О чистоте в абелевых группах

М. А. ТУРМАНОВ

УДК 512.541

Ключевые слова: абелевы группы без кручения, чистота, сервантность, квазиразложения.

Аннотация

Абелевы группы без кручения G and H называются *квазиравными* ($G \approx H$), если $\lambda G \subset H \subset G$ для некоторого натурального числа λ. Известно [3], что квазиравенство абелевых групп без кручения можно представлять как равенство в подходящей фактор-категории. Поэтому при изучении тех или иных свойств абелевых групп без кручения обычно стараются доказать, что изучаемое свойство сохраняется при переходе к квазиравной группе. Особенно часто этот приём используется при изучении модульных свойств абелевых групп, рассматриваемых как левые модули над своими кольцами эндоморфизмов. С другой стороны, одной из актуальных проблем теории абелевых групп является проблема изучения чистот в категории абелевых групп [1]. В данной работе рассматривается чистота по П. Кону [5] для абелевых групп как модулей над своими кольцами эндоморфизмов. Особенность изучения свойств чистоты для абелевой группы G как модуля ${}_{E(G)}G$ объясняется тем, что эта ситуация более общая, нежели изучение свойств чистоты для унитарного модуля над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей. Действительно, если ${}_RM$ — произвольный унитарный левый модуль и M^+ — его абелева группа, то каждый элемент кольца R можно отождествить с подходящим эндоморфизмом из кольца $E(M^+)$ при каноническом гомоморфизме колец $R \to E(M^+)$, и поэтому если ${}_{E(M^+)}N$ — чистый подмодульо в ${}_{E(M^+)}M^+$, то ${}_RN$ — чистый подмодуль в ${}_RM$. В данной работе будут изучены связи между чистотой, сервантностью и квазиразложениями абелевых групп без кручения конечного ранга.

Abstract

M. A. Turmanov, On pureness in Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 2, pp. 225—238.

Torsion-free Abelian groups G and H are called *quasi-equal* ($G \approx H$) if $\lambda G \subset H \subset G$ for a certain natural number λ. It is known (see [3]) that the quasi-equality of torsion-free Abelian groups can be represented as the equality in an appropriate factor category. Thus while dealing with certain group properties it is usual to prove that the property under consideration is preserved under the transition to a quasi-equal group. This trick is especially frequently used when the author investigates module properties of Abelian groups, here a group is considered as a left module over its endomorphism ring. On the other hand, an actual problem in the Abelian group theory is a problem of investigation of pureness in the category of Abelian groups (see [1]). We consider the pureness introduced by P. Cohn [5] for Abelian groups as modules over their endomorphism rings. The feature of the investigation of the properties of pureness for the Abelian group G as the module ${}_{E(G)}G$ lies in the fact that this is a more general situation than the investigation of pureness for a unitary module over an arbitrary ring R with the identity element. Indeed,

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 2, с. 225—238.

if $_RM$ is an arbitrary unitary left module and M^+ is its Abelian group, then each element from R can be identified with an appropriate endomorphism from the ring $E(M^+)$ under the canonical ring homomorphism $R \to E(M^+)$. Then it holds that if $_{E(M^+)}N$ is a pure submodule in $_{E(M^+)}M^+$, then $_RN$ is a pure submodule in $_RM$. In the present paper the interrelations between pureness, servantness, and quasi-decompositions for Abelian torsion-free groups of finite rank will be investigated.

§ 1. Эндочистая полупростота абелевых групп

Под *квазиразложением* группы G понимается такое семейство ненулевых сервантных подгрупп $\{G_i \mid i \in I\}$ группы G, что $G \approx \bigoplus\limits_{i\in i} G_i$. При этом каждая подгруппа G_i называется *квазислагаемым* группы G. Группа называется *сильно неразложимой*, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями. Если в квазиразложении группы все квазислагаемые сильно неразложимы, то говорят о её *полном* квазиразложении. Будем обозначать через $E(G)$ кольцо эндоморфизмов группы G и использовать известный факт, что если $G \approx H$, то $\lambda E(G) \subset E(H)$ и $E(H)\lambda \subset E(G)$. Подмодуль $_EA$ модуля $_EG$ называется *чистым*, если всякая конечная система уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji} x_i = a_j \quad (j = 1, \ldots, m)$$

