_1^{-1} u_1 = \ldots = s_l^{-1} u_l.$$

Для любого $i = 2, \ldots, l$ имеем

$$b''_{i,k+1} = s_i \cdot s_1^{-1} u_1 v_k = s_i \cdot s_i^{-1} u_i v_k = u_i v_k = b_{i,k+1},$$

т. е. $B' = B''$. Отсюда $\operatorname{rank}(B') = 1$. Аналогичные рассмотрения для $((l+1) \times k)$-матрицы завершают доказательство. $\square$

Лемма 3.12. *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, содержащееся в $\mathbb{R}_+$, $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, $m, n \geqslant 2$. Предположим, что коэффициенты $b_{i,j}$ обратимы для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ и $\operatorname{rank}(B) \leqslant 2$. Тогда $\operatorname{rank}(B) = \rho(B)$.*

Доказательство. Легко видеть, что для любой матрицы $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ справедливо неравенство $\rho(B) \leqslant \operatorname{rank}(B)$. Следовательно $\rho(B) \leqslant 2$. Рассмотрим отдельно каждый из трёх случаев: $\rho(B) = 0$, $\rho(B) = 1$ или $\rho(B) = 2$. В случае $\rho(B) = 2$ имеем $2 \leqslant \operatorname{rank}(B) \leqslant 2$, т. е. $\operatorname{rank}(B) = 2$. Если $\rho(B) = 0$, то $B = 0$ и, следовательно, $\operatorname{rank}(B) = 0$. Остаётся проверить, что если $\rho(B) = 1$, то $\operatorname{rank}(B) = 1$. Хорошо известно, что факторизационный ранг матрицы над любым подполем поля $\mathbb{R}$ равен факторизационному рангу этой матрицы над полем $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{K}$ обозначает минимальное подполе в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, содержащее $\mathcal{S}$. Поскольку $\rho(B) = 1$, существуют такие векторы $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in \mathcal{K}^m$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathcal{K}^n$, что $B = \mathbf{s}^t\, \mathbf{t}$, т. е. $b_{i,j} = s_i t_j$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Заметим, что s_i, t_j отличны от нуля, поскольку $b_{i,j}$ — ненулевые элементы. Без ограничения общности можно считать, что $s_1 = 1$ (в противном случае рассмотрим разложение $B = \mathbf{s}'^t \mathbf{t}'$, где $s'_i = s_i s_1^{-1}$, $t'_i = t_i s_1$). Поскольку для всех $j = 1, \ldots, n$ справедливо равенство $b_{1,j} = t_j$, имеем $t_j \in \mathcal{S}$, элементы t_j обратимы в $\mathcal{S}$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Отсюда для всех $i = 1, \ldots, m$ следует, что $s_i = b_{i,1} t_1^{-1} \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\operatorname{rank}(B) = 1$. $\square$

Следующий пример показывает, что предположение обратимости элементов матрицы действительно необходимо в леммах 3.11 и 3.12.

Пример 3.13. Рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 \\ 6\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 15\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}\big(\mathbb{Z}_+\big[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\,\big]\big).$$

Заметим, что $\rho(B) = 1$, так как её строки линейно зависимы. Легко видеть, что для любой (2×2)-подматрицы B' матрицы B справедливо $\operatorname{rank}(B') = 1$. Например,

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 6\sqrt{2} & 10\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Поскольку элемента $\sqrt{2}$ в полукольце $\mathbb{Z}_+\big[2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\,\big]$ нет, разложение матрицы B в произведение столбца и строки невозможно. Следовательно, $\operatorname{rank}(B) = 2$.

Лемма 3.14. *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, содержащееся в $\mathbb{R}_+$. Если $T(X) = X \circ B$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ и $\operatorname{rank}(B) = 1$, то существуют такие диагональные матрицы D и E, что $T(X) = DXE$ для всех $X \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Если $\operatorname{rank}(B) = 1$, то существуют такие векторы $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \ldots, d_m]$ и $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$, что $B = \mathbf{d}\mathbf{e}^t$, т. е. $b_{i,j} = d_i e_j$. Рассмотрим $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ и $E = \operatorname{diag}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. По условию (i,j)-й элемент матрицы $T(X)$ равен $b_{i,j} x_{i,j}$, (i,j)-й элемент матрицы DXE равен $d_i x_{i,j} e_j = b_{i,j} x_{i,j}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.15. *Пусть $\mathcal{S}$ — полукольцо, содержащееся в $\mathbb{R}_+$, $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Если T сохраняет множество $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$, то T имеет вид $T(X) = PDXEP^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы из $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$.*

Доказательство. По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$, где $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы для всех i, j.

