Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей

Е. И. БУНИНА, А. В. МИХАЛЁВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: helen_bunina@mtu-net.ru

УДК 510.67+512.55+512.58

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, категория модулей над кольцом, кольца эндоморфизмов, группы автоморфизмов.

Аннотация

В данной работе мы кратко излагаем некоторые недавние результаты по элементарной эквивалентности линейных и алгебраических групп, а также приводим новые принадлежащие нам результаты по элементарной эквивалентности категорий модулей, колец эндоморфизмов модулей, решёток подмодулей модулей и групп автоморфизмов модулей.

Abstract

E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, Elementary equivalence of categories of modules over rings, endomorphism rings, and automorphism groups of modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 2, pp. 51—134.

In this paper we give a small review of some recent results of elementary equivalence of linear and algebraic groups and our last new results of elementary equivalence of categories of modules, endomorphism rings of modules, lattices of submodules of modules, and automorphism groups of modules.

Содержание

Введение **52**

§ 1. Основные сведения из теории множеств, теории моделей, теории категорий **59**

1.1. Языки первого порядка 59
1.2. Аксиомы и основные понятия теории NBG 62
1.3. Модели, выполнимость, элементарная эквивалентность 67
1.4. Ультрафильтры, ультрапроизведения, ультрастепени 70
1.5. Основные сведения из теории категорий. Категория модулей над кольцом 72

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 2, с. 51—134.

§ 2. Аналог теоремы Мориты для элементарной эквивалентности категорий модулей 77

2.1. Некоторые факты о категории mod-R 77
2.2. Выделение прообразующего объекта в категории mod-R 79
2.3. Кольцо $\mathrm{End}_R\, P$ 81
2.4. Случай конечных колец 82
2.5. Красивые линейные комбинации 83
2.6. Порождающее множество модуля V 84
2.7. Логика второго порядка и структура $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle$, алгоритм перевода формул 85
2.8. Обратная теорема 92
2.9. Аналог теоремы Мориты и следствия 98

§ 3. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов модулей бесконечных рангов 102

3.1. Кольца эндоморфизмов модулей и категории $C_{M(V)}$ 102
3.2. Элементарная эквивалентность в категориях вида $C_{M(V)}$ 104
3.3. Основная теорема 107

§ 4. Проективная геометрия модуля V 107

4.1. Язык проективной геометрии и основные понятия, выразимые в этом языке 107
4.2. Кольцо $\mathrm{End}_R\, P$ 111
4.3. Построение кольца $\mathrm{End}_R\, V$ 114
4.4. Обратная теорема 116

§ 5. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов модулей бесконечных рангов 117

5.1. Изоморфизм групп $\mathrm{Aut}_R(V)$ 117
5.2. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов модулей бесконечных рангов 131
5.3. Основная теорема 133

Литература 133

Введение

Языком первого порядка (см. п. 1.1) некоторой алгебраической теории (например, теории групп или теории колец) называется такой язык, в котором в формулах, кроме кванторов $\forall$ и $\exists$, логических символов $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, скобок и переменных, можно использовать предикатные и функциональные символы и константы этой теории. Например, в теории групп — $x \cdot y$, x^{-1}, 1, в теории колец — $x \cdot y$, x^{-1}, 1, $x + y$, $-x$, 0.

Две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ одного языка $\mathcal{L}$ (например, две группы или два кольца) называются *элементарно эквивалентными*, если всякое предложение, истинное в $\mathcal{U}$, истинно и в $\mathcal{V}$ и обратно. Мы выражаем это отношение между моделями обозначением $\equiv$.

Первый результат по элементарной эквивалентности линейных групп был получен А. И. Мальцевым в работе 1961 г. (см. [8]). Им была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Группа $G_m(K_1)$ элементарно эквивалентна группе $G_n(K_2)$ ($G = \mathrm{GL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PSL}$, $m \geqslant n \geqslant 3$, K_1, K_2 — поля нулевой характеристики) тогда и только тогда, когда $m = n$ и $K_1 \equiv K_2$.*

Эта теорема доказывалась с помощью перехода к жордановой форме матриц, явно выписывались формулы, различающие те или иные группы.

Однако в случае, когда рассматриваются линейные группы над телами или кольцами, не существует адекватного аналога жордановой формы, поэтому с выписыванием формул появляются практически непреодолимые сложности.

Здесь на помощь пришли результаты из логики, точнее, конструкция ультрапроизведения и ультрастепени (см. [7], а также п. 1.4). Благодаря этой конструкции в 1992 г. К. И. Бейдар и А. В. Михалёв нашли общий подход к проблемам элементарной эквивалентности некоторых алгебраических структур (см. [13]). Взяв на вооружение различные результаты теории линейных групп над кольцами, они нашли сравнительно лёгкие доказательства теорем, близких к теореме Мальцева, в довольно общих ситуациях (для линейных групп над первичными кольцами, для мультипликативных полугрупп над кольцами, решёток подмодулей и т. д.).

Приведём их результаты, являющиеся продолжением теоремы Мальцева.

Теорема 2. *Пусть R и S — первичные ассоциативные кольца с 1 (1/2) и $m, n \geqslant 3$ ($m, n \geqslant 2$). Тогда $\mathrm{GL}_m(R) \equiv \mathrm{GL}_n(S)$, если и только если $M_m(R) \equiv M_n(S)$ или $M_m(R) \equiv M_n(S)^{\mathrm{op}}$.*

Теорема 3. *Пусть R и S — тела и $m, n \geqslant 3$. Тогда $\mathrm{GL}_m(R) \equiv \mathrm{GL}_n(S)$ тогда и только тогда, когда или $m = n$ и $R \equiv S$, или $m = n$ и $R \equiv S^{\mathrm{op}}$.*

Продолжением исследований в этой области явились работы Е. И. Буниной 1998—2001 гг. (см. [1—4]).

В 1998 г. (см. [2, 4]) результаты А. И. Мальцева были распространены на унитарные линейные группы над полями с инволюцией. Доказательство, как и у Мальцева, опиралось на приведение матриц к жордановой нормальной форме.

Именно, пусть K — бесконечное поле характеристики, не равной двум, с инволюцией j (инволюция — это автоморфизм поля порядка 2). Через $M_n(K)$, как обычно, будем обозначать кольцо матриц размера $(n \times n)$ над полем K, через $\mathrm{GL}_n(K)$ — группу невырожденных матриц размера $(n \times n)$ над полем K. Пусть Q_{2n} — это матрица из $\mathrm{GL}_{2n}(K)$ вида

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots\dots\dots\dots & & \\ -1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & \\ & & \ddots & & \\ \dots\dots\dots\dots & & & 0 & 1 \\ \dots\dots\dots\dots & & & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} 2n.$$

Через $\mathrm{U}_{2n}(K, j, Q)$ обозначим *унитарную группу* матриц $A \in \mathrm{GL}_{2n}(K)$, таких что выполнено соотношение $AQ_{2n}A^* = Q_{2n}$, где

$$A^* = (A^j)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}^j & \dots & a_{1n}^j \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{n1}^j & \dots & a_{nn}^j \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}^j & \dots & a_{n1}^j \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{1n}^j & \dots & a_{nn}^j \end{pmatrix}.$$

Е. И. Буниной была доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Группы $\mathrm{U}_{2n}(K_1, j_1, Q_{2n})$ и $\mathrm{U}_{2m}(K_2, j_2, Q_{2m})$, где K_1 и K_2 — бесконечные поля характеристики, отличной от двух, с инволюциями j_1 и j_2 соответственно, $n, m \geqslant 2$, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K_1 и K_2 элементарно эквивалентны как поля с инволюциями.*

Здесь элементарная эквивалентность полей с инволюциями означает, что в предложениях, помимо кольцевых операций, можно использовать унарную операцию взятия инволюции.

По аналогии с тем, как это делалось для линейных групп над кольцами, с помощью перехода к ультрапроизведениям, в 1998 г. Е. И. Бунина (см. [1, 4]) рассмотрела элементарную эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами с инволюцией.

Инволюцией в кольце K называется антиавтоморфизм порядка 2, т. е. такое биективное отображение j кольца K на себя, что

1) $j(a + b) = j(a) + j(b)$ для любых $a, b \in K$;
2) $j(a \cdot b) = j(b) \cdot j(a)$ для любых $a, b \in K$;
3) $j^2(a) = j(j(a)) = a$ для любого $a \in K$.

Если K — кольцо с инволюцией j, то будем обозначать через τ инволюцию кольца $M_{2n}(K)$ матриц над K вида

$$\tau\colon A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{2n\,1} & \dots & a_{2n\,2n} \end{pmatrix} \mapsto Q_{2n} \circ \begin{pmatrix} a_{1\,1}^j & \dots & a_{2n\,1}^j \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{1\,2n}^j & \dots & a_{2n\,2n}^j \end{pmatrix} \circ Q_{2n}^{-1},$$

где матрица Q_{2n} определена выше.

Унитарной линейной группой $\mathrm{U}_{2n}(K, j, Q_{2n})$ над кольцом K с инволюцией j называется группа матриц $A \in M_{2n}(K)$, таких что $AA^\tau = E$.

Теперь сформулируем две теоремы, доказанные Е. И. Буниной.

Теорема 5. *Если K_1 и K_2 — ассоциативные* (*коммутативные*) *кольца, содержащие $1/2$ и $1/3$, j_1 и j_2 — инволюции в кольцах K_1 и K_2 соответственно, $n, m > 2$ $(n, m > 1)$, то унитарные линейные группы $\mathrm{U}_{2n}(K_1, j_1, Q_{2n})$ и*

$\mathrm{U}_{2m}(K_2, j_2, Q_{2m})$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда кольца матриц* $M_{2n}(K_1)$ *и* $M_{2m}(K_2)$ *элементарно эквивалентны как кольца с инволюциями* τ_1 *и* τ_2 *соответственно.*

Теорема 6. *Если тела (поля)* F_1 *и* F_2 *имеют характеристику, не равную* 2, j_1 *и* j_2 — *инволюции в телах (полях)* F_1 *и* F_2 *соответственно,* $n, m > 2$ $(n, m > 1)$, *то унитарные линейные группы* $\mathrm{U}_{2n}(F_1, j_1, Q_{2n})$ *и* $\mathrm{U}_{2m}(F_2, j_2, Q_{2m})$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда тела (поля)* F_1 *и* F_2 *элементарно эквивалентны как тела (поля) с инволюциями* j_1 *и* j_2 *соответственно.*

В 2001 г. Е. И. Буниной (см. [3,4]) были рассмотрены элементарные свойства групп Шевалле над алгебраически замкнутыми полями. Эти группы включают в себя такие классические группы, как $\mathrm{SL}_n(K)$, $\mathrm{PSL}_n(K)$, $\mathrm{SO}_n(K)$, $\mathrm{Spin}_n(K)$, $\mathrm{PSO}_n(K)$, $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$, $\mathrm{PSp}_{2n}(K)$, то есть, с одной стороны, изучаемые группы пересекаются с теми, которые рассматривались А. И. Мальцевым, с другой стороны, здесь присутствует довольно много алгебраических групп, им не рассмотренных.

Основным результатом в этом направлении явилась следующая теорема.

Теорема 7. *Предположим, что группы Шевалле* $\mathcal{G}_1$ *и* $\mathcal{G}_2$ *построены по алгебраически замкнутым полям* K_1 *и* K_2 *характеристик, не равных двум, простым алгебрам Ли* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *и решёткам* $M := L_{V_1}$ *и* $N := L_{V_2}$. *Пусть, кроме того,* $M/M_0 \cong \varphi_1$, $N/N_0 \cong \varphi_2$ (φ_1 *и* φ_2 — *конечные группы). Тогда* $\mathcal{G}_1 \equiv \mathcal{G}_2$ *тогда и только тогда, когда* $K_1 \equiv K_2$, $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ *и* $\varphi_1 \cong \varphi_2$, *не считая случая, когда* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *имеют тип* D_{2l}, $l \geqslant 3$, $\varphi_1 \cong \varphi_2 \cong \mathbb{Z}_2$. *В этом случае существует две неэквивалентные друг другу группы при элементарно эквивалентных полях.*

В этой работе мы рассматриваем элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов почти свободных модулей бесконечного ранга над кольцами и групп автоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга над кольцами.

В первом параграфе приводятся основные сведения из теории множеств и теории моделей: определения языка первого порядка, модели языка, выполнимости, истинности, аксиомы и основные понятия теории NBG (фон Неймана—Бернайса—Гёделя), в которой проводятся дальнейшие построения, а также основные сведения из теории категорий (см. [12]), необходимые для следующих параграфов.

Второй параграф посвящён элементарным свойствам и элементарной эквивалентности категорий модулей над кольцом.

В п. 2.1 приводятся некоторые дополнительные сведения о категории mod-R.

В п. 2.2 показано, что в категории mod-R понятие прообразующего объекта является формульным, т. е. существует формула в языке первого порядка теории категорий с одной свободной объектной переменной, истинная в категории mod-R для прообразующих модулей этой категории и только для них.

В п. 2.3 показано, что для данного прообразующего модуля P на полугруппе $\mathrm{Mor}(P, P)$ можно ввести операции сложения и умножения так, чтобы эта полугруппа превратилась в кольцо, изоморфное кольцу $\mathrm{End}_R(P)$.

В п. 2.4 рассматривается случай конечных колец и доказывается теорема о том, что категории mod-R и mod-S, где R — конечное кольцо, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они Морита-эквивалентны.

В п. 2.5 мы показываем, как распространить результаты С. Шелаха из работы [14] об интерпретации теории множеств в категории на случай категории mod-R.

В п. 2.6 результаты п. 2.5 используются для того, чтобы в категории mod-R для некоторых фиксированных модулей X и Y выделить элементарными средствами множество линейно независимых проекторов из X на Y.

В п. 2.7 описывается структура $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle$, состоящая из класса Cn всех кардинальных чисел и кольца ring с отношениями суммы и произведения, а также логика второго порядка такой структуры (мы обозначаем её через $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$), позволяющая в формулах использовать произвольные предикатные символы вида $P_{\lambda_1,\dots,\lambda_k}(c_1,\dots,c_k; v_1,\dots,v_n)$, где $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ — фиксированные кардинальные числа, $c_1,\dots,c_k$ — переменные для элементов из $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ соответственно, $v_1,\dots,v_n$ — переменные для элементов кольца. Кроме того, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть даны кольца R и S и существует предложение ψ языка $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$, истинное в кольце R и ложное во всех кольцах, ему подобных и не эквивалентных ему в языке $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$. Пусть, кроме того, категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны. Тогда существует кольцо S', подобное кольцу S, такое что структуры $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S'\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Пункт 2.8 посвящён доказательству следующей «обратной» теоремы.

Теорема 6. *Для произвольных колец с единицей R и S, если структуры $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2, то категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны.*

В п. 2.9 из двух предыдущих теорем выводится теорема, являющаяся аналогом теоремы Мориты для элементарной эквивалентности, и несколько полезных следствий из неё.

Теорема 7. *Пусть даны кольца R и S и существует предложение ψ языка $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$, истинное в кольце R и ложное во всех кольцах, ему подобных и не эквивалентных ему в языке $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$. Тогда категории mod-$R$ и mod-S элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует кольцо S', подобное кольцу S, такое что структуры $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S'\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Следствие 1. *Для произвольных тел F_1 и F_2 категории mod-F_1 и mod-F_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle \mathrm{Cn}, F_1\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, F_2\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2.*

Следствие 2. *Для произвольных коммутативных колец R_1 и R_2 категории* $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ *и* $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры* $\langle \mathrm{Cn}, R_1\rangle$ *и* $\langle \mathrm{Cn}, R_2\rangle$ *эквивалентны в логике второго порядка* L_2.

Следствие 3. *Для произвольных локальных колец R_1 и R_2 категории* $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ *и* $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры* $\langle \mathrm{Cn}, R_1\rangle$ *и* $\langle \mathrm{Cn}, R_2\rangle$ *эквивалентны в логике второго порядка* L_2.

Следствие 4. *Для произвольных областей главных идеалов R_1 и R_2 категории* $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ *и* $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры* $\langle \mathrm{Cn}, R_1\rangle$ *и* $\langle \mathrm{Cn}, R_2\rangle$ *эквивалентны в логике* L_2.

Следствие 5. *Для произвольных артиновых колец R_1 и R_2 категории* $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ *и* $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие что структуры* $\langle \mathrm{Cn}, S_1\rangle$ *и* $\langle \mathrm{Cn}, S_2\rangle$ *эквивалентны в логике* L_2.

Третий параграф посвящён рассмотрению тех же вопросов для колец эндоморфизмов модулей бесконечных рангов.

На протяжении всего параграфа предполагается, что кольцо R и бесконечное кардинальное число $\varkappa$ таковы, что в кольце R существует максимальный идеал, порождённый не более чем $\varkappa$ элементами (например, это всегда так, когда $\varkappa \geqslant |R|$ или кольцо R полупросто или является кольцом главных идеалов).

В п. 3.1 для каждого свободного модуля V бесконечного ранга над кольцом вводится некоторая специальная категория $C_{M(V)}$, такая что элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов двух свободных модулей бесконечных рангов над кольцами равносильна элементарной эквивалентности соответствующих категорий.

Второй пункт третьего параграфа посвящён изучению элементарной эквивалентности категорий вида $C_{M(V)}$. В третьем пункте доказаны следующая основная теорема и следствия из неё.

Теорема 5. *Пусть V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно и существует предложение $\psi \in$ $\in \mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}$. Тогда кольца $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда существует кольцо S, подобное кольцу R_2, такое что теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S\rangle)$ совпадают.*

Следствие 1. *Для пространств V_1 и V_2 бесконечных размерностей $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над произвольными телами (областями главных идеалов) F_1 и F_2 кольца $\mathrm{End}_{F_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{F_2} V_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, F_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, F_2\rangle)$ совпадают.*

Следствие 2. *Предположим, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — бесконечные кардинальные числа, R_1 и R_2 — коммутативные (локальные) кольца и каждый максимальный идеал кольца R_1 порождён не более чем $\varkappa_1$ элементами кольца. Тогда для свободных модулей V_1 и V_2 рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно* *кольца* $\mathrm{End}_{R_1} V_1$ *и* $\mathrm{End}_{R_2} V_2$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда теории* $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$ *и* $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, R_2\rangle)$ *совпадают.*

Следствие 3. *Предположим, что* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *— бесконечные кардинальные числа,* R_1 *и* R_2 *— артиновы кольца и каждый максимальный идеал кольца* R_1 *порождён не более чем* $\varkappa_1$ *элементами кольца. Тогда для свободных модулей* V_1 *и* V_2 *рангов* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *над кольцами* R_1 *и* R_2 *соответственно кольца* $\mathrm{End}_{R_1} V_1$ *и* $\mathrm{End}_{R_2} V_2$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца* S_1 *и* S_2*, подобные кольцам* R_1 *и* R_2 *соответственно, такие что теории* $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1\rangle)$ *и* $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2\rangle)$ *совпадают.*

Следствие 4. *Для свободных модулей* V_1 *и* V_2 *бесконечных рангов* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *над полупростыми кольцами* R_1 *и* R_2 *соответственно, кольца* $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ *и* $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца* S_1 *и* S_2*, подобные кольцам* R_1 *и* R_2 *соответственно, такие что теории* $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1\rangle)$ *и* $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2\rangle)$ *совпадают.*

В четвёртом параграфе рассматриваются проективные пространства модулей бесконечных рангов.

В п. 4.1 описывается язык проективной геометрии над кольцом (т. е. решётки подмодулей модуля на кольцом) и основные понятия, выразимые в этом языке.

В п. 4.2 показано, как в проективной геометрии модуля бесконечного ранга интерпретировать кольцо, изоморфное кольцу $\mathrm{End}_R P$ для некоторого прообразующего модуля P.

В п. 4.3 показано, как в проективной геометрии модуля V интерпретировать кольцо $\mathrm{End}_R V$. В этом пункте доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для свободных модулей* V_1 *и* V_2 *бесконечных рангов над произвольными кольцами* R_1 *и* R_2 *соответственно из элементарной эквивалентности решёток подмодулей* $P(V_1)$ *и* $P(V_2)$ *следует элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов* $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ *и* $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$*.*

В п. 4.4 доказывается «обратная» теорема.

Теорема 2. *Предположим, что* V_1 *и* V_2 *— свободные модули бесконечных рангов* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *над кольцами* R_1 *и* R_2 *соответственно и каждый подмодуль модуля* V_1 (V_2) *имеет не более* $\varkappa_1$ $(\varkappa_2)$ *порождающих элементов (например, это так, если* $\varkappa_1 \geqslant |R_1|$ *и* $\varkappa_2 \geqslant |R_2|$ *или если* R_1, R_2 *— полупростые кольца или кольца главных идеалов). Тогда из* $\mathrm{End}_{R_1}(V_1) \equiv \mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ *следует* $P(V_1) \equiv P(V_2)$*.*

В пятом параграфе рассматриваются группы автоморфизмов модулей бесконечных рангов над кольцами.

В п. 5.1 по аналогии с работой [6] доказывается, что если кольца R и S с $1/2$ не содержат центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1, V и V' — свободные модули бесконечных рангов над кольцами R и S соответственно, то группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}_R(V) \cong \mathrm{End}_S(V')$.

В п. 5.2 результаты п. 5.1 распространяются на элементарную эквивалентность. Это делается с помощью перехода к ультрастепеням, аналогично работе [13] К. И. Бейдара и А. В. Михалёва. Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим, что кольца R, S содержат $1/2$ и не содержат центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0. Тогда группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда кольца $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$ элементарно эквивалентны.*

В п. 5.3 мы считаем, что кардинальное число $\varkappa_1$ таково, что существует максимальный идеал кольца R_1, порождённый не более чем $\varkappa_1$ элементами.

Доказана следующая теорема и следствия из неё.

Теорема 4. *Предположим, что кольца R_1 и R_2 содержат $1/2$ и не содержат центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0. Пусть, кроме того, V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, и пусть существует предложение $\psi \in \mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}$. Тогда группы $\mathrm{Aut}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует кольцо S, подобное кольцу R_2, такое что $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S\rangle)$.*

Следствие 1. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над телами (коммутативными или локальными кольцами, не содержащими центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0, областями целостности) F_1 и F_2, содержащими $1/2$, соответственно группы $\mathrm{Aut}_{F_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{F_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, F_1\rangle) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, F_2\rangle)$.*

Следствие 2. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над артиновыми кольцами R_1 и R_2, не содержащими центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1, содержащими $1/2$, соответственно группы $\mathrm{Aut}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие что $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1\rangle) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2\rangle)$.*

§ 1. Основные сведения из теории множеств, теории моделей, теории категорий

1.1. Языки первого порядка

Язык $\mathcal{L}$ первого порядка есть некоторая совокупность символов. Эта совокупность состоит из

символа пробела;

скобок ( );

связок $\Rightarrow$ («влечёт») и $\neg$ («не»);

кванторов $\forall$ (для всех);

символа равенства $=$;
счётного множества переменных v_i $(i \geqslant 0)$;
непустого счётного множества предикатных символов P_i^n $(n \geqslant 1,\ i \geqslant 0)$;
счётного множества функциональных символов F_i^n $(n \geqslant 1,\ i \geqslant 0)$;
счётного множества константных символов c_i $(i \geqslant 0)$.

Некоторые знакосочетания, построенные из специальных символов языка $\mathcal{L}$, называются *термами* и *формулами* этого языка.

Термы определяются следующим образом:

1) переменная есть терм;
2) константный символ есть терм;
3) если F_i^n — некоторый функциональный символ, а $t_0, \ldots, t_{n-1}$ — термы, то $F_i^n(t_0, \ldots, t_{n-1})$ — терм;
4) знакосочетание является *термом* в том и только том случае, если это следует из правил 1)—3).

Если P_i^n — некоторый предикатный символ, а $t_0, \ldots, t_{n-1}$ — термы, то знакосочетание $(P_i^n(t_0, \ldots, t_{n-1}))$ называется *элементарной формулой*.

Формулы языка $\mathcal{L}$ определяются следующим образом:

1) всякая элементарная формула есть формула;
2) если φ и ψ — формулы, v — переменная, то каждое из знакосочетаний $(\neg\varphi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\forall v\, \varphi)$ есть формула;
3) знакосочетание является формулой в том и только том случае, если это следует из правил 1) и 2).

Договоримся о следующих сокращениях:

$(\varphi \wedge \psi)$ означает $(\neg(\varphi \Rightarrow (\neg\psi)))$;
$(\varphi \vee \psi)$ означает $((\neg\varphi) \Rightarrow \psi)$;
$(\varphi \equiv \psi)$ означает $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$;
$(\exists v\, \varphi)$ есть сокращение для $(\neg(\forall v\, (\neg\varphi)))$;
$\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n$ используется вместо $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n))$;
$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ — вместо $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n))$;
$(\forall x_1 x_2 \ldots x_n)\varphi$ — вместо $(\forall x_1)(\forall x_2) \ldots (\forall x_n)\varphi$;
$(\exists x_1 x_2 \ldots x_n)\varphi)$ — вместо $(\exists x_1)(\exists x_2) \ldots (\exists x_n)\varphi$.

Введём понятие *свободного* и *связанного* вхождения переменной в формулу. Вхождение переменной v в данную формулу называется *связанным*, если v является переменной входящей в эту формулу кванторной приставки $\forall v$ или находится в области действия входящей в эту формулу кванторной приставки $\forall v$; в противном случае вхождение переменной в данную формулу называется *свободным*. Таким образом, одна и та же переменная может иметь свободные и связанные вхождения в одну и ту же формулу. Переменная называется *свободной* (*связанной*) *переменной* в данной формуле, если существуют свободные (связанные) вхождения её в эту формулу, т. е. переменная может быть одновременно свободной и связанной в одной формуле.

Предложением называется формула без свободных переменных.

Если ζ — терм или формула, θ — терм и v — переменная, то через $\zeta(v\|\theta)$ обозначим знакосочетание, которое получается замещением каждого свободного вхождения переменной v в знакосочетание ζ знакосочетанием θ.

Замещение $v\|\theta$ в ζ назовём *допустимым*, если для каждого свободного вхождения переменной w в знакосочетание θ каждое свободное вхождение v в ζ не является свободным вхождением в некоторую формулу ψ, входящую в некоторые формулы $\forall w\, \psi(w)$ и $\exists w\, \psi(w)$, входящие в знакосочетание ζ.

Далее, если замещение $v\|\theta$ в ζ допустимо, то наряду с $\zeta(v\|\theta)$ будем писать $\zeta(\theta)$.

Если ζ — терм или формула, θ — терм, v — переменная, такие что замещение $v\|\theta$ в ζ допустимо, то знакосочетание $\zeta(v\|\theta)$ является термом или формулой соответственно.

Каждое свободное вхождение некоторой переменной u (кроме v) в знакосочетание ζ и каждое свободное вхождение некоторой переменной w в знакосочетание θ являются свободными вхождениями этих переменных в знакосочетание $\zeta(v\|\theta)$ (при условии, что переменная v свободна в ζ).

Знакосочетание γ, снабжённое некоторым правилом, называется *формульной схемой языка* $\mathcal{L}$, если:

1) это правило отмечает некоторые буквы (в частности, свободные и связанные переменные), входящие в γ;
2) это правило определяет необходимое замещение отмеченных букв в γ некоторыми термами (в частности, переменными);
3) после каждого такого замещения в γ получается некоторая формула φ языка $\mathcal{L}$.

Каждая такая формула φ называется *формулой, порождённой формульной схемой* γ.

Текст Γ, состоящий из знакосочетаний, разделённых пробелом, называется *аксиоматическим текстом*, если каждое знакосочетание γ, входящее в Γ, является либо формулой, либо формульной схемой языка $\mathcal{L}$. Если γ является формулой, то γ называется *явной аксиомой языка* $\mathcal{L}$. Если γ является формульной схемой, то γ называется *аксиомной схемой языка* $\mathcal{L}$. Каждая формула, порождённая аксиомной схемой γ, называется *неявной аксиомой языка* $\mathcal{L}$.

Чтобы превратить определённые выше синтаксические понятия в формальную систему, нам понадобятся *логические аксиомы* и *правила вывода*.

Вот список логических аксиом.

LAS1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.
LAS2. $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$.
LAS3. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$.
LAS4. $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \psi$.
LAS5. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$.
LAS6. $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$.
LAS7. $\psi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$.

LAS8. $(\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi))$.
LAS9. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\neg\psi)) \Rightarrow (\neg\varphi))$.
LAS10. $(\neg(\neg\varphi)) \Rightarrow \varphi$.
LAS11. $(\forall v\varphi) \Rightarrow \varphi(v\|\theta)$, если v — переменная, θ — терм, такие что замещение $v\|\theta$ в φ допустимо.
LAS12. $\varphi(v\|\theta) \Rightarrow (\exists v\varphi)$ при тех же условиях, что и в **LAS11**.
LAS13. $(\forall v(\psi \Rightarrow \varphi(v))) \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\forall v\varphi))$, если ψ не содержит свободной переменной v.
LAS14. $(\forall v(\varphi(v) \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\exists v\varphi) \Rightarrow \psi)$, если ψ не содержит свободной переменной v.

Имеется также два правила вывода.

Правило отделения (модус поненс, или MP): из формул φ и $\varphi \Rightarrow \psi$ выводится ψ.

Правило обобщения: из формулы φ выводится $(\forall x)(\varphi)$.

Пусть Σ — совокупность формул и ψ — формула языка $\mathcal{L}$. Последовательность $f \equiv (\varphi_i \mid i \in n+1) \equiv (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ формул языка $\mathcal{L}$ называется *выводом формулы ψ из совокупности* Σ, если $\varphi_n = \psi$ и для любого $0 \leqslant i \leqslant n$ выполнено одно из следующих условий:

1) φ_i принадлежит Σ или является логической аксиомой;
2) существуют такие $0 \leqslant k < j < i$, что φ_j есть $(\varphi_k \Rightarrow \varphi_i)$, т. е. φ_i получается из φ_k и $\varphi_k \Rightarrow \varphi_i$ по правилу импликации MP;
3) существует такое $0 \leqslant j < i$, что φ_i есть $\forall x\, \varphi_j$, где x не является свободной переменной ни одной формулы из Σ, т. е. φ_i получается из φ_j по правилу обобщения с данным *структурным требованием*.

Будем обозначать этот вывод через $f \equiv (\varphi_0, \ldots, \varphi_n)\colon \Sigma \vdash \psi$, или через $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)\colon \Sigma \vdash \psi$, или через $f\colon \Sigma \vdash \psi$.

Если существует вывод $f\colon \Sigma \vdash \psi$, то формула ψ называется *выводимой в языке $\mathcal{L}$ из множества* Σ, а вывод f называется *доказательством формулы ψ*.

Теория (*первого порядка*) T в языке $\mathcal{L}$ есть по определению некоторое множество предложений в языке $\mathcal{L}$. *Множеством аксиом* теории T называется всякое множество предложений, обладающее теми же самыми следствиями, что и T.

Сейчас мы введём аксиомы и основные понятия теории множеств и классов NBG (фон Неймана—Бернайса—Гёделя) (см. [9]), которая является теорией первого порядка и в которой мы будем проводить все дальнейшие построения.

1.2. Аксиомы и основные понятия теории NBG

Теория классов и множеств NBG (см. [9]) имеет единственный предикатный символ P, обозначающий двуместное отношение, не имеет ни одного функционального и константного символа. В качестве переменных этой системы мы будем использовать прописные латинские буквы X, Y, Z с индексами и штрихами. Мы введём также сокращённые обозначения $X \in Y$ для $P(X,Y)$ и $X \notin Y$ для $\neg P(X,Y)$. Содержательно знак $\in$ понимается как символ отношения принадлежности.

Формула $X = Y$ (X равно Y) будет служить сокращением для формулы $\forall Z\,(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y)$, т. е. два объекта равны, если они состоят их одних и тех же элементов.

Формула $X \subseteq Y$ будет служить сокращением для формулы $\forall Z\,(Z \in X \Rightarrow \Rightarrow Z \in Y)$ (*включение*), $X \subset Y$ — для $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$ (*собственное включение*).

Из этих определений легко получить следующее утверждение.

Предложение 1.

(a) $\vdash X = Y \Leftrightarrow (X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X)$;
(b) $\vdash X = X$;
(c) $\vdash X = Y \Rightarrow Y = X$;
(d) $\vdash X = Y \Rightarrow (Y = Z \Rightarrow X = Z)$;
(e) $\vdash X = Y \Rightarrow (Z \in X \Rightarrow Z \in Y)$.

Значениями переменных в теории NBG являются *классы*. Назовём класс *множеством*, если он является элементом какого-либо класса. Класс, не являющийся множеством, назовём *собственным классом*. Мы введём строчные латинские буквы x, y, z со штрихами и индексами в качестве специальных, ограниченных множествами, переменных. Это значит, что формула $\forall x\, A(x)$ служит сокращением для $\forall X\,(X$ — множество $\Rightarrow A(X))$, что имеет смысл «A истинно для всех множеств», и $\exists x\, A(x)$ служит сокращением для $\exists X\,(X$ — множество $\wedge\, A(X))$, что имеет смысл «A истинно для некоторого множества».

A1 (*аксиома объёмности*). $X = Y \Rightarrow (X \in Z \Leftrightarrow Y \in Z)$.

A2 (*аксиома пары*). $\forall x\,\forall y\,\exists z\,\forall u\ (u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$, т. е. для любых множеств x и y существует такое множество z, что x и y являются единственными его элементами.

A3 (*аксиома пустого множества*). $\exists x\,\forall y\,\neg(y \in x)$, т. е. существует множество, не содержащее никаких элементов.

Из **A1** и **A3** следует, что существует лишь единственное множество, не содержащее никаких элементов, т. е. мы можем ввести константу $\varnothing$ (или 0), подчинив её условию $\forall y\,(y \notin \varnothing)$.

Так как выполнено условие единственности для пары, то мы можем ввести новый функциональный символ $f(x,y)$ для пары, который можно для удобства записывать через $\{x,y\}$. Мы можем даже однозначно определить пару $\{X,Y\}$ для любых классов X и Y, полагая $\{X,Y\} = 0$, если один из классов X, Y не является множеством. Кроме того, положим $\{X\} = \{X,X\}$. Класс $\langle X,Y\rangle \equiv \{\{X\},\{X,Y\}\}$ называется *упорядоченной парой* классов X и Y. Аналогично упорядоченной паре вводятся *упорядоченная тройка, четвёрка* и т. д.