с коэффициентами $\varphi_{ji} \in E$ и правыми частями $a_j \in A$, имеющая решение в G, имеет решение и в A. Модуль называется *чисто простым*, если он не содержит в себе собственных чистых подмодулей, и *чисто полупростым*, если он изоморфен прямой сумме чисто простых модулей. Вполне характеристическую подгруппу A группы G, такую что $_{E(G)}A$ является чистым подмодулем левого модуля $_{E(G)}G$, будем называть *эндочистым* подмодулем группы G. В этом случае A также является сервантной подгруппой в G. В [2] показано, что чистая полупростота модуля $_{E(G)}G$ равносильна выделению в нём прямым слагаемым каждого его чистого подмодуля. Напомним, что абелева группа G называется *жёсткой*, если кольцо $E(G)$ лежит в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Легко проверить, что в жёсткой группе всякая сервантная подгруппа является эндочистым подмодулем. Поэтому для жёсткой группы G модуль $_{E(G)}G$ не является чисто простым, если ранг группы G больше 1.

Перейдём теперь к изучению связи между чистой полупростотой модуля $_{E(G)}G$ и полным квазиразложением группы G.

Лемма 1. *Пусть подгруппа A группы без кручения G является одновременно квазислагаемым и эндочистым подмодулем в G. Тогда $_{E(G)}A$ выделяется прямым слагаемым в модуле $_{E(G)}G$.*

Доказательство. Пусть $\lambda G \subset A \oplus B \subset G$, $E = E(G)$ и $_EA$ — чистый подмодуль модуля $_EG$. Через δ обозначим квазипроекцию G на A [4]. Тогда $\delta g = \pi(\lambda g)$ и $\delta a = \lambda a$ для любых $g \in G$, $a \in A$, где π — проекция $A \oplus B$ на A. Пусть g —

произвольный элемент группы G и $\lambda g = a + b$ ($a \in A$, $b \in B$), тогда $\delta g = a$. В силу чистоты ${}_E A$ в ${}_E G$ и так как $\delta \in A$, найдётся элемент $\bar{a} \in A$, такой что $\delta \bar{a} = \lambda \bar{a} = a$. Отсюда $b = \lambda(g - \bar{a})$. Из сервантности B в G следует, что $\bar{b} = g - \bar{a} \in B$. Следовательно, $g = \bar{a} + \bar{b}$ и $G = A \oplus B$. Снова в силу чистоты ${}_E A$ в ${}_E G$ получаем $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A) = 0$, т. е. ${}_E G = {}_E A \oplus {}_E B$. $\square$

Теорема 2. *Если группа G обладает квазиразложением $\lambda G \subset \bigoplus_{i \in I} H_i \subset G$, в котором каждое квазислагаемое H_i является чисто простым модулем ${}_{E(H_i)} H_i$ над своим кольцом эндоморфизмов, то модуль ${}_E(G)G$ чисто полупрост.*

Доказательство. Пусть $\lambda G \subset \bigoplus_{i \in I} H_i \subset G$, где H_i — чисто простые модули над своими кольцами эндоморфизмов и A есть эндочистый подмодуль группы G. Для доказательства теоремы согласно [2] достаточно показать, что A выделяется прямым слагаемым в G. Но для этого, согласно лемме 1, достаточно показать, что A является квазислагаемым группы G. Покажем это в три шага.

1. Имеем $\lambda A \subset \bigoplus_{i \in I} (A \cap H_i) \subset A$, где $A \cap H_i$ — сервантная подгруппа в A и в H_i для всех $i \in I$. Покажем, что $A \cap H_i$ — вполне характеристическая подгруппа в H_i для всех $i \in I$. Действительно, если $\alpha \in E(H_i)$ и $a \in A \cap H_i$, то можно считать, что $\alpha\lambda \in E(G)$, и поэтому, с одной стороны, $\alpha a \in H_i$, а с другой стороны, $\lambda(\alpha a) = (\alpha\lambda) a \in A$. Поскольку $A \cap H_i$ сервантна в H_i, заключаем, что $\alpha a \in A \cap H_i$.