Предположим, что некоторая строка, например i-я, отображается под действием T не в строку. Тогда без ограничения общности можно предположить, что $\sigma(i,i) = (y,r)$, $\sigma(i,k) = (x,s)$ и $y \neq x$. Тройка матриц $(E_{i,i}, E_{i,i}, E_{i,i})$ принадлежит $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$, поэтому

$$(b_{i,i}E_{y,r}, b_{i,i}E_{y,r}, b_{i,i}E_{y,r}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}).$$

Отсюда с необходимостью $y = r$. Симметрично переставляя строки и столбцы, можно предположить, что $y = r = i$.

Пусть индексы l и j таковы, что для произвольного j справедливо $\sigma(l,j) = (p_l, q_l)$ и $\sigma(j,i) = (u,v)$. Если $v \neq i$, то

$$(E_{l,j}, E_{j,i}, E_{i,i}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$$

и, следовательно,

$$(b_{l,j}E_{p_l,q_l}, b_{j,i}E_{u,v}, b_{i,i}E_{i,i}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}).$$

Получаем, что $q_l = u$ для всех l. Если $v = i$, то

$$(E_{l,j}, E_{j,i}, E_{i,k}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$$

и, следовательно,

$$(b_{l,j}E_{p_l,q_l}, b_{j,i}E_{u,v}, b_{i,k}E_{x,s}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}).$$

Имеем $q_l = u$ для всех l. Следовательно, j-й столбец отображается в u-й. Так как j было выбрано произвольно, получаем, что T переводит столбцы в столбцы.

Заметим, что

$$(E_{i,k}, E_{i,i}, E_{i,k}) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S}),$$

в то время как

$$(b_{i,k}E_{x,s}, b_{i,i}E_{i,i}, b_{i,k}E_{x,s}) \notin \mathcal{T}_5(\mathcal{S}),$$

так как из $k \neq i$ следует $s \neq i$. Данное противоречие показывает, что T переводит строки в строки.

Аналогичные рассуждения показывают, что T переводит столбцы в столбцы. Следовательно, T является нетранспонированным (P,Q,B)-оператором, где все элементы B обратимы по лемме 2.10.

Для доказательства того, что $Q = P^t$, достаточно заметить, что

$$(E_{i,j}, E_{j,j}, E_{j,i}) \in \mathcal{T}_5.$$

Следовательно,

$$(E_{\sigma(i),\tau(j)}, E_{\sigma(j),\tau(j)}, E_{\sigma(j),\tau(i)}) \in \mathcal{T}_5,$$

откуда $\sigma \equiv \tau$.

Покажем, что $\rho(B) = 1$. Непосредственная проверка убеждает, что преобразование $X \to PXP^t$ сохраняет $\mathcal{T}_5$. Следовательно, $T_0(X) = X \circ B$ сохраняет $\mathcal{T}_5$.

В силу антинегативности полукольца имеем $t(X \circ B \cdot Y \circ B \cdot Z \circ B) = t(XYZ)$ и $t(Y \cdot B) = t(Y)$. Поэтому если $(X, Y, Z) \in \mathcal{T}_5$, то

$$\rho(X \circ B \cdot Y \circ B) + \rho(Y \circ B \cdot Z \circ B) = \rho(XY) + \rho(YZ).$$

Предположим, что $\rho(B) \geqslant 2$. Следовательно, существует (2×2)-подматрица в матрице B, имеющая ранг 2, а именно $\rho(B[i,j \mid k,l]) = 2$. Рассмотрим $X = 0$, $Y = (E_{i,k} + E_{i,l} + E_{j,k} + E_{j,l}) \circ C$, где $C = (c_{i,j})$, $c_{i,j} = b_{i,j}^{-1}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $Z = I$. Следовательно, $\rho(XY) + \rho(YZ) = 0 + 2 = t(XYZ) + t(Y)$, т. е. $(X, Y, Z) \in \mathcal{T}_5$. С другой стороны,

$$\rho(Y \circ B \cdot Z \circ B) = \rho(E_{i,k} + E_{i,l} + E_{j,k} + E_{j,l}) = 1 \neq 2 = \rho(YZ).$$

Получено противоречие, так как $X = 0$, т. е. $\rho(X \circ B \cdot Y \circ B) = \rho(XY) = 0$. По лемме 3.12 получаем, что $\operatorname{rank}(B) = 1$. Следовательно, по лемме 3.14 T имеет требуемый вид. □