AS4 (*аксиомная схема существования классов*). Пусть

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m) -$$

формула. Назовём такую формулу *предикативной*, если в ней связанными являются только переменные для множеств (т. е. если она может быть приведена к такому виду с помощью сокращений). Для всякой предикативной формулы $\varphi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$

$$\exists Z\, \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in Z \Leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)).$$

Будем обозначать класс Z, существование которого постулирует аксиомная схема **AS4**, через

$$\{x_1, \ldots, x_n \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)\}.$$

Теперь благодаря аксиомной схеме **AS4** мы можем определить для произвольных классов X и Y следующие производные классы:

$X \cap Y \equiv \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}$ (*пересечение классов X и Y*);

$X \cup Y \equiv \{u \mid u \in X \vee u \in Y\}$ (*объединение классов X и Y*);

$\bar{X} \equiv \{u \mid u \notin X\}$ (*дополнение к классу X*);

$V \equiv \{u \mid u = u\}$ (*универсальный класс*);

$X \setminus Y \equiv \{u \mid u \in X \wedge u \notin Y\}$ (*разность классов X и Y*);

$\mathrm{Dom}(X) \equiv \{u \mid \exists v\, (\langle u, v\rangle \in X)\}$ (*область определения класса X*);

$X \times Y \equiv \{u \mid \exists x\, \exists y\, (u = \langle x, y\rangle \wedge x \in X \wedge y \in Y)\}$ (*декартово произведение классов X и Y*);

$\mathcal{P}(X) \equiv \{u \mid u \subseteq X\}$ (*класс всех подмножеств класса X*);

$\cup X \equiv \{u \mid \exists v\, (u \in v \wedge v \in X)\}$ (*объединение всех элементов класса X*).

Введём теперь дальнейшие аксиомы.

A5 (*аксиома объединения*). $\forall x\, \exists y\, \forall u\, (u \in y \Leftrightarrow \exists v\, (u \in v \wedge v \in x))$.

A6 (*аксиома множества всех подмножеств*). $\forall x\, \exists y\, \forall u\, (u \in y \Leftrightarrow u \subseteq x)$.

A7 (*аксиома выделения*). $\forall x\, \forall Y\, \exists z\, \forall u\, (u \in z \Leftrightarrow u \in x \wedge u \in Y)$.

Обозначим класс $X \times X$ через X^2, класс $X \times X \times X$ — через X^3 и т. д. Обозначим формулу $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (\langle x, y\rangle \in X \wedge \langle x, z\rangle \in X \Rightarrow y = z)$ через $\mathrm{Un}(X)$.

A8 (*аксиома замещения*). $\forall X\, \forall x\, (\mathrm{Un}(X) \Rightarrow \exists y\, \forall u\, (u \in y \Leftrightarrow \exists v\, (\langle v, u\rangle \in X \wedge \wedge v \in x)))$.

A9 (*аксиома бесконечности*). $\exists x\, (0 \in x \wedge \forall u\, (u \in x \Rightarrow u \cup \{u\} \in x))$. Очевидно, для такого множества x $\{0\} \in x$, $\{0, \{0\}\} \in x$, $\{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\} \in x$,... Если мы теперь положим $1 := \{0\}$, $2 := \{0, 1\}$,..., $n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$, то для любого целого $n \geqslant 0$ будет выполнено $n \in x$ и при этом $0 \neq 1$, $0 \neq 2$, $1 \neq 2$,...

A10 (*аксиома регулярности*). $\forall X\, (X \neq \varnothing \Rightarrow \exists x \in X\, (x \cap X = \varnothing))$.

A11 (*аксиома выбора AC*). Для любого множества x существует такая функция f, что для всякого непустого подмножества $y \subseteq x$ выполнено $f(y) \in y$ (такая функция называется *выбирающей* функцией для x).

Список аксиом теории NBG завершён.

Класс P называется *упорядоченным бинарным отношением* $\leqslant$ *на* P, если

1) $\forall p \in P\,(p \leqslant p)$;
2) $\forall p, q \in P\,(p \leqslant q \wedge q \leqslant p \Rightarrow p = q)$;
3) $\forall p, q, r \in P\,(p \leqslant q \wedge q \leqslant r \Rightarrow p \leqslant r)$.

Если к тому же

4) $\forall p, q \in P\,(p \leqslant q \vee q \leqslant p)$,

то отношение $\leqslant$ называется *линейным упорядочением* класса P.

Упорядоченный класс P называется *вполне упорядоченным* (в. у.), если

5) $\forall q\,(\varnothing \neq q \subseteq P \Rightarrow \exists x \in q\,(\forall y \in q\,(x \leqslant y)))$, т. е. каждое непустое подмножество класса P имеет наименьший элемент.

Если класс P упорядочен отношением $\leqslant$ и A — непустой подкласс класса P, то элемент $p \in P$ называется *наименьшей верхней границей* или *супремумом подкласса* A, если

$$\forall x \in A\,(x \leqslant p) \wedge \forall y \in P\,((\forall x' \in A\,(x' \leqslant y)) \Rightarrow p \leqslant y).$$

Эта формула обозначается через $p = \sup A$.

Класс S называется *транзитивным*, если $\forall x\,(x \in S \Rightarrow x \subseteq S)$.

Класс (множество) S называется *ординалом* (*ординальным числом*), если S транзитивно и вполне упорядочено отношением $\in \cup =$ на S. Свойство класса S быть ординалом будем обозначать через $\mathrm{On}(S)$.

Ординальные числа обычно обозначаются греческими буквами α, β, γ и т. д. Класс всех ординальных чисел обозначается через On. Естественным упорядочением класса ординальных чисел является отношение $\alpha \leqslant \beta :\!= \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta$. Класс On транзитивен и линейно упорядочен отношением $\in \cup =$.

Несколько простых утверждений об ординальных числах:

1) если α — ординальное число, a — множество и $a \in \alpha$, то a является ординальным числом;
2) $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\}$ для каждого ординального числа α;
3) $\alpha + 1 \equiv \alpha \cup \{\alpha\}$ есть наименьшее ординальное число, большее α;
4) каждое непустое множество ординальных чисел имеет наименьший элемент.

Следовательно, упорядоченный класс On является вполне упорядоченным. Таким образом, класс On является ординалом.

Лемма 1. *Пусть A является непустым подклассом класса* On. *Тогда A содержит наименьший элемент.*

Лемма 2. *Если a — непустое множество ординальных чисел, то выполнено следующее*:

1) *множество $\cup a$ является ординальным числом*;
2) *$\cup a = \sup a$ в упорядоченном классе* On.

Ординальное число α называется *последующим*, если $\alpha = \beta + 1$ для некоторого ординального числа β. Это единственное число β будем обозначать через $\alpha - 1$. В противном случае α называется *предельным*.

Лемма 3. *Ординальное число α является предельным тогда и только тогда, когда $\alpha = \sup \alpha$.*

Наименьший (в классе On) отличный от нуля предельный ординал обозначается через ω. Существование такого ординала следует из аксиомы бесконечности, аксиомы выделения и аксиомной схемы существования классов. Ординалы, меньшие ω, называются *натуральными числами*.

Классы F, являющиеся функциями с областью определения, равной ω, называются *бесконечными последовательностями*, функции с областью определения, равной $n \in \omega$, — *конечными последовательностями*.

Теорема 1 (принцип трансфинитной индукции). *Пусть C — класс ординальных чисел, для которого выполняется следующее:*

1) $\varnothing \in C$;
2) $\alpha \in C \Rightarrow \alpha + 1 \in C$;
3) $(\alpha$ — *предельное ординальное число* $\wedge\ \alpha \subset C) \Rightarrow \alpha \in C$.

Тогда $C = \mathrm{On}$.

Множества a и b называются *равномощными* (обозначение: $|a| = |b|$ или $a \sim b$), если существует биективная функция $u\colon a \to b$.

Ординальное число α называется *кардинальным*, если для каждого ординального числа β соотношения $\beta \leqslant \alpha$ и $|\beta| = |\alpha|$ влекут $\beta = \alpha$. Класс всех кардинальных чисел будет обозначаться через Cn. Класс Cn с порядком, индуцированным из класса On, вполне упорядочен.

Из аксиомы выбора следует следующая лемма.

Лемма 4. *Для каждого множества a существует такое ординальное число α, что $|a| = |\alpha|$.*

Теперь для множества a рассмотрим класс $\{x \mid x \in \mathrm{On} \wedge x \sim a\}$. По лемме 4 этот класс непуст, а значит, содержит наименьший элемент α. Очевидно, что α — кардинальное число. Кроме того, этот класс содержит лишь единственное кардинальное число α. Это число α называется *мощностью множества a* (обозначается через $|a|$ или $\mathrm{card}\, a$). Два множества, имеющие одинаковую мощность, являются *равномощными*. Множество мощности ω называется *перечислимым*. Множества мощности $n \in \omega$ называются *конечными*. Множество называется *счётным*, если оно конечно или перечислимо. Множество называется *бесконечным*, если оно не конечно. Множество называется *несчётным*, если оно не счётно.

Отметим, что если $\varkappa$ — бесконечное кардинальное число, то $\varkappa$ — предельное ординальное число.

Для обозначения кардиналов мы, как и в случае ординалов, используем малые греческие буквы: ξ-й бесконечный кардинал будем обозначать через ω_ξ (т. е. кардинальное число ω мы будем также обозначать через ω_0).

Пусть α — ординал. *Конфинальность* α есть ординальное число $\mathrm{cf}(\alpha)$, равное наименьшему ординальному числу β, для которого существует функция f из β в α, такая что $\sup f[\beta] = \alpha$.

Кардинал $\varkappa$ называется *регулярным*, если $\mathrm{cf}(\varkappa) = \varkappa$, то есть для любого ординального числа β, для которого существует такая функция $f\colon \beta \to \varkappa$, что $\cup \operatorname{rng} f = \varkappa$, справедливо $\varkappa \leqslant \beta$, где $\cup \operatorname{rng} f = \varkappa$ означает, что для любого $y \in \varkappa$ существует такое $x \in \beta$, что $y < f(x)$.

Кардинал $\varkappa > \omega$ называется (*сильно*) *недостижимым*, если $\varkappa$ регулярен и $\operatorname{card} \mathcal{P}(\lambda) < \varkappa$ для всех ординальных чисел $\lambda < \varkappa$.

1.3. Модели, выполнимость, элементарная эквивалентность

Так как теперь мы предполагаем, что все построения происходят в теории NBG, то в определении вывода формулы ψ из совокупности Σ мы можем заменить п. 1, который звучал как «φ_i принадлежит Σ или является логической аксиомой», на «φ_i принадлежит Σ, является логической аксиомой или является собственной аксиомой теории NBG».

Пусть в теории NBG выделен некоторый объект A. Выделенный объект A будем называть *универсумом*, если в теории NBG для всех $n \geqslant 1$ определены понятия n-конечной последовательности $(x_i \in A \mid i \in n)$ элементов объекта A, n-местного отношения $R \subset A^n$ и n-местной операции $O\colon A^n \to A$, а также определено понятие бесконечной последовательности $x_0, \ldots, x_q, \ldots$ элементов объекта A.

Моделью языка первого порядка $\mathcal{L}$ с выделенным универсумом A называется пара $\mathcal{U}$, состоящая из объекта A и какого-либо соответствия I, связывающего с каждым предикатным символом P_i^n некоторое n-местное отношение в A, с каждым функциональным символом F_i^n — некоторую n-местную операцию в A, а с каждой константой c_i — некоторый элемент из A.

Пусть s есть бесконечная последовательность $x_0, \ldots, x_q, \ldots$ элементов объекта A.

Определим *значение терма t языка $\mathcal{L}$ на последовательности s в модели $\mathcal{U}$* (обозначение: $t_{\mathcal{U}}[s]$) по индукции следующим образом:

— если $t \equiv v_i$, то $t_{\mathcal{U}}[s] \equiv x_i$;

— если $t \equiv c_i$, то $t_{\mathcal{U}}[s] \equiv I(c_i)$;

— если $t \equiv F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, где F — функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $t_{\mathcal{U}}[s] \equiv I(F_i^n)(t_{1\mathcal{U}}[s], \ldots, t_{n\mathcal{U}}[s])$.

Определим *перевод формулы φ на последовательности s в модели $\mathcal{U}$* (обозначение: $\mathcal{U} \vDash \varphi[s]$) по индукции следующим образом:

— если $\varphi \equiv (P_i^n(t_1, \ldots, t_n))$, где P_i^n — предикатный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv ((t_{1\mathcal{U}}[s], \ldots, t_{n\mathcal{U}}[s]) \in I(P_i^n))$;

— если $\varphi \equiv (\neg\theta)$, то $\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv (\neg\mathcal{U} \vDash \theta[s])$;
— если $\varphi \equiv (\theta_1 \Rightarrow \theta_2)$, то $\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv (\mathcal{U} \vDash \theta_1[s] \Rightarrow \mathcal{U} \vDash \theta_2[s])$;
— если $\varphi \equiv (\forall v_i\, \theta)$, то

$$\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv (\forall x\, (x \in A \Rightarrow \mathcal{U} \vDash \theta[x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_q, \ldots])).$$

Используя приведённые выше сокращения, мы получаем также следующее:

— если $\varphi \equiv (\theta_1 \wedge \theta_2)$, то $\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv (\mathcal{U} \vDash \theta_1[s] \wedge \mathcal{U} \vDash \theta_2[s])$;
— если $\varphi \equiv (\theta_1 \vee \theta_2)$, то $\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv (\mathcal{U} \vDash \theta_1 \vee \mathcal{U} \vDash \theta_2[s])$;
— если $\varphi \equiv (\exists v_i\, \theta)$, то

$$\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv (\exists x\, (x \in A \wedge \mathcal{U} \vDash \theta[x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_q, \ldots]));$$

— если $\varphi \equiv (\theta_1 \Leftrightarrow \theta_2)$, то $\mathcal{U} \vDash \varphi[s] \equiv (\mathcal{U} \vDash \theta_1[s] \Leftrightarrow \mathcal{U} \vDash \theta_2[s])$.

Модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ языка $\mathcal{L}$ называются *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное отображение f множества (универсума) A на множество A', удовлетворяющее таким условиям:

1) для всякого n-местного отношения R модели $\mathcal{U}$ и соответствующего отношения R' модели $\mathcal{U}'$ $R(x_1, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $R'(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ для всех $x_1, \ldots, x_n$ из A;
2) для всякой m-местной функции G модели $\mathcal{U}$ и соответствующей функции G' модели $\mathcal{U}'$
$$f(G(x_1, \ldots, x_m)) = G'(f(x_1), \ldots, f(x_m))$$
для всех $x_1, \ldots, x_m$ из A;
3) для всякой константы x модели $\mathcal{U}$ и соответствующей константы x' модели $\mathcal{U}'$
$$f(x) = x'.$$

Всякое отображение f, удовлетворяющее этим условиям, называется *изоморфизмом модели $\mathcal{U}$ на модель $\mathcal{U}'$* или *изоморфизмом между моделями $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$*. Тот факт, что f — изоморфизм модели $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}'$, мы выражаем записью $f : \mathcal{U} \cong \mathcal{U}'$, а формула $\mathcal{U} \cong \mathcal{U}'$ означает просто, что модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}'$ изоморфны.

Модель $\mathcal{U}'$ называется *подмоделью* модели $\mathcal{U}$, если $A' \subset A$ и

1) всякое n-местное отношение R' модели $\mathcal{U}'$ является ограничением на множество A' соответствующего отношения R модели $\mathcal{U}$, т. е. $R' = R \cap (A')^n$;
2) всякая m-местная функция G' модели $\mathcal{U}'$ является ограничением на множество A' соответствующей функции G модели $\mathcal{U}$, т. е. $G' = G|(A')^m$;
3) всякая константа модели $\mathcal{U}'$ совпадает с соответствующей константой модели $\mathcal{U}$.

Мы будем использовать запись $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$, чтобы выразить тот факт, что $\mathcal{U}'$ является подмоделью модели $\mathcal{U}$. Если $\mathcal{U}$ является подмоделью модели $\mathcal{V}$, то $\mathcal{V}$ называется *расширением* модели $\mathcal{U}$.

Теперь дадим формальное определение выполнимости. Пусть φ — произвольная формула языка $\mathcal{L}$, все переменные которой, свободные и связанные, содержатся среди $v_0, \ldots, v_q$, и пусть $x_0, \ldots, x_q$ — произвольная последовательность элементов множества A. Мы определяем предикат

φ выполняется на последовательности $x_0, \ldots, x_q$ в модели $\mathcal{U}$,
или *$x_0, \ldots, x_q$ удовлетворяют формуле φ в $\mathcal{U}$.*

Пусть $\mathcal{U}$ — некоторая фиксированная модель языка $\mathcal{L}$. Следующее предложение показывает, что утверждение $\mathcal{U} \models \varphi(v_0, \ldots, v_p)[x_0, \ldots, x_q]$ зависит только от значений $x_0, \ldots, x_p$, где $p < q$.

Предложение 2.

1. *Пусть $t(v_0, \ldots, v_p)$ — терм, а $x_0, \ldots, x_q$ и $y_0, \ldots, y_r$ — такие две последовательности элементов, что $p \leqslant q$, $p \leqslant r$ и $x_i = y_i$, если только v_i — свободная переменная терма t. Тогда*

$$t[x_0, \ldots, x_q] = t[y_0, \ldots, y_r].$$

2. *Пусть φ — формула, все переменные которой, свободные и связанные, содержатся среди $v_0, \ldots, v_p$, и пусть $x_0, \ldots, x_q$ и $y_0, \ldots, y_r$ — такие две последовательности элементов, что $p \leqslant q$, $p \leqslant r$ и, если только v_i — свободная в формуле φ переменная, $x_i = y_i$. Тогда*

$$\mathcal{U} \models \varphi[x_0, \ldots, x_q], \quad \text{если и только если} \quad \mathcal{U} \models \varphi[y_0, \ldots, y_r].$$

Это предложение позволяет нам дать следующее определение. Пусть $\varphi(v_0, \ldots, v_p)$ — формула, все переменные которой, свободные и связанные, содержатся среди $v_0, \ldots, v_q$, $p \leqslant q$. Пусть $x_0, \ldots, x_p$ — последовательность элементов множества A. Будем говорить, что φ *выполняется в $\mathcal{U}$ на $x_0, \ldots, x_p$*,

$$\mathcal{U} \models \varphi[x_0, \ldots, x_p],$$

если φ выполняется в $\mathcal{U}$ на $x_0, \ldots, x_p, \ldots, x_q$ при некоторой (или, эквивалентно, любой) последовательности $x_{p+1}, \ldots, x_q$.

Пусть φ — предложение, все связанные переменные которого содержатся среди $v_0, \ldots, v_q$. Скажем, что φ *выполняется в модели $\mathcal{U}$* (обозначение: $\mathcal{U} \models \varphi$), если φ выполняется в $\mathcal{U}$ на некоторой (эквивалентно, любой) последовательности $x_0, \ldots, x_q$.

Теперь мы говорим, что

предложение σ *истинно* в $\mathcal{U}$,

если

$\mathcal{U} \models \sigma[x_0, \ldots, x_q]$ для некоторой (или, что равносильно, для любой)
последовательности $x_0, \ldots, x_q$ элементов из A.

Для выражения этого факта мы используем специальное обозначение $\mathcal{U} \models \sigma$.

В случае когда σ не истинно в $\mathcal{U}$, мы говорим, что σ *ложно* в $\mathcal{U}$, или что σ *не выполняется* в $\mathcal{U}$, или что $\mathcal{U}$ — *модель предложения* $\neg\sigma$. Если дано множество Σ предложений, будем говорить, что $\mathcal{U}$ — модель этого множества, если $\mathcal{U}$ является моделью каждого предложения $\sigma \in \Sigma$; для этого понятия удобно ввести обозначение $\mathcal{U} \models \Sigma$. Предложение σ, выполняющееся в каждой модели языка $\mathcal{L}$, называется истинным. Предложение (или множество предложений) называется *выполнимым*, если оно имеет хотя бы одну модель. Предложение σ называется *опровержимым*, если $\neg\sigma$ выполнимо. Истинность предложения σ мы обозначаем через $\models \sigma$.

Предложение φ называется *следствием* другого предложения σ (обозначение: $\sigma \models \varphi$), если всякая модель предложения σ является также моделью для φ. Предложение φ называется следствием множества предложений Σ (обозначение: $\Sigma \models \varphi$), если всякая модель для Σ является моделью и для φ. Отсюда следует, что

$$\Sigma \cup \{\sigma\} \models \varphi \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \Sigma \models \sigma \Rightarrow \varphi.$$

Модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ языка $\mathcal{L}$ называются *элементарно эквивалентными*, если всякое предложение, истинное в $\mathcal{U}$, истинно и в $\mathcal{V}$ и обратно. Мы выражаем это отношение между моделями обозначением $\equiv$. Легко видеть, что отношение $\equiv$ конечно же является отношением эквивалентности.

Любые две изоморфные модели одного языка элементарно эквивалентны. Если две модели одного языка элементарно эквивалентны и одна из них конечна, то эти модели также и изоморфны. Если модели бесконечны и элементарно эквивалентны, то они не обязаны быть изоморфными. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\bar{\mathbb{Q}}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны, так как имеют разную мощность.

Помимо языков первого порядка, описанных выше, мы будем вынуждены рассматривать языки второго порядка, в которых можно также навешивать кванторы на предикатные символы, то есть использовать предикатные символы как переменные. Такие языки будут описаны в следующих параграфах. Мы будем говорить, что две модели одного языка (например, второго порядка) $\mathcal{L}$ эквивалентны в этом языке, если для любого предложения языка $\mathcal{L}$ его истинность в первой модели равносильна его истинности во второй модели.

1.4. Ультрафильтры, ультрапроизведения, ультрастепени

Мощным оружием в теории моделей явилась конструкция ультрапроизведения, которую мы опишем в этом пункте (см. [7]).

Пусть I — некоторое непустое множество. Напомним, что через $\mathcal{P}(I)$ обозначается множество всех подмножеств множества I. *Фильтр* D над множеством I определяется как множество $D \subset \mathcal{P}(I)$, для которого

1) $I \in D$,
2) если $X, Y \in D$, то $X \cap Y \in D$,
3) если $X \in D$ и $X \subset Z \subset I$, то $Z \in D$.

Заметим, что, поскольку $I \in D$, всякий фильтр D есть непустое множество. Приведём примеры фильтров: *тривиальный фильтр* $D = \{I\}$; *несобственный фильтр* $D = \mathcal{P}(I)$; фильтр $D = \{X \subset I \colon Y \subset X\}$ для всякого множества $Y \subset I$, этот фильтр называется *главным фильтром*, порождённым множеством Y.

Фильтр D над множеством I называется *ультрафильтром* над I, если для всякого $X \in \mathcal{P}(I)$

$$X \in D \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad (I \setminus X) \notin D.$$

Пусть I — непустое множество, D — собственный фильтр над I, а A_i при всяком $i \in I$ — непустое множество. Пусть $C = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — декартово произведение этих множеств. Иными словами, C — множество всех отображений f, определённых на I и таких, что $f(i) \in A_i$ при всяком $i \in I$. Функции $f, g \in C$ назовём *D-эквивалентными* (обозначение: $f =_D g$), если $\{i \in I \colon f(i) = g(i)\} \in D$.

Предложение 3. *Отношение $=_D$ является отношением эквивалентности на множестве C.*

Пусть теперь f_D — класс эквивалентности, содержащий функцию f:

$$f_D = \{d \in C \colon f =_D g\}.$$

Мы определим *фильтрованное произведение множеств A_i по фильтру D* как совокупность всех классов эквивалентности отношения $=_D$. Обозначается оно через $\prod\limits_D A_i$. Итак,

$$\prod_D A_i = \left\{ f_D \colon f \in \prod_{i \in I} A_i \right\}.$$

Множество I будем называть множеством индексов для $\prod\limits_D A_i$. В том случае, когда D — ультрафильтр над множеством I, фильтрованное произведение $\prod\limits_D A_i$ называется *ультрапроизведением*. В том случае, когда все множества A_i совпадают, т. е. $A_i = A$, фильтрованное произведение обозначают через $\prod\limits_D A$ и называют фильтрованной степенью множества A по фильтру D. Если, в частности, D — ультрафильтр, то $\prod\limits_D A$ называется ультрастепенью множества A по фильтру D.

Дадим теперь определение фильтрованного произведения моделей. Пусть I — непустое множество, D — собственный фильтр над I, и пусть $\mathcal{U}_i$ при каждом $i \in I$ является моделью языка $\mathcal{L}$. Мы придерживаемся соглашения о том, что предикатные символы P интерпретируются в модели $\mathcal{U}_i$ как R_i, функциональные символы F — как G_i, а константные c — как a_i.

Фильтрованное произведение $\prod\limits_D \mathcal{U}_i$ есть по определению модель языка $\mathcal{L}$, описываемая следующим образом.

(i) Её универсумом служит множество $\prod\limits_D A_i$.

(ii) Пусть P — некоторый n-местный предикатный символ языка $\mathcal{L}$. Интерпретацией символа P в модели $\prod\limits_D \mathcal{U}_i$ служит такое отношение S, что

$$S(f_D^1, \ldots, f_D^n) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \{i \in I \colon R_i(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in D.$$

(iii) Пусть F — некоторый n-местный функциональный символ языка $\mathcal{L}$. Символ F интерпретируется в $\prod\limits_D \mathcal{U}_i$ посредством функции H, определяемой следующим образом:

$$H(f_D^1, \ldots, f_D^n) = (D_i(f^1(i), \ldots, f^n(i)) \colon i \in I)_D.$$

(iv) Пусть c — константный символ языка $\mathcal{L}$. Интерпретацией символа c служит элемент

$$b = (a_i \colon i \in I)_D$$

множества $\prod\limits_D A_i$.

Предложение 4. *Пусть* $\prod\limits_D \mathcal{U}$ *— ультрастепень модели* $\mathcal{U}$. *Тогда* $\prod\limits_D \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}$.

Следующая важная теорема помещена здесь без доказательства. Её доказательство можно найти в [7].

Теорема 2 (теорема об изоморфизме). *Пусть* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ *— модели языка* $\mathcal{L}$. *Тогда* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ *элементарно эквивалентны, если и только если они имеют изоморфные ультрастепени.*

1.5. Основные сведения из теории категорий. Категория модулей над кольцом

Основные определения и понятия этого пункта мы взяли из [12].

Рассмотрим алгебраическую систему C, состоящую из пары классов, Obj и Mor, и трёх операций: *разбиения*, *композиции* (обозначается через $\circ$) и *отождествления*, удовлетворяющих следующим соотношениям.

1. Разбиение сопоставляет каждому элементу класса Mor упорядоченную пару элементов из класса Obj (если f — элемент из класса Mor, а $A, B \in \mathrm{Obj}$ — соответствующие эму элементы, то пишут $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$).
2. Композиция сопоставляет некоторым парам элементов из Mor элемент из Mor (если f, g — элементы из Mor, h — соответствующий им элемент из Mor, то пишут $h = f \circ g$).
3. Идентификация сопоставляет каждому элементу A класса Obj некоторый элемент $f \in \mathrm{Mor}$ (пишут $f = 1_A$).
4. Для каждого $A \in \mathrm{Obj}$ выполнено $1_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$.
5. Для любых $A, B, C \in \mathrm{Obj}$, $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $G \in \mathrm{Mor}(B, C)$ существует такое $h \in \mathrm{Mor}(A, C)$, что $h = g \circ f$.

6. Для любых $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}$, $w \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $v \in \mathrm{Mor}(B, C)$, $u \in \mathrm{Mor}(C, D)$ выполнено соотношение $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$.
7. Для любых $A, B \in \mathrm{Obj}$, $u \in \mathrm{Mor}(B, A)$, $v \in \mathrm{Mor}(A, B)$ выполнено $1_A \circ u = u$ и $v \circ 1_A = v$.

Элементы $u \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называются *морфизмами* из объекта A в объект B. Формулу $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ мы будем также записывать в виде $f\colon A \to B$.

Категория mod-R левых модулей над фиксированным кольцом R устроена следующим образом: её объекты — это все левые модули над кольцом R, а её морфизмы — это все гомоморфизмы между ними.

Если C и D — категории, то под *ковариантным функтором* $T\colon C \to D$ понимается пара отображений

$$T\begin{cases}\mathrm{Obj}\, C \to \mathrm{Obj}\, D,\\ X \mapsto TX,\end{cases} \qquad T\begin{cases}\mathrm{Mor}\, C \to \mathrm{Mor}\, D,\\ f \mapsto Tf,\end{cases}$$

которые сохраняют композицию морфизмов и тождественные отображения:

$$\begin{aligned} T(f \circ g) = Tf \circ Tg \quad &\forall f, g \in \mathrm{Mor}\, C,\\ T1_A = 1_{TA} \qquad &\forall A \in \mathrm{Obj}\, C. \end{aligned}$$

Функтор $T\colon C \to D$ называется *унивалентным*, если для любых объектов X, Y категории C индуцированное отображение

$$\begin{cases}\mathrm{Mor}_C(X, Y) \to \mathrm{Mor}_D(TX, TY),\\ f \mapsto Tf\end{cases}$$

инъективно.

Категорией множеств SETS называется категория C, у которой $\mathrm{Obj}\, C$ — класс всех множеств, а $\mathrm{Mor}\, C$ — класс всех отображений множеств.

Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ категории C называется *эквивалентностью*, если существует такой морфизм $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$, что $g \circ f = 1_A$ и $f \circ g = 1_B$. Морфизм g с этим свойством обозначается через f^{-1}. Объект A *эквивалентен* объекту B (обозначение: $A \sim B$), если существует эквивалентность $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$. Очевидно, что все эти понятия можно выразить на языке первого порядка:

$$f \in \mathrm{Mor}(A, B) \text{ — эквивалентность} \Leftrightarrow \exists g \in \mathrm{Mor}(B, A)\, (f \circ g = 1_B \wedge g \circ f = 1_A);$$
$$A \sim B \Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Mor}(A, B)\, (F \text{ — эквивалентность}).$$

В категории mod-R эквивалентность $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называется *изоморфизмом* модулей A и B, а эквивалентные модули называются *изоморфными* ($A \cong B$). Эквивалентность $f \in \mathrm{Mor}(A, A)$ называется *автоморфизмом* модуля A.

Пусть $S\colon C \to D$ и $T\colon C \to D$ — два ковариантных функтора. *Еcтетственное преобразование* $S \to T$ — это функция h, ставящая в соответствие каждому объекту $A \in C$ морфизм $h(A)\colon S(A) \to T(A)$ таким образом, что для каждого морфизма $f\colon A \to A'$ категории C имеет место $T(f)h(A) = h(A')S(f)$.

Естественное преобразование $h\colon S \to T$ между функторами S и T называется *естественной эквивалентностью* функторов S и T, если $h(A)$ является эквивалентностью для всех $A \in \mathrm{Obj}(C)$. В этом случае используем обозначение $S \approx T$.

Эквивалентность $C \to D$ между двумя категориями состоит из упорядоченной пары (T, S) ковариантных функторов $T\colon C \to D$ и $S\colon D \to C$ и пары естественных эквивалентностей $ST \approx 1_C$ и $TS \approx 1_D$ функторов. В этом случае мы говорим, что C и D — *эквивалентные категории* (обозначение $C \approx D$).

Объект $T \in \mathrm{Obj}$ категории C называется *левым нулём* (*начальным* объектом) категории C, если для каждого объекта $X \in \mathrm{Obj}$ существует единственный морфизм $f \in \mathrm{Mor}(T, X)$. В языке первого порядка это свойство выражается как

$$T \text{ — левый нуль} \Leftrightarrow \forall X \in \mathrm{Obj}\ \exists f \in \mathrm{Mor}(T, X)\, \forall g \in \mathrm{Mor}(T, X)\, (g = f).$$

Объект F называется *правым нулём* (*конечным* объектом) категории C, если для каждого объекта $X \in \mathrm{Obj}$ существует единственный морфизм $f \in \mathrm{Mor}(X, F)$. Объект категории C называется *нулевым* объектом, если он является левым и правым нулём одновременно. Этот объект определим в языке первого порядка. В категории mod-R нулевой объект — это нулевой модуль.

Говорят, что морфизм $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ *пропускается* через объект Q, если $\exists g \in \mathrm{Mor}(X, Q)\, \exists h \in \mathrm{Mor}(Q, Y)\, (f = h \circ g)$. Морфизм называется *нулевым*, если он пропускается через нулевой обект:

$$f \in \mathrm{Mor}(A, B) \text{ — нулевой морфизм} \Leftrightarrow \exists g \in \mathrm{Mor}(A, 0)\, \exists h \in \mathrm{Mor}(0, B)\, (f = h \circ g).$$

В категории mod-R нулевые морфизмы между модулями A и B — это морфизмы, имеющие вид $f(a) = 0 \in B$ для всех $a \in A$.

Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называют *ретракцией*, если $\exists g \in \mathrm{Mor}(B, A)\, (f \circ g = 1_B)$. Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называют *коретракцией*, если $\exists g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ $(g \circ f = 1_A)$. В категории mod-R любая ретракция $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ является эпиморфным гомоморфизмом модуля A на модуль B, т. е. таким гомоморфизмом $f\colon A \to B$, что $\forall b \in B\, \exists a \in A\, (f(a) = b)$. Если f — ретракция $f\colon A \to B$ в категории mod-R, то рассмотрим множество $A' \equiv g[B]$. Очевидно, что A' является подмодулем в A. Очевидно, что $f|_{A'} \circ g = 1_B$. Покажем, что $g \circ f|_{A'} = 1_{A'}$. Пусть $a \in A'$. Тогда $\exists b \in B\, (g(b) = a)$. В этом случае $g(f(a)) = g(f(g(b))) = g(b) = a$. Таким образом, $A \cong B$. Кроме того, рассмотрим $A'' \equiv \mathrm{Ker}\, f$, т. е. $a \in A'' \Leftrightarrow f(a) = 0 \in B$. Очевидно, что $A = A' \oplus A''$. Таким образом, ретракция в категории mod-R — это изоморфизм некоторого прямого слагаемого модуля A на модуль B. Аналогично, коретракция — это такое изоморфное вложение модуля A в модуль B, что образ модуля A выделяется прямым слагаемым.