2. Зафиксируем $i = 1$ и покажем, что $A \cap H_1$ является эндочистым подмодулем в H_1. Если $\bar{H}_1 = \Big\langle \bigoplus_{i \neq 1} H_i \Big\rangle_*$ есть сервантная оболочка суммы всех квазислагаемых, кроме H_1, то $\lambda G \subset H_1 \oplus \bar{H}_1 \subset G$ и $\lambda A \subset A \cap H_1 \oplus A \cap \bar{H}_1 \subset A$. Пусть дана система уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij} x_i = a_j \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{$*$}$$

где $\varphi_{ij} \in E(H_1)$, $a_j \in A \cap H_1$, имеющая решение $x_i = h_i$ в H_1. Чтобы сделать идею доказательства более ясной, рассмотрим сначала случай $j = 1$, $n = 2$. Система $(*)$ имеет в этом случае вид

$$\varphi_{11} x_1 + \varphi_{12} x_2 = a_1.$$

Составим матрицы

$$\psi_{ki1} = \begin{pmatrix} \varphi_{1i} & 0 \\ 0 & \delta_{ki} \end{pmatrix}, \quad \delta_{ki} \text{ — символ Кронекера},$$

где $k = 1, 2$, $i = 1, 2$. Тогда $\psi_{ki1} \in E(H_1 \oplus \bar{H}_1)$, $\psi_{ki1}\lambda \in E(G)$ и система уравнений

$$\begin{cases} (\psi_{111}\lambda) x_1 + (\psi_{121}\lambda) x_2 = \lambda a_1, \\ (\psi_{211}\lambda) x_1 + (\psi_{221}\lambda) x_2 = \lambda a_1 \end{cases}$$

имеет решение $x_i = h_i$ в G. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдутся такие элементы $b_1, b_2 \in A$, что

$$(\psi_{k11}\lambda)b_1 + (\psi_{k21}\lambda)b_2 = \lambda a_1, \quad k = 1, 2. \tag{I}$$

Пусть $\lambda b_i = a_{1i} + a_{2i}$, где $a_{1i} \in A \cap H_1$, $a_{2i} \in A \cap \bar{H}_1$ для всех $i = 1, 2$, тогда $(\psi_{ki1}\lambda)b_i = \varphi_{1i}a_{1i} + \delta_{ki}a_{2i}$. Подставляя полученные значения в (I), получим

$$\begin{cases} \varphi_{11}a_{11} + a_{21} + \varphi_{12}a_{12} + 0 = \lambda a_1, \\ \varphi_{11}a_{11} + 0 + \varphi_{12}a_{12} + a_{22} = \lambda a_1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\varphi_{11}a_{11} + \varphi_{12}a_{12} = \lambda a_1$ и $a_{21} = a_{22} = 0$, следовательно, $\lambda b_i = a_{1i} \in A \cap H_1$ и $\varphi_{11}b_1 + \varphi_{12}b_2 = a_1$. Таким образом, элементы $b_1, b_2 \in A \cap H_1$ образуют решение исходного уравнения в $A \cap H_1$. Кратко, идея состоит в том, чтобы с помощью матриц ψ_{kij} разбросать элементы a_{2i} поодиночке среди nm новых уравнений и тем самым аннулировать их. В общем случае составим матрицы

$$\psi_{kij} = \begin{pmatrix} \varphi_{ji} & 0 \\ 0 & \delta_{ki} \end{pmatrix}, \quad \delta_{ki}\text{ — символ Кронекера,}$$

для всех $k, i \in \{1, \ldots, n\}$, $j = 1, \ldots, m$, тогда получим $\psi_{kij} \in E(H_1 \oplus \bar{H}_1)$, $\psi_{kij}\lambda \in E(G)$ и систему nm уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_{kij}\lambda)x_i = \lambda a_j \quad (k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m),$$

которая имеет решение $x_i = h_i$ в G. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдутся такие элементы $b_1, \ldots, b_n \in A$, что

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_{kij}\lambda)b_i = \lambda a_j \quad (k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m). \tag{**}$$

Пусть $\lambda b_i = a_{1i} + a_{2i}$, где $a_{1i} \in A \cap H_1$, $a_{2i} \in A \cap \bar{H}_1$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $(\psi_{kij}\lambda)b_i = \varphi_{ji}a_{1i} + \delta_{ki}a_{2i}$, $\varphi_{ji}a_{1i} \in A \cap H_1$, $\delta_{ki}a_{2i} \in A \cap \bar{H}_1$. Подставляя полученные значения в систему (**), получим тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}a_{1i} = \lambda a_j \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}a_{2i} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m). \tag{***}$$

Из второй системы тождеств следует, что $a_{21} = a_{22} = \ldots = a_{2n} = 0$. Следовательно, $\lambda b_i = a_{1i} \in A \cap H_1$ и $b_i \in A$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Так как $A \cap H_1$ сервантна в A, получаем, что $b_i \in A \cap H_1$, значит, элементы b_i попадают в область определения эндоморфизмов φ_{ji}. Подставляя в первую систему тождеств системы (***) вместо элементов a_{1i} элементы λb_i, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{ji}b_i = a_j \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Тем самым найдено решение $x_i = b_i$ системы уравнений $(*)$ в $A \cap H_1$, что и требовалось показать. Аналогично можно убедиться в том, что $A \cap H_i$ есть эндочистый подмодуль в H_i для всех $i \in I$.