Лемма 3.16. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо, A, B — матрицы подходящего размера с элементами в $\mathcal{S}$ и D — диагональная матрица без делителей нуля на диагонали. Тогда $t(ADB) = t(AB)$.*

Доказательство следует из антинегативности полукольца $\mathcal{S}$. □

Теорема 3.17. *Пусть $\mathcal{S}$ является подполукольцом в $\mathbb{R}_+$, $n \geqslant 4$ и $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное сюръективное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если T имеет вид $T(X) = PDXEP^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы в $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, такие что $ED = kI$ для некоторых ненулевых $k \in \mathcal{S}$.*

Доказательство. Пусть T — сюръективный линейный оператор, сохраняющий $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$. По лемме 3.15 $T(X) = PDXEP^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы в $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$. Достаточно установить, что $ED = kI$. Обозначим $DE = \operatorname{diag}(f_1, \dots, f_n)$ (матрица DE является диагональной, как произведение диагональных матриц). Предположим, что $ED \neq kI$ для всех $k \in \mathcal{S}$, тогда $f_i \neq f_{i+1}$ для некоторого i. Переставляя i-е строку/столбец с первыми и $(i+1)$-е со вторыми, можно предполагать, не ограничивая общности рассуждений, что $ED = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ и $d_1 \neq d_2$. Пусть

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & O_{2,n-3} \\ & O_{n-2,3} & & O_{n-2,n-3} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \\ \frac{d_1}{d_2} & \frac{d_1}{d_2} & \frac{d_1}{d_2} & \\ 1 & 3 & 3 & O_{4,n-3} \\ 0 & 0 & 1 & \\ & O_{n-4,3} & & O_{n-4,n-3} \end{bmatrix}.$$

Имеем

$$XY = XYI = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & \\ \frac{d_1}{d_2} + 1 & \frac{d_1}{d_2} + 3 & \frac{d_1}{d_2} + 3 & O_{2,n-3} \\ & O_{n-2,3} & & O_{n-2,n-3} \end{bmatrix},$$

значит, $t(XY) = 2$, $\rho(XYI) = 2$, следовательно, $t(XY)+t(YI) = \rho(XYI)+\rho(Y)$, так как $t(YI) = \rho(Y) = 3$. Поэтому $(X, Y, I) \in \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$. Имеем $T(X)T(Y) = PDXEP^tPDYEP^t = PD(XEDY)EP^t$, а значит, $t(T(X)T(Y)) = t(XY) = 2$ по лемме 3.16 и так как умножение на матрицы перестановки и обратимые диагональные матрицы с обеих сторон не меняет граничный ранг. Далее, $\rho(T(X)T(Y)T(I)) = \rho(XEDY)$, так как если $\rho(Y) = n$, то $\rho(XY) = \rho(YX) = \rho(X)$ для произвольной матрицы X. Имеем

$$EDY = \begin{bmatrix} d_1 & d_1 & d_1 & \\ d_1 & d_1 & d_1 & \\ d_3 & 3d_3 & 3d_3 & O_{4,n-3} \\ 0 & 0 & d_4 & \\ & O_{n-4,3} & & O_{n-4,n-3} \end{bmatrix}$$

и

$$XEDY = \begin{bmatrix} d_1+d_3 & d_1+3d_3 & d_1+3d_3 & O_{2,n-3} \\ d_1+d_3 & d_1+3d_3 & d_1+3d_3 & \\ & O_{n-2,3} & & O_{n-4,n-3} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\rho(T(X)T(Y)T(I)) = 1 < \rho(XYI)$ и $\rho(T(Y)) = \rho(Y)$. Значит, $t(T(X)T(Y)) + t(T(Y)T(I)) = 2 + 3 = 5 > 4 = 1 + 3 = \rho(T(X)T(Y)T(I)) + \rho(T(Y))$, т. е. $(T(X), T(Y), T(I)) \notin \mathcal{T}_5(\mathcal{S})$ — противоречие. Следовательно, $ED = kI$ для некоторого ненулевого $k \in \mathcal{S}$.

Непосредственная проверка показывает, что если $T(X) = PDXEP^t$, где P — матрица перестановки, D, E — обратимые диагональные матрицы в $\mathcal{M}_n(\mathcal{S})$, такие что $ED = kI$ для некоторого ненулевого $k \in \mathcal{S}$, то T сохраняет $\mathcal{T}_5(\mathcal{S})$. $\square$

Покажем, что существуют вырожденные линейные отображения, сохраняющие множества $\mathcal{T}_4$ и $\mathcal{T}_5$.