Объект A категории C называется *образующим* в категории C, если

$$\forall X, Y \in \mathrm{Obj}\ \forall f, f' \in \mathrm{Mor}(X, Y)\, \exists g \in \mathrm{Mor}(A, X)\, (f \circ g \neq f' \circ g).$$

Объект A называется *кообразующим* в категории C, если

$$\forall X, Y \in \mathrm{Obj}\ \forall f, f' \in \mathrm{Mor}(X, Y)\, \exists g \in \mathrm{Mor}(Y, A)\, (g \circ f \neq g \circ f').$$

Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называется *мономорфизмом*, если

$$\forall C \in \mathrm{Obj}\ \forall g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(C, A)\,(f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2),$$

т. е. на f можно сокращать слева. Морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ называется *эпиморфизмом*, если

$$\forall C \in \mathrm{Obj}\ \forall g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(B, C)\,(g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2),$$

т. е. на f можно сокращать справа. Морфизм $f \in \mathrm{Mor}$ называется *собственным мономорфизмом*, если он является мономорфизмом и не является эквивалентностью. Будем говорить, что $f \leqslant g$ для некоторых $f, g \in \mathrm{Mor}$, если f и g — мономорфизмы и $\exists h \in \mathrm{Mor}\,(f = g \circ h)$.

Объект $A \in \mathrm{Obj}$ называется *проективным*, если

$$\forall X, Y \in \mathrm{Obj}\ \forall f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$$
$$(f \text{ — эпиморфизм} \Rightarrow \forall \tilde{g} \in \mathrm{Mor}(A, Y)\,\exists g \in \mathrm{Mor}(A, X)\,(\tilde{g} = g \circ f)).$$

Объект $A \in \mathrm{Obj}$ называется *инъективным*, если

$$\forall X, Y \in \mathrm{Obj}\ \forall f \in \mathrm{Mor}(X, Y)\,(f \text{ — мономорфизм} \Rightarrow \forall \tilde{g} \in \mathrm{Mor}(Y, A)\,(\tilde{g} = g \circ f)).$$

Все эти свойства элементарны, то есть выразимы в языке первого порядка.

Пусть I — некоторое подмножество универсума, $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство левых R-модулей. Рассмотрим множество F таких функций из множества I, что $\forall i \in I\, f(i) \in A_i$. На множестве F можно ввести структуру R-модуля следующим образом: если $f, g \in F$, то $(f+g)(i) := f(i) + g(i) \in A_i$, если $f \in F$, $r \in R$, то $(rf)(i) := rf(i) \in A_i$. Этот модуль F называется *произведением семейства модулей* $\{A_i\}_{i \in I}$ и обозначается через $\prod\limits_{i \in I} A_i$. Если $A_i = A$ для всех $i \in I$, то произведение $\prod\limits_{i \in I} A_i$ обозначается через A^I. Для каждого $k \in I$ множество функций, удовлетворяющих условию $f(i) = 0$ при $i \neq k$, есть модуль, изоморфный модулю A_k. Такой модуль мы считаем естественным вложением модуля A_k в модуль $\prod\limits_{i \in I} A_i$.

Кроме того, рассмотрим множество S таких функций f из множества I, что $\forall i \in I\, f(i) \in A_i$ и $f(i) \neq 0$ лишь для конечного множества элементов из I. На множестве S можно совершенно аналогично ввести структуру R-модуля. Модуль S называется *прямой суммой семейства модулей* $\{A_i\}_{i \in I}$ и обозначается через $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Если $A_i = A$ для всех $i \in I$, то прямая сумма $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ обозначается через $A^{(I)}$.

Произведение конечного семейства $A_1, \ldots, A_n$ обозначается через

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{или} \quad A_1 \times \ldots \times A_n,$$

прямая сумма — через

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{или} \quad A_1 \oplus \ldots \oplus A_n.$$

$(I \times J)$-*матрицей* над множеством S называют отображение $f\colon I \times J \to S$. Таким образом, матрица есть просто элемент множества $S^{I \times J}$. Если S содержит только два различных элемента 0 и 1, то *дельта Кронекера* — это матрица $\delta\colon I \times I \to S$, такая что $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Предложение 5. *Пусть C — категория с нулём. Если $A = \prod_{i \in I} A_i$ — произведение в категории C, то существует семейство ретракций $p_i\colon A \to A_i$ и существуют коретракции $u_i\colon A_i \to A$, которые однозначно определяются соотношениями $p_i u_j = \delta_{ij} 1_{A_i}$ для любых $i, j \in I$.*

Дуально, если $\bigcup_{i \in I} A_i$ — прямая сумма, то существуют $u_i\colon A_i \to A$ — коретракции и существуют однозначно определённые по u_i ретракции $p_i\colon A \to A_i$, такие что $p_i u_j = \delta_{ij} 1_{A_i}$ для любых $i, j \in I$.

Произведение двух объектов определимо в языке первого порядка. То же самое верно для произведения и прямой суммы любого заранее заданного конечного числа объектов.

Пусть C — конкретная категория. Для произвольного множества S рассмотрим категорию (S, C), объектами которой являются отображения $f\colon S \to A$, где A — объект категории C. Морфизмы категории (S, C) определяются как такие морфизмы $A \to B$ категории C, что для данных объектов $S \to A$ и $S \to B$ категории (S, C) диаграмма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Левый нуль $f_S\colon S \to F(S)$ категории (S, C) называется *свободным объектом категории C над множеством S*.

Иначе говоря, для любого отображения $f\colon S \to A$ существует единственный морфизм $h\colon F(S) \to A$, такой что $f = h \circ f_S$.

Для объектов категории mod-R следующие понятия являются формульными:

модули X и Y изоморфны;

модуль X вложим в модуль Y;

модуль X наложим на модуль Y;

модуль X изоморфен прямому слагаемому модуля Y;

модуль X изоморфен прямой сумме модулей Y и Z;

модуль X проективный;

модуль X инъективный;

модуль X образующий;
модуль X кообразующий.

В общем случае формульными не являются следующие свойства модулей категории mod-R:

модуль X свободен;
модуль X равен A^I для некоторого множества A;
модуль X равен $A^{(I)}$ для некоторого множества A.

§ 2. Аналог теоремы Мориты для элементарной эквивалентности категорий модулей

В 2003 году мы изучали элементарные свойства категорий модулей над кольцами, колец эндоморфизмов модулей и групп автоморфизов модулей над кольцами. Наш интерес к этому вопросу был вызван работой В. Толстых [16].

2.1. Некоторые факты о категории mod-R

Фактор-модулем модуля M по подмодулю N называется модуль, состоящий из классов эквивалентности $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in N$ и такой, что $(a+N)r = ar + N$. Свойство модуля L быть изоморфным фактор-модулю модуля M является свойством первого порядка: $\exists f \in \mathrm{Mor}(M, L)\,(f$ — эпиморфизм).

Пусть $\mathbf{C}$ — конкретная категория. Если B и A — её объекты и $B \subseteq A$, то B — *подобъект* в A. Если A — подмножество, а N — подобъект в A, то S *порождает* N, если N является пересечением всех подобъектов объекта A, содержащих S. В этом случае употребляется обозначение $N = (S)$. Подобъект M объекта A называется *конечно порождённым*, *счётно порождённым* или *порождённым a элементами*, если $M = (T)$, где $|T| < \omega_0$, $|T| \leqslant \omega_0$ или $|T| \leqslant a$ соответственно. Эти свойства в общем случае не являются элементарными.

Семейство $\{x_i\}_{i\in I}$, которое порождает подмодуль N модуля M, называется *системой образующих* подмодуля N. Если же каждый элемент модуля лишь одним спсобом раскладывается в линейную комбинацию образующих, то $\{x_i\}_{i\in I}$ называют *базисом* модуля N, а мощность множества I — *базисным числом* этого модуля. Семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ называется *линейно независимым над R*.
Модуль $R^{(I)}$ является свободным модулем над множеством I.

Предложение 1.

1. *Если R — кольцо, а X — объект категории* mod-R*, то существует множество индексов I и некоторый эпиморфизм $R^{(I)} \to X$, т. е. любой R-модуль изоморфен фактор-модулю свободного R-модуля.*
2. *Если $\{u_i\colon R \to R^{(I)}\}_{i\in I}$ — инъекции в прямую сумму, то $\{u_i(1)\}_{i\in I}$ — базис свободного модуля $R^{(I)}$.*
3. *Объект R является образующим в категории* mod-R.

Базисное число, вообще говоря, зависит от выбора базиса и, следовательно, не может служить инвариантом модуля $F = R^{(I)}$. Однако оно не зависит от выбора базиса, если F — свободный модуль над бесконечным множеством I.

Предложение 2. *R-модуль P проективен тогда и только тогда, когда модуль P изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.*

Следствие. *Модуль P конечно порождён и проективен тогда и только тогда, когда $R^{(n)} \cong P \oplus X$ для некоторого целого числа $n > 0$ и модуля X.*

Доказательство. Если $R^{(n)} \cong P \oplus X$ для некоторого целого $n > 0$, то очевидно, что P проективен и конечно порождён.

Пусть, наоборот, P конечно порождён и проективен. Из проективности P следует, что $P \oplus Q \cong R^{(I)}$ для некоторого множества I. Пусть множество I бесконечно. Рассмотрим множество $\{p_1, \ldots, p_k\}$ элементов, порождающих P и базис $\{e_i\}_{i \in I}$ модуля $R^{(I)}$. Каждый p_j есть линейная комбинация конечного числа элементов базиса, откуда следует, что во все линейные комбинации для всех p_j входит лишь конечное подмножество $\{e_i\}_{i \in I}$. Значит, $P \subset R^{(n)} \subset R^{(I)}$, причём $R^{(n)}$ есть прямое слагаемое в $R^{(I)}$. Следовательно, $P \oplus (Q \cap R^{(n)}) \cong R^{(n)}$. $\square$

Предложение 3. *Модуль $M \in$ mod-R является образующим тогда и только тогда, когда любой R-модуль X является фактор-модулем модуля $M^{(I)}$ для некоторого множества I.*

Предложение 4. *Объект G категории mod-R является образующим тогда и только тогда, когда существуют целое число $n > 0$ и изоморфизм $G^{(n)} \cong R \oplus X$ для некоторого объекта $X \in$ mod-R.*

Модуль M называется *простым*, если он имеет ровно два подмодуля: 0 и M. Если M — некоторый модуль, а S — его подмодуль, то M/S прост тогда и только тогда, когда S — максимальный подмодуль. Любой конечно порождённый модуль M имеет максимальные подмодули. Таким образом, для любого кольца R в категории mod-R содержатся какие-то простые модули (в принципе, они все могут быть между собой изоморфны). Очевидно, что свойство модуля быть простым выразимо в языке первого порядка.

Предложение 5. *Для любого простого модуля M любой подмодуль P модуля $M^{(I)}$ изоморфен $M^{(J)}$ для некоторого множества J, мощность которого не превосходит мощности множества I.*

Модуль $P \in$ mod-R называется *прообразующим* модулем, если он является образующим конечно порождённым проективным модулем.

Кольца R и S называются *подобными* (обозначение: $R \sim S$), если существует прообразующий модуль $P \in$ mod-R и изоморфизм колец $S \cong \operatorname{End}_R P$.

Следующая знаменитая теорема приводится нами без доказательства (её доказательство можно найти в [12, теорема 4.29]).

Теорема 1 (теорема Мориты). *Следующие условия эквивалентны*:

1) *категории* mod-$R \approx$ mod-S;
2) *кольца R и S подобны.*

Кроме того, в дальнейшем нам потребуется следующая теорема из [12, п. 4.35].

Теорема 2. *Если A — коммутативное кольцо и кольцо B подобно кольцу A, то A изоморфно центру кольца B. Таким образом, два коммутативных кольца подобны тогда и только тогда, когда они изоморфны.*

2.2. Выделение прообразующего объекта в категории mod-R

Пусть формула $\mathrm{Simp}(M)$ выделяет в категории mod-R простые модули. Рассмотрим объект X, удовлетворяющий формуле

$$\mathrm{Sum}^{\omega}(X, M) := \mathrm{Simp}(M) \wedge (X \oplus M \cong X) \wedge \\ \wedge\, (\forall Y \in \mathrm{Obj}\,(Y \oplus M \cong Y \Rightarrow \exists Q \in \mathrm{Obj}\,(Y \cong X \oplus Q)).$$

Свойство $Y \oplus M \cong Y$ означает, что $Y \cong M^{(\omega)} \oplus Z$ для некоторого объекта $Z \in$ mod-R. Следовательно, X — это модуль, содержащий $M^{(\omega)}$ в виде прямого слагаемого и являющийся прямым слагаемым в $M^{(\omega)}$. Из предложения 5 видно, что в этом случае $X \cong M^{(\omega)}$. Таким образом, для любого простого модуля M формула $\mathrm{Sum}^{\omega}_M(X) := \mathrm{Sum}^{\omega}(X, M)$ выделяет модуль $M^{(\omega)}$.

Формула

$$\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}(X, M) := \mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_M(X) := \\ = \mathrm{Simp}(M) \wedge \exists Y \in \mathrm{Obj}\,(\mathrm{Sum}^{\omega}_M(Y) \wedge \exists Q \in \mathrm{Obj}\,(Y \cong X \oplus Q) \wedge X \ncong Y)$$

истинна для всех конечных прямых сумм простого модуля M и только для них.

Формула

$$\mathrm{Sum}(X, M) := \mathrm{Sum}_M(X) := \\ = \mathrm{Simp}(M) \wedge \forall Y\,(Y \subset X \wedge Y \neq 0 \Rightarrow \exists P\,(Y \cong P \oplus M))$$

выделяет класс Sum_M всех прямых сумм модуля M. Введём на этом классе отношение

$$(X \leqslant Y) := \exists f \in \mathrm{Mor}(X, Y)\,(f \text{ — мономорфизм}).$$

Класс Sum_M вполне упорядочен относительно $\leqslant$, и существует естественная биекция (отождествеление) класса Sum_M с классом Cn всех кардинальных чисел.

Формула

$$\mathrm{Pret}(P) := (P \text{ проективный}) \wedge (P \text{ образующий}) \wedge \\ \wedge\, \exists M \in \mathrm{Obj}\; \exists f \in \mathrm{Mor}(P, M)\,(\mathrm{Simp}(M) \wedge (f \text{ — эпиморфизм}))$$

выполняется для всех проективных образующих модулей, имеющих максимальные подмодули, в том числе она обязана выполняться для проективных образующих конечно порождённых (*прообразующих*) модулей.

Через $\langle M, f\rangle^P$ (или $\langle M^P, f^P\rangle$) мы будем обозначать пару (простой модуль M, эпиморфизм f из P на M) для модуля P, такого что $\mathrm{Pret}(P)$.

Рассмотрим модуль N, удовлетворяющий формуле $\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_{M^P}(N)$. Такой модуль N должен иметь вид $M^{(n)}$ для некоторого натурального n. Будем обозначать такой модуль через $N_{\mathrm{fd}}(M)$.

Рассмотрим теперь формулу

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Under}(P,M,N,X) := \mathrm{Under}_{M^P,N}(X) := N \cong N_{\mathrm{fd}}(M) \wedge \exists g \in \mathrm{Mor}(X,N)\\
&\quad(g \text{ — эпиморфизм} \wedge \forall i_M \in \mathrm{Mor}(M,N)\, \forall p_M \in \mathrm{Mor}(N,M)\\
&\quad(p_M \circ i_M = 1_M \Rightarrow \exists i \in \mathrm{Mor}(P,X)\, \exists p \in \mathrm{Mor}(X,P)\\
&\quad(p \circ i = 1_P \wedge g \circ i = i_M \circ f \wedge f \circ p = p_M \circ g)) \wedge\\
&\quad\wedge \forall i_M, i'_M \in \mathrm{Mor}(M,N)\, \forall p_M, p'_M \in \mathrm{Mor}(M,M)\, \forall i,i' \in \mathrm{Mor}(P,X)\\
&\quad\forall p,p' \in \mathrm{Mor}(X,P)\, (p_M \circ i_M = p'_M \circ i'_M = 1_M \wedge p \circ i = p' \circ i' = 1_P \wedge\\
&\quad\wedge g \circ i = i_M \circ f \wedge f \circ p = p_M \circ g \wedge g \circ i' = i'_M \circ f \wedge f \circ p' = p'_M \circ g \wedge\\
&\quad\wedge p_M \circ i'_M = p'_M \circ i_M = 0 \Rightarrow p \circ i' = p' \circ i = 0)).
\end{aligned}$$

Эта формула означает, что

1) для модуля X существует такой эпиморфизм $g\colon X \to N$, что для любой пары (i_M, p_M), состоящей из вложения модуля M в модуль N и обратной проекции модуля N на модуль M, существует пара (i,p), состоящая из вложения модуля P в модуль X и обратной проекции модуля X на модуль P, такая что диаграммы

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "i_M"] & N \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} P \arrow[d, "f"] & X \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "g"] \\ M & N \arrow[l, "p_M"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны;

2) если вложения i_M и i'_M модуля M в модуль N таковы, что их образы в N не пересекаются, то у соответствующих вложений $i, i'\colon P \to X$ образы также не пересекаются.

Посмотрим, как в этом случае устроен модуль X.

Предположим, что $N \cong M^{(n)} \cong M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, где $M_i \cong M$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Пусть $i^M_l\colon M \to N$ и $p^M_l\colon N \to M$ таковы, что $\mathrm{rng}\, i^M_l = M_l$ и $p^M_l \circ i^M_l = 1_M$. Этим парам вложений и проекций соответствуют такие пары (i_l, p_l), что $i_l\colon P \to X$, $p_l\colon X \to P$, $p_l \circ i_l = 1_P$, при этом образы вложений i_l и i_m для различных l и m не пересекаются и независимы. Из этого следует, что модуль $P^{(n)}$ выделяется в X в виде прямого слагаемого. Нам остаётся рассмотреть модуль X', удовлетворяющий формуле

$$\mathrm{Und}(P,M,N,X') := \mathrm{Und}_{N,M^P}(X') := \forall X\, (\mathrm{Under}_{M^P,N}(X) \Rightarrow \exists Q\, (X \cong X' \oplus X')).$$

Тогда мы получим модуль X', являющийся прямым слагаемым модуля $P^{(n)}$ и выделяющийся в $P^{(n)}$ прямым слагаемым.

Теперь рассмотрим следующую формулу:

$$\mathrm{Finite}(P,X) := \mathrm{Finite}_P(X) := \exists (M^P, f^P)\, \exists Y \in \mathrm{Obj}\, (\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_M(Y) \wedge \mathrm{Und}_{Y,M^P}(X)).$$

Эта формула выделяет модули X со свойством

$$\exists n \in \omega\, \exists Q, Q'\, (X \oplus Q \cong P^{(n)} \wedge X \cong P^{(n)} \oplus Q'),$$

т. е. все модули вида $P^{(n)}$ и ещё какие-то *конечно порождённые* модули.

Любой проективный конечно порождённый модуль есть прямое слагаемое модуля $R^{(n)}$ для некоторого $n \in \omega$, и, соответственно, если P конечно порождённый проективный, то для любого образующего модуля S $P \oplus Q \cong S^{(m)}$ для некоторого $m \in \omega$ и некоторого модуля Q. Если же модуль P не является конечно порождённым, то существует такой прообразующий модуль S, что P не может быть вложен в $S^{(n)}$ ни для какого $n \in \omega$.

Отсюда следует, что формула

$$\begin{aligned}\mathrm{Proobr}(P) := \mathrm{Pret}(P) \wedge \forall S \in \mathrm{Obj}\\ (\mathrm{Pret}(S) \Rightarrow \exists X \in \mathrm{Obj}\,(\mathrm{Finite}_S(X) \wedge \exists Q \in \mathrm{Obj}\,(P \oplus Q \cong X)))\end{aligned}$$

выполняется на прообразующих модулях и только на них. Таким образом, имея категорию mod-R, мы автоматически имеем (с помощью формулы $\mathrm{Proobr}()$) класс всех прообразующих модулей этой категории.

Заметим также, что, имея некоторый фиксированный прообразующий модуль P, мы также имеем класс модулей, являющихся прямыми слагаемыми в $P^{(I)}$ и одновременно содержащих $P^{(I)}$ в качестве прямого слагаемого. Очевидно, что такие модули имеют вид $P^{(I)} \oplus X$, где X — некоторый проективный модуль, вкладывающийся в $P^{(I)}$. Любой такой модуль можно представить в виде $R^{(I)} \oplus Y$, где Y — проективный модуль равзмерности, не большей $|I|$. Будем называть такие модули *почти свободными модулями размерности $|I|$ над кольцом R*.

2.3. Кольцо $\mathrm{End}_R P$

Рассмотрим некоторый прообразующий модуль P и множество $\mathrm{Mor}(P, P)$. Операция умножения на этом множестве вводится как

$$(f = g \times h) := (f = g \circ h).$$

Введём теперь операцию сложения. Для этого рассмотрим модуль $P \oplus P$ с вложениями $i_1, i_2 \in \mathrm{Mor}(P, P \oplus P)$ и проекциями $p_1, p_2 \in \mathrm{Mor}(P \oplus P, P)$ с условиями $p_1 \circ i_1 = p_2 \circ i_2 = 1_P$, $p_1 \circ i_2 = p_2 \circ i_1 = 0$.

Для данного $f \in \mathrm{Mor}(P, P)$ рассмотрим морфизм $\mathrm{Gr}_f \in \mathrm{Mor}(P \oplus P, P \oplus P)$, определяемый следующими условиями:

$$p_1 \circ \mathrm{Gr}_f \circ i_1 = 1_P, \quad p_2 \circ \mathrm{Gr}_f \circ i_2 = 1_P, \quad p_2 \circ \mathrm{Gr}_f \circ i_1 = 0, \quad p_1 \circ \mathrm{Gr}_f \circ i_2 = f.$$

Очевидно, что отображение

$$\mathrm{Gr}\colon \mathrm{Mor}(P, P) \to \mathrm{Mor}(P \oplus P, P \oplus P), \quad f \mapsto \mathrm{Gr}_f,$$

инъективно и что для любого морфизма $g \in \mathrm{Mor}(P \oplus P, P \oplus P)$, удовлетворяющего условиям $p_1 \circ g \circ i_1 = p_2 \circ g \circ i_2 = 1_P$, $p_2 \circ g \circ i_1 = 0$ существует такой морфизм $f \in \mathrm{Mor}(P, P)$, что $\mathrm{Gr}_f = g$.

Определим
$$(f = g + h) := (\mathrm{Gr}_f = \mathrm{Gr}_g \circ \mathrm{Gr}_h).$$
Таким образом, мы ввели на множестве $\mathrm{Mor}(P, P)$ структуру кольца, изоморфного кольцу $\mathrm{End}_R(P)$.

Чтобы показать, что это действительно так, достаточно убедиться, что для любых трёх эндоморфизмов $f, g, h \in \mathrm{End}_R P = \mathrm{Mor}(P, P)$ соотношение $f = g+h$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Gr}_f = \mathrm{Gr}_g \circ \mathrm{Gr}_h$. Рассмотрим морфизмы Gr_g и Gr_h и морфизм $G = \mathrm{Gr}_g \circ \mathrm{Gr}_h$. Отображения $k_1 \equiv i_1 \circ p_1$ и $k_2 \equiv i_2 \circ p_2$ из $\mathrm{Mor}(P \oplus P, P \oplus P)$ таковы, что $\forall x \in P \oplus P\, (x = k_1(x) + k_2(x))$, т. е. $k_1 + k_2 = 1_{P\oplus P}$. Таким образом,
$$\begin{aligned} &p_1 \circ G \circ i_1 = p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_1 = \\ &\quad = p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ 1_{P\oplus P} \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_1 = p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_1 = \\ &\quad = p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ (i_1 \circ p_1 \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_1 + i_2 \circ p_2 \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_1) = p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ i_1 \circ 1_P + 0 = 1_P, \end{aligned}$$
аналогично, $p_2 \circ G \circ i_2 = 1_P$, $p_2 \circ G \circ i_1 = 0$ и, наконец,
$$\begin{aligned} &p_1 \circ G \circ i_2 = p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_2 = p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_2 = \\ &\quad = (p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ i_1) \circ (p_1 \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_2) + (p_1 \circ \mathrm{Gr}_g \circ i_2) \circ (p_2 \circ \mathrm{Gr}_h \circ i_2) = \\ &\quad = g \circ 1_P + 1_P \circ h = g + h. \end{aligned}$$
Отсюда следует искомая эквивалентность.

2.4. Случай конечных колец

Лемма 1. *Кольцо эндоморфизмов* $\mathrm{End}_R P$ *любого прообразующего модуля* P *категории* mod-R *с конечным кольцом* R *конечно.*

Доказательство. Модуль P является подмодулем модуля $R^{(n)}$ для некоторого n. Так как кольцо R конечно, то модуль $R^{(n)}$ конечен, а значит, конечен и модуль P. Очевидно, что кольцо эндоморфизмов конечного модуля конечно. □

Лемма 2. *Для любого конечного кольца* R *существует предложение* φ_R *языка первого порядка теории колец, истинное в кольце* X *тогда и только тогда, когда* $X \cong R$.

Доказательство. Рассмотрим конечное кольцо R. Пусть оно содержит ровно m различных элементов $a_1, \ldots, a_m$, причём $a_i + a_j = a_{s(i,j)}$, $a_i \cdot a_j = a_{p(i,j)}$. Тогда искомое предложение φ_R имеет вид
$$\begin{aligned} &\exists x_1 \ldots \exists x_m \Biggl(\bigwedge_{i,j \in m, i \neq j} x_i \neq x_j \Biggr) \wedge \\ &\quad \wedge \Biggl(\forall x \bigvee_{i \in m} x = x_i \Biggr) \wedge \Biggl(\bigwedge_{i,j \in m} a_i + a_j = a_{s(i,j)} \Biggr) \wedge \Biggl(\bigwedge_{i,j \in m} a_i \cdot a_j = a_{p(i,j)} \Biggr). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. *Если категории* mod-R *и* mod-S *элементарно эквивалентны и кольцо R конечно, то $R \cong \operatorname{End}_S P$ для некоторого прообразующего модуля P категории* mod-S.

Доказательство. В категории mod-R истинно предложение

$$\xi := \exists P \in \operatorname{Obj}\left(\operatorname{Proobr}(P) \wedge \varphi_{\operatorname{Mor}(P,P)}\right).$$

Значит, предложение ξ должно быть истинно и в категории mod-S, т. е. кольцо эндоморфизмов некоторого прообразующего модуля изоморфно кольцу R. $\square$

Следствие. *Категории* mod-R *и* mod-S, *где R — конечное кольцо, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они Морита-эквивалентны.*

Доказательство. Если категории mod-R и mod-S изоморфны, то они, очевидно, элементарно эквивалентны.

Если же категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны и кольцо R конечно, то по теореме 3 $R \cong \operatorname{End}_S P$ для некоторого прообразующего модуля P категории mod-S, т. е. кольца R и S подобны. По теореме Мориты (п. 2.1, теорема 1) в этом случае категории mod-R и mod-S изоморфны. $\square$

Во всех следующих пунктах этого параграфа мы будем предполагать, что кольца R и S бесконечны.

2.5. Красивые линейные комбинации

Этот пункт основывается на статье С. Шелаха [14] 1976 года.

Пусть у нас фиксировано кольцо R, категория mod-R, в категории mod-R выделен некоторый простой модуль M, соответствующий выделенному прообразующему модулю P, $V = M^{(I)}$, $|I| = \mu$, где μ — бесконечный кардинал. Пусть множество $A = \{a_i \mid i \in I\}$ таково, что $\forall i \in I\,(a_i \in M_i \wedge a_i \neq 0)$.

Для любого $f \in \operatorname{Mor}(A, B)$ пусть $\operatorname{Rng} f$ — это образ f в B, $\operatorname{Cl} B$ — замыкание множества $B \subset V$ в V, т. е. наименьший подмодуль в V, содержащий множество B. Пусть, кроме того, $\tilde{b} = \operatorname{Cl}\{b\}$.

Как обычно, $\vec{x}$ обозначает конечную последовательность переменных $\vec{x} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Линейную комбинацию $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_i \in R$, будем обозначать также через $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ или $\tau(\vec{x})$. Будем называть такую линейную комбинацию *приведённой*, если все α_i отличны от нуля.

Линейную комбинацию $\tau(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ назовём *красивой* (см. [14], где аналогичные термы были названы *beautiful terms*), если

а) для любой линейной комбинации $\sigma(x_1, \ldots, x_m) = \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_m x_m$ имеет место равенство

$$\tau(\sigma(x_1^1, \ldots, x_m^1), \sigma(x_1^2, \ldots, x_m^2), \ldots, \sigma(x_1^n, \ldots, x_m^n)) =$$
$$= \sigma(\tau(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n), \tau(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n), \ldots, \tau(x_m^1, x_m^2, \ldots, x_m^n));$$

б) имеет место равенство

$$\tau(\tau(x_1^1,\ldots,x_n^1),\tau(x_1^2,\ldots,x_n^2),\ldots\tau(x_1^n,\ldots,x_n^n))=\tau(x_1^1,\ldots,x_n^n);$$

в) имеет место равенство

$$\tau(x,\ldots,x)=x.$$

Легко показать, что все красивые линейные комбинации имеют вид

$$\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n,\quad \alpha_i\in Z(R),\quad \alpha_i\alpha_j=\delta_{ij}\alpha_i,\quad \sum_{i=1}^n\alpha_i=1.$$

Теорема 4. *Существует формула φ_m, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\bar f_i$ — это m-ка элементов $\mathrm{Mor}(V,M)$ для каждого $i<i_0<\mu^+$. Тогда можно найти такой вектор $\bar g$, что формула $\varphi_m(\bar f,\bar g)$ истинна в mod-R тогда и только тогда, когда $\bar f=\tau(\bar f_{i_1},\ldots,\bar f_{i_n})$ для некоторой красивой линейной комбинации τ и некоторых $i_1<\ldots<i_n<i_0<\mu^+$.*

2.6. Порождающее множество модуля V

Напомним, что через V мы обозначаем модуль $M^{(\mu)}$ для некоторого бесконечного кардинального числа $\varkappa$ и фиксированного простого модуля M.

Пусть $V=\bigcup\limits_{t\in\mu}M_t$, где $M_t\cong M$ для каждого $t\in\mu$, и пусть в модуле M фиксирован некоторый порождающий (т. е. ненулевой) элемент a, а в каждом модуле M_t — соответствующий ему при вложении элемент a_t.

Воспользуемся теоремой 4 для $m=1$ и таких $f_i\in\mathrm{Mor}(V,M)$, что $f_i(a_t)=\delta_{it}a$. Тогда существуют такие $\bar g^*$ и формула $\varphi(f,\bar g^*)$, что формула $\varphi(f,\bar g^*)$ выполнена в том и только том случае, когда $f=\tau(f_{i_1},\ldots,f_{i_n})$, где $i_1<\ldots<i_n<\mu$ и линейная комбинация τ красива.

Мы знаем, что в этом случае $\tau(x_1,\ldots,x_n)=r_1x_1+\ldots+r_nx_n$, где $r_ir_j=\delta_{ij}r_i$ для любых $i,j=1,\ldots,n$ и $r_1+\ldots+r_n=1$.

Рассмотрим функцию $r_kf_{i_k}\colon V\to M$. Мы знаем, что $r_kf_{i_k}(a_{i_k})=r_k\cdot a$ и $r_kf_{i_k}(a_t)=0$ для $t\neq i_k$. В модуле M рассмотрим такое множество $N\subseteq M$, что $n\in N\Leftrightarrow r_k\cdot n=0$. Если $n_1,n_2\in N$, то $r_k(n_1+n_2)=0$, откуда $n_1+n_2\in N$. Если $r\in R$, $n\in N$, то $r_k(rn)=r(r_kn)=0$, откуда $rn\in N$. Следовательно, N является идеалом в M, т. е. $N=\{0\}$ или $N=M$. Пусть для разных k и l $r_ka\neq 0$ и $r_la\neq 0$. Тогда $r_kb\neq 0$ и $r_lb\neq 0$ для всех $b\in M$, т. е. $r_l(r_ka)\neq 0$, что невозможно. Таким образом, $r_ka\neq 0$ только для одного $k\in\{1,\ldots,n\}$. Из $r_1+\ldots+r_n=1$, т. е. из $(r_1+\ldots+r_n)a=a$, следует, что такое k обязательно существует и к тому же $r_ka=a$. Значит, для некоторого k выполняется $r_kf_{i_k}(a_{i_k})=a$ и $r_kf_{i_k}(a_t)=0$ при $t\neq i_k$, а для $l\neq k$ выполняется $r_lf_{i_l}(a_t)=0$ при всех $t\in I^*$. Значит, $f=f_{i_k}$ для некоторого $k\in\{1,\ldots,n\}$.

Таким образом, мы показали, что существует такое $\bar g^*$, что формула $\varphi(f,\bar g^*)$ выделяет в V некоторое множество, состоящее из μ независимых проекторов из V на M. Записав формулу, утверждающую, что $\bar g^*$ таково, что пространство, порождённое образами таких $i \in \mathrm{Mor}(M,V)$, что $\exists f\,(\varphi(f,\bar g^*) \wedge f\circ i = 1_M)$, изоморфно V и при выкидывании любой пары (f,i) из этого пространства новое пространство не будет совпадать с изначальным, мы получим искомое $\bar g^*$.

Вспомним, что вместе с простым модулем M у нас фиксирован прообразующий модуль P вместе с эпиморфизмом $h\colon P \to M$, а вместе с модулем $V \cong M^{(\mu)}$ — модуль V', являющийся почти свободным модулем размерности μ над P, вместе с эпиморфизмом $h'\colon V' \to V$, таким что для любой проекции $i\colon V \to M$ существует и единственна такая проекция $i'\colon V' \to P$, что $i\circ h' = h\circ i'$.

Множество, состоящее из проекторов $g \in \mathrm{Mor}(V,M)$, удовлетворяющих формуле $\varphi(\bar g^*, g)$, будем обозначать через $\mathrm{Gen}_{\bar g^*}(V,M)$. Множество, состоящее из проекторов $g \in \mathrm{Mor}(V',P)$, удовлетворяющих формуле $\exists f \in \mathrm{Gen}_{\bar g^*}(V,M)$ $(f\circ h' = h\circ g)$, обозначим через $\mathrm{Gen}_{\bar g^*,h}(V',P)$.

2.7. Логика второго порядка и структура $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle$, алгоритм перевода формул

Рассмотрим структуру $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle$, состоящую из класса Cn всех кардинальных чисел и кольца ring с отношениями суммы и произведения. Логика второго порядка такой структуры $(L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle))$ позволяет в формулах использовать произвольные предикатные символы вида

$$P_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}(c_1,\ldots,c_k; v_1,\ldots,v_n),$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — фиксированные кардинальные числа, $c_1,\ldots,c_k$ — переменные для элементов из $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ соответственно, $v_1,\ldots,v_n$ — переменные для элементов кольца.