3. Поскольку модули ${}_{E(H_i)}H_i$ чисто простые для всех $i \in I$, получим, что либо $A \cap H_i = 0$, либо $A \cap H_i = H_i$. Отсюда $\lambda A \subset \bigoplus\limits_{i \in J} H_i \subset A$ для некоторого подмножества J из I. Но тогда можно показать, что $\lambda G \subset A \oplus B \subset G$, где $A = \left\langle \bigoplus\limits_{i \in J} H_i \right\rangle_*$ и $B = \left\langle \bigoplus\limits_{i \in I \setminus J} H_i \right\rangle_*$. Таким образом, A выделяется квазислагаемым в G, и остаётся применить лемму 1. $\square$

Теорема 2 позволяет строить чисто полупростые абелевы группы над кольцами эндоморфизмов этих групп произвольного конечного ранга. Также теорема 2 сводит задачу о чистой полупростоте модуля ${}_{E(G)}G$ для произвольной абелевой группы G без кручения к задаче о чистой простоте модуля ${}_{E(H)}H$ для сильно неразложимой абелевой группы без кручения. Естественно задаться обратным вопросом, т. е. если абелева группа G без кручения обладает полным квазиразложением $G \approx \bigoplus\limits_{i \in I} H_i$ и модуль ${}_E(G)G$ число полупрост, то являются ли модули ${}_{E(H_i)}H_i$ чисто простыми для каждого $i \in I$? В частном случае, когда число квазислагаемых в полном квазиразложении группы G совпадает с числом чисто простых подмодулей в прямом разложении модуля ${}_{E(G)}G$, положительный ответ очевиден в силу теоремы Йонсона [3]. В общем же случае это не так. Покажем это на примере группы без кручения ранга 3.

Пусть $\mathbb{Z}$ — группа (кольцо) целых чисел, H — сильно неразложимая группа без кручения ранга 2, однородная с типом $t(H) = t(\mathbb{Z})$ и $E(H) = \mathbb{Z}[I]$. Тогда группа $G = \mathbb{Z} \oplus H$ является чисто простым модулем над своим кольцом эндоморфизмов $E = E(G)$, хотя модуль ${}_{E(H)}H$ не является чисто простым. Действительно, так как H — жёсткая группа, модуль ${}_{E(H)}H$ содержит чистые подмодули, не выделяющиеся прямыми слагаемыми. С другой стороны, если A — эндочистый подмодуль группы G, то $A = A \cap \mathbb{Z} \oplus A \cap H$. Если $A \cap \mathbb{Z} = 0$, то $A \subset H$. Но тогда найдётся такой $\varphi \in E$, что $\varphi(H) = 0$, $\varphi(\mathbb{Z}) \subset A$. Если $\varphi(1) = \alpha \in A$, то уравнение $\varphi x = \alpha$, имеющее решение в G, не может иметь решение в A. Полученное противоречие с чистотой подмодуля ${}_EA$ в ${}_EG$ означает, что $A \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. А так как след $\sum\limits_{\alpha\colon \mathbb{Z} \to H} \alpha\mathbb{Z}$ совпадает с H, то и $A \cap H = H$, следовательно, $A = G$.

§ 2. Сервантные подмодули сильно неразложимой группы

В этом параграфе будем рассматривать только сильно неразложимую группу G без кручения конечного ранга и изучим некоторые свойства эндочистых подмодулей такой группы. Через S, R, E будем обозначать псевдоцоколь, кольцо квазиэндоморфизмов, кольцо эндоморфизмов группы G соответственно. Через N

будем обозначать радикал Джекобсона кольца R и положим $N_0 = N \cap E$. Известно [6], что кольцо R локальное и N состоит из всех необратимых элементов кольца R. Назовём подгруппу A группы G *сервантным подмодулем* в G, если всякое уравнение вида $\varphi x = a$, где $\varphi \in E$, $a \in A$, имеющее решение $x = g$ в G, имеет решение и в A. Ясно, что всякий эндочистый подмодуль группы G является сервантным.