Пример 3.18. Пусть $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ является линейным преобразованием, заданным на множестве матричных единиц следующим образом: $T(E_{n,n}) = 0$, $T(E_{i,j}) = I$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $(i, j) \neq (n, n)$. Тогда T сохраняет множества $\mathcal{T}_4$ и $\mathcal{T}_5$.

Доказательство. Действительно, единственная пара матриц, принадлежащая образу T и не лежащая в $\mathcal{T}_4$, — это (O, O). В силу антинегативности $\mathcal{S}$ и линейности T получаем, что полный прообраз пары (O, O) является множеством $\mathcal{K} = \{(O, O), (E_{n,n}, O), (O, E_{n,n}), (E_{n,n}, E_{n,n})\}$. Непосредственно проверяется, что $\mathcal{K} \cap \mathcal{T}_4 = \varnothing$. Следовательно, T сохраняет $\mathcal{T}_4$. Аналогично проверяется, что T сохраняет $\mathcal{T}_5$. $\square$

4. Нулевой граничный ранг

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_1(\mathcal{S}) = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X + Y) = \min\{z(X), z(Y)\}\}.$$

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда T сохраняет множество $\mathcal{Z}_1(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если T является (P,Q,B)-оператором, где P, Q — матрицы перестановки, $B=(b_{ij})$, элементы $b_{i,j}\in\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы для всех i, j.*

Доказательство. По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j})=b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, где все элементы $b_{i,j}\in\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i,j).

Покажем, что отображение T переводит линии в линии. Предположим, что образы двух клеток, лежащих в одной линии, не лежат в одной линии. Пусть $E_{i,j}$, $E_{i,k}$ — такие клетки, что $T(E_{i,j})$, $T(E_{i,k})$ не лежат в одной линии. Тогда $z((J\setminus E_{i,j}\setminus E_{i,k})+E_{i,k})=1=z(J\setminus E_{i,j}\setminus E_{i,k})$, т. е. $(J\setminus E_{i,j}\setminus E_{i,k},E_{i,k})\in\mathcal{Z}_1$, тогда как $z(T(J\setminus E_{i,j}\setminus E_{i,k})+T(E_{i,k}))=1<2=\min\{z(T(J\setminus E_{i,j}\setminus E_{i,k})),z(T(E_{i,k})\}$, т. е. $(T(J-E_{i,j}-E_{i,k}),T(E_{i,k}))\notin\mathcal{Z}_1$ — противоречие. Следовательно, T переводит линии в линии.

По лемме 2.10 отсюда следует, что T является (P,Q,B)-оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, все элементы $b_{ij}\in\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Прямая проверка показывает, что все (P,Q,B)-операторы сохраняют нулевой граничный ранг. Следовательно, они сохраняют множество $\mathcal{Z}_1(\mathcal{S})$. □

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_2(\mathcal{S})=\{(X,Y)\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(X+Y)=0\}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{Z}_2(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если $T(E_{i,j})=b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, здесь все элементы $b_{i,j}\in\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i,j).*

Доказательство. По теореме 2.8 имеем $T(E_{i,j})=b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$, здесь все элементы $b_{i,j}\in\mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар $\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.

Из антинегативности полукольца $\mathcal{S}$ следует, что если матрица $(X+Y)$ не содержит нулевых элементов, то множества нулевых клеток матриц X и Y не пересекаются. Тогда множества нулевых клеток матриц $T(X)$ и $T(Y)$ не пересекаются, так как σ — перестановка. Следовательно, матрица $(T(X)+T(Y))$ не содержит нулевых элементов. Отсюда следует, что все отображения указанного вида сохраняют множество $\mathcal{Z}_2(\mathcal{S})$. □

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})=\{(X,Y)\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY)=0\}.$$

Теорема 4.3. *Пусть $\mathcal{S}$ — антинегативное полукольцо без делителей нуля, $T\colon \mathcal{M}_{n}(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_{n}(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение. Тогда отображение T сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$ в том и только том случае, если*

$T(X) = P(X \circ B)P^t$, *где* P — *матрица перестановки,* $B = (b_{ij})$, *элементы* $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ *обратимы для всех* i, j.

Доказательство. Легко видеть, что отображения указанного типа сохраняют множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$.