Таким образом, формулы языка $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$ могут содержать следующие знакосочетания.

1. $\forall r \in \mathrm{ring}$.
2. $\exists r \in \mathrm{ring}$.
3. $\forall \varkappa \in \mathrm{Cn}$.
4. $\exists \varkappa \in \mathrm{Cn}$.
5. $\forall \alpha \in \varkappa$, где $\varkappa$ или является свободной переменной формулы φ, или определена в формуле φ раньше, чем α (с помощью подформулы $\forall \varkappa \in \mathrm{Cn}$ или $\exists \varkappa \in \mathrm{Cn}$).
6. $\exists \alpha \in \varkappa$, где $\varkappa$ или является свободной переменной формулы φ, или определена в формуле φ раньше, чем α (с помощью подформулы $\forall \varkappa \in \mathrm{Cn}$ или $\exists \varkappa \in \mathrm{Cn}$).
7. $r_1 = r_2 + r_3$, $r_1 = r_2 \times r_3$, $r_1 = r_2$, где каждая из переменных r_1, r_2, r_3 либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ раньше (с помощью подформулы $\forall r_i \in \mathrm{ring}$ или $\exists r_i \in \mathrm{ring}$).
8. $\varkappa_1 = \varkappa_2$, где каждая из переменных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ раньше (с помощью подформулы $\forall \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$ или $\exists \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$).

9. $\alpha_1 = \alpha_2$, где каждая из переменных α_1, α_2 либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ (с помощью подформулы $\forall \alpha_i \in \varkappa_i$ или $\exists \alpha_i \in \varkappa_i$).
10. $\forall P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$, $\exists P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$, где каждая из переменных $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k$ либо является свободной переменной формулы φ, либо определена в формуле φ раньше (с помощью подформулы $\forall \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$ или $\exists \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$).
11. $P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k;r_1,\ldots,r_n)$, где каждая из переменных $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, $r_1,\ldots,r_n$, а также «предикатная переменная»
$$P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$$
либо являются свободными переменными формулы φ, либо определены в формуле φ раньше (с помощью подформул $\forall \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$, $\exists \varkappa_i \in \mathrm{Cn}$, $\forall \alpha_i \in \varkappa_i$, $\exists \alpha_i \in \varkappa_i$, $\forall r_i \in \mathrm{ring}$, $\exists r_i \in \mathrm{ring}$, $\forall P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$ или $\exists P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$), причём $\varkappa_i$ вводится в формуле раньше α_i для любого $i = 1,\ldots,k$, а $P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$ — позже всех $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k$.

Теорема 5. *Пусть даны кольца R и S и существует предложение ψ языка $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$, истинное в теории $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$ и ложное в теории $\langle \mathrm{Cn}, R'\rangle$, если кольцо R' подобно кольцу R, но не эквивалентно ему в логике $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$. Пусть, кроме того, категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны. Тогда существует кольцо S', подобное кольцу S, такое что структуры $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S'\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Доказательство. Предположим сначала, что мы каким-то образом фиксировали прообразующий модуль P в категории mod-T, где T — некоторое кольцо. Тогда в соответствии с предыдущими пунктами мы имеем формулы, выделяющие простой модуль M, соответствующий модулю P, модули $M^{(\varkappa)}$ для всех $\varkappa \in \mathrm{Cn}$, модули $M^{(n)}$ для всех $n \in \omega$, модули $M^{(\alpha)}$ для бесконечных $\alpha \in \mathrm{Cn}$, почти свободные модули $V^\varkappa$ размерности $\varkappa \in \mathrm{Cn}$, $\varkappa \in \omega$, $\varkappa \geqslant \omega$ и, кроме того, для каждого модуля $M^{(\varkappa)}$ (или $V^\varkappa$) его порождающие множества $\mathrm{Gen}_{g^*}(M^{(\varkappa)}, M)$ (или $\mathrm{Gen}_{g^*}(V^\varkappa, R)$). Кроме того (см. п. 2.3), для любых $f, g \in \mathrm{Mor}(P,P)$ мы считаем известной их сумму $f \oplus g \in \mathrm{Mor}(P,P)$ и произведение $f \otimes g \in \mathrm{Mor}(P,P)$.

Рассмотрим некоторое произвольное предложение φ в языке $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$. Как мы уже написали выше, в это предложение могут входит следующие подформулы.

1. $\forall r \in \mathrm{ring}$.
2. $\exists r \in \mathrm{ring}$.
3. $\forall \varkappa \in \mathrm{Cn}$.
4. $\exists \varkappa \in \mathrm{Cn}$.
5. $\forall \alpha \in \varkappa$.
6. $\exists \alpha \in \varkappa$.
7. $r_1 = r_2 + r_3$.

8. $r_1 = r_2 \cdot r_3$.
9. $r_1 = r_2$.
10. $\varkappa_1 = \varkappa_2$.
11. $\alpha_1 = \alpha_2$.
12. $\forall P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k; v_1,\ldots,v_n)$.
13. $\exists P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k; v_1,\ldots,v_n)$.
14. $P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k; r_1,\ldots,r_n)$.

Переведём это предложение в предложение $\tilde{\varphi}_P$ (зависящее от изначально фиксированного модуля P) языка первого порядка теории категорий по следующему алгоритму.

1. Подформула $\forall r \in \mathrm{ring}$ переводится в подформулу $\forall f_r \in \mathrm{Mor}(P, P)$, т. е. каждому элементу кольца ring ставится в соответствие элемент кольца $\mathrm{End}_T(P)$.

2. Подформула $\exists r \in \mathrm{ring}$ переводится в подформулу $\exists f_r \in \mathrm{Mor}(P, P)$.

3. Подформула $\forall \varkappa \in \mathrm{Cn}$ переводится в подформулу

$$\forall X_\varkappa \in \mathrm{Obj}\ \forall \bar{g}^*_\varkappa\, (X_\varkappa = M^{(\varkappa)} \wedge \mathrm{Gen}_{\bar{g}^*_\varkappa}(X_\varkappa, M) \Rightarrow \ldots),$$

т. е. каждому элементу $\varkappa \in \mathrm{Cn}$ ставится в соответствие некоторый модуль вида $M^{(\varkappa)}$ для простого модуля M (мы уже упоминали, что существует естественное отождествление класса Cn и класса всех прямых сумм модуля M), и при этом сразу фиксируется множество $\mathrm{Gen}_{\bar{g}^*_\varkappa}(M^{(\varkappa)}, M)$ проекторов из $M^{(\varkappa)}$ на M.

4. Подформула $\exists \varkappa \in \mathrm{Cn}$ переводится в подформулу

$$\exists X_\varkappa \in \mathrm{Obj}\ \exists \bar{g}^*_\varkappa\, (X_\varkappa = M^{(\varkappa)} \wedge \mathrm{Gen}_{\bar{g}^*_\varkappa}(X_\varkappa, M) \wedge \ldots).$$

5. Подформула $\forall \alpha \in \varkappa$ переводится в подформулу $\forall f^\alpha_{X_\varkappa} \in \mathrm{Gen}_{\bar{g}^*_\varkappa}(X_\varkappa, M)$, т. е. элементы множеств $\varkappa$ переводятся в функции из множества $\mathrm{Gen}_{\bar{g}^*_\varkappa}(M^{(\varkappa)}, M)$, которое содержит именно $\varkappa$ линейно независимых проекторов.

6. Подформула $\exists \alpha \in \varkappa$ переводится в подформулу $\exists f^\alpha_{X_\varkappa} \in \mathrm{Gen}_{\bar{g}^*_\varkappa}(X_\varkappa, M)$.

7. Подформула $r_1 = r_2 + r_3$ переводится в подформулу $f_{r_1} = f_{r_2} \oplus f_{r_3}$, т. е. сумме элементов из кольца ring соответствует сумма элементов кольца $\mathrm{End}_T(P)$.

8. Подформула $r_1 = r_2 \cdot r_3$ переводится в подформулу $f_{r_1} = f_{r_2} \otimes f_{r_3}$, т. е. произведению элементов кольца ring соответствует произведение элементов кольца $\mathrm{End}_T(P)$.

9. Подформула $r_1 = r_2$ переводится в подформулу $f_{r_1} = f_{r_2}$, т. е. равным элементам кольца ring соответствуют равные элементы кольца $\mathrm{End}_T(P)$.

10. Подформула $\varkappa_1 = \varkappa_2$ переводится в подформулу

$$\exists g_{\varkappa_1,\varkappa_2} \in \mathrm{Mor}(X_{\varkappa_1}, X_{\varkappa_2})\, (g \text{ — изоморфизм}),$$

т. е. равным множествам класса Cn соответствуют изоморфные модули вида $M^{(I)}$ и $M^{(J)}$, т. е. такие модули, что $|I| = |J| = \varkappa$.

11. Подформула $\alpha_1 = \alpha_2$ для $\alpha_1, \alpha_2 \in \varkappa$ переводится в подформулу $f^{\alpha_1}_{X_\varkappa} = f^{\alpha_2}_{X_\varkappa}$, а подформула $\alpha_1 = \alpha_2$ при $\alpha_1 \in \varkappa_1$, $\alpha_2 \in \varkappa_2$ и $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ переводится в подформулу $f^{\alpha_1}_{X_{\varkappa_1}} = f^{\alpha_2}_{X_{\varkappa_2}} \circ g$, т. е. равным элементам в множестве $\varkappa \in \mathrm{Cn}$ ставяися в соответствие соответствующие друг другу проекторы в $\mathrm{Gen}_{\bar g^*_{\varkappa_1}}(M^{(I)}, M)$ и $\mathrm{Gen}_{\bar g^*_{\varkappa_2}}(M^{(J)}, M)$, при этом соответствие фиксируется изоморфизмом между $M^{(I)}$ и $M^{(J)}$.

Перед последними тремя переводами введём следующие новые формулы.

Для каждой функции $f_t \in \mathrm{Gen}_{\bar g^*_\varkappa}(M^{(\varkappa)}, M)$ через f'_t будем обозначать соответствующую ей функцию из $\mathrm{Gen}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa, P)$, через $\bar f_t$ — такую функцию из $\mathrm{Mor}(M, M^{(\varkappa)})$, что $f_t \circ \bar f_t = 1_M$, через $\bar f_t{}'$ — такую функцию из $\mathrm{Mor}(P, V^\varkappa)$, что $f'_t \circ \bar f'_t = 1_P$. Про функцию $f \in \mathrm{Mor}(V^\varkappa, V^\varkappa)$ будем писать, что

$$f \in \mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa),$$

если

$$\forall f'_t, f'_s \in \mathrm{Gen}_{\bar g^*_\varkappa, h}(V^\varkappa, P)\,(f'_t \neq f'_s \Rightarrow f'_t \circ f \circ \bar f'_s = 0).$$

Про функцию $f \in \mathrm{Mor}(M^{(\varkappa_1)}, M^{(\varkappa_2)})$ будем писать, что

$$f \in \mathrm{Sets}_{\bar g^*_{\varkappa_1}, \bar g^*_{\varkappa_2}}(M^{(\varkappa_1)}, M^{(\varkappa_2)}),$$

если

$$\forall f_t \in \mathrm{Gen}_{\bar g^*_{\varkappa_1}}(M^{(\varkappa_1)}, M)\\ \forall f_s \in \mathrm{Gen}_{\bar g^*_{\varkappa_2}}(M^{(\varkappa_2)}, M)\,(f_s \circ f \circ \bar f_t = 1_M \vee f_s \circ f \circ \bar f_t = 0).$$

Таким образом, элементы из $\mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa)$ — это такие эндоморфизмы модуля $V^\varkappa$, которые диагональны в некотором изначально фиксированном базисе, поэтому эти эндоморфизмы можно рассматривать как функции из $\varkappa$ в кольцо $\mathrm{End}_T(P)$, ставя в соответствие каждому $\alpha \in \varkappa$ элемент, стоящий на диагонали на месте с индексом α. Элементы из $\mathrm{Sets}_{\bar g^*_{\varkappa_1}, \bar g^*_{\varkappa_2}}(M^{(\varkappa_1)}, M^{(\varkappa_2)})$ — это такие морфизмы из $M^{(\varkappa_1)}$ в $M^{(\varkappa_2)}$, которые в данном фиксированном базисе имеют матрицы, состоящие только из нулей и единиц. Эти матрицы можно воспринимать как соответствия F между множествами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, если считать, что пара $\langle x, y\rangle$ принадлежит соответствию F тогда и только тогда, когда на пересечении строки с индексом x и столбца с индексом y в матрице стоит единица.

Воспользуемся этими замечаниями для оставшихся переводов.

12. Пусть $\varkappa = \max\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k, |\mathrm{ring}|\}$. Тогда подформула

$$\forall P_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k}(c_1, \ldots, c_k; v_1, \ldots, v_n)$$

переводится в подформулу

$$\forall f^{c_1}_P \in \mathrm{Sets}_{\bar g^*_\varkappa, \bar g^*_{\varkappa_1}}(M^{(\varkappa)}, M^{(\varkappa_1)}) \ldots \forall f^{c_k}_P \in \mathrm{Sets}_{\bar g^*_\varkappa, \bar g^*_{\varkappa_k}}(M^{(\varkappa)}, M^{(\varkappa_k)})\\ \forall f^{v_1}_P \in \mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa) \ldots \forall f^{v_n}_P \in \mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa),$$

т. е. любому предикатному символу вида $P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$ ставится в соответствие k функций, отвечающих за множества $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k$, и n функций, отвечающих за элементы кольца, связанных между собой с помощью модуля $M^{(\varkappa)}$.

13. Подформула
$$\exists P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1\ldots,v_n)$$
переводится в подформулу
$$\exists f_P^{c_1}\in \mathrm{Sets}_{\bar g^*_\varkappa,\bar g^*_{\varkappa_1}}(M^{(\varkappa)},M^{(\varkappa_1)})\ldots\exists f_P^{c_k}\in \mathrm{Sets}_{\bar g^*_\varkappa,\bar g^*_{\varkappa_k}}(M^{(\varkappa)},M^{(\varkappa_k)})$$
$$\exists f_P^{v_1}\in \mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa)\ldots\exists f_P^{v_n}\in \mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa).$$

14. Подформула
$$P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(\alpha_1,\ldots,\alpha_k;r_1,\ldots,r_n)$$
переводится в подформулу
$$\exists f\in \mathrm{Gen}_{\bar g^*_\varkappa}(M^{(\varkappa)},M)\,(f^{\alpha_1}_{X_{\varkappa_1}}\circ f_P^{c_1}\circ\bar f=1\wedge\ldots\wedge f^{\alpha_k}_{X_{\varkappa_k}}\circ f_P^{c_k}\circ\bar f=1\wedge$$
$$\wedge f'\circ f_P^{v_1}\circ\bar f'=f_{r_1}\wedge\ldots\wedge f'\circ f_P^{v_n}\circ\bar f'=f_{r_n}).$$

Пусть теперь некоторое предложение φ истинно в модели $\langle \mathrm{Cn},\mathrm{End}_T P\rangle$. Пусть все связанные переменные предложения φ содержатся среди переменных $x_1,\ldots,x_q$ (где $x_1,\ldots,x_q$ — это либо переменные для элементов кольца, либо для элементов класса Cn, либо для элементов каких-то $\varkappa\in\mathrm{Cn}$, либо предикатные переменные). Так как предложение φ истинно в модели $\langle \mathrm{Cn},\mathrm{End}_T P\rangle$, то существует некоторая последовательность $y_1,\ldots,y_q$ элементов этой модели, на которой предложение φ выполняется. Переведём подследовательность $y_1,\ldots,y_q$ элементов модели $\langle \mathrm{Cn},\mathrm{End}_T P\rangle$ в последовательность $z_1,\ldots,z_s$ элементов модели mod-T.

Если $y_i\in \mathrm{End}_T(P)$, то переведём элемент y_i в элемент $z_i:=y_i=f_{y_i}\in\in \mathrm{Mor}(P,P)$.

Если $y_i\in\mathrm{Cn}$ и $y_i=\varkappa$, то переведём y_i в пару $z_i^{(1)}:=M^{(\varkappa)}\in\mathrm{Obj}$ и $z_i^{(2)}:=\bar g^*_\varkappa$, для которой верно $\mathrm{Gen}_{\bar g^*_\varkappa}(M^{(\varkappa)},M)$.

Если $y_i\in\varkappa$ и $y_i=\alpha$, где α — ординальное число, то переведём y_i в $z_i:=f^\alpha\in\mathrm{Gen}_{\bar g^*_\varkappa}(M^{(\varkappa)},M)$ — проектор из этого множества, имеющий индекс α.

Если $y_i=P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(c_1,\ldots,c_k;v_1,\ldots,v_n)$, то есть y_i — отношение $\bar P$ на множестве
$$\varkappa_1\times\ldots\times\varkappa_k\times\mathrm{End}_T P\times\ldots\times\mathrm{End}_T P,$$
то положим $\varkappa:=\max\{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k,|\,\mathrm{End}_T P|\}$ и переведём y_i в последовательность $z_i^1,\ldots,z_i^k;z_i^{k+1},\ldots,z_i^{k+n}$ морфизмов из множеств
$$\mathrm{Sets}_{\bar g^*_\varkappa,\bar g^*_{\varkappa_1}}(M^{(\varkappa)},M^{(\varkappa_1)}),\ldots,\mathrm{Sets}_{\bar g^*_\varkappa,\bar g^*_{\varkappa_k}}(M^{(\varkappa)},M^{(\varkappa_k)}),$$
$$\mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa),\ldots,\mathrm{Ring}_{\bar g^*_\varkappa}(V^\varkappa)$$

соответственно, такую что $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k; r_1, \dots, r_n\rangle \in \bar{P}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha \in \varkappa$, что в каждой из матриц z_i^l, $1 \leqslant l \leqslant k$, на пересечении столбца с номером α и строки с номером α_l стоит единица, а в каждой из матриц z_i^l, $k < l \leqslant k+n$, на диагонали на месте с номером α стоит элемент r_l.

Таким образом, мы получим новую последовательность $z_1, \dots, z_s$. Покажем, что на этой последовательности в модели mod-T выполнено предложение $\tilde{\varphi}_P$.

Проведём доказательство по индукции по длине формулы.

1. Если формула имеет вид

$$r_1 = r_2 + r_3,$$

то её перевод имеет вид

$$f_{r_1} = f_{r_2} \oplus f_{r_3},$$

при этом $r_1 = r_2 + r_3$ в $\mathrm{End}_T P$ тогда и только тогда, когда $f_{r_1} = f_{r_2} \oplus f_{r_3}$ в $\mathrm{Mor}_T(P, P)$, так как кольца $\mathrm{End}_T P$ и $\mathrm{Mor}_T(P, P)$ изоморфны. Поэтому

$$\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{End}_T P\rangle_{L_2} \vDash r_1 = r_2 + r_3$$

тогда и только тогда, когда

$$\text{mod-}T \vDash f_{r_1} = f_{r_2} \oplus f_{r_3}.$$

2. Доказательство в случае формул $r_1 = r_2 \cdot r_3$ и $r_1 = r_2$ аналогично предыдущему.

3. Если формула имеет вид

$$\varkappa_1 = \varkappa_2,$$

то её перевод имеет вид

$$\exists g \in \mathrm{Mor}(M^{(\varkappa_1)}, M^{(\varkappa_2)})\, (g \text{ — изоморфизм}).$$

Если кардинальные числа $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ совпадают, то модули $M^{(\varkappa_1)}$ и $M^{(\varkappa_2)}$ изоморфны, а если модули $M^{(I)}$ и $M^{(J)}$ изоморфны, то $|I| = |J|$. Отсюда следует, что

$$\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{End}_T P\rangle_{L_2} \vDash \varkappa_1 = \varkappa_2$$

тогда и только тогда, когда

$$\text{mod-}T \vDash \exists g_{\varkappa_1,\varkappa_2} \in \mathrm{Mor}(M^{(\varkappa_1)}, M^{(\varkappa_2)})\, (g \text{ — изоморфизм}).$$

4. Доказательство утверждения о формуле $\alpha_1 = \alpha_2$ совершенно аналогично предыдущему.

5. Если формула имеет вид

$$P_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; r_1, \dots, r_n),$$

а её перевод имеет вид

$$\tilde{P}_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; r_1, \dots, r_n)_P,$$

то если

$$\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{End}_T P\rangle_{L_2} \vDash P_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_k; r_1, \dots, r_n),$$

то для последовательности

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k, r_1, \ldots, r_n \rangle \in \varkappa_1 \times \ldots \times \varkappa_k \times \operatorname{End}_T P \times \ldots \times \operatorname{End}_T P$$

выполнено

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k; r_1, \ldots, r_n \rangle \in \bar{P},$$

где $\bar{P}$ — отношение, соответствующее предикату $P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}$, т. е.

$$\bar{P} \subset \varkappa_1 \times \ldots \times \varkappa_k \times \operatorname{End}_T P \times \ldots \times \operatorname{End}_T P.$$

Это отношение есть множество последовательностей, имеющее мощность, не большую чем

$$|\varkappa_1 \times \ldots \times \varkappa_k \times |T| \times \ldots \times |T|| \leqslant |\varkappa \times \ldots \times \varkappa| = \varkappa.$$

Таким образом, все последовательности из $\bar{P}$ можно пронумеровать элементами из $\varkappa$. Пусть $\bar{P}(\alpha)$ — это последовательность из $\bar{P}$ с номером α и она имеет вид $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k; r_1, \ldots, r_n \rangle$. Тогда α-й столбец матрицы z_i^l для $l = 1, \ldots, k$ будет содержать 1 на месте с номером α_l и 0 на всех остальных местах, а α-й столбец матрицы z_i^l для $l = k+1, \ldots, k+n$ будет содержать r_{l-n} на месте α и 0 на всех остальных местах. Отсюда видно, что

$$\langle \mathrm{Cn}, \operatorname{End}_T P \rangle_{L_2} \vDash P_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; r_1, \ldots, r_n)$$

тогда и только тогда, когда

$$\text{mod-}T \vDash \tilde{P}_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; r_1, \ldots, r_n)_P.$$

Все остальные части индукции доказываются совершенно аналогично.

Теперь мы легко можем увидеть, что предложение φ истинно в структуре $\langle \mathrm{Cn}, \operatorname{End}_T(P) \rangle$ тогда и только тогда, когда соответствующее ему предложение $\tilde{\varphi}_P$ истинно в mod-T.

Формула

$$\begin{aligned} \mathrm{Select}(P) := P \in \mathrm{Obj} \wedge \mathrm{Proobr}(P) \wedge \tilde{\psi}^P \wedge \\ \wedge \forall P' \in \mathrm{Obj}\,(\mathrm{Proobr}(P') \wedge P' \ncong P \Rightarrow \neg\tilde{\psi}^{P'}) \end{aligned}$$

по условию теоремы истинна в mod-R только для $P \cong R$.

Пусть теперь категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны и φ — предложение в языке второго порядка L_2 структуры $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring} \rangle$, истинное в $\langle \mathrm{Cn}, R \rangle$. Тогда предложение $\forall P \in \mathrm{Obj}\,(\mathrm{Select}(P) \Rightarrow \tilde{\varphi}^P)$ истинно в категории mod-R, а значит, и в категории mod-S. Отсюда следует, что предложение φ истинно в $\langle \mathrm{Cn}, \operatorname{End}_S(P) \rangle$ для любого модуля P, удовлетворяющего в категории mod-S формуле $\mathrm{Select}(P)$. Но для всех модулей P, удовлетворяющих формуле φ, кольца $\operatorname{End}_S P$ эквивалентны в логике $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring} \rangle$, поэтому если положить $S' := \operatorname{End}_S P$ для некоторого P, удовлетворяющего формуле $\mathrm{Select}(P)$, то мы получим, что предложение φ истинно в $\langle \mathrm{Cn}, S' \rangle$, причём кольцо S' не зависит от предложения φ. Следовательно, структуры $\langle \mathrm{Cn}, R \rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S' \rangle$ эквивалентны в логике L_2. $\square$

2.8. Обратная теорема

Прежде чем доказывать обратную теорему, выразим различные понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем в языке $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$.

Одноместное отношение вида $P_{\varkappa_1}(c)$ будем называть *подмножеством кардинального числа* $\varkappa_1$. Формульное множество $\{\alpha \in \varkappa_1 \mid P_{\varkappa_1}(\alpha)\}$ будем обозначать через $P_{\varkappa_1}$ и использовать запись $\alpha \in P_{\varkappa_1}$.

Одноместное отношение вида $P(v)$ будем называть *подмножеством кольца* ring и, аналогично предыдущему, использовать запись $r \in P$.

Любое двуместное отношение $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2)$ (или $F_{\varkappa_1}(c_1, v_1)$, или $F(v_1, v_2)$) будем называть *соответствием* между кардинальными числами $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (или между кардинальным числом $\varkappa_1$ и кольцом, или в кольце). Будем использовать запись $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle \in P_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ (или $\langle \alpha_1, v_1\rangle \in P_{\varkappa_1}$, или $\langle v_1, v_2\rangle \in P$) для формулы $P_{\varkappa_1,\varkappa_2}(\alpha_1, \alpha_2)$ (и т. п.).

Соответствие $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2)$ (или $F_{\varkappa_1}(c_1, v_1)$, или $F(v_1, v_2)$), для которого выполняется формула

$$\begin{aligned}\forall \alpha \in \varkappa_1\, \exists \beta \in \varkappa_2\, (\langle \alpha, \beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2}) \wedge \\ \wedge\, \forall \alpha \in \varkappa_1\, \forall \beta_1, \beta_2 \in \varkappa_2\, (\langle \alpha, \beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2} \wedge \langle \alpha, \beta_2\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2)\end{aligned}$$

(аналогично для других видов соответствий), называется *функцией из кардинального числа* $\varkappa_1$ *в кардинальное число* $\varkappa_2$ (соответственно из кардинального числа $\varkappa_1$ в кольцо или из кольца в себя). То, что $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}$ (или $F_{\varkappa_1}$, или F) является функцией, мы будем записывать через $\mathrm{Func}(F_{\varkappa_1,\varkappa_2})$ (или $\mathrm{Func}(F_{\varkappa_1})$, или $\mathrm{Func}(F)$).

Функция $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2)$ (или $F_{\varkappa_1}(c_1, v_1)$, или $F(v_1, v_2)$), для которой выполнена формула

$$\forall \beta \in \varkappa_2\, \exists \alpha \in \varkappa_2\, (\langle \alpha, \beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2})$$

(аналогично для других видов функций), называется *сюръективной* (обозначение: $\mathrm{Surj}(F)$, или $\mathrm{Surj}(F_{\varkappa_1})$, или $\mathrm{Surj}(F)$).

Функция $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2)$ (или $F_{\varkappa_1}(c_1, v_1)$, или $F(v_1, v_2)$), для которой выполнена формула

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \varkappa_1\, \forall \beta \in \varkappa_2\, (\langle \alpha_1, \beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2} \wedge \langle \alpha_2, \beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2)$$

(аналогично для других видов функций), называется *инъективной* (обозначение: $\mathrm{Inj}(F_{\varkappa_1,\varkappa_2})$, или $\mathrm{Inj}(F_{\varkappa_1})$, или $\mathrm{Inj}(F)$).

Функция, являющаяся одновременно сюръективной и инъективной, называется *биективной* (обозначение: $\mathrm{Bij}(F_{\varkappa_1,\varkappa_2})$, или $\mathrm{Bij}(F_{\varkappa_1})$, или $\mathrm{Bij}(F)$).

Для данной функции $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2)$ (или $F_{\varkappa_1}(c_1, v_1)$, или $F(v_1, v_2)$) *обратной* функцией называется функция $F'_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2)$ (или $F'_{\varkappa_1}(c_1, v_1)$, или $F'(v_1, v_2)$), удовлетворяющая формуле

$$\forall \alpha \in \varkappa_1\, \forall \beta \in \varkappa_2\, (\langle \alpha, \beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2} \Leftrightarrow \langle \beta, \alpha\rangle \in F'_{\varkappa_1,\varkappa_2}).$$

Областью определения соответствия $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1,c_2)$ (или $F_{\varkappa_1}(c_1,v_1)$, или $F(v_1,v_2)$) называется множество $A_{\varkappa_1} \subset \varkappa_1$ ($A \subset \mathrm{ring}$), удовлетворяющее формуле

$$\forall\alpha \in \varkappa_1\,(\alpha \in A_{\varkappa_1} \Leftrightarrow \exists\beta \in \varkappa_2\,\langle\alpha,\beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2}).$$

Область определения обозначается через $\mathrm{Dom}(F_{\varkappa_1,\varkappa_2})$.

Образом соответствия $F_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1,c_2)$ (или $F_{\varkappa_1}(c_1)$, или $F(v_1,v_2)$) называется множество $A_{\varkappa_2} \subset \varkappa_2$ ($A \subset \mathrm{ring}$), удовлетворяющее формуле

$$\forall\beta \in \varkappa_2\,(\beta \in A_{\varkappa_2} \Leftrightarrow \exists\alpha \in \varkappa_1\,\langle\alpha,\beta\rangle \in F_{\varkappa_1,\varkappa_2})$$

(обозначение $\mathrm{Rng}(F_{\varkappa_1,\varkappa_2})$).

Про кардинальное число $\mu \in \mathrm{Cn}$ будем говорить, что оно *бесконечно* (обозначение: $\mu \in \mathrm{Inf}$ или $\mathrm{Inf}(\mu)$), если оно удовлетворяет формуле

$$\exists F_{\mu,\mu}(c_1,c_2)\,(\mathrm{Inj}(F_{\mu,\mu}) \wedge \mathrm{Rng}(F_{\mu,\mu}) \neq \mu).$$

Про кардинальное число $\mu \in \mathrm{Cn}$ будем говорить, что оно *конечно* (обозначение: $\mu \in \mathrm{Fin}$ или $\mathrm{Fin}(\mu)$), если $\mu \notin \mathrm{Inf}$.

Мощностью множества $M_\varkappa \subset \varkappa$ ($M \subset \mathrm{ring}$) будем называть кардинальное число $\mu \in \mathrm{Cn}$, для которого выполнена формула

$$\exists F_{\mu,\varkappa}(c_1,c_2)\,(\mathrm{Inj}(F_{\mu,\varkappa}) \wedge \mathrm{Dom}(F_{\mu,\varkappa}) = \mu \wedge \mathrm{Rng}(F_{\mu,\varkappa}) = M_\varkappa).$$

Мощность множества $M_\varkappa$ (M) будем обозначать через $|M_\varkappa|$ ($|M|$).

Множество $M_\varkappa$ (M) будем называть *конечным*, если его мощность является конечным кардинальным числом.

Рассмотрим некоторое конечное множество $M_\varkappa$ (M). Соответствие $\bar{M}_{\varkappa,\varkappa}(c_1,c_2)$ ($\bar{M}(v_1,v_2)$) будем называть *отношением последовательного порядка* на этом множестве, если

$$\begin{aligned}\forall\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in M_\varkappa\,&((\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle \in \bar{M}_{\varkappa,\varkappa} \wedge \langle\alpha_1,\alpha_3\rangle \in \bar{M}_{\varkappa,\varkappa} \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_3) \wedge\\ &\wedge (\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle \in \bar{M}_{\varkappa,\varkappa} \wedge \langle\alpha_2,\alpha_3\rangle \in \bar{M}_{\varkappa,\varkappa} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2)) \wedge\\ &\wedge \exists\alpha_{\min},\alpha_{\max} \in M_\varkappa\,\forall\alpha \in M_\varkappa\,((\alpha = \alpha_{\max} \vee \exists\alpha' \in M_\varkappa\,(\langle\alpha,\alpha'\rangle \in \bar{M}_{\varkappa,\varkappa})) \wedge\\ &\wedge (\alpha = \alpha_{\min} \vee \exists\alpha' \in M_\varkappa\,(\langle\alpha',\alpha\rangle \in \bar{M}_{\varkappa,\varkappa}))) \wedge\\ &\wedge \forall\alpha \in M_\varkappa\,(\langle\alpha_{\max},\alpha\rangle \notin \bar{M}_{\varkappa,\varkappa} \wedge \langle\alpha,\alpha_{\min}\rangle \notin \bar{M}_{\varkappa,\varkappa}).\end{aligned}$$

Будем обозначать свойство предиката $\bar{M}_{\varkappa,\varkappa}(c_1,c_2)$ ($\bar{M}(v_1,v_2)$) быть последовательным порядком на множестве $M_\varkappa$ (M) через $\mathrm{Next}_{M_\varkappa}(\bar{M}_{\varkappa,\varkappa})$ ($\mathrm{Next}_M(\bar{M})$).

Если $\bar{M}_{\varkappa,\varkappa}(c_1,c_2)$ ($\bar{M}(v_1,v_2)$) — фиксированный последовательный порядок на множестве $M_\varkappa$ (M), то для $\alpha_1,\alpha_2 \in \varkappa$ ($r_1,r_2 \in \mathrm{ring}$), таких что $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle \in \bar{M}_{\varkappa,\varkappa}$ ($\langle r_1,r_2\rangle \in \bar{M}$), будем писать $\alpha_2 = \alpha_1 \oplus_{\bar{M}} 1$ ($r_2 = r_1 \oplus_{\bar{M}} 1$).

Пусть $M \subset \mathrm{ring}$ — некоторое подмножество кольца. Через $\sum\limits_{r\in M} r$ мы будем обозначать элемент $\bar{r}$ кольца ring, удовлетворяющий формуле

$$\begin{aligned}&\exists\bar{M}(v_1,v_2)\,\exists S(v_1,v_2)\,(\mathrm{Next}_M(\bar{M}) \wedge \mathrm{Bij}(S) \wedge \langle r_{\min}(\bar{M}), r_{\min}(\bar{M})\rangle \in S \wedge\\ &\quad\wedge \forall r_1,r_2,r_3,r_4 \in M\,(r_2 = r_1 \oplus_{\bar{M}} 1 \wedge \langle r_1,r_3\rangle \in S \wedge \langle r_2,r_4\rangle \in S \Rightarrow r_4 = r_3 + r_2) \wedge\\ &\quad\wedge \langle r_{\max}(\bar{M}),\bar{r}\rangle \in S).\end{aligned}$$

Легко увидеть, что формула $\sum\limits_{r\in M} r$ задаёт обычное сложение в кольце ring.