Теорема 3. *Пусть G — абелева группа и A — сервантная вполне характеристическая подгруппа в G. Если для любого эндоморфизма $\varphi \in E$ и любой A-высокой подгруппы M из G выполняется равенство $\varphi M \cap A = 0$, то A — сервантный подмодуль в G.*

Доказательство. Пусть $\varphi g = a$ для некоторых $\varphi \in E$, $g \in G$, $a \in A$. Подгруппа $\langle A, g\rangle$, порождённая A и элементом g, является прямой суммой $\langle A, g\rangle = A \oplus \langle b\rangle$ для некоторого элемента $b \in G$. Отсюда $g = a_1 + nb$ для некоторых $a_1 \in A$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть M — такая A-высокая подгруппа в G, что $\langle b\rangle \subset M$. Тогда $nb = g - a_1$ и $\varphi(nb) = \varphi g - \varphi a_1 = a - \varphi a_1 \in \varphi M \cap A$, значит, $\varphi a_1 = a$. □

В строении сильно неразложимой группы G без кручения особую роль играет *псевдоцоколь* S, так как он определяется как сервантная оболочка суммы всех минимальных сервантных вполне характеристических подгрупп группы G, а всякая минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа P группы G соответствует простому R-модулю $\mathbb{Q}P$, где $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Следовательно, имеет место изоморфизм R-модулей $\mathbb{Q}P \approx R/N$ и равенство $N_0 P = 0$ в группе G. Отсюда следует, что $N_0 S = 0$ в группе G. Более того, можно доказать следующее свойство.

Лемма 4. $S = \{g \in G \mid N_0 g = 0\}$.

Доказательство. Так как $N_0 S = 0$, то $S \subset \{g \in G \mid N_0 g = 0\}$. Пусть $g \in G$ и $\varphi g = 0$ для всех $\varphi \in N_0$. Предположим, что $g \notin S$. Тогда существует такой $\psi \in E$, что $0 \neq \psi g = s \in S$. Покажем, что $\psi \in N_0$. Если предположить, что $\psi \notin N_0$, то ψ обратим в R, т. е. существует $\psi^{-1} \in R$ и $n\psi^{-1} \in E$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $ng = n\psi^{-1}(s) \in S$. Так как S — сервантная подгруппа в G, то $g \in S$ — противоречие. Таким образом, $\psi \in N_0$, но тогда $\psi g = 0$. Полученное противоречие с тем, что $\psi g = s \neq 0$, означает, что $g \in S$. □

Из доказательства леммы видно, что псевдоцоколь S не является сервантным подмодулем группы G, так как всегда можно составить уравнение $\psi x = s$, где $\psi \in N_0 \subset E$, $s \in E$, которое имеет решение $x = g \in G \setminus S$, но не может иметь решения в S, поскольку $N_0 S = 0$. Так как всякий сервантный подмодуль группы G имеет ненулевое пересечение с S, то зададимся вопросом: существуют ли внутри S сервантные подмодули группы G.

Теорема 5. *Пусть G — сильно неразложимая группа без кручения конечного ранга, A — сервантная вполне характеристическая подгруппа в G, такая что $A \subset S \subset G$. Подгруппа A является сервантным подмодулем в G тогда и только* *тогда, когда для любых $\varphi \in E$ и A-высокой подгруппы M в G имеет место равенство $\varphi M \cap A = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 3 нужно проверить только необходимость. Пусть $\varphi M \cap A \neq 0$ для некоторых $\varphi \in E$ и A-высокой подгруппы M в G. Тогда $\varphi m = a$ для некоторых $0 \neq m \in M$ и $0 \neq a \in A$. Считая, что $\varphi \in R$, покажем, что φ необратим в R. Действительно, если φ обратим в R, то $\varphi^{-1} \in R$ и $k\varphi^{-1} \in E$ для некоторого числа $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $km = k\varphi^{-1}(a) \in M \cap A$, следовательно, $m = 0$. Итак, $\varphi \in N_0$, значит, $\varphi A = 0$ и уравнение $\varphi x = a$, имеющее решение $x = m$ в G, не может иметь решения в A. Но это противоречит сервантности A в G, значит, $\varphi M \cap A = 0$. $\square$

Рассмотрим теперь сервантную оболочку следа $N_0 G$ в группе G, которую обозначим через T, т. е. $T = \langle \alpha g \mid \alpha \in N_0,\ g \in G \rangle_*$. Ясно, что T — сервантная вполне характеристическая подгруппа в G. Значит, всегда $T \cap S \neq 0$. Возникает вопрос о взаимосвязи между T и S в G.