По теореме 2.8 имеем, что отображение T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, здесь все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i,j).

Покажем, что T отображает линии в линии. Предположим, что образы двух клеток лежат в одной линии, а сами клетки не лежат. Пусть $E_{i,j}$, $E_{i,k}$ — такие клетки, что $T^{-1}(E_{i,j})$, $T^{-1}(E_{i,k})$ не лежат в одной линии. Рассмотрим матрицу $A = T^{-1}(J \setminus R_i)$. Матрица A не имеет нулевых строк, так как T — перестановка на множестве клеток и прообраз i-й строки не является строкой в силу выбора i. Тогда из-за антинегативности матрица AJ не имеет нулевых элементов и $z(AJ) = 0$. Следовательно, $(A, J) \in \mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$, тогда как $(T(A), T(J)) = (J \setminus R_i, T(J)) \notin \mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$ — противоречие. Отсюда следует, что T^{-1} отображает линии в линии. Следовательно, T отображает линии в линии.

По лемме 2.10 отсюда следует, что T является (P,Q,B)-оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, все элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Чтобы убедиться, что отображение $T(X) = (X \circ B)^t D$, где D — матрица перестановки, не сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$, достаточно рассмотреть пару матриц $\hat{A} = ((D^{-1})^t C_1) \circ C$, где $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$, $\hat{B} = R_1$. Тогда $z(\hat{A}\hat{B}) = z((C_1 \circ C) \cdot R_1) = 0)$, так как D — матрица перестановки. С другой стороны, $T(\hat{A}) = ((((D^{-1})^t C_1) \circ C) \circ B)^t D = R_1 D^{-1} D = R_1$, $T(\hat{B}) = (R_1 \circ B)^t D = (C_1 \circ B^t)D$. Поскольку матрица $R_1 \cdot (C_1 \circ B^t) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{1i}E_{11}$ имеет нулевой граничный ранг n, отсюда следует, что T не сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$. Следовательно, $T(X) = P(X \circ B)^t Q$ не сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$, так как подобие сохраняет множество $\mathcal{Z}_3(\mathcal{S})$.

Проверим, что $Q = P^t$. Предположим противное, т. е. $PQ \neq I$. Тогда существуют такие индексы i, j, что матрица PQ переводит i-й столбец в j-й. В этом случае рассмотрим матрицы $\tilde{A} = J \setminus (E_{1,1} + \ldots + E_{1,n}) + E_{1,i}$, $\tilde{B} = J \setminus E_{j,1}$. Тогда матрица AB не содержит нулевых элементов, т. е. $z(\tilde{A}\tilde{B}) = 0$. Однако элемент с индексом $(1,1)$ матрицы $T(\tilde{A})T(\tilde{B})$ является нулевым, т. е. $z(T(\tilde{A})T(\tilde{B})) \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Напомним, что

$$\mathcal{Z}_4(\mathcal{S}) = \{(X,Y) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{S})^2 \mid z(XY) = z(X) + z(Y).$$

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathcal{S}$ — *антинегативное полукольцо без делителей нуля,* $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — *сюръективное линейное отображение. Тогда отображение* T *сохраняет множество* $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$ *в том и только том случае, если* $T(X) = P(X \circ B)P^t$, *где* P — *матрица перестановки,* $B = (b_{ij})$, *элементы* $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ *обратимы для всех* i, j.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что отображения указанного типа сохраняют множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$.

По теореме 2.8 имеем, что отображение T биективно и $T(E_{i,j}) = b_{i,j}E_{\sigma(i,j)}$ для всех i, j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, здесь все элементы $b_{i,j} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы, σ — перестановка на множестве пар (i, j).

Покажем, что T отображает линии в линии. Предположим, что образы двух клеток, не лежащих в одной линии, лежат в одной линии. Пусть $E_{i,j}$, $E_{i,k}$ — такие клетки, что $T^{-1}(E_{i,j}), T^{-1}(E_{i,k})$ не лежат в одной линии. Заметим, что $z((J \setminus R_1)J) = z(J \setminus R_1) = 1 = 1 + 0 = z(J \setminus R_1) + z(J)$. Следовательно, $(J \setminus R_1, J) \in \mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$. С другой стороны, при доказательстве теоремы 4.3 было проверено, что $(T(J \setminus R_1), T(J)) \notin \mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$. Полученное противоречие показывает, что отображение T переводит линии в линии.