Матрицей размера $\varkappa_1 \times \varkappa_2$ называется отношение $M_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2, v_1)$, удовлетворяющее формуле

$$\begin{aligned}
&\forall \alpha \in \varkappa_1\, \forall \beta \in \varkappa_2\, \exists r \in \mathrm{ring}\, (\langle \alpha, \beta, r\rangle \in M_{\varkappa_1,\varkappa_2}) \wedge \forall \alpha \in \varkappa_1\, \forall \beta \in \varkappa_2\, \forall r_1, r_2 \in \mathrm{ring}\\
&\quad (\langle \alpha, \beta, r_1\rangle \in M_{\varkappa_1,\varkappa_2} \wedge \langle \alpha, \beta, r_2\rangle \in M_{\varkappa_1,\varkappa_2} \Rightarrow r_1 = r_2) \wedge\\
&\quad \wedge \forall \beta \in \varkappa_2\, \forall M_{\varkappa_1} \subset \varkappa_1\\
&\quad (\forall \alpha \in \varkappa_1\, (\alpha \in M_{\varkappa_1} \Leftrightarrow \exists r \in \mathrm{ring}\, (\langle \alpha, \beta, r\rangle \in M_{\varkappa_1,\varkappa_2} \wedge r \neq 0)) \Rightarrow |M_{\varkappa_1}| \in \mathrm{Fin}).
\end{aligned}$$

Отношения $M_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1, c_2; v_1)$, являющиеся матрицами, мы будем обозначать через $\mathrm{Matrix}(M_{\varkappa_1,\varkappa_2})$.

Теорема 6. *Если структуры $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2, то категории mod-R и mod-S элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное предложение φ в языке теории категорий, истинное в категории mod-R.

Переведём его в предложение языка второго порядка структуры $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$.

Сначала дадим неформальное описание перевода.

Каждая объектная переменная переводится в пару, первый элемент которой — кардинальное число $\varkappa$ (соответствующее размерности свободного модуля над R), второй элемент — матрица размера $\varkappa \times \varkappa$ с элементами из кольца R, такая что в каждом столбце она содержит лишь конечное число ненулевых элементов. Этой матрице естественным образом соответствует подмодуль модуля $R^{(\varkappa)}$ (столбцы — это порождающие элементы подмодуля). Мы будем ассоциировать такую пару с фактор-модулем свободного модуля $R^{(\varkappa)}$ по этому подмодулю.

Каждая переменная для морфизма переводится в тройку, состоящую из двух объектов, зашифрованных так, как описано выше (обозначим соответствующие кардинальные числа через $\varkappa$ и $\varkappa'$, а получающиеся подмодули — через A и A'), и ещё одной матрицы размера $\varkappa \times \varkappa'$, определяющей линейное отображение из $R^{(\varkappa)}$ в $R^{(\varkappa')}$, такое что образ подмодуля A лежит в модуле A'.

Любой тождественный морфизм переводится в тройку, где первые две компоненты совпадают, а третья компонента является тождественной матрицей.

Композиция двух морфизмов (двух троек) переводится в тройку, в которой первый объект — это первый объект первой тройки, второй объект — второй объект второй тройки, а третий объект — композиция матриц из первой и второй тройки.

Теперь перейдём к формальному переводу.

Произведём следующие замены в предложении φ.

1. Подформулу $\forall X \in \mathrm{Obj}$ мы заменим на подформулу

$$\forall \varkappa_X \in \mathrm{Cn}\, \forall P^X_{\varkappa_X,\varkappa_X}(c_1, c_2, v)\, (\mathrm{Matrix}(P^X_{\varkappa_X,\varkappa_X}) \Rightarrow \ldots).$$

2. Подформулу $\exists X \in \mathrm{Obj}$ мы заменим на подформулу

$$\exists \varkappa_X \in \mathrm{Cn}\, \exists P^X_{\varkappa_X,\varkappa_X}(c_1, c_2, v)\, (\mathrm{Matrix}(P^X_{\varkappa_X,\varkappa_X}) \wedge \ldots).$$

Сейчас нам потребуется выписать условие на матрицу для морфизма, утверждающее, что эта матрица переводит первый объект во второй, т. е. все вектор-столбцы матрицы первого объекта под действием этой матрицы перейдут в линейные комбинации векторов-столбцов матрицы второго объекта. Чтобы записать это условие, нам требуется ввести формулу, выражающую сумму бесконечного множества элементов кольца, если известно, что лишь конечное их число отлично от нуля.

Для удобства для матрицы $M_{\varkappa_1,\varkappa_2}(c_1,c_2,v_1)$ и фиксированных $\alpha\in\varkappa_1$ и $\beta\in\varkappa_2$ то единственное $r\in\mathrm{ring}$, для которого $\langle\alpha,\beta,r\rangle\in M_{\varkappa_1,\varkappa_2}$, будем обозначать через $M_{\varkappa_1,\varkappa_2}(\langle\alpha,\beta\rangle)$.

Пусть имеется некоторая функция $F_\varkappa(c,v)$, образ которой есть подмножество кольца ring и о которой известно, что множество таких $\alpha\in\varkappa$, для которых соответствующее $r\in\mathrm{ring}$, такое что $\langle\alpha,r\rangle\in F_\varkappa$, не равно 0, конечно. Тогда через

$$\sum_{\alpha\in\varkappa}F_\varkappa(\langle\alpha\rangle)$$

будем обозначать элемент $r\in\mathrm{ring}$, удовлетворяющий формуле

$$\forall M_\varkappa(c,v)\,(\forall\alpha\in\varkappa\,\forall r'\in\mathrm{ring}\,(\langle\alpha,r'\rangle\in M_\varkappa\Leftrightarrow r'\neq 0\wedge\langle\alpha,r'\rangle\in F_\varkappa)\Rightarrow \\ \Rightarrow r=\sum_{\alpha\in\mathrm{Dom}(M_\varkappa)}M_\varkappa(\langle\alpha\rangle)).$$

Теперь мы готовы дать перевод 3.

3. Подформулу $\forall f\in\mathrm{Mor}$ мы заменим на подформулу

$$\forall\varkappa_f\,\forall P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}\in\widetilde{\mathrm{Obj}}\,\forall\varkappa'_f\,\forall {P^f_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'\in\widetilde{\mathrm{Obj}}\,\forall Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(c_1,c_2,v)\,\Big(\mathrm{Matrix}(Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f})\wedge \\ \wedge\forall\beta\in\varkappa_f\,\exists S_{\varkappa'_f}(c,v)\,\Big(\mathrm{Func}(S_{\varkappa'_f})\langle\mathrm{Dom}\rangle\wedge|\,\mathrm{Dom}(S_{\varkappa'_f})|\in\mathrm{Fin}\wedge \\ \wedge\forall\gamma\in\varkappa'_f\,\Big(\Big(\gamma\in\mathrm{Dom}(S_{\varkappa'_f})\wedge \\ \wedge\sum_{\alpha\in\varkappa_f}Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(\langle\alpha,\gamma\rangle)\cdot P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\langle\alpha,\beta\rangle)=\sum_{\xi\in\varkappa'_f}S(\gamma)\cdot {P^f_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'(\langle\xi,\gamma\rangle)\Big)\vee \\ \vee\Big(\gamma\notin\mathrm{Dom}(S_{\varkappa'_f})\wedge\sum_{\alpha\in\varkappa_f}Q_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(\langle\alpha,\gamma\rangle)\cdot P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\langle\alpha,\beta\rangle)=0\Big)\Big)\Big)\Rightarrow\ldots\Big).$$

4. Подформулу $\exists f\in\mathrm{Mor}$ аналогично предыдущей мы заменим на подформулу

$$\exists\varkappa_f\,\exists P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}\in\widetilde{\mathrm{Obj}}\,\exists\varkappa'_f\,\exists {P^f_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'\in\widetilde{\mathrm{Obj}}\,\forall Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(c_1,c_2,v)\,\Big(\mathrm{Matrix}(Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f})\wedge \\ \wedge\forall\beta\in\varkappa_f\,\exists S_{\varkappa'_f}(c,v)\,\Big(\mathrm{Func}(S_{\varkappa'_f})\langle Dom\rangle\wedge|\,\mathrm{Dom}(S_{\varkappa'_f})|\in\mathrm{Fin}\wedge$$

$$\wedge\,\forall\gamma\in\varkappa'_f\,\Bigg(\bigg(\Big(\gamma\in\mathrm{Dom}(S_{\varkappa'_f})\wedge$$

$$\wedge\sum_{\alpha\in\varkappa_f}Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(\langle\alpha,\gamma\rangle)\cdot P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\langle\alpha,\beta\rangle)=\sum_{\xi\in\varkappa'_f}S(\gamma)\cdot {P^f_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'(\langle\xi,\gamma\rangle)\Big)\vee$$

$$\vee\Big(\gamma\notin\mathrm{Dom}(S_{\varkappa'_f})\wedge\sum_{\alpha\in\varkappa_f}Q_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(\langle\alpha,\gamma\rangle)\cdot P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\langle\alpha,\beta\rangle)=0\Big)\bigg)\bigg)\wedge\ldots\Bigg).$$

5. Подформулу $X=Y$ для $X,Y\in\mathrm{Obj}$ мы заменим на подформулу

$$\varkappa_X=\varkappa_Y\wedge\forall\alpha,\beta\in\varkappa_X\,\forall r\in\mathrm{ring}\,(P^X_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\alpha,\beta,r)\Leftrightarrow P^Y_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\alpha,\beta,r)),$$

а подформулу $f=g$ для $f,g\in\mathrm{Mor}$ — на формулу

$$\begin{aligned}&\varkappa_f=\varkappa_g\wedge\varkappa'_f=\varkappa'_g\wedge\forall\alpha_1,\alpha_2\in\varkappa_f\,\forall\beta_1,\beta_2\in\varkappa'_f\,\forall r\in\mathrm{ring}\\&\quad((P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\alpha_1,\alpha_2,r)\Leftrightarrow P^g_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\alpha_1,\alpha_2,r))\wedge\\&\quad\wedge({P^f_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'(\beta_1,\beta_2,r)\Leftrightarrow {P^f_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'(\beta_1,\beta_2,r))\wedge\\&\quad\wedge(Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(\alpha_1,\beta_1,r)\Leftrightarrow Q^g_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(\alpha_1,\beta_1,r))).\end{aligned}$$

6. Подформулу $f\in\mathrm{Mor}(X,Y)$ для данных $f\in\mathrm{Mor}$, $X,Y\in\mathrm{Obj}$ мы заменим на подформулу

$$\begin{aligned}&\varkappa_f=\varkappa_X\wedge\varkappa'_f=\varkappa_Y\wedge\forall\alpha_1,\alpha_2\in\varkappa_X\,\forall\beta_1,\beta_2\in\varkappa_Y\,\forall r\in\mathrm{ring}\\&\quad(P^f_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\alpha_1,\alpha_2,r)\Leftrightarrow P^X_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\alpha_1,\alpha_2,r))\wedge\\&\quad\wedge({P^f_{\varkappa_Y,\varkappa_Y}}'(\beta_1,\beta_2,r)\Leftrightarrow P^Y_{\varkappa_Y,\varkappa_Y}(\beta_1,\beta_2,r)).\end{aligned}$$

7. Подформулу $f=1_X$ для данных $f\in\mathrm{Mor}$, $X\in\mathrm{Obj}$ мы заменим на подформулу

$$\begin{aligned}&\varkappa_f=\varkappa_X\wedge\varkappa'_f=\varkappa_X\wedge\forall\alpha,\beta\in\varkappa_X\,\forall r\in\mathrm{ring}\\&\quad(P^X_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\alpha,\beta,r)\Leftrightarrow P^f_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\alpha,\beta,r)\Leftrightarrow {P^f_{\varkappa_X,\varkappa_X}}'(\alpha,\beta,r))\wedge\\&\quad\wedge\forall\gamma\in\varkappa_X\,(Q^f_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\gamma,\gamma,1))\wedge\forall\gamma,\eta\in\varkappa_X\,(\gamma\neq\eta\Rightarrow Q^f_{\varkappa_X,\varkappa_X}(\gamma,\eta,0)).\end{aligned}$$

8. Подформулу $f=g\circ h$ для данных $f,g,h\in\mathrm{Mor}$ мы заменим на подформулу

$$\begin{aligned}&\varkappa_f=\varkappa_h\wedge\varkappa'_f=\varkappa'_g\wedge\varkappa'_h=\varkappa_g\wedge\forall\alpha_1,\alpha_2\in\varkappa_f\\&\quad\forall\beta_1,\beta_2\in\varkappa'_f\,\forall\gamma_1,\gamma_2\in\varkappa_g\,\forall r\in\mathrm{ring}\,((P^f_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\alpha_1,\alpha_2,r)\Leftrightarrow P^h_{\varkappa_f,\varkappa_f}(\alpha_1,\alpha_2,r))\wedge\\&\quad\wedge({P^f_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'(\beta_1,\beta_2,r)\Leftrightarrow {P^g_{\varkappa'_f,\varkappa'_f}}'(\beta_1,\beta_2,r))\wedge\\&\quad\wedge(P^g_{\varkappa_g,\varkappa_g}(\gamma_1,\gamma_2,r)\Leftrightarrow {P^h_{\varkappa_g,\varkappa_g}}'(\gamma_1,\gamma_2,r)))\wedge\\&\quad\wedge\forall\xi\in\varkappa_f\,\forall\eta\in\varkappa'_f\,\Big(Q^f_{\varkappa_f,\varkappa'_f}(\langle\xi,\eta\rangle)=\sum_{\alpha\in\varkappa_g}Q^g_{\varkappa_g,\varkappa'_g}(\langle\alpha,\eta\rangle)\cdot Q^h_{\varkappa_h,\varkappa'_h}(\langle\xi,\alpha\rangle)\Big).\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем каждое предложение φ в логике первого порядка теории категорий перевести в предложение $\tilde{\varphi}$ в логике второго порядка L_2 структуры $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle$, причём алгоритм перевода никак не зависит от базисного кольца, при этом предложение φ истинно в категории $\text{mod-}R$ тогда и только тогда, когда предложение $\tilde{\varphi}$ истинно в структуре $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$.

Рассмотрим некоторое предложение φ (формулу φ) языка первого порядка теории категорий.

Пусть все связанные (свободные и связанные) переменные предложения (формулы) φ содержатся среди $x_1, \ldots, x_q$ (каждая x_l — это либо переменная для элементов класса Obj, либо переменная для элементов класса Mor). Рассмотрим некоторую последовательность элементов модели $\text{mod-}R$ $y_1, \ldots, y_q$, такую что если x_l — переменная для объектов, то $y_l \in \mathrm{Obj}$, а если x_l — переменная для морфизмов, то $y_l \in \mathrm{Mor}$.

Переведём последовательность $y_1, \ldots, y_q$ в последовательность $z_1, \ldots, z_s$ элементов модели $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle_{L_2}$ следующим образом.

Если $y_l \in \mathrm{Obj}$, то y_l является некоторым модулем над кольцом R. Как мы знаем, в этом случае существуют $\varkappa_l \in \mathrm{Cn}$ и подмодуль M_l модуля $R^{(\varkappa_l)}$, такие что $y_l \cong R^{(\varkappa_l)}/M_l$. Тогда переведём элемент y_l в пару $\langle z_l^1, z_l^2\rangle$, где $z_l^1 = \varkappa_l$, z_l^2 — это матрица размера $\varkappa_l \times \varkappa_l$ над кольцом R, у которой каждый столбец — это вектор порождающего множества векторов модуля M_l. Естественно, каждый столбец матрицы M_l в этом случае содержит лишь конечное число ненулевых элементов.

Если $y_l \in \mathrm{Mor}$, то y_l является морфизмом из модуля M_1 в модуль M_2. Пусть

$$M_1 \cong R^{(\varkappa_1)}/N_1, \quad M_2 \cong R^{(\varkappa_2)}/N_2.$$

Тогда для $m \in M_1$

$$m = r_1 e_{\alpha_1} + \ldots + r_k e_{\alpha_k} + N_1,$$

где $r_1, \ldots, r_k \in R$, $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_k}$ — элементы базиса модуля $R^{(\varkappa_1)}$. Пусть $y_l(m) = n \in M_2$, т. е. $n = s_1 e_{\beta_1} + \ldots + s_n e_{\beta_n}$, где $s_1, \ldots, s_n \in R$, $e_{\beta_1}, \ldots, e_{\beta_n}$ — элементы базиса модуля $R^{(\varkappa_2)}$.

Отсюда видно, что такой морфизм полностью определяется матрицей размерности $\varkappa_1 \times \varkappa_2$, такой что $y_l(N_1) \subset N_2$. Поэтому переведём морфизм y_l в элементы z_l^1, z_l^2, z_l^3, z_l^4, z_l^5, где z_l^1 и z_l^2 — это переводы объекта, из которого происходит морфизм, z_l^3 и z_l^4 — это переводы объекта, в который переходит морфизм, а z_l^5 — это матрица размерности $\varkappa_1 \times \varkappa_2$, определяемая следующей формулой: для каждого $\alpha \in \varkappa_1$ столбец матрицы z_l^5 с номером α содержит r_i в строке с номером $\beta_i \in \varkappa_2$, если $y_l(e_\alpha) = \sum r_i e_{\beta_i}$, и 0 во всех остальных строках.

Таким образом, мы получим новую последовательность $z_1, \ldots, z_s$. Так же, как и в предыдущей теореме, легко показать по индукции, что на этой последовательности в модели $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle_{L_2}$ предложение $\tilde{\varphi}$ выполнено тогда и только тогда, когда предложение φ выполнено в модели $\text{mod-}R$ на последовательности $y_1, \ldots, y_q$. Отсюда аналогично предыдущему пункту выводим, что если $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle \equiv_{L_2} \langle \mathrm{Cn}, S\rangle$, то $\text{mod-}R \equiv \text{mod-}S$. □

2.9. Аналог теоремы Мориты и следствия

Прямым следствием из теорем 5 и 6 является теорема 7.

Теорема 7. *Пусть даны кольца R и S и существует предложение ψ языка $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring} \rangle)$, истинное в кольце R и ложное во всех кольцах, ему подобных и не эквивалентных ему в языке $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring} \rangle)$. Тогда категории $\mathrm{mod}\text{-}R$ и $\mathrm{mod}\text{-}S$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует кольцо S', подобное кольцу S, такое что структуры $\langle \mathrm{Cn}, R \rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S' \rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Приведём наиболее очевидные следствия теоремы 7.

Следствие 1. *Для произвольных тел F_1 и F_2 категории $\mathrm{mod}\text{-}F_1$ и $\mathrm{mod}\text{-}F_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle \mathrm{Cn}, F_1 \rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, F_2 \rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2.*

Следствие 2. *Для произвольных коммутативных колец R_1 и R_2 категории $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ и $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle \mathrm{Cn}, R_1 \rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, R_2 \rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2.*

Доказательство. В категории $\mathrm{mod}\text{-}R$, где R — коммутативное кольцо, формула $\mathrm{Proobr}(X)$ выделяет все прообразующие модули X, а формула

$$\mathrm{Comm}(X) := \mathrm{Proobr}(X) \wedge \forall f, g \in \mathrm{Mor}(X, X)\, (f \circ g = g \circ f)$$

выделяет все объекты, изоморфные кольцу R (см. теорему 2). □

Также на поверхности лежат следствия из теоремы 7 для *локальных колец* и *областей главных идеалов*.

Локальным кольцом является кольцо, в котором множество необратимых элементов является левым идеалом (см. [10, лемма 1.2, с. 15]).

Предложение 6. *Если R — локальное кольцо, то любой конечно порождённый проективный R-модуль свободен.*

Доказательство. Покажем, что если кольцо R локально, то множество M необратимых элементов является также и правым идеалом. Действительно, допустим, что некоторое произведение $m\lambda$, $m \in M$, $\lambda \in R$, обратимо. Тогда существует такое $r \in R$, что $m \cdot r = 1$. Очевидно, что r не может принадлежать левому идеалу M. Но r также не может быть обратимым, так как иначе формула

$$m = m(vv^{-1}) = (mv)v^{-1} = v^{-1}$$

показала бы, что m также обратим.

Это противоречие доказывает, что M — двусторонний идеал. Очевидно, что фактор-кольцо R/M является телом.

Заметим, что квадратная матрица над R обратима тогда и только тогда, когда её редукция по модулю идеала M обратима. Для доказательства умножим эту матрицу слева на такую, которая представляет обратную к ней по модулю M, затем диагонализируем произведение элементарными преобразованиями строк.

Таким образом, матрица имеет левую обратную; аналогичным образом строится правая обратная матрица.

Предположим, что модуль P конечно порождён и проективен над R, тогда можно найти такой модуль Q, что $P \oplus Q \cong R^{(n)}$. Выберем базисы в P/MP и Q/MQ (как в пространствах над телом R/M). Каждый элемент базисов поднимем соответственно в P или Q.

Полученное множество элементов составит базис модуля $P \oplus Q$. Очевидно, отсюда следует, что модуль P свободен. □

Следствие 3. *Для произвольных локальных колец R_1 и R_2 категории $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ и $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle \mathrm{Cn}, R_1\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, R_2\rangle$ эквивалентны в логике второго порядка L_2.*

Доказательство. В категории $\mathrm{mod}\text{-}R$, где R — локальное кольцо, формула

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Local}(X) := \mathrm{Proobr}(X) \wedge \forall f, g, h \in \mathrm{Mor}(X, X)\\
&\quad ((\forall f' \in \mathrm{Mor}(X,X)\, \neg(f \circ f' = f' \circ f = 1_X)) \wedge\\
&\quad \wedge (\forall g' \in \mathrm{Mor}(X,X)\, \neg(g \circ g' = g' \circ g = 1_X)) \wedge\\
&\quad \wedge h = f \oplus g \Rightarrow (\forall h' \in \mathrm{Mor}(X,X)\, \neg(h \circ h' = h' \circ h = 1_X)))
\end{aligned}$$

истинна только для модулей, изоморфных модулю R_R.

Действительно, из предложения 6 следует, что формула $\mathrm{Proobr}(X)$ выполнена только для $X \circ R^{(n)}$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис кольца $R^{(n)}$, $n \geqslant 1$. Тогда рассмотрим такие $f, g, h \in \mathrm{Mor}(X,X)$, что $f(e_1) = e_1$, $f(e_i) = 0$ при $i =\neq 1$, $g(e_1) = 0$, $g(e_i) = e_i$ при $i \neq 1$, $h(e_i) = e_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$.

Тогда для морфизмов f, g, h

$$\begin{aligned}
&(\forall f' \in \mathrm{Mor}(X,X)\, \neg(f \circ f' = f' \circ f = 1_X)) \wedge\\
&\quad \wedge (\forall g' \in \mathrm{Mor}(X,X)\, \neg(g \circ g' = g' \circ g = 1_X)) \wedge\\
&\quad \wedge (h = f \oplus g) \wedge \exists h' \in \mathrm{Mor}(X,X)\, (h \circ h' = h' \circ h = 1_X),
\end{aligned}$$

где $h' = h$. Отсюда следует, что в модуле X формула $\mathrm{Local}(X)$ не выполнена. □

Кольцо R называется *кольцом главных идеалов*, если оно не содержит делителей нуля и каждый его идеал *главный* (порождается одним элементом).

Предложение 7 (см. [11, гл. XV, § 2]). *Пусть P — прообразующий модуль над кольцом главных идеалов. Тогда модуль P свободен.*

Доказательство. Так как P — прообразующий, то он является подмодулем модуля $R^{(n)}$. Пусть модуль $R^{(n)}$ имеет базис $e_1, \ldots, e_n$, и пусть P_r — пересечение модуля P с модулем $\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$. Тогда $P_1 = P \cap \langle e_1\rangle$ — подмодуль в $\langle e_1\rangle$, а потому имеет вид $\langle r_1 e_1\rangle$ для некоторого $r_1 \in R$. Следовательно, модуль P_1 либо нулевой, либо свободный размерности 1. Предположим по индукции, что модуль P_r — свободный размерности $\leqslant r$. Пусть M — множество всех таких элементов $m \in R$, что существует $x \in P$, который может быть записан в виде

$$x = b_1 e_1 + \ldots + b_r e_r + m e_{r+1},$$

где $b_i \in R$.

Очевидно, что M — идеал в R и, следовательно, главный идеал, порождённый некоторым $r_{r+1} \in R$. Если $r_{r+1} = 0$, то $P_{r+1} = P_r$, и индуктивный шаг сделан. Если $r_{r+1} \neq 0$, то пусть $w \in P_{r+1}$ таков, что его коэффициент при e_{r+1} равен r_{r+1}. Если $x \in P_{r+1}$, то его коэффициент при e_{r+1} делится на r_{r+1} и, значит, существует такой $c \in R$, что $x - cw \in P_r$. Следовательно, $P = P_r + \langle w \rangle$. С другой стороны, ясно, что $P_r \cap \langle w \rangle = 0$, и следовательно, эта сумма прямая. $\square$

Следствие 4. *Для произвольных областей главных идеалов R_1 и R_2 категории* $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ *и* $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ *элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда структуры $\langle \mathrm{Cn}, R_1 \rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, R_2 \rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

Доказательство. В категории $\mathrm{mod}\text{-}R$, где R — область главных идеалов, формула

$$\begin{aligned}\mathrm{Principal}(X) := \mathrm{Proobr}(X) \wedge \\ \wedge\, \forall f \in \mathrm{Mor}(X, X)\, \forall g \in \mathrm{Mor}(X, X)\, (f \circ g \neq 0 \wedge g \circ f \neq 0)\end{aligned}$$

истинна только для модулей, изоморфных модулю R_R, что легко следует из предложения 7. $\square$

Модуль M над кольцом R называется *артиновым*, если выполняются следующие эквивалентные условия:

1) всякое непустое множество подмодулей модуля M, упорядоченное по включению, имеет минимальный элемент;
2) всякая убывающая последовательность подмодулей модуля M стационарна.

Кольцо R называется *артиновым*, если модуль R_R артинов.

Модуль M называется *разложимым*, если существуют такие модули M_1 и M_2, что $M = M_1 \oplus M_2$. В противном случае модуль M называется *неразложимым*.

В [5, с. 139] доказана следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть M — конечно порождённый модуль над артиновым кольцом R.*

а) *Модуль M разлагается в прямую сумму конечного семейства $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ неразложимых ненулевых подмодулей.*
б) *Если модуль M является прямой суммой другого семейства $(M'_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ неразложимых ненулевых подмодулей, то $m = n$ и существуют перестановка π множества $\{1, \ldots, n\}$ и автоморфизм α модуля M, такие что $\alpha(M'_j) = M_{\pi(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Теперь введём следующие предложения языка структуры $\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring} \rangle$.

1. Для подмножества кольца M формула

$$\begin{aligned}\mathrm{Mod}(M) := \forall r \in \mathrm{ring}\, \forall m \in M\, \exists n \in M\, (rm = n) \wedge \\ \wedge\, \forall l, m \in M\, \exists n \in M\, (n = l + m)\end{aligned}$$

означает, что множество M является модулем над кольцом ring.

2. Для множеств M и N формула

$$\begin{aligned}(M \cong N) :=\ & \mathrm{Mod}(N) \wedge \mathrm{Mod}(M) \wedge \\ & \wedge \exists F(v_1, v_2)\, (\mathrm{Dom}(F) = M \wedge \mathrm{Rng}(F) = N \wedge \mathrm{Bij}(F) \wedge \\ & \wedge \forall r_1, r_2 \in \mathrm{ring}\, \forall m_1, m_2 \in M\, \forall n_1, n_2 \in N \\ & (\langle m_1, n_1\rangle \in F \wedge \langle m_2, n_2\rangle \in F \Rightarrow \langle r_1 m_1 + r_2 m_2, r_1 n_1 + r_2 n_2\rangle \in F))\end{aligned}$$

означает, что множества M и N являются ring-модулями и что они изоморфны.

3. Для множеств $L, M, N \subset \mathrm{ring}$ формула

$$\begin{aligned}(N = M \oplus L) :=\ & \mathrm{Mod}(M) \wedge \mathrm{Mod}(L) \wedge \mathrm{Mod}(N) \wedge \\ & \wedge \forall n \in N\, \exists m \in M\, \exists l \in L\, (n = m + l) \wedge \forall m \in M\, \forall l \in L\, (m = l \Rightarrow m = 0)\end{aligned}$$

означает, что модуль N является прямой суммой модулей M и L.

4. Для множества $M \subset \mathrm{ring}$ формула

$$\mathrm{Undir}(M) := \mathrm{Mod}(M) \wedge \forall L(c), N(c)\, \neg(M = L \oplus N)$$

означает, что модуль M неразложим.

5. Для множества $M \subset \mathrm{ring}$ формула

$$\begin{aligned}\mathrm{Dir}_N(M) :=\ & \mathrm{Mod}(M) \wedge \exists M_1(c), \ldots, \exists M_N(c)\, (\mathrm{Mod}(M_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Mod}(M_N)) \wedge \\ \wedge & \bigwedge_{i \neq j} \neg(M_i \cong M_j) \wedge M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_N \wedge (\mathrm{Undir}(M_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{Undir}(M_N))\end{aligned}$$

означает, что модуль M является прямой суммой неразложимых не изоморфных друг другу модулей $M_1, \ldots, M_N$.

Предположим, что мы имеем некоторое артиново кольцо R. Тогда модуль R_R артинов, а значит, является прямой суммой n неразложимых модулей. Пусть это модули

$$M_1^1, \ldots, M_1^{i_1}, M_2^1, \ldots, M_2^{i_2}, \ldots, M_k^1, \ldots, M_k^{i_k},$$

причём при $k \neq l$

$$M_k^i \ncong M_l^j,$$

а для любого k

$$M_k^i \cong M_k^j.$$

Рассмотрим модуль

$$M := M_1^1 \oplus \ldots \oplus M_k^1.$$

Так как модуль M является прямым слагаемым модуля R_R, то он проективен и конечно порождён. Так как модуль R_R является прямым слагаемым модуля $M^{(\max(i_1, \ldots, i_k))}$, то M — образующий модуль. Значит, модуль M является прообразующим, а кольцо $\mathrm{End}_R\, M$ подобно кольцу R.

Таким образом, для некоторого $N \in \omega$ формула

$$\psi(P) := \mathrm{Proobr}(P) \wedge \mathrm{Undir}_N(P)$$

выделяет единственный, с точностью до изоморфизма, прообразующий модуль

$$M := M_1^1 \oplus \ldots \oplus M_k^1.$$

Итак, нами доказано такое следствие.

Следствие 5. *Для произвольных артиновых колец R_1 и R_2 категории $\mathrm{mod}\text{-}R_1$ и $\mathrm{mod}\text{-}R_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие что структуры $\langle \mathrm{Cn}, S_1\rangle$ и $\langle \mathrm{Cn}, S_2\rangle$ эквивалентны в логике L_2.*

§ 3. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов модулей бесконечных рангов

3.1. Кольца эндоморфизмов модулей и категории $C_{M(V)}$

Предположим, что мы имеем ассоциативное кольцо R с единицей, бесконечное кардинальное число $\varkappa$ и свободный модуль $V = V_\varkappa^R$ ранга $\varkappa$ над R.

На протяжении всего этого параграфа будем считать, что каждый идеал кольца R порождается не более чем $\varkappa$ элементами кольца. Это всегда так, когда $\varkappa \geqslant |R|$, когда R — кольцо главных идеалов или когда кольцо R полупросто.

Мы хотим интерпретировать в кольце $\mathrm{End}_R V$ категорию $C_{M(V)}$, состоящую из модуля V, всех его фактор-модулей и всех гомоморфизмов между ними, то есть указать алгоритм, переводящий каждую формулу φ языка теории категорий в формулу $\tilde{\varphi}$ языка теории колец таким образом, что формула φ истинна в $C_{M(V)}$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}$ истинна в $\mathrm{End}_R(V)$.

Сначала дадим неформальное описание перевода.

1. Каждому объекту X категории $C_{M(V)}$ мы поставим в соответствие элемент $\tilde{X}$ кольца $\mathrm{End}_R V$ следующим образом: если $X \in C_{M(V)}$, то $X = V/X'$ для некоторого X' — подмодуля модуля V. Каждый подмодуль модуля V можно задать порождающими его векторами, мощность множества которых не превышает $\varkappa$. Эти векторы можно записать как столбцы матрицы размера $\varkappa \times \varkappa$ (если их меньше, то можно дополнить матрицу нулевыми столбцами), т. е. как элемент кольца $\mathrm{End}_R V$. Обратно, если $\tilde{X} \in \mathrm{End}_R V$, то можно рассмотреть модуль, порождённый векторами — столбцами матрицы $\tilde{X}$, а затем фактор-модуль $X := V/\tilde{X}$.

2. Каждому морфизму f категории $C_{M(V)}$ мы сопоставим тройку $\langle X_f, Y_f, \tilde{f}\rangle$ элементов кольца $\mathrm{End}_R V$, такую что если $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, то $X_f = \tilde{X}$, $Y_f = \tilde{Y}$, а $\tilde{f}$ — это матрица, осуществляющая такой гомоморфизм $\tilde{f} \in \mathrm{Mor}(V, V)$, что $\tilde{f} \circ p_Y = p_X \circ f$, где p_X и p_Y — стандартные эпиморфизмы модуля V на модули X и Y соответственно.

Из этого соотношения видно, что матрица $\tilde{f}$ должна переводить векторы модуля X' в векторы модуля Y', т. е. матрица $\tilde{f}\tilde{X}$ должна порождать подмодуль модуля, порождённого матрицей $\tilde{Y}$, что означает, что существует такое $A \in \operatorname{End}_R V$, что $\tilde{f}\tilde{X} = \tilde{Y}A$.

Два эндоморфизма модуля V задают один и тот же морфизм из модуля X в модуль Y, если их разность задаёт нулевой морфизм из модуля X в модуль Y, то есть образ этого морфизма весь лежит в модуле Y'.

Таким образом, будем считать тройки $\langle X_f, Y_f, \tilde{f}_1\rangle$ и $\langle X_f, Y_f, \tilde{f}_2\rangle$ равными, если $\exists A\,(f_1 - f_2 = Y_f A)$.

Перейдём теперь к формальному описанию.

1. Подформула $\forall X \in \mathrm{Obj}$ перейдёт в подформулу $\forall \tilde{X}$ (аналогично для подформулы $\exists X \in \mathrm{Obj}$).

2. Подформула $\forall f \in \mathrm{Mor}$ перейдёт в подформулу

$$\forall X_f\, \forall Y_f\, \forall \tilde{f}\,(\exists A\,(\tilde{f} \circ X_f = Y_f \circ A) \Rightarrow \ldots)$$

(аналогично для подформулы $\exists f \in \mathrm{Mor}$).