Лемма 6. *$T \subset S$ тогда и только тогда, когда $N_0^2 = 0$.*

Доказательство. Если $T \subset S$ и $\alpha \in N_0$, то для любого $g \in G$ имеем $\alpha g \in S$, следовательно, $N_0(\alpha g) = 0$, т. е. $N_0^2 = 0$. Обратно, если $N_0^2 = 0$ и $g \in T$, то $ng = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in N_0$, $g_1, \ldots, g_k \in G$. Тогда для любого $\alpha \in N_0$ имеем $\alpha(ng) = 0$, значит, $g \in S$, т. е. $T \subset S$. $\square$

С помощью подгруппы T можно находить эндочистые и сервантные подмодули группы G, содержащиеся в S.

Теорема 7. *Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения конечного ранга, A — сервантная вполне характеристическая подгруппа в G, содержащаяся в S. Тогда*

1) *если A — эндочистый подмодуль в G, то $A \cap T = 0$;*
2) *если $A \cap T = 0$, то A — сервантный подмодуль в G.*

Доказательство.

1) Пусть элемент $a = \sum\limits_{i=1}^{k} \varphi_i g_i$ лежит в $A \cap T$ для некоторых $\varphi_i \in N_0$, $g_i \in G$. Тогда можно считать, что $g_i \in A$, следовательно, $\varphi_i g_i = 0$ и $a = 0$.

2) Пусть уравнение $\varphi x = a$, где $\varphi \in E$, $a \in A$, имеет решение $x = g$ в G. Тогда $\varphi \notin N_0$, так как в противном случае $a \in T$ и мы получаем противоречие с тем, что $A \cap T = 0$. Следовательно, в кольце R элемент φ не принадлежит N, а значит, φ обратим в R. Если $\varphi^{-1} \in R$, то для некоторого числа $n \in \mathbb{Z}$ элемент $n\varphi$ лежит в E. Тогда $ng = n\varphi^{-1}a \in A$, значит, $g \in A$, т. е. A — сервантный подмодуль в G. $\square$

Теорема 7 означает, что если $S \setminus T \neq \varnothing$, то в модуле ${}_E G$ всегда можно найти сервантные подмодули. Действительно, пусть $g \in S \setminus T$ и A — минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G, содержащая элемент g. Тогда $A \cap T = 0$, значит, A — сервантный подмодуль в G.

Пример 8. Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3 и $\{g_1, g_2, g_3\}$ — максимальная независимая система элементов группы G. Пусть в базисе $\{g_1, g_2, g_3\}$ кольцо квазиэндоморфизмов R группы G имеет вид

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Тогда $S = \langle g_1, g_2 \rangle_*$ и $T = \langle g_1 \rangle_*$. В этом случае $A = \langle g_2 \rangle_*$ является сервантным подмодулем группы G.

Используя пример 8, можно получить критерий существования сервантных подмодулей в сильно неразложимой группе без кручения ранга 3. Так как кольцо квазиэндоморфизмов $R(G)$ группы G является векторным пространством над $\mathbb{Q}$, то через $\dim R(G)$ будем обозначать его размерность.

Теорема 9. *Сильно неразложимая группа без кручения G ранга 3, такая что $G \neq S$, содержит сервантный подмодуль тогда и только тогда, когда $\dim R(G) = 2$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть G — сильно неразложимая группа ранга 3, $G \neq S$ и $\{g_1, g_2, g_3\}$ — такая максимальная независимая система элементов в G, что сервантные оболочки $\langle g_1 \rangle_*$, $\langle g_1, g_2 \rangle_*$ являются вполне характеристическими подгруппами в G. Тогда прямым подсчётом можно показать, что имеет место вложение

$$R(G) \subset \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z, t \in \mathbb{Q} \right\}. \qquad (*)$$