По лемме 2.10 отсюда следует, что T является (P, Q, B)-оператором, где P и Q — матрицы перестановки подходящего размера, все элементы $b_{ij} \in \mathcal{Z}(\mathcal{S})$ обратимы.

Чтобы убедиться, что отображение $T(X) = (X \circ B)^t D$, где D — матрица перестановки, не сохраняет множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$, достаточно рассмотреть пару матриц $\bar{A} = ((D^{-1})^t J \setminus R_1) \circ C$, где $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ij}^{-1}$, $\hat{B} = J \setminus C_1$. Тогда $T(X) = P(X \circ B)^t Q$ не сохраняет множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$, так как подобие сохраняет множество $\mathcal{Z}_4(\mathcal{S})$.

Предположим, что $Q \neq P^t$. Тогда $C_j PQ = C_i$ для некоторых $j \neq i$. В этом случае имеем $z((J \setminus C_i)R_i) = z(0) = n = z(J \setminus C_i) + z(R_i)$, т. е. $((J \setminus C_i), R_i) \in \mathcal{Z}_4$, тогда как $z((J \setminus C_i)PQR_i) = z(J \setminus C_j)R_i = z(J) = 0$, т. е. $((J \setminus C_i)PQ, R_i) \notin \mathcal{Z}_4$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Заметим, что существуют вырожденные линейные отображения, сохраняющие оба случая равенства в обоих неравенствах для нулевого граничного ранга.

Пример 4.5. Пусть $T\colon \mathcal{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathcal{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное отображение, определённое на множестве клеток правилом $T(E_{n,n}) = 0$, $T(E_{i,j}) = J$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $(i, j) \neq (n, n)$. Тогда T сохраняет множества $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$ и $\mathcal{Z}_4$.

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из определения рассматриваемых множеств и из антинегативности полукольца $\mathcal{S}$. □

Литература

[1] Beasley L. B. Linear operators which preserve pairs on which the rank is additive // J. Korean S. I. A. M. — 1998. — Vol. 2. — P. 27—30.

[2] Beasley L. B., Guterman A. E. Linear preservers of extremes of rank inequalities over semirings: The factor rank // J. Math. Sci. — 2004. — To appear.

[3] Beasley L. B., Guterman A. E. Rank inequalities over semirings // J. Korean Math. Soc. — To appear.

[4] Beasley L. B., Guterman A. E., Neal C. L. Linear preservers for Sylvester and Frobenius bounds on matrix rank // Rocky Mountain J. Math. — 2004. — To appear.

[5] Beasley L. B., Lee S.-G., Song S.-Z. Linear operators that preserve zero-term rank of Boolean matrices // J. Korean Math. Soc. — 1999. — Vol. 36, no. 6. — P. 1181—1190.

[6] Beasley L. B., Lee S.-G., Song S.-Z. Linear operators that preserve pairs of matrices which satisfy extreme rank properties // Linear Algebra Appl. — 2002. — Vol. 350. — P. 263—272.

[7] Beasley L. B., Pullman N. J. Term rank, permanent and rook polynomial preservers // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 90. — P. 33—46.

[8] Beasley L. B., Pullman N. J. Operators that preserve semiring matrix functions // Linear Algebra Appl. — 1988. — Vol. 99. — P. 199—216.

[9] Beasley L. B., Pullman N. J. Linear operators that preserve term rank 1 // Proc. Roy. Irish Acad. — 1990. — Vol. 91. — P. 71—78.

[10] Brualdi R., Ryser H. Combinatorial Matrix Theory. — Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[11] Guterman A. E. Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings // Linear Algebra Appl. — 2001. — Vol. 331. — P. 75—87.

[12] Marsaglia G., Styan P. When does $\mathrm{rk}(A+B) = \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$? // Canad. Math. Bull. — 1972. — Vol. 15, no. 3. — P. 451—452.

[13] Marsaglia G., Styan P. Equalities and inequalities for ranks of matrices // Linear and Multilinear Algebra. — 1974. — Vol. 2. — P. 269—292.

[14] Minc H. Permanents // Encyclopedia in Mathematics and its Applications. Vol. 6. — Addison-Wesley Publishing Company, 1978.

[15] P. Pierce and others. A survey of linear preserver problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 1—119.

[16] Tian Y. Rank equalities related to outer inverses of matrices and applications // Linear and Multilinear Algebra. — 2002. — Vol. 49. — P. 269—288.

[17] Tian Y. Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverses // Linear Algebra Appl. — 2002. — Vol. 355. — P. 187—214.