3. Подформула $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ перейдёт в подформулу $X_f = \tilde{X} \wedge Y_f = \tilde{Y}$.

4. Подформула $h = f \circ g$ перейдёт в подформулу $\tilde{h} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$.

5. Подформула $f = 1_X$ перейдёт в подформулу $X_f = Y_f = \tilde{X} \wedge \tilde{f} = 1$.

Алгоритм построен. Совершенно аналогично предыдущим параграфам можно показать, что предложение φ истинно в категории $C_{M(V)}$ тогда и только тогда, когда предложение $\tilde{\varphi}$ истинно в кольце $\operatorname{End}_R V$.

Заметим теперь, что мы будем рассматривать не просто алгебраическую структуру $C_{M(V)}$, язык которой является языком теории категорий, а структуру $C_{M(V)}$ с выделенным модулем V, т. е. с возможностью в формулах писать подформулу $X = V$ для $X \in \mathrm{Obj}$. Такой подформуле, очевидно, мы поставим в соответствие подформулу $\tilde{X} = 0$.

Таким образом, если кольца $\operatorname{End}_R V$ и $\operatorname{End}_S W$ элементарно эквивалентны, то и категории $C_{M(V)}$ и $C_{M(W)}$ элементарно эквивалентны.

Докажем теперь обратную импликацию. Для этого мы должны внутри категории $C_{M(V)}$ с выделенным объектом V интерпретировать кольцо $\operatorname{End}_R V$.

Действительно, в категории $C_{M(V)}$ фиксируем некоторый $V^2 \in \mathrm{Obj}$, такой что $V^2 \cong V \oplus V$ (например, $V \cong V \oplus V$), и морфизмы $i_1, i_2 \in \mathrm{Mor}(V, V^2)$ и $p_1, p_2 \in \mathrm{Mor}(V^2, V)$, такие что

$$\begin{gathered} p_1 \circ i_1 = p_2 \circ i_2 = 1_V \wedge p_1 \circ i_2 = p_2 \circ i_1 = 0 \wedge \\ \wedge\, \forall i \in \mathrm{Mor}(V, V^2)\,(i \neq 0_{V,V^2} \Rightarrow p_1 \circ i \neq 0_V \vee p_2 \circ i \neq 0_V). \end{gathered}$$

Очевидно, что в этом случае морфизмы i_1 и i_2 являются такими вложениями модуля V в модуль $V \oplus V$, что их образы не пересекаются, а в сумме составляют всё $V \oplus V$.

Теперь переведём подформулы $\forall f$ и $\exists f$ в подформулы $\forall f \in \mathrm{Mor}(V, V)$ и $\exists f \in \mathrm{Mor}(V, V)$, а подформулы $h = f \cdot g$ и $h = f + g$ — в подформулы $h = f \circ g$ и $h = f \oplus g$ (см. п. 2.5).

Следовательно, мы получаем, что из $C_{M(V_1)} \equiv C_{M(V_2)}$ следует $\mathrm{End}_{R_1}(V_1) \equiv \equiv \mathrm{End}_{R_2}(V_2)$.

Таким образом, мы свели вопрос элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ к вопросу элементарной эквивалентности категорий $C_{M(V_1)}$ и $C_{M(V_2)}$ с выделенными объектами V_1 и V_2 соответственно.

3.2. Элементарная эквивалентность в категориях вида $C_{M(V)}$

Итак, наша ситуация очень сильно напоминает ситуацию § 2. Мы имеем категорию $C_{M(V)}$, являющуюся подкатегорией в mod-R, замкнутой относительно взятия фактор-модулей, а также прямых произведений мощности, не большей некоторой бесконечной мощности $\varkappa$. Такая категория во многом напоминает категорию mod-R, но является малой и ограничена данной мощностью $\varkappa$. Кроме того, в этой категории модуль V является выделенным.

Перенесем на неё все возможные результаты из § 2.

Формула $\mathrm{Simp}(M)$ также выделяет в категории $C_{M(V)}$ простые модули, так как эта категория замкнута относительно взятия фактор-модулей. Формула $\mathrm{Sum}^{\omega}(X, M)$ также выделит модуль $X \simeq M^{(\omega)}$, так как кардинал $\varkappa$ по условию не меньше чем ω. Очевидно, что формула $\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}(X, M)$ будет истинна для конечных прямых сумм модуля M, а формула $\mathrm{Sum}(X, M)$ — для всех прямых сумм модуля M, принадлежащих категории $C_{M(V)}$. Точно так же переносятся на случай категории C_V все формулы из п. 2.2, в том числе и формула $\mathrm{Proobr}(P)$, выделяющая в этой категории все прообразующие модули.

После выделения некоторого прообразующего модуля P совершенно аналогично п. 2.3 строится аналог кольца $\mathrm{End}_R P$, так как в п. 2.3 используется только замкнутость категории mod-R относительно конечных прямых сумм.

Так как результаты п. 2.4 также легко переносятся на наш случай, то верна следующая теорема.

Теорема 1. *Категории $C_{M(V_1^R)}$ и $C_{M(V_2^S)}$, где R — конечное кольцо, элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $R \cong \mathrm{End}_S P$ для некоторого прообразующего модуля P категории $C_{M(V_2^S)}$.*

Легко также видеть, что мы, следуя пп. 2.5 и 2.6, можем найти формулу $\varphi(f)$, истинную для некоторого независимого множества отображений $f\colon V \to P$ мощности $\varkappa$, таких что для каждого такого f существует такое отображение $g\colon P \to V$, что $f \circ g = 1_P$, $g \circ f$ — проектор из V в V.

Действительно, для наших новых объектов можно получить аналогичные результаты. Для этого наряду с полным языком $L_2(\langle \mathrm{Cn}, \mathrm{ring}\rangle)$ рассмотрим его часть, которая может быть описана следующим образом.

Как говорилось выше (см. § 1), *теория* данной модели $\mathcal{U}$ в языке $\mathcal{L}$ — это множество всех предложений языка $\mathcal{L}$, истинных в модели $\mathcal{U}$. Ясно, что две модели $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ одного языка $\mathcal{L}$ эквивалентны в языке $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда их теории в этом языке совпадают.

Теория структуры $\langle \mathrm{Cn}, R\rangle$ в языке L_2 обозначается через $\mathrm{Th}_2(\langle \mathrm{Cn}, R\rangle)$.

Мы можем также рассмотреть структуру $\langle \varkappa, R\rangle$, состоящую из множества мощности $\varkappa$ и кольца R с кольцевыми операциями $+$ и $\circ$.

Через $\mathrm{Th}_2^{\varkappa}(\langle \varkappa, R\rangle)$ обозначим часть теории $\mathrm{Th}_2(\langle \varkappa, R\rangle)$, ограниченную кардинальным числом $\varkappa$, т. е. такие предложения $\varphi \in \mathrm{Th}_2(\langle \varkappa, R\rangle)$, что кванторы $\forall$ и $\exists$ стоят только с теми предикатными символами $P(c_1, \ldots, c_k; v_1, \ldots, v_n)$, для которых множество

$$\{\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k, r_1, \ldots, r_n\rangle \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \varkappa \wedge r_1, \ldots, r_n \in R \wedge P(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, r_1, \ldots, r_n)\}$$

имеет мощность, не большую чем $\varkappa$.

Тогда мы можем написать следующий аналог теоремы 7.

Теорема 2. *Пусть даны два свободных модуля V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, и существует предложение $\psi \in \mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}$. Пусть, кроме того, категории $C_{M(V_1)}$ и $C_{M(V_2)}$ элементарно эквивалентны. Тогда существует такое кольцо S, подобное кольцу R_2, что теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S\rangle)$ совпадают.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы во многом похоже на доказательство теоремы 5 из § 2, но мы приведём его достаточно подробно, чтобы показать отличия.

Предположим сначала, что мы каким-то образом фиксировали прообразующий модуль P в категории $C_{M(V)}$, где $V = V_T^{\varkappa}$, $\varkappa$ — бесконечное кардинальное число, T — кольцо (очевидно, что все прообразующие модули категории mod-T содержатся в категории $C_{M(V)}$). Тогда мы имеем формулы, выделяющие простой модуль M, соответствующий модулю P, модули $M^{(\alpha)}$ для всех $\alpha \in \mathrm{Cn} \cap \varkappa + 1$, модули $M^{(n)}$ для всех $\alpha \in \omega$, модули $M^{(\alpha)}$ для бесконечных $\alpha \in \mathrm{Cn} \cap \varkappa + 1$, почти свободные модули V^{α} рангов $\alpha \in \mathrm{Cn} \cap \varkappa + 1$, $\alpha \in \omega$, $\alpha \in \mathrm{Cn} \cap \varkappa + 1 \setminus \omega$, а также выделенный свободный модуль V, являющийся почти свободным над модулем P.

Для модуля $M^{(\varkappa)}$ (V) выделим (в соответствии с п. 2.5) его порождающее множество проекторов $\mathrm{Gen}_{\bar{g}^*}(M^{(\varkappa)}, M)$ (или $\mathrm{Gen}_{\bar{g}^*}(V, P)$).

Кроме того (см. п. 2.3), для любых $f, g \in \mathrm{Mor}(P, P)$ мы считаем известной их сумму $f \oplus g \in \mathrm{Mor}(P, P)$ и произведение $f \otimes g \in \mathrm{Mor}(P, P)$.

Рассмотрим некоторое произвольное предложение φ языка $L_2(\langle \varkappa, \mathrm{ring}\rangle)$. В это предложение могут входить следующие подформулы.

1. $\forall(\exists) r \in \mathrm{ring}$.
2. $\forall(\exists) \alpha \in \varkappa$.
3. $r_1 = r_2 + r_3$.
4. $r_1 = r_2 \cdot r_2$.
5. $r_1 = r_2$.
6. $\alpha_1 = \alpha_2$.
7. $\forall(\exists) P(c_1, \ldots, c_k; v_1, \ldots, v_n)$.
8. $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_k; r_1, \ldots, r_n)$.

Переведём это предложение в предложение $\tilde{\varphi}_P$ (зависящее от фиксированного изначально модуля P) языка первого порядка теории категорий по следующему алгоритму.

1. Подформула $\forall(\exists) r \in \mathrm{ring}$ переводится в подформулу $\forall(\exists) f_r \in \mathrm{Mor}(P,P)$, т. е. каждому элементу кольца ring ставится в соответствие элемент кольца $\mathrm{End}_T P$.
2. Подформула $\forall(\exists)\alpha \in \varkappa$ переводится в подформулу $\forall(\exists)F^\alpha \in \mathrm{Gen}_{\bar{g}^*}(M^{(\varkappa)}, M)$.
3. Подформула $r_1 = r_2 + r_3$ переводится в подформулу $f_{r_1} = f_{r_2} \oplus f_{r_3}$.
4. Подформула $r_1 = r_2 \cdot r_3$ переводится в подформулу $f_{r_1} = f_{r_2} \otimes f_{r_3}$.
5. Подформула $r_1 = r_2$ переводится в подформулу $f_{r_1} = f_{r_2}$.
6. Подформула $\alpha_1 = \alpha_2$ переводится в подформулу $f^{\alpha_1} = f_{\alpha_2}$.
7. Подформула $\forall(\exists)P(c_1,\dots,c_k;v_1,\dots,v_n)$ переводится в подформулу
$$\forall(\exists)f_P^{c_1} \in \mathrm{Sets}(M^{(\varkappa)}, M^{(\varkappa)}) \dots \forall(\exists)f_P^{c_k} \in \mathrm{Sets}(M^{(\varkappa)}, M^{(\varkappa)})\\ \forall(\exists)f_P^{v_1} \in \mathrm{Ring}(V) \dots \forall(\exists)f_P^{v_n} \in \mathrm{Ring}(V).$$
8. Подформула $P(\alpha_1,\dots,\alpha_k;r_1,\dots,r_n)$ переводится в подформулу
$$\exists f \in \mathrm{Gen}(M^{(\varkappa)}, M)(f^{\alpha_1} \circ f_P^{c_1} \circ \bar{f} = 1 \wedge \dots \wedge f^{\alpha_k} \circ f_P^{c_k} \circ \bar{f} = 1 \wedge\\ \wedge f' \circ f_P^{v_1} \circ \bar{f}' = f_{r_1} \wedge \dots \wedge f' \circ f_P^{v_n} \circ \bar{f}' = f_{r_n}).$$

Аналогично тому, как это делалось в теореме 5 в § 2, можно показать, что предложение φ истинно в теории $\langle \varkappa, \mathrm{End}_T P\rangle$ тогда и только тогда, когда предложение $\tilde{\varphi}_P$ истинно в модели $C_{M(V_T^\varkappa)}$, откуда аналогично теореме 5 из § 2 выводится утверждение теоремы. □

Теорема 3. *Если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — бесконечные кардинальные числа, V_1 и V_2 — свободные модули рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно и теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, R_2\rangle)$ совпадают, то категории $C_{M(V_1)}$ и $C_{M(V_2)}$ элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы 6 из § 2 только тем, что модуль V должен быть выделенным объектом категории $C_{M(V)}$. Но так как по условию теоремы мы рассматриваем свободные модули (именно здесь важно то, что модули свободны, а не почти свободны), то выделенным объектом категории будет считаться нулевая матрица. □

Прямым следствием из теорем 2 и 3 является теорема 4.

Теорема 4. *Пусть V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно и существует предложение $\psi \in \mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}$. Тогда категории $C_{M(V_1)}$ и $C_{M(V_2)}$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует такое кольцо S, подобное кольцу R_2, что теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S\rangle)$ совпадают.*

3.3. Основная теорема

Из результатов предыдущих двух пунктов легко получаем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно и существует предложение $\psi \in \mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}$. Тогда кольца $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует кольцо S, подобное кольцу R_2, такое что теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S\rangle)$ совпадают.*

Следствие 1. *Для пространств V_1 и V_2 бесконечных размерностей $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над произвольными телами (областями главных идеалов) F_1 и F_2 кольца $\mathrm{End}_{F_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{F_2} V_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, F_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, F_2\rangle)$ совпадают.*

Следствие 2. *Предположим, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — бесконечные кардинальные числа, R_1 и R_2 — коммутативные (локальные) кольца и каждый максимальный идеал кольца R_1 порождён не более чем $\varkappa_1$ элементами кольца. Тогда для свободных модулей V_1 и V_2 рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно кольца $\mathrm{End}_{R_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{R_2} V_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, R_2\rangle)$ совпадают.*

Следствие 3. *Предположим, что $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — бесконечные кардинальные числа, R_1 и R_2 — артиновы кольца и каждый максимальный идеал кольца R_1 порождён не более чем $\varkappa_1$ элементами кольца. Тогда для свободных модулей V_1 и V_2 рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно кольца $\mathrm{End}_{R_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{R_2} V_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие что теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2\rangle)$ совпадают.*

Следствие 4. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над полупростыми кольцами R_1 и R_2 соответственно кольца $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие что теории $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1\rangle)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2\rangle)$ совпадают.*

§ 4. Проективная геометрия модуля V

4.1. Язык проективной геометрии и основные понятия, выразимые в этом языке

Предположим, что мы имеем некоторый свободный модуль V бесконечного ранга $\varkappa$ над кольцом R. *Проективной геометрией* (*решёткой подмодулей*)

$P(V)$ модуля V называется алгебраическая структура, состоящая из всех подмодулей модуля V, с отношением $\subset$ (пишем $M \subset N$, если модуль M является подмодулем модуля N).

На протяжении всего этого параграфа мы будем полагать, что всякий подмодуль модуля V порождён не более чем $\varkappa$ элементами модуля V (это так, если $\varkappa \geqslant |R|$, или если кольцо R полупросто, или если кольцо R является областью главных идеалов).

Пусть $M_1, M_2, M_3 \in P(V)$. Будем писать, что $M_1 = V$, если $\forall M\,(M \subset M_1)$. Будем писать, что $M_1 = \varnothing$, если $\forall M\,(M_1 \subset M)$. Формула $M_1 = M_2 \cap M_3$ будет обозначением для формулы

$$M_1 \subset M_2 \wedge M_1 \subset M_3 \wedge \forall M_4\,(M_4 \subset M_2 \wedge M_4 \subset M_3 \Rightarrow M_4 \subset M_1),$$

формула $M_1 = M_2 + M_3$ — обозначением для формулы

$$M_2 \subset M_1 \wedge M_3 \subset M_1 \wedge \forall M_4\,(M_2 \subset M_4 \wedge M_3 \subset M_4 \Rightarrow M_1 \subset M_4),$$

а формула $M_1 = M_2 \oplus M_3$ — обозначением для формулы

$$M_1 = M_2 + M_3 \wedge M_2 \cap M_3 = \varnothing.$$

Легко увидеть, что при $M_1 = M_2 \cap M_3$ модуль M_1 является пересечением модулей M_2 и M_3, при $M_1 = M_2 + M_3$ — суммой модулей M_2 и M_3, при $M_1 = M_2 \oplus M_3$ — прямой суммой модулей M_2 и M_3.

Рассмотрим теперь для данных модулей P_1 и P_2 формулу

$$P_1 \cap P_2 = \varnothing \wedge \exists P\,(P \subset P_1 \oplus P_2 \wedge P \neq \varnothing \wedge P \cap P_1 = \varnothing \wedge \\ \wedge P \cap P_2 = \varnothing \wedge P \oplus P_1 = P_1 \oplus P_2 \wedge P \oplus P_2 = P_1 \oplus P_2).$$

Пусть модули P_1 и P_2 не пересекаются и существует модуль P, удовлетворяющий всем условиям, перечисленным в формуле. Так как $P \subset P_1 \oplus P_2$, то любое $x \in P$ имеет вид $x = y + z$, где $y \in P_1$, $z \in P_2$, причём элементы z и y однозначно определяются вектором x. Рассмотрим соответствие $F \subset P_1 \times P_2$, определяемое формулой

$$\forall y \in P_1\, \forall z \in P_2\, \langle y, z\rangle \in F \Leftrightarrow \exists x \in P\,(x = y + z).$$

Покажем, что F является изоморфизмом между модулями P_1 и P_2.

1. Если $y_1, y_2 \in P_1$, $z \in P_2$, $\langle y_1, z\rangle \in F$ и $\langle y_2, z\rangle \in F$, то $\exists x_1, x_2 \in P$ $(x_1 = y_1 + z \wedge x_2 = y_2 + z)$, т. е. $x := x_1 - x_2 = y_1 - y_2 \in P$. Так как при этом $y_1 - y_2 \in P$, то $y_1 - y_2 \in P \cap P_1 \Rightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$.

2. Аналогично из $y \in P_1$, $z_1, z_2 \in P_2$, $\langle y, z_1\rangle \in F$ и $\langle y, z_2\rangle \in F$ следует $z_1 = z_2$.

3. Рассмотрим произвольный вектор $y \in P_1$. Так как $y \in P_1 \oplus P_2$, то $y \in P \oplus P_2$, т. е. $\exists x \in P\, \exists z \in P_2\,(y = x + z)$, т. е. $x = y - z$, откуда следует, что $\langle y_1 - z\rangle \in F$, т. е. $\mathrm{Dom}(F) = P_1$.

4. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Rng}(F) = P_2$.

5. Мы показали, что F — биекция между модулями P_1 и P_2. Осталось показать, что F является гомоморфизмом, т. е. что из $\langle y_1, z_1\rangle, \langle y_2, z_2\rangle \in F$ следует $\langle \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2\rangle \in F$. Действительно, из $\langle y_1, z_1\rangle, \langle y_2, z_2\rangle \in F$ следует

$$y_1 + z_1, y_2 + z_2 \in P \Rightarrow \alpha_1(y_1 + z_1) + \alpha_2(y_2 + z_2) \in P \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) \in P \Rightarrow \langle \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 \rangle \in F.$$

Таким образом, модули P_1 и P_2, удовлетворяющие нашей формуле, не пересекаются и изоморфны. Наоборот, если два модуля P_1 и P_2 не перемекаются и изоморфны, то они удовлетворяют нашей формуле, поэтому будем обозначать её через $P_1 \cong_d P_2$.

Предположим, что модули P_1 и P_2 «не слишком велики», т. е. существуют такие модули P_1' и P_2', что $P_1 \cap P_1' = P_2 \cap P_2' = \varnothing$ и модуль P_1' содержит подмодуль, изоморфный P_1, а модуль P_2' содержит подмодуль, изоморфный P_2. Тогда формула

$$\exists P\, \exists P' \,(P \cong_d P_1 \wedge P' \cong_d P_2 \wedge P \cong_d P')$$

истинна в том и только том случае, когда модули P_1 и P_2 изоморфны.

Мы знаем, что модуль P проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен прямому слагаемому свободного модуля. Поэтому формула

$$\mathrm{Proj}(P) := \exists Q\, (V = P \oplus Q)$$

выделяет в пространстве $P(V)$ проективные модули.

Рассмотрим некоторый проективный модуль P. Его подмодуль M мы будем называть *максимальным* подмодулем модуля P ($M = \max(P)$), если выполнена формула

$$\forall P' \,(M \subset P' \wedge P' \subset P \Rightarrow P' = M \vee P' = P).$$

Для каждого конечно порождённого модуля P найдётся максимальный подмодуль M.

Пусть фиксирован проективный модуль P и его максимальный подмодуль M.

Формула $X \subset_\circ Y$ будет обозначать, что модуль X является прямым слагаемым модуля Y.

Рассмотрим пару модулей $\langle X, Y\rangle$, удовлетворяющую следующей формуле:

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{Sum}}_{P,M}(X,Y) := Y \subset X \wedge \\ &\quad\wedge \exists Q\, \exists Q' \,(Q \oplus P = X \wedge Q \cong X \wedge Q' \oplus M = Y \wedge Q' \cong Y \wedge \\ &\quad\wedge \forall N \subset_\circ X \,(N \cong P \Rightarrow N \cap Y \cong M \wedge (N \cap Y) \subset_\circ Y)) \wedge \\ &\quad\wedge \forall Z \,(Z \subset X \wedge \forall N \,(N \subset_\circ Z \Rightarrow N \ncong P) \Rightarrow Z \subset Y). \end{aligned}$$

Посмотрим, какие модули X и Y удовлетворяют формуле $\overline{\mathrm{Sum}}_{P,M}$.

Из того, что $\exists Q\, (Q \oplus P = X \wedge Q \cong X)$, следует, что модуль P выделяется прямым слагаемым в модуле X, причём дополнение Q изоморфно X. Значит, существует некоторое бесконечное кардинальное число α, а также модули X_1 и X_2, такие что $X_1 \oplus X_2 = X$, $X_1 \cong P^{(\alpha)}$, в модуле X_2 модуль P не выделяется прямым слагаемым. Часть формулы

$$\forall Z \,(Z \subset X \wedge (\forall N \,(N \subset_\circ Z \Rightarrow N \ncong P) \Rightarrow Z \subset Y)$$

показывает, что если Z — некоторый подмодуль модуля X, такой что модуль P не выделяется в нём прямым слагаемым, то Z является подмодулем также и в Y. Если положить $X_2 := Z$, то получим $X_2 \subset Y$. Возьмём произвольное $y \in Y$. Так как $y \in X$, то $y = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Так как $X_2 \subset Y$, то $x_1 \in Y$, т. е. $Y = (X_1 \cap Y) \oplus X_2$.

Теперь из оставшихся условий легко видно, что $X_1 \cap Y \cong M^{(\alpha)}$. Таким образом, если X и Y удовлетворяют формуле $\overline{\mathrm{Sum}}_{P,M}(X,Y)$, то существуют модуль Q и бесконечное кардинальное число α, такие что $X \cong Q \oplus P^{(\alpha)}$, $Y \cong Q \oplus M^{(\alpha)}$. Обратная импликация очевидна, если модуль X «не слишком большой».

Теперь рассмотрим формулу

$$\begin{aligned}\mathrm{Sum}^{\omega}_{P,M}(X,Y) := \forall Z\, \forall T\, (\overline{\mathrm{Sum}}_{P,M}(Z,T) \Rightarrow \exists X_1\, \exists X_2\, \exists Y'\\ X_1 \oplus X_2 = Z \wedge X_1 \cap T = Y' \wedge X_1 \cong X \wedge Y' \cong Y) \wedge \overline{\mathrm{Sum}}_{P,M}(X,Y).\end{aligned}$$

Из подформулы $\overline{\mathrm{Sum}}_{P,M}(X,Y)$ следует, что $X \cong Q \oplus P^{(\alpha)}$, $Y \cong Q \oplus M^{(\alpha)}$ для некоторого кардинального числа α. Из первой части формулы следует, что X выделяется прямым слагаемым в любом модуле вида $Q' \oplus P^{(\beta)}$ (β — бесконечное кардинальное число), а значит, и в модуле $P^{(\omega)}$. Отсюда следует, что $\alpha = \omega$, модуль Q проективен и счётно порождён.

Теперь рассмотрим формулу

$$\begin{aligned}\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_{P,M}(X,Y) := \neg\, \mathrm{Sum}^{\omega}_{P,M}(X,Y) \wedge\\ \wedge\, \exists X', Y'\, (\mathrm{Sum}^{\omega}(X',Y') \wedge \exists X''\, (X' = X \oplus X' \wedge Y = X \cap Y')).\end{aligned}$$

Любой модуль X, удовлетворяющий формуле $\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_{P,M}(X,Y)$, является прямым слагаемым в модуле $Q \oplus P^{(\omega)}$, т. е. имеет вид $Q' \oplus P^{(n)}$ (возможно, $n = 0$, но $n \in \omega$), причём Q' есть прямое слагаемое модуля Q. Пусть модули X_1, X_2, Y_1, Y_2 таковы, что $\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_{P,M}(X_1,Y_1)$ и $\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_{P,M}(X_2,Y_2)$. Если

$$\exists X_1', Y_1'\, (\mathrm{Sum}^{\mathrm{Fin}}_{P,M}(X_1',Y_1') \wedge X_1' \cong X_1 \wedge Y_1' \cong Y_1)$$

и при этом

$$\begin{aligned}&\forall P'\, \forall M'\, (P' \cong P \wedge M' \cong M \wedge M' = \max(P') \wedge\\ &\quad \wedge\, \exists P''(P' \oplus P'' = X_1' \wedge P' \cap Y_1' = M') \Rightarrow P' \subset_\circ X_1' \cap X_2') \wedge\\ &\quad \wedge\, \forall P'\, \forall M'\, (P' \cong P \wedge M' \cong M \wedge M' = \max(P') \wedge\\ &\quad \wedge\, \exists P''\, (P' \oplus P'' = X_2' \wedge P' \cap Y_2' = M') \Rightarrow P' \subset_\circ X_1' \cap X_2'),\end{aligned}$$

то будем называть пары (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) *эквивалентными* (обозначение: $(X_1,Y_1) \sim (X_2,Y_2)$). Очевидно, что если $(X_1,Y_1) \sim (X_2,Y_2)$, $X_1 \cong Q_1 \oplus P^{(n_1)}$, $X_2 \cong Q_2 \oplus P^{(n_2)}$, то $n_1 = n_2$. Будем обозначать классы эквивалентности таких пар через $\mathrm{Cl}^n_{P,M}$.

Для двух классов $\mathrm{Cl}^m_{P,M}$ и $\mathrm{Cl}^n_{P,M}$ будем писать $\mathrm{Cl}^m_{P,M} < \mathrm{Cl}^n_{P,M}$, если

$$\forall (X_1,Y_1) \in \mathrm{Cl}^m_{P,M}\ \exists (X_2,Y_2) \in \mathrm{Cl}^n_{P,M}\ \exists X_3\, (X_1 \cong X_3 \wedge X_1 \subset_\circ X_2).$$

Очевидно, что соотношение $\mathrm{Cl}^m_{P,M} < \mathrm{Cl}^n_{P,M}$ равносильно соотношению $m < n$.

Аналогично модулям вида $Q \oplus P^{(n)}$ можно той же формулой ввести классы эквивалентности $\mathrm{Cl}_{P,M}^{(\alpha)}$ и для бесконечных кардинальных чисел α, а также отношение $<$ между ними.

Модуль P мы назовём *образующим*, если

$$\exists\, \mathrm{Cl}^{\alpha}_{P,M}\ \forall V_1\, \forall V_2\, \forall X\, \forall Y\ (V_1 \oplus V_2 = V \wedge (X,Y) \in \mathrm{Cl}^{\alpha}_{P,M} \Rightarrow V_1 \subset_\circ X \vee V_2 \subset_\circ X).$$

Эту формулу будем обозначать через $\mathrm{Gener}(P)$.

Формула

$$\mathrm{Pret}(P) := \mathrm{Proj}(P) \wedge \mathrm{Gener}(P) \wedge \exists M \subset P\, (M = \max(P))$$

выполняется для всех проективных образующих модулей, имеющих максимальные подмодули, в том числе она обязана выполняться для всех прообразующих модулей.

Формула

$$\mathrm{FDSum}_{P,M}(X) := \exists\, \mathrm{Cl}^{(n)}_{P,M}\ \exists Y (X,Y) \in \mathrm{Cl}^{(n)}_{P,M} \wedge \\ \wedge\, \forall X', Y'\, (X',Y') \in \mathrm{Cl}^{(n)}_{P,M} \Rightarrow (X,Y) \subset_\circ (X',Y')$$

выделяет для данного n модуль $Q \oplus P^{(n)}$ с подмодулем $Q \oplus M^{(n)}$, такой что для любой пары $(Q' \oplus P^{(n)}, Q' \oplus M^{(n)})$ модуль $Q \oplus P^{(n)}$ выделяется в $Q' \oplus P^{(n)}$ прямым слагаемым и $Q' \oplus M^{(n)} \subset Q \oplus P^{(n)}$. Рассмотрим в качестве модулей $Q' \oplus P^{(n)}$ и $Q' \oplus M^{(n)}$ просто пару $(P^{(n)}, M^{(n)})$. Тогда $P^{(n)} \cong P^{(n)} \oplus Q$ и $M^{(n)} \cap P^{(n)} \oplus Q = M^{(n)} \oplus Q$.

Эта формула выделяет все модули вида $P^{(n)}$, $n \in \omega$, и ещё какие-то *конечно порождённые* модули.

Любой проективный конечно порождённый модуль есть прямое слагаемое модуля $R^{(n)}$ для некоторого $n \in \omega$. Значит, если P — конечно порождённый проективный модуль, то для любого образующего модуля S $P \oplus Q \cong S^{(m)}$ для некоторого $m \in \omega$ и некоторого модуля Q. Если же модуль P не является конечно порождённым, но проективен и является образующим, то он не может быть вложен в $R^{(n)}$ ни для какого $n \in \omega$.

Отсюда следует, что формула

$$\mathrm{Proobr}(P) := \mathrm{Pret}(P) \wedge \forall S\, (\mathrm{Pret}(S) \Rightarrow \exists M\, \exists X\, (\mathrm{FDSum}_{S,M}(X) \wedge P \subset_\circ X))$$

выполняется на прообразующих модулях и только на них.

Заметим, что, выделив с помощью формулы $\mathrm{Proobr}()$ некоторый фиксированный прообразующий модуль P, мы имеем также множество почти свободных модулей рангов $\leqslant \varkappa$ над кольцом R.

4.2. Кольцо $\mathrm{End}_R\, P$

В этом пункте мы будем считать, что имеем фиксированный прообразующий модуль P.

Пусть P_1, P_2 и P_3 — три попарно непересекающихся модуля, каждый из которых изоморфен модулю P.

Модуль $U_{1,2}$ определим формулой

$$U_{1,2} \subset P_1 \oplus P_2 \wedge P_1 \subset U_{1,2} \oplus V_2 \wedge V_2 \subset U_{1,2} \oplus V_1.$$

Как мы уже знаем, в этом случае модуль $U_{1,2}$ состоит из сумм $e + f(e)$, где $e \in P_1$, $f\colon P_1 \to P_2$ — изоморфизм между модулями P_1 и P_2. Ясно, что можно считать, что изоморфизм f совпадает с изоморфизмом, отождествляющим модули P_1 и P_2, т. е. модуль $U_{1,2}$ состоит из векторов $f_1(e) + f_2(e)$, где $f_1\colon P \to P_1$, $f_2\colon P \to P_2$ — изоморфизмы, отождествляющие модули P, P_1 и P_2.

Аналогично введём модуль $U_{2,3}$, состоящий из векторов вида $f_2(e) + f_3(e)$.

Модуль $U_{1,2,3}$ введём формулой

$$U_{1,2,3} := (P_1 \oplus U_{2,3}) \cap (P_3 \oplus U_{1,2}).$$

Тогда если $v \in U_{1,2,3}$, то $v \in P_1 \oplus U_{2,3}$, т. е. $v = f_1(e) + f_2(e') + f_3(e')$, а из $v \in P_3 \oplus U_{1,2}$ следует $v = f_1(g) + f_2(g) + f_3(g')$. Значит, $f_1(e) + f_2(e') + f_3(e') = f_1(g) + f_2(g) + f_3(g')$, откуда следует, что $v = f_1(e) + f_2(e) + f_3(e)$.

Модуль $U_{1,3}$ вводится формулой $(P_1 \oplus P_3) \cap (U_{1,2,3} \oplus P_2)$.

Таким образом, мы имеем модули, порождённые элементами $f_1(e) = e_1$, $f_2(e) = e_2$, $f_3(e) = e_3$, $f_1(e) + f_2(e) = e_1 + e_2$, $f_2(e) + f_3(e) = e_1 + e_3$, $f_1(e) + f_2(e) + f_3(e) = e_1 + e_2 + e_3$ при $e \in P$.

Введём теперь множество модулей V_q^3 формулой

$$V_q^3 \subset U_{1,2} \oplus P_3 \wedge U_{1,2} \subset V_q^3 \oplus P_3.$$

Так как $V_q^3 \subset U_{1,2} \oplus P_3$, то из $v \in V_q$ следует $v = f_1(e) + f_2(e) + f_3(e')$. Из того, что $U_{1,2} \subset V_q \oplus P_3$, следует, что для любого $e \in P$ существует $v = f_1(e) + f_2(e) + f_3(e')$.

Для каждого элемента $e \in P$ существует и единствен элемент $e' \in P$, такой что $f_1(e) + f_2(e) + f_3(e') \in V_q^3$.