Так как $r(G) = 3$, то $r(S) = 1$ или $r(S) = 2$. Пусть $r(S) = 1$ и $S\langle g_1 \rangle_*$. Если A — сервантный подмодуль в G, то $S \subset A$, поэтому можно считать, что $A = \langle g_1, g_2 \rangle_*$. Возьмём такой $\varphi \in N_0$, что

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

и $t \neq 0$. Тогда $\varphi g_3 = z g_1 + t g_2 \in A$ и для любого элемента $a \in A$ имеем $a = r_1 g_1 + r_2 g_2$ $(r_1, r_2 \in \mathbb{Q})$, $\varphi a = y r_2 g_1 \neq \varphi g_3$. Таким образом, уравнение $\varphi x = z g_1 + t g_2$, имеющее решение $x = g_3$ в G, не имеет решения в A. Полученное противоречие с сервантностью подмодуля A в G означает, что

$$N \subset \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Значит, $\dim N \leqslant 2$. Так как $R(G) = N \oplus \mathbb{Q}$, то $\dim R(G) = \dim N + 1$. Поэтому $\dim N = 1$ и $\dim R(G) = 2$, так как если $\dim N = 2$, то $\dim R(G) = 3$ и группа G неприводима [6], а это противоречит тому, что $G \neq S$.

Пусть теперь $r(S) = 2$, тогда $S = \langle g_1, g_2\rangle_*$ и либо $r(A) = 1$, либо $r(A) = 2$. В первом случае $A \subset S$. Значит, имеет место вложение $(*)$. Возьмём произвольные $\varphi \in N_0$ с матрицей $(**)$ и элемент $s = (s_1, s_2, 0) \in S$. Тогда из равенства $0 = \varphi s = ys_2g_1$ следует, что $y = 0$, т. е. снова $\dim N \leqslant 2$. Равенство $\dim N = 2$ невозможно, так как оно влечёт неприводимость группы G. Поэтому $\dim N = 1$ и $\dim R(G) = 2$. Во втором случае, так как $A \neq S$, можно считать, что $A = \langle g_1, g_3\rangle_*$. Но тогда $A \cap S = \langle g_1\rangle_*$ — вполне характеристическая подгруппа в G и те же рассуждения, что и в первом случае, приводят к равенствам $\dim N = 1$, $\dim R(G) = 2$.

Докажем достаточность. Если $\dim R(G) = 2$, то $R(G)$ по своему строению похоже на кольцо R из примера 8, а именно

$$R(G) = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{Q} \right\},$$

или

$$R(G) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{Q} \right\},$$

или

$$R(G) = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & s \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Так же, как и в примере 8, в каждом из этих случаев $r(S) = 2$, $r(T) = 1$ и сервантная подгруппа A из $S \setminus T$ является сервантным подмодулем в G. □

В дополнение к теореме 9 заметим, что для сильно неразложимой группы без кручения G конечного ранга, такой что $G = S$, можно легко понять, что всякая её сервантная вполне характеристическая подгруппа A служит в модуле ${}_EG$ сервантным подмодулем. Это следует из того, что $R(G)$ — тело и если $\varphi g = a$ ($\varphi \in E$, $g \in G$, $a \in A$), то $\varphi^{-1} \in R(G)$ и существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $m\varphi^{-1} \in E$, значит, $mg = m\varphi^{-1}a \in A$.

§ 3. Эндочистые и сервантные подмодули абелевой группы без кручения ранга 3

Пусть G — группа без кручения ранга 3, $E = E(G)$. Тогда группа G может быть сильно неразложимой, почти вполне разложимой или иметь полное квазиразложение вида $G \approx G_1 \oplus G_2$, где $r(G_1) = 1$, $r(G_2) = 2$.

В первом случае, используя теорему 9, получаем, что если $G \neq S$, то модуль ${}_EG$ содержит сервантный подмодуль тогда и только тогда, когда $\dim R(G) = 2$, а если $G = S$, то в G всякая сервантная вполне характеристическая подгруппа служит сервантным подмодулем в модуле ${}_EG$.