Легко увидеть, что соответствие, сопоставляющее элементу e элемент e', является гомоморфизмом модуля P в себя, который мы будем обозначать через q. Для каждого модуля V_q^3 через $W_q^{1,3}$ обозначим модуль, определённый формулой

$$W_q^{1,3} \subset (P_1 \oplus P_3) \cap (V_q^3 \oplus P_2) \wedge P_1 \subset W_q^{1,3} \oplus P_3.$$

Если $w \in W_q^{1,3}$, то из $w \in P_1 \oplus P_3$ следует, что $w = f_1(e) + f_3(e')$, а из $w \in V_q^3 \oplus P_2$ следует, что $w = f_1(e'') + f_2(e'') + f_3(qe'') + f_2(e''')$. Отсюда видно, что $w = f_1(e) + f_3(qe)$.

Совершенно аналогично вводится модуль $W_q^{2,3}$, состоящий из векторов

$$w = f_2(e) + f_3(qe).$$

Для данных V_q^3 и V_r^3 рассмотрим модуль V, определённый формулой

$$V := (U_{1,2} \oplus P_3) \cap (W_q^{1,3} \oplus W_r^{2,3}).$$

Если $v \in V$, то, с одной стороны, $v = f_1(e) + f_2(e) + f_3(e')$, с другой стороны, $v = f_1(e'') + f_3(qe'') + f_2(e''') + f_3(re''')$. Мы видим, что $E'' = e''' = e$, т. е.

$$v = f_1(e) + f_2(e) + f_3(qe) + f_3(re) = f_1(e) + f_2(e) + f_3((q + r)e),$$

откуда следует, что

$$V = V^3_{q+r}.$$

Таким образом, на множестве модулей $\{V_q \mid q \in \mathrm{End}_R P\}$ мы имеем операцию сложения $\langle V_q, V_r\rangle \mapsto V_{q+r}$. Очевидно, что в этом случае мы также имеем операцию взятия противоположного элемента

$$V_q \mapsto V_{-q}.$$

Через $X^{2,3}_q$ обозначим модуль

$$(W^{2,3}_q \oplus P_2) \cap U_{2,3}.$$

Он состоит из векторов вида

$$f_2(qe) + f_3(qe), \quad e \in P.$$

Теперь рассмотрим модуль W, задаваемый формулой

$$W \subset P_2 \oplus P_3 \wedge P_3 \subset P_2 \oplus W \wedge X^{2,3}_q = (((W \oplus P_3) \cap P_2) \oplus ((W^{2,3}_q \oplus P_2) \cap P_3)) \cap U_{2,3}.$$

Легко заметить, что такой модуль состоит из векторов вида

$$f_3(e) + f_2(qe).$$

Будем обозначать его через $W^{3,2}_q$.

Модуль

$$(W^{3,2}_q \oplus P_1) \cap (U_{1,3} \oplus P_2)$$

будем обозначать через V^2_q. Он состоит из векторов вида

$$f_1(e) + f_2(qe) + f_3(e).$$

Модуль $V^2_q \oplus P_3 \cap P_1 \oplus P_2$ обозначается через $W^{1,2}_q$ и состоит из векторов вида $f_1(e) + f_2(qe)$.

Если нам дан модуль $W^{1,2}_q$, то формулой

$$(W^{1,2}_{q'} \oplus W^{1,3}_q) \cap U_{2,3} = X^{2,3}_q$$

мы получим $q' = q$, т. е., имея модуль $W^{1,2}_q$, мы автоматически имеем модуль $W^{1,3}_q$, а значит, и V^3_q.

Теперь, написав формулу

$$W^{1,2}_s = (W^{3,2}_q \oplus W^{1,3}_{-r}) \cap (P_1 \oplus P_2),$$

мы получим для $w \in W^{1,2}_s$

$$w = f_1(e) + f_3(-re) + f_3(e') + f_2(qe) = f_1(e'') + f_2(e'').$$

Отсюда следует, что $f_3(-re) + f_3(e') = 0$, т. е. $e' = re$, откуда $w = f_1(e) + f_2(qre)$, т. е. $s = qr$.

Таким образом, по модулям V^3_r и V^3_q мы умеем строить модуль V^3_{qr}, т. е. на множестве $\{V^3_q \mid q \in \mathrm{End}_R P\}$ мы ввели операции сложения и умножения так, что оно стало изоморфно кольцу $\mathrm{End}_R P$.

4.3. Построение кольца $\mathrm{End}_R V$

Для данного прообразующего модуля P выделим в модуле V два непересекающихся подмодуля V_1 и V_2 из одного класса эквивалентности $\mathrm{Cl}^{\alpha}_{P,M}$, максимального среди всех других $\mathrm{Cl}^{\beta}_{P,M}$. Очевидно, что в этом случае $\alpha = \varkappa$. Пусть, кроме того, $V_1 \oplus V_2 \oplus P = V$.

Пусть $V_1 = Q_1 \oplus \sum\limits_{i\in\varkappa} P_i$, $V_2 = Q_2 \oplus \sum\limits_{i\in\varkappa} P'_i$, где для любого $i \in \varkappa$

$$P_i \cong P'_i \cong P.$$

Зафиксируем изоморфизмы

$$f_i\colon P \to P_i, \quad f'_i\colon P \to P'_i.$$

Пусть формула $\mathrm{End}(X)$ утверждает о модуле X следующее.

1. $\forall T\,(T \subset_\circ V_1 \wedge T \cong P \Rightarrow \exists T'\,(T' \subset_\circ V_2 \wedge T' \cong P \wedge \exists V^3_q(P,T,T') \subset_\circ X))$, т. е. для каждого прямого слагаемого P_i модуля V_1 существует прямое слагаемое P' (линейная комбинация каких-то P'_i) модуля V_2, такое что для некоторого $q \in \mathrm{End}_R P$ модуль $\{e + f_i(e) + f'(qe) \mid e \in P\}$ является прямым слагаемым модуля P.

2. $X \cap V_2 = 0$, откуда следует, что для каждого прямого слагаемого P_i модуля V_1 существует лишь единственное прямое слагаемое P' модуля V_2, такое что модуль $\{e + f_i(e) + f'(qe) \mid e \in P\}$ является прямым слагаемым модуля X для некоторого $q \in \mathrm{End}_R P$.

3. $X \cap P = 0$. Такой модуль следующим образом представляет эндоморфизм модуля $P^{(\varkappa)}$ над кольцом $\mathrm{End}_R P$.

Для любого вектора $v \in P^{(\varkappa)}$ существует P' — прямое слагаемое модуля $P^{(\varkappa)}$, изоморфное P и такое, что $v \in P'$. По условию 1 в модуле V_2 существует прямое слагаемое P'', а также имеется эндоморфизм $q \in \mathrm{End}_R P$, такие что $V^3_q(P,P',P'') \subset X$. Тогда в модуле V^3_q содержится единственный элемент

$$(f')^{-1}(v) + v + f''(q(f')^{-1}(v)).$$

Будем считать $X(v) := f''(q(f')^{-1}(v))$. Покажем, что полученное отображение корректно определено и линейно.

Действительно, однозначность разложения следует из условия 2. Проверим линейность.

Если $v_1, v_2 \in P_i$ для некоторого $i \in \varkappa$, то для любых $q_1, q_2 \in R$ условие $X(q_1v_1 + q_2v_2) = q_1X(v_1) + q_2X(v_2$ следует из линейности соответствующего эндоморфизма q:

$$V^3_q(P,P_i,P') \subset X \Rightarrow \begin{cases} f_i^{-1}(v_1) + v_1 + f'(qf_i^{-1}(v_1)) \in X, \\ f_i^{-1}(v_2) + v_2 + f'(qf_i^{-1}(v_2)) \in X \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1f_i^{-1}(v_1) + q_1v_1 + q_1f'(qf_i^{-1}(v_1)) \in X, \\ q_2f_i^{-1}(v_2) + q_2v_2 + q_2f'(qf_i^{-1}(v_2)) \in X \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_1 f_i^{-1}(v_1)+q_2 f_i^{-1}(v_2)+q_1 v_1+q_2 v_2+q_1 f'(q f_i^{-1}(v_1))+q_2 f'(q f_i^{-1}(v_2)) \in X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_i^{-1}(q_1 v_1 + q_2 v_2) + (q_1 v_1 + q_2 v_2) + f'(q_1 q(f_i^{-1}(v_1)) + q_1 q(f_i^{-1}(v_2))) \in X,$$

т. е.

$$X(q_1 v_1 + q_2 v_2) = q_1 X(v_1) + q_2 X(v_2).$$

Два модуля X_1 и X_2, удовлетворяющие формуле $\mathrm{End}(X)$, будем считать *эквивалентными*, если

$$\forall T \subset_\circ V_1\, \forall S \subset_\circ V_2\, (V_q^3(P,T,S) \subset X_1 \Leftrightarrow V_q^3(P,T,S) \subset X_2).$$

Видно, что в каждом классе эквивалентности существует модуль вида

$$\sum_{i \in \varkappa} V_{q_i}^3(P, P_i, T_i),$$

где T_i — тот единственный модуль для P_i, при котором

$$V_{q_i}^3(P, P_i, T_i) \subset X.$$

Рассмотрим некоторый модуль X_0, удовлетворяющий формуле $\mathrm{End}(X)$ и такой, что $X_0 \subset P \oplus V_1$. Очевидно, что модулю X_0 соответствует нулевой эндоморфизм модуля V_1. Мы будем теперь рассматривать только модули X, удовлетворяющие формуле

$$\mathrm{End}^{X_0}(X) := \mathrm{End}(X) \wedge X \subset X_0 \oplus V_2.$$

Теперь определим сумму двух модулей X_1 и X_2, удовлетворяющих формуле $\mathrm{End}^{X_0}(X)$.

$$(X = X_1 + X_2) := \forall T \subset_\circ V_1\, \forall V_q^3(P,T,S_1) \subset_\circ X_1\, \forall V_r^3(P,T,S_r) \subset_\circ X_2$$
$$(X_0 \oplus V_2) \cap (W_q^{1,3}(V_q^3(P,T,S_q)) \oplus W_r^{2,3}(V_r(P,T,S_r))) \subset_\circ X.$$

Легко увидеть (ср. с п. 4.2), что модуль X, удовлетворяющий формуле $X = X_1 + X_2$, является суммой эндоморфизмов X_1 и X_2.

Теперь введём некоторый модуль X_e, удовлетворяющий формуле $\mathrm{End}_{X_0}(X)$ и такой, что

$$X_e \cap X_0 = 0 \wedge \forall S \subset_\circ V_2\, (S \cong P \Rightarrow \exists T \subset_\circ V_1$$
$$(\exists V_q(P,T,S) \subset X_e \wedge V_q^3(P,T,S) \text{ — изоморфизм между } T \text{ и } S)).$$

Очевидно, что такой модуль X_e осуществляет изоморфизм между модулями V_1 и V_2. Таким образом, X_e станет единицей кольца $\mathrm{End}_R V$.

Теперь рассмотрим три модуля X_1, X_2 и X, удовлетворяющие формуле $\mathrm{End}^{X_0}(X)$. Нам нужно определить формулу $X = X_1 \circ X_2$. Опишем эту формулу словами, чтобы проще было понять её суть.

Пусть $V_q^3(P,T,S_q) \subset_\circ X_1$ для некоторых $T \subset_\circ V_1$, $S_q \subset_\circ V_2$. Как мы уже говорили, для каждой суммы $v + f_T(v) + f_{S_q}(qv)$ мы считаем, что X_1 переводит вектор $f_T(v) \in T \subset V_1$ в вектор $f_{S_q}(qv) \in S_q \subset V_2$.

Для данного $S_q \subset_\circ V_2$ существует и единственно T_q, такое что $V_e(P, T_q, S_q) \subset \subset {}_\circ X_e$. Для произвольного вектора $v \in P$, если $v + f_{T_q}(v) + f_{S_q}(v) \in V_e(P, T_q, S_q)$, то векторы $f_{T_q}(v)$ и $f_{S_q}(v)$ совпадают при отождествлении V_1 и V_2, т. е. X_1 переводит $f_T(v)$ в $f_{T_q}(qv)$.

Далее, для данного $T_q \subset_\circ V_1$ существует и единственно $S_{rq} \subset_\circ V_2$, такое что

$$V_r(P, T_q, S_{rq}) \subset_\circ X_2.$$

Если

$$v + f_{T_q}(v) + f_{S_{rq}}(rv) \in V_r(P, T_q, S_{rq}),$$

то отображение X_2 переводит вектор $f_{T_q}(v) \in T_q \subset V_1$ в вектор $f_{S_{rq}}(rv)$, т. е. композиция $X_2 X_1$ переводит вектор $f_T(v)$ в вектор $f_{S_{rq}}(zqv)$, т. е. отображение X тогда и только тогда является композицией отображений X_1 и X_2, когда для всякого $T \subset_\circ V_1$

$$V_3(P, T, S_{rq}) \subset_\circ X,$$

при этом $V_s(P, T, S_{rq})$ состоит из векторов вида

$$v + f_T(v) + f_{S_{rq}}(rqv).$$

Можно легко убедиться, что при этом выполнена формула

$$(V_q(P, T, S_q) \oplus V_e(P, T_q, S_q)) \cap X_0 = (V_r(P, T_q, S_{rq}) \oplus V_s(P, T, S_q)) \cap X_0,$$

откуда получим формулу, эквивалентную

$$X = X_2 \circ X_1.$$

Таким образом, мы в решётке подмодулей модуля V интерпретировали кольцо, изоморфное кольцу $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_R P} V$, откуда, как и выше, получаем, что если две решётки подмодулей $P(R_1, V_1)$ и $P(R_2, V_2)$ элементарно эквивалентны, то и кольца $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_{R_1} P_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{\mathrm{End}_{R_2} P_2}(V_2)$ для некоторых прообразующих модулей P_1 и P_2 элементарно эквивалентны, а значит, кольца $\mathrm{End}_{R_1} V_1$ и $\mathrm{End}_{R_2} V_1$ элементарно эквивалентны. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов над произвольными кольцами R_1 и R_2 соответственно из элементарной эквивалентности решёток подмодулей $P(V_1)$ и $P(V_2)$ следует элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов $\mathrm{End}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{End}_{R_2}(V_2)$.*

4.4. Обратная теорема

Теперь нам требуется доказать обратную теорему.

Теорема 2. *Предположим, что V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно и каждый подмодуль модуля V_1 (V_2) имеет не более $\varkappa_1$ ($\varkappa_2$) порождающих элементов (например, это так, если $\varkappa_1 \geqslant |R_1|$ и $\varkappa_2 \geqslant |R_2|$ или если R_1, R_2 — полупростые кольца или кольца главных идеалов). Тогда из $\mathrm{End}_{R_1}(V_1) \equiv \mathrm{End}_{R_2}(V_2)$ следует $P(V_1) \equiv P(V_2)$.*

Доказательство. Предположим, что мы имеем ассоциативное кольцо R с единицей, бесконечное кардинальное число $\varkappa$ и свободный модуль $V = V_\varkappa^R$ ранга $\varkappa$ над R. Кроме того, пусть каждый идеал кольца R порождается не более чем $\varkappa$ элементами кольца.

Мы хотим интерпретировать в кольце $\mathrm{End}_R V$ решётку $P(V)$, состоящую из всех подмодулей модуля V, с отношением $\subset$. Как и раньше, под словом «интерпретировать» мы понимаем, что нужно указать алгоритм, переводящий каждую формулу φ языка проективной геометрии в формулу $\tilde{\varphi}$ языка теории колец таким образом, что формула φ истинна в $P(V)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}$ истинна в $\mathrm{End}_R(V)$.

Сначала дадим неформальное описание перевода.

1. Мы знаем, что каждый объект геометрии $P(V)$ — это подмодуль модуля V, а он порождён не более чем $\varkappa$ векторами из модуля V. Каждый из этих векторов является линейной комбинацией некоторого конечного числа элементов базиса модуля V, т. е. каждый такой вектор можно записать в виде столбца матрицы, у которого лишь конечное число элементов ненулевое. Записав в матрицу все порождающие векторы, мы получим матрицу размера $\varkappa \times \varkappa$, то есть элемент из $\mathrm{End}_R V$. В случае, когда подмодуль порождается менее чем $\varkappa$ векторами, дополним матрицу необходимым количеством нулевых столбцов. Две такие матрицы X_1 и X_2 описывают один и тот же подмодуль модуля V, если

$$\exists A\, \exists B\, (X_1 = X_2 A \wedge X_2 = X_1 B).$$

В этом случае элементы X_1 и X_2 будем считать эквивалентными.

Таким образом, каждому подмодулю модуля V мы сопоставим соответствующий ему класс эквивалентности элементов кольца $\mathrm{End}_R V$.

2. Очевидно, что модуль Y_1, порождённый матрицей X_1, является подмодулем модуля Y_2, порождённого матрицей X_2, тогда и только тогда, когда

$$\exists A\, (X_1 = X_2 A).$$

Эту формулу будем обозначать через $X_1 \subset X_2$.

Из всего этого очевидно следует утверждение теоремы. □

§ 5. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов модулей бесконечных рангов

5.1. Изоморфизм групп $\mathrm{Aut}_R(V)$

В этом пункте мы будем основываться на работе [6] И. З. Голубчика и А. В. Михалёва.

Рассмотрим некоторое кольцо R и свободный модуль V $(= V_\varkappa^R)$ бесконечного ранга $\varkappa$ над этим кольцом.

Пусть $I_\varkappa$ — множество мощности $\varkappa$.

Как и раньше, через $\mathrm{End}_R(V)$ мы будем обозначать кольцо эндоморфизмов модуля V, а через $\mathrm{Aut}_R(V)$ — группу автоморфизмов модуля V.

Пусть, кроме того, $E_R(V)$ — группа, порождённая автоморфизмами $E_{\gamma\beta}$ вида

$$v_\gamma \mapsto n_\gamma + rv_\beta, \quad \gamma, \beta \in I_\varkappa, \quad \gamma \neq \beta, \quad r \in R,$$

и

$$v_\alpha \mapsto v_\alpha, \quad \alpha \in I_\varkappa, \quad \alpha \neq \gamma,$$

где $\{v_\alpha\}$ — базис модуля V; $D_R(V)$ — диагональная группа (автоморфизмы вида $v_\gamma \mapsto r_\gamma v_\gamma\ \forall \gamma \in I_\varkappa$); $DE_R(V)$ — подгруппа, порождённая $E_R(V)$ и $D_R(V)$.

Подмножество $\{e_{ij}\}_{i,j\in I_\varkappa}$ кольца $\mathrm{End}_R(V)$ называется *системой матричных единиц*, если

1) $e_{ij} \circ e_{st} = \delta_{js} e_{it}$ (δ_{js} — дельта Кронекера);
2) для любого $a \in \mathrm{End}_R(V)$ и любого $k \in I$ существуют такие $i_1, \ldots, i_n \in I$, что $(e_{i_1 i_1} + \ldots + e_{i_n i_n})a = a(e_{i_1 i_1} + \ldots + e_{i_n i_n} = a$.

Пусть I — идеал кольца R; $E_R(V, I)$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}_R(V)$, порождённая автоморфизмами $1 + e_{ij} \circ \lambda$, где $\lambda \in I$, $i \neq j \in I_\varkappa$, $\mathrm{Aut}_R(V, I)$ — ядро канонического гомоморфизма $\varphi_I \colon \mathrm{Aut}_R(V) \to \mathrm{Aut}_{R/I}(V)$, $C_R(V, I)$ — прообраз центра при гомоморфизме φ_I. Пусть, кроме того, $[A, B] \equiv A^{-1} \circ B^{-1} \circ A \circ B$.

Лемма 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с $1/2$, N и M — нормальные подгруппы группы $\mathrm{Aut}_R(V)$, такие что $N \cap M = \{1\}$, $NM = \mathrm{Aut}_R(V)$. Тогда существуют идеалы I, J кольца R, для которых*

$$R = I \oplus J, \quad E_R(V, I) \subseteq N \subseteq C_R(V, I), \quad E_R(V, J) \subseteq M \subseteq C_R(V, J).$$

Доказательство. По условию

$$(1 - 2e_{ii}) = a_i \circ b_i, \quad a_i \in N, \quad b_i \in M, \tag{1}$$

для всех $i \in I_\varkappa$. Так как $N \cap M = \{1\}$ и $[1 - 2e_{11}, 1 - 2e_{ii}] = 1$, то $[a_1, 1 - 2e_{ii}] = 1$. Поскольку $1/2 \in R$, то элемент a_1 диагонален в том смысле, что $e_{ii} \circ a_1 \circ e_{jj} = 0$ для всех $i \neq j \in I_\varkappa$. То же самое верно и для b_1. Пусть для всех $i \in I_\varkappa$

$$e_{ii} \circ a_1 \circ e_{ii} = \lambda_i, \quad e_{ii} \circ b_1 \circ e_{ii} = \mu_i. \tag{2}$$

Из (2) следует, что

$$a_1 \circ (1 - e_{12}) \circ a_1^{-1} \circ (1 + e_{12}) = 1 + (1 - \lambda_1 \lambda_2^{-1}) \circ e_{12} \in N.$$

Так как $[1 + \lambda e_{12}, 1 + re_{2k}] = 1 + \lambda re_{1k}$ для всех $\lambda, r \in R$ и $k \in I_\varkappa$, то из нормальности группы N следует, что $E_R(V, I) \subseteq N$, где $I = R(\lambda_1 - \lambda_2)R$. Аналогично, $E_R(V, J) \subseteq M$, где $J = R(\mu_1 - \mu_2)R$. Из (1) и (2) вытекает, что

$$\lambda_1 \mu_1 = -1, \quad \lambda_2 \mu_2 = 1, \quad \mu_1 = -\lambda_1^{-1}, \quad \mu_2 = \lambda_2^{-1}.$$

По определению идеалов I и J

$$1 - \lambda_1 \lambda_2^{-1} \in I, \quad 1 - \mu_1 \mu_2^{-1} = 1 + \lambda_1^{-1} \lambda_2 \in J$$

и

$$\lambda_1(1+\lambda_1^{-1}\lambda_2)\lambda_2^{-1} = 1+\lambda_1\lambda_2^{-1} \in J.$$

Следовательно, $1 = 1/2(1-\lambda_1\lambda_2^{-1}+1+\lambda_1\lambda_2^{-1}) \in I+J$ и $R = I+J$. Кроме того, $E_R(V, I\cap J) \subseteq N\cap M = \{1\}$ и, значит, $I\cap J = \{0\}$. Тем самым $I\oplus J = R$.

Если $a\in N$, то $a = a_1\circ a_2$, где $a_1\in \mathrm{Aut}_R(V,I)$, $a_2\in \mathrm{Aut}_R(V,J)$. При этом $[a, E_R(V,J)] \subseteq N\cap M = \{1\}$. Следовательно, a_2 — центральный идемпотент группы $\mathrm{Aut}_R(V,J)$ и $N\subseteq C_R(V,I)$. Аналогично, $M\subseteq C_R(V,J)$. □

Следующая лемма является основной в доказательстве.

Лемма 2. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $1/2$, $I_1 = I_\varkappa$ и $I_2 = I_{\varkappa'}$ — бесконечные множества мощностей $\varkappa$ и $\varkappa'$ соответственно, $V = V_{I_1}^R$ и $V' = V_{I_2}^S$ — свободные модули над кольцами R и S и множествами I_1 и I_2 соответственно, $\{e_{ij}\}_{i,j\in I_\varkappa}$ — система матричных единиц кольца $\mathrm{End}_R(V)$, $\varphi\colon \mathrm{Aut}_R(V)\to \mathrm{Aut}_S(V')$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральный идемпотент $q\in \mathrm{End}_S(V')$ и системы матричных единиц $\{f_{ij}\}_{i,j\in I_2}$ и $\{h_{ij}\}_{i,j\in I_2}$ колец $q\circ \mathrm{End}_s(V')$ и $(1-q)\circ \mathrm{End}_S(V')$ соответственно, такие что*

$$\varphi(1-2e_{ii}) = (q-2f_{ii}) - (1-q-2h_{ii}), \quad i\in I_1.$$

Доказательство. Рассмотрим $b_i \equiv \varphi(1-2e_{ii})$. Мы знаем, что $b_i^2 = 1$, откуда следует, что для $f_i \equiv 1/2(1-b_i) \in \mathrm{End}_S(V')$ выполнено $f_i^2 = f_i$. Определим таким образом f_i для всех $i\in I_1$. Получим

$$\varphi(1-2e_{ii}) = 1-2f_i. \tag{3}$$

Так как $1-2e_{11}$ и $1-2e_{22}$ коммутируют, то коммутируют b_1 и b_2, а следовательно, f_1 и f_2. Значит, $(1-2f_1f_2)^2 = 1$, т. е. $1-2f_1f_2\in \mathrm{Aut}_S(V')$. Положим

$$1-2e = \varphi^{-1}(1-2f_1f_2). \tag{4}$$

Тогда $e\in \mathrm{End}_R(V)$, $e^2 = e$ и из (3) вытекает, что если $[a, 1-2e_{ii}] = 1$ для $i = 1, 2$, то

$$[a, 1-2e] = 1; \tag{5}$$

если $b(1-2e_{11})b^{-1} = 1-2e_{22}$ и $b(1-2e_{22})b^{-1} = 1-2e_{11}$, то

$$[b, 1-2e] = 1. \tag{6}$$

Применяя (5) и (6), получим

$$(1-2e) = \varepsilon_1(e_{11}+e_{22}+\varepsilon_2(1-e_{11}-e_{22})), \tag{7}$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in R$, $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$ и элементы ε_1, ε_2 перестановочны со всеми обратимыми элементами кольца R. Тогда

$$\varepsilon_1 = 1-2e_1, \quad \varepsilon_2 = 1-2e_2 \tag{8}$$

и e_1, e_2 — центральные идемпотенты кольца R.

Положим

$$N\equiv \varphi(\mathrm{Aut}_R(V, e_2R)), \quad M\equiv \varphi(\mathrm{Aut}_R(V, (1-e_2)R)). \tag{9}$$

По лемме 1

$$E_S(V', I) \subseteq N \subseteq C_S(V', I), \quad E_S(V', J) \subseteq M \subseteq C_S(V', J), \tag{10}$$

тогда $\mathrm{End}(I^{(\varkappa')}) = (1-q)\,\mathrm{End}(V')$, $\mathrm{End}(J^{(\varkappa')} = q\,\mathrm{End}(V')$ и q — некоторый центральный идемпотент кольца $\mathrm{End}(V')$. Из (7) и (8) следует

$$\begin{aligned} &e_{11} + e_{22} + (1-2e_2)(1-e_{11}-e_{22}) \in \mathrm{Aut}_R(V, e_2R),\\ &-e_{11} - e_{22} + (1-2e_2)(1-e_{11}-e_{22}) =\\ &\quad = -(e_{11}+e_{22}+(1-2(1-e_2))(1-e_{11}-e_{22})) \in (-1)\,\mathrm{Aut}_R(V, (1-e_2)R) \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$1-2e \in C_R(V, e_2R), \quad (1-2e_{11})(1-2e_{22})(1-2e) \in C_R(V, (1-e_2)R). \tag{11}$$

Из (3), (4), (9), (10), (11) следует, что $1 - 2f_1f_2 = a + b$, где $a \in \mathrm{End}(I^{(I_2)})$, $b \in \mathrm{End}(J^{(I_2)}$, и поэтому b — центральный элемент кольца $\mathrm{End}(J^{(I_2)})$, $a_1 \equiv$ $\equiv a(1-2f_1)(1-2f_2)$ — центральный элемент кольца $\mathrm{End}(I^{(I_2)})$. Кроме того, $(1-2f_1f_2)^2 = 1$ и, таким образом, $b^2 = q$, $a_1^2 = a^2 = 1-q$, $a_1 = 1-q-2q_2$, $b = q - 2q_1$, где q, q_1, q_2 — центральные идемпотенты в кольцах $\mathrm{End}_S(V')$, $q\,\mathrm{End}(V')$ и $(1-q)\,\mathrm{End}(V')$ соответственно. Тем самым

$$(1-2f_1f_2) = (q-2q_1) + (1-q-2q_2)(1-2f_1)(1-2f_2). \tag{12}$$

Покажем, что $q_1 = 0$ и $q_2 = 1-q$. Действительно, умножив равенство (12) на q_1, получим, что $q_1(1-2f_1f_2) = -q_1$, т. е. $q_1f_1f_2 = q_1$.

Умножим последнее равенство на f_1 и убедимся, что $q_1f_1f_2 = q_1f_1$ и $q_1f_1 = q_1$. Аналогично, $q_1f_2 = q_1$.

Итак, $q_1(1-2f_1)(1-2f_2) = q_1$ и в силу (3)

$$q_1\varphi(1-2e_{11}-2e_{22}) = q_1. \tag{13}$$

Так как

$$\left[\begin{pmatrix}1 & -1/2r\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & r\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

то нормальный делитель группы $\mathrm{Aut}_R(V)$, содержащий матрицу $1-2e_{11}-2e_{22}$, содержит подгруппу $E_R(V)$.

Таким образом, из (13) следует, что

$$\varphi(E_R(V)) \subset \mathrm{Aut}_S(V', (1-q_1)S). \tag{14}$$

По условию (12) q_1 — центральный идемпотент кольца $\mathrm{End}_S(V')$. По лемме 1

$$E_R(V, I_1) \subseteq \varphi^{-1}(\mathrm{Aut}_S(V', q_1S)) \subseteq C_R(V, I_1).$$

С другой стороны, из (14) вытекает, что

$$\varphi^{-1}(\mathrm{Aut}_S(V', q_1S)) \cap E_R(V) = \{1\}.$$

Следовательно, $I_1 = \{0\}$, а группа $\varphi^{-1}(\mathrm{Aut}_S(V', q_1S))$ лежит в центре группы $\mathrm{Aut}_R(V)$, то есть

$$q_1 = 0. \tag{15}$$

Умножив равенство (12) на $q_3 \equiv 1-q-q_2$, получим

$$(1-2f_1f_2)q_3 = (1-2f_1)(1-2f_2)q_3$$

и

$$2f_1f_2q_3 = 2f_1q_3 + 2f_2q_3 - 4f_1f_2q_3. \tag{16}$$

Умножив равенство (16) на $1/2(1-f_1)$, убедимся, что $(1-f_1)f_2q_3 = 0$ и $f_2q_3 = f_1f_2q_3$. Аналогично, $(1-f_2)f_2q_3 = 0$ и $f_1q_3 = f_1f_2q_3 = f_2q_3$. Следовательно,

$$2f_1f_2q_3 = 2f_1q_3 + 2f_2q_3 - 4f_1f_2q_3 = 4f_1q_3 - 4f_1q_3 = 0.$$

Итак,

$$f_1q_3 = f_2q_3 = f_1f_2q_3 = 0, \quad q_3(1-2f_1)(1-2f_2) = q_3$$

и

$$q_3\varphi(1-2e_{11}-2e_{22}) = q_3. \tag{17}$$

Так же, как из равенства (13) мы получили $q_1 = 0$, из равенства (17) найдём теперь

$$0 = q_3 = 1-q-q_2. \tag{18}$$

Из (12), (15), (18) следует, что

$$\begin{gathered} 1-2f_1f_2 = q-(1-q)(1-2f_1)(1-2f_2), \\ f_1f_2q = 0, \quad (1-f_1)(1-f_2)(1-q) = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Так как группа $\mathrm{Aut}_R(V)$ транзитивно действует на множестве

$$\{1-2e_{ii}, 1-2e_{jj}\}_{i\neq j;\ i,j\in I_1},$$

из условий (3), (19) получаем

$$f_if_jq = 0, \quad (1-f_i)(1-f_j)(1-q) = 0 \tag{20}$$

для всех $i,j \in I_1$, где q — центральный идемпотент кольца $\mathrm{End}_S(V')$, появившийся в условии (10).

Согласно условию (20) $\{f_iq = 1/2(1-\varphi(1-2e_{ii}))q\}$ — ортогональная система сопряжённых между собой идемпотентов кольца $q\,\mathrm{End}_S(V')$, и следовательно, существуют элементы $f_{ij} \in q\,\mathrm{End}_S(V')$, такие что $f_{ii} = qf_i$, $f_{ij}f_{ks} = \delta_{jk}f_{is}$.

Покажем теперь, что если $a \in \mathrm{End}_S(V')$ и $m \in I$, то существуют такие $i_1,\ldots,i_n \in I_2$, что

$$f_{i_1i_1} + \ldots + f_{i_ni_n}(ae_{mm}) = (ae_{mm})f_{i_1i_1} + \ldots + f_{i_ni_n} = (ae_{mm})q.$$

Фиксируем некоторые $a \in \mathrm{End}_S(V')$ и $m \in I$. Очевидно, что в этом случае существует такое множество $i_1,\ldots,i_n \in I_1$, что a коммутирует с элементом $\varphi(-1_{i_1,\ldots,i_n}) \equiv \varphi\Big(\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(1-2e_{i_ki_k})\Big)$ и $\varphi(-1_{i_1,\ldots,i_n})\circ ae_{mm} = ae_{mm}\varphi(-1_{i_1,\ldots,i_n}) = -ae_{mm}$. Тогда $q\circ(-1_{i_1,\ldots,i_n}) = \prod\limits_{1\leqslant k\leqslant i}(q-2f_{i_ki_k}) = q-2f_{i_1i_1}-\ldots-2f_{i_ni_n}$, т. е. $(q-2f_{i_1i_1}-\ldots-2f_{i_ni_n})ae_{mm} = ae_{mm}(q-2f_{i_1i_1}-\ldots-2f_{i_ni_n}) = -ae_{mm}q$. Отсюда получаем $2ae_{mm}q = (2f_{i_1i_1}+\ldots+2f_{i_ni_n})ae_{mm} = ae_{mm}(2f_{i_1i_1}+\ldots+2f_{i_ni_n})$, то есть $ae_{mm}(f_{i_1i_1}+\ldots+f_{i_ni_n})=(f_{i_1i_1}+\ldots+f_{i_ni_n})ae_{mm}=ae_{mm}q$, что нам и требовалось.

Таким образом, мы показали, что $\{f_{ij}\}_{i,j\in I_2}$ — система матричных единиц кольца $q\operatorname{End}_S(V')$. Аналогичным образом получаем, что существует такая система матричных единиц $\{h_{ij}\}_{i,j\in I_2}$ кольца $(1-q)\operatorname{End}_S(V')$, что $h_{ii}=$ $=(1-f_i)(1-q)$. Следовательно,

$$\varphi(1-2e_{ii})=1-2f_{ii}=$$
$$=(1-2f_{ii})q-(1-2(1-f_{ii}))(1-q)=(q-2f_{ii})-(1-q-2h_{ii}).\quad\square$$

Теорема 1. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $1/2$, $V=V_\varkappa^R$ и $V'=V_{\varkappa'}^S$ — свободно порождённые модули над R и S бесконечных рангов $\varkappa$ и $\varkappa'$ соответственно, $\varphi\colon \operatorname{Aut}_R(V)\to\operatorname{Aut}_S(V')$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты e и f колец $\operatorname{End}_R(V)$ и $\operatorname{End}_S(V')$ соответственно, кольцевой изоморфизм $\theta_1\colon e\operatorname{End}_R(V)\to f\operatorname{End}_S(V')$, кольцевой антиизоморфизм $\theta_2\colon(1-e)\operatorname{End}_R(V)\to(1-f)\operatorname{End}_S(V')$ и групповой гомоморфизм $\chi\colon DE_R(V)\to C(\operatorname{Aut}_S(V'))$, такие что $\varphi(A)=\chi(A)(\theta_1(A)+\theta_2(A^{-1}))$ для всех $A\in E_R(V)$.*

Доказательство. По лемме 2

$$\varphi(1-2e_{ii})=(q-2f_{ii})-(1-q-2h_{ii}),\tag{21}$$

где q — центральный идемпотент кольца $\operatorname{End}_S(V')$, e_{ij}, f_{ij}, h_{ij} — матричные единицы колец $\operatorname{End}_R(V)$, $q\operatorname{End}_S(V')$ и $(1-q)\operatorname{End}_S(V')$ соответственно.

Положим

$$f\equiv f_{11}+f_{22}+h_{11}+h_{22}.$$

1. Пусть $\{e'_{ij}\}_{i,j\in I_1}$ — некоторая система матричных единиц кольца $\operatorname{End}_R(V)$, причём $\forall i\neq 1,2\,(e'_{ii}=e_{ii})$. Тогда

$$\varphi(1-2e'_{ii})=q-(-q)+x,\quad\text{где}\quad x\in f\operatorname{End}_S(V')f.\tag{22}$$

По условию $[1-2e'_{kk},1-2e'_{ii}]=1$ при $k=1,2$, $i\neq 1,2$. По (21), (22)

$$\varphi(1-2e'_{kk})=1-2e_k+c_k,\tag{23}$$

где $k=1,2$, $e_k\in f\operatorname{End}_S(V')f$, $c_k\in(1-f)\operatorname{End}_S(V')(1-f)$. Заметим, что

$$(1-2e'_{11})(1-2e'_{22})=(1-2e_{11})(1-2e_{22}).$$

В силу равенств (21), (22), (23)

$$(f-2e_1)(f-2e_2)=-f$$

и

$$e_1+e_2=f,\quad e_1e_2=0.\tag{24}$$

По лемме 2 существует центральный идемпотент q' кольца $\operatorname{End}_S(V')$, такой что

$$(q'-2f'_{ii})-(1-q'-2h'_{ii})=\varphi(1-2e'_{ii}).$$

Следовательно, для $k = 1, 2$ имеем

$$q'(1 - \varphi(1 - 2e'_{kk}))(1 - \varphi(1 - 2e'_{33})) = 0, \tag{25}$$

$$(1 - q')(1 + \varphi(1 - 2e'_{kk}))(1 + \varphi(1 - 2e'_{33})) = 0. \tag{26}$$

Умножив (25) слева на $1-f$ и справа на q и использовав соотношения (21), (23), получим, что $q'c_k \cdot 2f_{33} = 0$,

$$q'c_k f_{33} = 0. \tag{27}$$

Умножив равенство (26) слева на f и справа на fg и использовав (21), (23), получим

$$(1 - q')2(f - e_k)2fq = 0.$$

В силу равенства (24) $f = e_1 + e_2$. Итак, $(1 - q')e_k q = 0$ и $(1 - q')fq = 0$. Так как $f = f_{11} + f_{22} + h_{11} + h_{22}$, то $\mathrm{End}_S(V')f\,\mathrm{End}_S(V') = \mathrm{End}_S(V')$, и в силу равенства $(1 - q')fq = 0$

$$0 = (1 - q')q\,\mathrm{End}_S(V')f\,\mathrm{End}_S(V') = (1 - q')q\,\mathrm{End}_S(V').$$

Таким образом,

$$(1 - q')q = 0. \tag{28}$$

Из (27), (28) вытекает, что

$$c_k f_{33} = c_k q f_{33} = q(q'c_k f_{33}) + (1 - q')qc_k f_{33} = 0 + 0 = 0.$$

Аналогично, $c_k f_{ii} - 0$ для всех $i \in I_2$. В силу (23) $c_k \in (1 - f)\,\mathrm{End}_S(V')(1 - f)$ и $c_k q = c_k(1 - f)q$, т. е.

$$c_k q = 0. \tag{29}$$

Умножив равенство (25) слева на f и справа на $(1 - q)f$, получим

$$q' \cdot 2e_{kk} \cdot 2f(1 - q) = 0.$$

Таким образом,

$$q'(1 - q) = 0. \tag{30}$$

Из (29), (30) следует, что $q = q'$, а из (21), (23) и (26) — $(2 - 2e_k + c_k)2h_{33} = 0$.

Так как $e_k h_{33} = e_k f(1 - f)h_{33} = 0$, то $2h_{33} + c_k h_{33} = 0$. Аналогично, $2h_{ii} + c_k h_{ii} = 0$ для всех $i \in I_2$. Следовательно, $c_k(1-q) = c_k(1-f)(1-q)$, и для любых $i, j \in I_2$ при $i \neq 1, 2$ выполнено $c_k q \cdot h_{ij} = c_k h_{ij} = -2h_{ij}$, и для любых $j \in I_2$, $i = 1, 2$ выполнено $c_k q \cdot h_{ij} = 0$. Тем самым показано, что

$$c_k(1 - q) = -2(1 - q) + 2(1 - q)f. \tag{31}$$

Из (23), (29) и (31) следует $1 + c_k - q + (1 - q) \in f\,\mathrm{End}_S(V')f$ и $\varphi(1 - 2e'_{kk}) - q + (1 - q) \in f\,\mathrm{End}_S(V')f$ для $k = 1, 2$.

2. Покажем, что в (21) матричные единицы можно выбрать так, чтобы

$$\varphi(1-e_{ii}-e_{jj}+e_{ij}+e_{ji}) = (q-f_{ii}-f_{jj}+f_{ij}+f_{ji})-(1-q-h_{ii}-h_{jj}+h_{ij}+h_{ji}) \tag{32}$$

для всех $i, j \in I_1$, $i \neq j$.

Действительно, положим

$$e'_{11} = 1/2(e_{11} + e_{22} - e_{12} - e_{21}), \quad e'_{22} = 1/2(e_{11} + e_{22} + e_{12} + e_{21}),$$
$$e'_{ii} = e_{ii} \ \forall i \neq 1, 2.$$

Систему $\{e'_{ii}\}$ можно дополнить до системы матричных единиц $\{e'_{ij}\}_{i,j\in I_1}$ кольца $\mathrm{End}_R(V)$. В силу пункта 1

$$\varphi(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}) = \varphi(1 - 2e'_{11}) = q - (1 - q) + x,$$

где $x \in f\,\mathrm{End}_S(V')f$ и f из (22). Следовательно,

$$\varphi(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \ldots & \ldots & 1 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \vdots \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \vdots \\ \ldots & \ldots & 1 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где $a_{ij} \in f_{11}\,\mathrm{End}_S(V')f_{11}$, $b_{ij} \in h_{11}\,\mathrm{End}_S(V')h_{11}$. Так как

$$(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21})(1 - 2e_{11}) = (1 - 2e_{22})(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21}),$$

то из (21) и (33) получаем, что

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad b_{11} = b_{22} = 0. \quad (34)$$

Далее, $(1 - e_{11} - e_{22} + e_{12} + e_{21})^2 = 1$. В силу (33) и (34)

$$a_{21} = a_{12}^{-1}, \quad b_{21} = b_{12}^{-1}.$$

Аналогично,

$$\varphi(1 - e_{ii} + r_{i+1,i+1} + e_{i,i+1} + e_{i+1,i}) = (q - f_{ii} - f_{i+1,i+1} + a_i f_{ii+1} + a^{-1} f_{i+1,i}) =$$
$$= (1 - q - h_{i+1,i+1} - h_{ii} + b_i h_{i,i+1} + b^{-1} h_{i+1,i})$$

для всех $i \in I_1$.

Положим по трансфинитной индукции $c_1 \equiv 1$, $c_{i+1} \equiv c_i \cdot a_i^{-1}$, $c_i \equiv 1$ для предельного ординального числа i, аналогично, $d_1 \equiv 1$, $d_{i+1} \equiv d_i \cdot b_i^{-1}$, $d_i \equiv 1$ для предельного ординального числа i. Пусть, кроме того, $C \equiv \mathrm{diag}(c_1, \ldots, c_n, \ldots) + \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n, \ldots)$, $h'_{ij} \equiv C h_{ij} C^-1$. Тогда $h'_{ii} = h_{ii}$, $f'_{ii} = f_{ii}$, $f'_{i,i+1} = a_i f_{i,i+1}$, $f_{i+1,i} = a_i^{-1} f_{i+1,i}$, $h'_{i,i+1} = b_1 h_{i,i+1}$, $h'_{i+1,i} = b_i^{-1} h_{i+1,i}$. Тем самым

$$\varphi(1 - e_{ii} - e_{i+1,i+1} + e_{i,i+1} + e_{i+1,i}) =$$
$$= (q - f'_{ii} - f'_{i+1,i+1} + f'_{i,i+1} + f'_{i+1,i}) - (1 - q - h'_{ii} - h'_{i+1,i} + h'_{i,i+1} + h'_{i+1,i}).$$

Итак, пункт 2 доказан.

3. Положим $g_{ij} = f_{ij}+h_{ij}$, где f_{ij}, h_{ij} — матричные единицы, для которых выполнены условия (21), (32). Тогда $\{g_{ij}\}_{i,j\in\varkappa}$ — система матричных единиц кольца $\mathrm{End}_S(V')$. Произвольный элемент $C \in \mathrm{End}_S(V')$ будем записывать в виде

$$C \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} & \vdots \\ \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & \ddots \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad c_{ij} \in g_{ij}\,\mathrm{End}_S(V')g_{ij}.$$

4. Покажем, что для любого элемента $r \in R$

$$\varphi(1+re_{12}) = \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 & \vdots \\ c_r & d_r & 0 & \vdots \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots} & 1 & \vdots \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} & \ddots \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где $a_r, b_r, c_r, d-r \in g_{11}\,\mathrm{End}_S(V')g_{11}$, и что

$$\varphi(1-e_{ii}-e_{jj}+e_{ij}-e_{ji}) = 1-g_{ii}-g_{jj}+g_{ij}-g_{ji} \tag{36}$$

для $i \neq j$.

Действительно,

$$1-e_{ii}-e_{jj}+e_{ij}-e_{ji} = (1-e_{ii}-e_{jj}+e_{ij}+e_{ji})(1-2e_{ii}).$$

В силу (21) и (32)

$$\varphi(1-e_{ii}-e_{jj}+e_{ij}-e_{ji}) =$$
$$= (e-f_{ii}-f_{jj}+f_{ij}-f_{ji})+(1-e-h_{ii}-h_{jj}+h_{ij}-h_{ji}) = 1-g_{ii}-g_{jj}+g_{ij}-g_{ji}.$$

Положим

$$e''_{ij} = (1+1/2re_{12})e_{ij}(1+1/2re_{12})^{-1}.$$

Тогда в силу пункта 1

$$\varphi(1-2e''_{11}) = q-(1-q)+x,$$

и

$$x_1 \in f\,\mathrm{End}_S(V')f, \quad \text{где} \quad f = h_{11}+h_{22}+f_{11}+f_{22}.$$

Далее,

$$1-2e''_{11} = 1-2e_{11}+re_{12} = (1+re_{12})(1-2e_{11}),$$

и по (21)

$$\varphi(1+re_{12}) = \varphi((1-2e''_{11})(1-2e_{11})) = 1+x_2,$$

где $x_2 \in f\,\mathrm{End}_S(V')f$.

Но из $f\,\mathrm{End}_S(V')f=(g_{11}+g_{22})\,\mathrm{End}_S(V')(g_{11}+g_{22})$ следует

$$\varphi(1+re_{12})=\begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 & \vdots\\ c_r & d_r & 0 & \vdots\\ \ldots\ldots & & 1 & \vdots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \ddots\end{pmatrix}.$$

5. Используя равенства (35) и (36) и равенство

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&r&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&r\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

получим

$$\varphi(1+re_{13})=\begin{pmatrix} a_r & 0 & b_r & 0 & \vdots\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots\\ c_r & 0 & d_r & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \ddots\end{pmatrix}, \tag{37}$$

где a_r,b_r,c_r,d_r взяты из (35).

Из (35) и (37) получаем, что для всех $r,s\in R$

$$\begin{pmatrix}a_r&b_r&0\\c_r&d_r&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_s&0&b_s\\0&1&0\\c_s&0&d_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_s&0&b_s\\0&1&0\\c_s&0&d_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_r&b_r&0\\c_r&d_r&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

и

$$b_r=a_sb_r,\quad c_ra_s=c_r,\quad c_rb_s=0. \tag{38}$$

Аналогично, используя равенства

$$\varphi(1+re_{23})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots\\ 0 & a_r & b_r & 0 & \vdots\\ 0 & c_r & d_r & 0 & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & & \ddots\end{pmatrix} \tag{39}$$

и $[1+se_{23},1+re_{13}]$, получаем, что для всех $r,s\in R$

$$b_r=b_rd_s,\quad d_sc_r=c_r,\quad b_sc_r=0. \tag{40}$$

Из равенств

$$(1+re_{ij})^{-1}=(1-re_{ij})=(1-2e_{ii})(1+r_{ij})(1-2e_{ii})$$

и (21), (35) следует, что для всех $r \in R$

$$\varphi(1 + re_{12})^{-1} = \begin{pmatrix} a_r & -b_r & 0 & \vdots \\ -c_r & d_r & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{41}$$

и в силу (41), (40)

$$a_r^2 = d_r^2 = 1. \tag{42}$$

Из равенств

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и (35), (36) получаем

$$\varphi(1 - e_{21}) = \begin{pmatrix} d_1 & -c_1 & \vdots \\ -b_1 & a_1 & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из (35), (43), (36) и (40) следует, что

$$a_1 d_1 - b_1^2 = -c_1, \tag{44}$$

$$-c_1^2 + d_1 a_1 = b_1. \tag{45}$$

Умножим раенство (45) справа на b_1 и, использовав (38), получим $b_1^2 = d_1 b_1$. Умножив (45) слева на b_1, получим $b_1^2 = b_1 a_1$. Тем самым показано, что $b_1 a_1 = d_1 b_1 = b_1^2$, $d_1 b_1 d_1 b_1 = d_1 b_1^2 = d_1^2 b_1 = b_1$, $d_1 b_1 d_1 b_1 = d_1 b_1^2 a_1 = d_1^2 b_1 a_1 = b_1 a_1 b_1^2$ и $b_1 = b_1^2$.

Из (44) следует

$$a_1 c_1 = c_1 d_1 = c_1 = -c_1^2. \tag{46}$$

Из (45) и (46) получаем

$$d_1 a_1 = b_1 + c_1^2 = b_1 c_1.$$

Из (38) и (40) вытекает

$$b_1 c_1 = c_1 b_1 = 0.$$

Таким образом,

$$(d_1 a_1)^2 = b_1^2 + c_1^2 = b_1 - c_1 = d_1 a_1.$$

В силу (42) элемент $d_1 a_2$ обратим. Следовательно,

$$1 = d_1 a_1 = b_1 - c_1. \tag{47}$$

По (38), (40), (47) $b_s c_r = c_r b_s = 0$ и

$$b_r \in b_1 f_{11} \operatorname{End}_S(V') f_{11} b_1, \quad c_r \in (1-b_1) f_{11} \operatorname{End}_S(V') f_{11} (1-b_1) \tag{48}$$

для всех $r, s \in R$. Далее, согласно (38)

$$(a_s - 1) b_1 = c_1 (a_s - 1) = 0.$$

По (47)

$$a_s - 1 = -b_1 (a_s - 1) c_1.$$

В силу (38), (40), (42)

$$b_1 c_1 = c_1 b_1 = 0, \quad 1 = a_s^2 = (1 - b_1 a_s c_1)^2 = 1 - 2 b_1 a_s c_1,$$

и $a_s = 1$. Аналогично, $d_s = 1$. Итак,

$$a_r = d_r = 1 \tag{49}$$

для всех $r \in R$. Положим $e_1 = b_1 \cdot 1$, тогда e_1 — идемпотент кольца $\operatorname{End}_S(V')$. По (35), (48), (49)

$$\begin{gathered} e_1 \varphi(1 + r e_{12}) = \varphi(1 + r e_{12}) e_1 = e_1 + b_r g_{12}, \\ [1 - 2e_1, \varphi(1 + r e_{12})] = 1. \end{gathered}$$

Аналогично,

$$[1 - 2e_1, \varphi(1 - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} - e_{ji})] = 1.$$

Следовательно, матрица $\varphi^{-1}(1 - 2e_1)$ лежит в централизаторе группы $E_R(V)$ и является центральной матрицей. Таким образом, матрица $1 - 2e_1$ лежит в центре кольца $\operatorname{End}_S(V')$, e_1 — центральный идемпотент кольца $\operatorname{End}_S(V')$,

$$e_1 \operatorname{End}_S(V') \oplus (1 - e_1) \operatorname{End}_S(V') = \operatorname{End}_S(V'). \tag{50}$$

Положим $\theta_3(r) \equiv b_r$, $\theta_4(r) \equiv -c_r$. Из равенств

$$\begin{gathered} [1 + r e_{12}, 1 - s e_{23}] = 1 + (rs) e_{13}, \\ [1 + c_r g_{21}, 1 - c_s g_{32}] = 1 - (c_s c_r) g_{31} \end{gathered}$$

и (35), (48), (49), (37), (39), (41) получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{rs} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{rs} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_r b_s \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_s c_r & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\theta_3 \colon R \to b_1 (f_{11} \operatorname{End}_S(V') f_{11})$ — гомоморфизм колец, $\theta_4 \colon R \to (1 - b_1)(f_{11} \operatorname{End}_S(V') f_{11})$ — антигомоморфизм колец. Кроме того, по (35), (36), (49)

$$\varphi(1 + r e_{ij}) = 1 + \theta_3(r) g_{ij} - \theta_4(r) g_{ji}. \tag{51}$$

Положим для каждого $a_{ij} e_{ij} \in \operatorname{End}_R(V)$

$$\begin{gathered} \theta_1(a) = \theta_3(a_{ij}) g_{ij}, \\ \theta_2(a) = \theta_4(a_{ij}) g_{ji}, \end{gathered}$$

а для остальных элементов кольца $\mathrm{End}_R(V)$ продолжим эти гомоморфизмы естественным образом. Тогда $\theta_1\colon \mathrm{End}_R(V) \to e_1 \mathrm{End}_S(V')$ — гомоморфизм колец, $\theta_2\colon \mathrm{End}_R(V) \to (1-e_1)\mathrm{End}_S(V')$ — антигомоморфизм колец и по (47), (51)

$$\varphi(A) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1}) \tag{52}$$

для всех $A \in E_R(V)$. Пусть I, J — идеалы кольца S, такие что $\mathrm{End}_I(V') = e_1 \mathrm{End}_S(V')$ и $\mathrm{End}_J(V') = (1-e_1)\mathrm{End}_S(V')$. В силу (50) $I \oplus J = S$. Положим $N_1 \equiv \varphi^{-1}(\mathrm{Aut}_S(V', I))$, $M_1 \equiv \varphi^{-1}(\mathrm{Aut}_S(V', J))$. По лемме 1

$$E_R(V, eR) \subseteq N_1, \quad E_R(V, (1-e)R) \subseteq M_1,$$

где e — некоторый центральный идемпотент кольца $\mathrm{End}_R(V)$. Пусть $B \in E_R(V, eR)$. Тогда $\varphi(B) - 1 \in \mathrm{End}_I(V') = e_1 \mathrm{End}_S(V')$.

По (52)

$$\varphi(B) - 1 = \theta_1(B-1) + \theta_2(B^{-1} - 1)$$

и

$$\theta_1(B-1) \in e_2 \mathrm{End}_S(V'), \quad \theta_2(B^{-1}-1) \in (1-e_2)\mathrm{End}_S(V').$$

Следовательно, $\theta_2(B^{-1}–1)=0$ и $\mathrm{End}_{eR}(V) \subseteq \mathrm{Ker}\,\theta_2$. Аналогично, $\mathrm{End}_{(1-e)R}(V) \subseteq \mathrm{Ker}\,\theta_1$. Поскольку φ — изоморфизм групп, то по (52)

$$\mathrm{Ker}\,\theta_1 \cap \mathrm{Ker}\,\theta_2 = \{0\}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{End}_{eR}(V) = \mathrm{Ker}\,\theta_2, \quad \mathrm{End}_{(1-e)R}(V) = \mathrm{Ker}\,\theta_1$$

и

$$\mathrm{Ker}\,\theta_1 \oplus \mathrm{Ker}\,\theta = \mathrm{End}_R(V).$$

Проведя аналогичные рассуждения для отображения φ^{-1}, получаем, что

$$\mathrm{Im}\,\theta_1 \oplus \mathrm{Im}\,\theta_2 = \mathrm{End}_S(V').$$

Положим

$$\varphi_1(B) = \varphi^{-1}(\theta_1(B) + \theta_2(B^{-1}))$$

для всех $B \in \mathrm{Aut}_R(V)$. Тогда φ_1 — автоморфизм группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и по (52)

$$\varphi_1(A) = A \quad \text{для всех} \quad A \in E_R(V).$$

Теорема доказана. □

Предположим, что кольца R и S с $1/2$ не содержат центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathrm{End}_R(V) \cong \mathrm{End}_S(V')$.*

Доказательство. По теореме 1 любой изоморфизм φ групп $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ на группе $DE_R(V)$ совпадает с изоморфизмом $\chi(\cdot)(\theta_1(\cdot) + \theta_2(\cdot^{-1}))$, где $\chi(\cdot)$ — групповой гомоморфизм $DE_R(V) \to C(\mathrm{Aut}_S(V'))$, $\theta_1\colon e\,\mathrm{End}_R(V) \to$ $\to f\,\mathrm{End}_S(V')$ — кольцевой изоморфизм, $\theta_2\colon (1-e)\,\mathrm{End}_R(V) \to (1-f)\,\mathrm{End}_S(V')$ — кольцевой антиизоморфизм, e, f — центральные идемпотенты колец $\mathrm{End}_R(V_1)$ и $M_S(V_2)$ соответственно. Так как кольца R и S не содержат центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1, то кольца $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$ также не содержат центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1, то есть либо $e = f = 1$, либо $e = f = 0$.

1. Если $e = f = 1$, то $\varphi(\cdot)$ на $DE_R(V)$ совпадает с изоморфизмом колец $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$ вида $\chi(\cdot)\theta_1(\cdot)$, т. е. кольца $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$ изоморфны.

2. Если $e = f = 0$, то φ на $DE_R(V)$ совпадает с антиизоморфизмом $\chi(\cdot)\theta_2(\cdot^{-1})$, т. е. кольца $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')^{\mathrm{op}}$ изоморфны.

Предположим, что это так. Рассмотрим в $\mathrm{End}_R(V)$ систему коммутирующих сопряжённых ортогональных идемпотентов с условием

$$\sum_{i\in I} e_{ii} \sim 1.$$

Это выражение означает, что для любого элемента a и любого $i \in I$ существуют $i_1, \ldots, i_n \in \varkappa$, такие что

$$\biggl(\sum_{j=1}^{n} e_{i_j i_j}\biggr) a e_{ii} = a e_{ii} \biggl(\sum_{j=1}^{n} e_{i_j i_j}\biggr) = a e_{ii}.$$

Теперь, как и выше, введём *систему матричных единиц* e_{ij} $(i, j \in \varkappa)$ условием

$$e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}.$$

Очевидно, что такой системе $\{e_{ij}\}$ в $\mathrm{End}_R(V)$ соответствует система $\{f_{ij}\}$ в $\mathrm{End}_S(V')$, определяемая условием

$$f_{ij} f_{kl} = \delta_{il} f_{kj}.$$

В $\mathrm{End}_R(V)$ существует элемент

$$x \sim \sum_{i\in I} e_{1i},$$

но в $\mathrm{End}_S(V_2)$ соответствующего элемента

$$y \sim \sum_{i\in I} f_{1i}$$

существовать не может. Покажем это.

Пусть W_i — носитель идемпотента f_{ii}. Тогда

$$f_{1i}(W_1) = f_{ii} f_{1i}(W_1) \Rightarrow f_{1i}(W_1) \subset W_i.$$

Кроме того,

$$W_1 = f_{11}(W_1) = f_{i1} f_{1i}(W_1),$$

то есть f_{ij} переводит W_j в W_i. Существование элемента $f \sim \sum\limits_{i\in I} f_{1i}$ означало бы, что f переводит некоторый вектор w из W_1 в сумму бесконечного числа векторов $w_j \in W_j$, что невозможно.

Таким образом, соотношение

$$\mathrm{End}_R(V) \cong \mathrm{End}_S(V')^{\mathrm{op}}$$

невозможно.

Обратная импликация очевидна. □

5.2. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов модулей бесконечных рангов

Лемма 3. *Для любого ультрафильтра D*

$$\prod_D \mathrm{End}_R(V) \cong \mathrm{End}_{\prod\limits_D}(V).$$

Доказательство. По определению ультрапроизведения любой элемент $\prod\limits_D \mathrm{End}_R(V)$ есть функция (точнее, её класс эквивалентности) $f\colon I \to \mathrm{End}_R(V)$, т. е. множество пар $\langle i, A\rangle$, где $i \in I$, $A \in \mathrm{End}_R(V)$, $\forall i \in I\, \exists! A \in \mathrm{End}_R(V)$ ($\langle i, A\rangle \in f$). Каждый элемент $A \in \mathrm{End}_R(V)$ — это такое отображение $a\colon \varkappa \times \varkappa \to R$, что для любого $\alpha \in \varkappa$ существует лишь конечное число таких $\beta_j \in \varkappa$, что $a(\langle \alpha, \beta_j\rangle) \neq 0$, т. е. каждый элемент $A \in \mathrm{End}_R(V)$ — это множество упорядоченных троек $\langle \alpha, \beta, r\rangle$, где $\alpha, \beta \in \varkappa$, $r \in R$, $\forall \alpha\, \forall \beta\, \exists! r \in R\, (\langle \alpha, \beta, r\rangle \in A)$. Таким образом, любой элемент ультрапроизведения $\prod\limits_D \mathrm{End}_R(V)$ — это множество f упорядоченных четвёрок $\langle i, \alpha, \beta, r\rangle$ с $i \in I$, $\alpha, \beta \in \varkappa$, $r \in R$ и условием $\forall i, \alpha, \beta\, \exists! r\, (\langle i, \alpha, \beta, r\rangle \in f)$, а иначе говоря — это функция $f\colon I \times \varkappa \times \varkappa \to R$ с единственным условием, что $\forall i \in I\, \forall \alpha \in \varkappa$ существует лишь конечное число таких $\beta_j \in \varkappa$, что $f(i, \alpha, \beta_j) \neq 0$.

Две такие функции $f, g\colon I \times \varkappa \times \varkappa \to R$ будут равны, если и только если

$$\{i \in I \mid \forall \alpha, \beta \in \varkappa\, (f(i, \alpha, \beta) = g(i, \alpha, \beta))\} \in D.$$

Для трёх функций $f, g, h\colon I \times \varkappa \times \varkappa \to R$ выполнено $h = f + g$, если и только если

$$\{i \in I \mid \forall \alpha, \beta \in \varkappa\, (h(i, \alpha, \beta) = f(i, \alpha, \beta) + g(i, \alpha, \beta))\} \in D.$$

Аналогично, для трёх функций $f, g, h\colon I \times \varkappa \times \varkappa \to R$ выполнено $h = fg$, если и только если

$$\left\{ i \in I \;\middle|\; \forall \alpha, \beta \in \varkappa \left(h(i, \alpha, \beta) = \sum_{\gamma \in \varkappa} f(i, \alpha, \gamma) \cdot g(i, \gamma, \beta) \right) \right\} \in D.$$

Понятно, что мы имеем право ставить знак суммы в этом выражении, потому что лишь конечное число элементов этой суммы отлично от нуля.

Теперь рассмотрим кольцо $\mathrm{End}_{\prod\limits_D}(V)$. Совершенно аналогично предыдущим рассуждениям получим, что элементами этого кольца являются отображения $f\colon \varkappa\times\varkappa\times I\to R$ с тем же самым условием конечности и совершенно аналогичными равенством, суммой и произведением. Таким образом, искомый изоморфизм получается естественным образом (с помощью естественного отображения $I\times(\varkappa\times\varkappa)\to(\varkappa\times\varkappa)\times I$). □

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 4 работы [13].

Теорема 3. *Предположим, что кольца R, S содержат $1/2$ и не содержат центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0. Тогда группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда кольца $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$ элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть кольца $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$ элементарно эквивалентны.

Рассмотрим произвольное предложение φ в языке теории групп. С помощью предложения φ построим предложение φ' языка теории колец следующим образом: каждое знакосочетание вида $\forall x\,(\dots)$, входящее в предложение φ, заменим на знакосочетание $\forall x\,(\exists x'\,(xx'=x'x=1)\Rightarrow(\dots)$, а каждое знакосочетание вида $\exists x\,(\dots)$ — на знакосочетание $\exists x\,(\exists x'\,(xx'=x'x=1)\wedge(\dots))$. Очевидно, что если предложение φ истинно в группе $\mathrm{Aut}_R(V)$, то предложение φ' истинно в кольце $\mathrm{End}_R(V)$, а значит, благодаря элементарной эквивалентности колец $\mathrm{End}_R(V)$ и $\mathrm{End}_S(V')$, оно истинно и в кольце $\mathrm{End}_S(V')$, откуда следует истинность предложения φ в группе $\mathrm{Aut}_S(V')$. Таким образом, группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$ элементарно эквивалентны.

Пусть операция $*$ в применении к некоторому кольцу A (A^*) — это взятие группы обратимых элементов этого кольца. Очевидно, что для любого ультрафильтра D $\prod\limits_D \mathrm{Aut}_R(V)=\prod\limits_D(\mathrm{End}_R(V))^*\cong\Big(\prod\limits_D \mathrm{End}_R(V)\Big)^*$, т. е. что операции $*$ и $\prod\limits_D$ перестановочны друг с другом.

Пусть теперь элементарно эквивалентны группы $\mathrm{Aut}_R(V)$ и $\mathrm{Aut}_S(V')$. Тогда по теореме 2 (п. 1.4) существуют ультрастепени $G=\prod\limits_D \mathrm{Aut}_R(V)$ и $G'=\prod\limits_D \mathrm{Aut}_S(V')$ этих групп, такие что $G\cong G'$. Таким образом, $\Big(\prod\limits_D \mathrm{End}_R(V)\Big)^*\cong\Big(\prod\limits_D \mathrm{End}_S(V')\Big)^*$, а по лемме 3 $\mathrm{Aut}_{\prod\limits_D R}(V)\cong \mathrm{Aut}_{\prod\limits_D S}(V')$. По теореме 2 предыдущего пункта в этом случае $\mathrm{End}_{\prod\limits_D R}(V)\cong \mathrm{End}_{\prod\limits_D S}(V')$, а следовательно, по предложению 4 пункта 1.4 $\mathrm{End}_R(V)\equiv \mathrm{End}_S(V')$. Теорема доказана. □

Таким образом, в случае ассоциативных колец с $1/2$, не содержащих центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1, мы можем вместо вопроса об элементарной эквивалентности общих линейных групп рассматривать вопрос об элементарной эквивалентности колец эндоморфизмов.

5.3. Основная теорема

В этом пункте будем считать, что кардинальное число $\varkappa_1$ таково, что существует максимальный идеал кольца R_1, порождённый не более чем $\varkappa_1$ элементами.

Из теоремы 5 из § 3 и теоремы 3 очевидно следует теорема 4.

Теорема 4. *Предположим, что кольца R_1 и R_2 содержат $1/2$ и не содержат центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0. Пусть, кроме того, V_1 и V_2 — свободные модули бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над кольцами R_1 и R_2 соответственно, и пусть существует предложение $\psi \in \mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle)$, ложное во всех кольцах, подобных кольцу R_1 и имеющих другую теорию $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}$. Тогда группы $\mathrm{Aut}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда существует кольцо S, подобное кольцу R_2, такое что $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, R_1\rangle) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S\rangle)$.*

Следствие 1. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над телами (коммутативными или локальными кольцами, не содержащими центральных идемпотентов, отличных от 1 и 0, областями целостности) F_1 и F_2, содержащими $1/2$, соответственно группы $\mathrm{Aut}_{F_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{F_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, F_1\rangle) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, F_2\rangle)$.*

Следствие 2. *Для свободных модулей V_1 и V_2 бесконечных рангов $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ над артиновыми кольцами R_1 и R_2, не содержащими центральных идемпотентов, отличных от 0 и 1, содержащими $1/2$, соответственно группы $\mathrm{Aut}_{R_1}(V_1)$ и $\mathrm{Aut}_{R_2}(V_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют кольца S_1 и S_2, подобные кольцам R_1 и R_2 соответственно, такие что $\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(\langle \varkappa_1, S_1\rangle) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(\langle \varkappa_2, S_2\rangle)$.*

Литература

[1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.

[2] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // Фундам. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265—1278.

[3] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 156, № 1. — С. 157—158.

[4] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность линейных и алгебраических групп. — Дисс.. . . канд. физ.-мат. наук. — МГУ им. М. В. Ломоносова, 2001.

[5] Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.

[6] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативными кольцами // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.

[7] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[8] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.

[9] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1976.

[10] Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. — М.: Мир, 1974.

[11] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[12] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[13] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 29—35.

[14] Shelah S. Interpreting set theory in the endomorphism semi-group of a free algebra or in the category // Ann. Sci. Univ. Clermont Math. — 1976. — Vol. 13. — P. 1—29.

[15] Solovay R. M. Real-valued mesurable cardinals // Proceedings of Simposia in Pure Math. XIII Part I / ed. D. Scott. — Providence: AMS, 1971.

[16] Tolstykh V. Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups // Ann. Pure Appl. Logic. — 2000. — Vol. 105. — P. 103—156.