Во втором случае согласно теореме 2 модуль ${}_EG$ чисто полупрост. В оставшемся третьем случае $G \approx G_1 \oplus G_2$ напомним, что для сильно неразложимой группы G_2 возможны случаи $\dim R(G_2) = 1$ или $\dim R(G_2) = 2$. В случае $\dim R(G_2) = 2$ группа G_2 неприводима, значит, модуль ${}_{E(G_2)}G_2$ чисто прост, а модуль ${}_EG$ чисто полупрост согласно теореме 2. В случае $\dim R(G_2) = 1$ заметим, что если $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$, то $\mathrm{Hom}(G_2, G_1) = 0$, так как в противном случае найдутся $0 \neq \varphi_1 \colon G_2 \to G_1$ и $0 \neq \varphi_2 \colon G_1 \to G_2$. Тогда $\varphi_2\varphi_1 \colon G_2 \to G_2$ and $\varphi_2\varphi_1 \in \mathbb{Q}$. Следовательно, φ_1 — мономорфизм, чего не может быть. Из этого замечания вытекает, что для группы $G \approx G_1 \oplus G_2$ при $R(G_2) \cong \mathbb{Q}$ возможны следующие три случая.

1. $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}(G_2, G_1) = 0$;
2. $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = \mathrm{Hom}(G_2, G_1) = 0$;
3. $\mathrm{Hom}(G_2, G_1) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = 0$.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

Утверждение 1A. *Если $G \approx C_1 \oplus G_2$, $R(G) \cong \mathbb{Q}$ и $r(\mathrm{Hom}(G_1, G_2)) = 2$, то модуль ${}_EG$ чисто прост.*

Доказательство. По теореме Уорфилда [4, теорема 1.11] имеем $t(G_1) \leqslant \mathrm{IT}(G_2)$. Отсюда по лемме Бэра [3, предложение 86.5] имеем $G = H \oplus G_2$, где $H \cong G_1$. Если A — эндочистый подмодуль группы G, то $A = A \cap H \oplus A \cap G_2$, где $A \cap H \neq 0$, так как в противном случае $A \subset G_2$ и найдётся такой $\varphi \in E$, что $\varphi(G_2) = 0$ и $\varphi(H) \subset A$. Но тогда равенство $\varphi h = a$ для некоторых $h \in H$ и $a \in A$ означает, что уравнение $\varphi x = a$ имеет решение в G и не может иметь решения в A, что противоречит чистоте ${}_EA$ в ${}_EG$. Таким образом, $H \subset A$, следовательно, $A = G$, так как H является порождающим множеством модуля ${}_EG$. $\square$

Утверждение 1B. *Если $G \approx C_1 \oplus G_2$, $R(G) \cong \mathbb{Q}$ и $r(\mathrm{Hom}(G_1, G_2)) = 1$, то модуль ${}_EG$ содержит чистый подмодуль при $G = G_1 \oplus G_2$ и является чисто простым, если $G \neq G_1 \oplus G_2$.*

Доказательство. Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ и $B = \sum\limits_{\alpha\colon G_1 \to G_2} \alpha G_1$ — след G_1 в G_2. Тогда B — сервантная подгруппа в G_2 ранга 1. Пусть $B = \langle b \rangle_*$ и элементы a, b образуют максимальную независимую систему в G_2. Покажем, что $A = \langle a \rangle_*$ является эндочистым подмодулем в G. Для этого воспользуемся тем, что

$$E = \mathrm{Hom}(G, G) \cong E(G_1) \oplus \mathrm{Hom}(G_1, G_2) \oplus E(G_2).$$

Пусть система уравнений $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{ji} x_i = a_j$, где $j = 1, \ldots, m$, $a_j \in A$, $\varphi_{ji} \in E$, имеет решение в G. Тогда $\varphi_{ji} = \alpha_{ji} \oplus \gamma_{ji} \oplus \delta_{ji}$, где $\alpha_{ji} \colon G_1 \to G_1$, $\gamma_{ji} \colon G_1 \to B$, $\delta_{ji} \colon G_2 \to G_2$ и $x_i = x_{i1} \oplus x_{i2}$, где $x_{i1} \in G_1$, $x_{i2} \in G_2$. Отсюда $\varphi_{ji} x_i = \alpha_{ji} x_{i1} \oplus (\gamma_{ji} x_{i1} + \delta_{ji} x_{i2})$. Рассмотрим подгруппу $C = \langle A, \gamma_{ji} x_{i1}, x_{i2} \mid j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n \rangle$ группы G_2. Так как C/A — конечно порождённая группа, то $C = A \oplus B_1$, где $B_1 \subset B$, в силу того что $A \cap \langle B_1 \rangle_* = 0$,

$B \cap \langle B_1 \rangle_* \neq 0$ и $\langle B_1 \rangle_*$ — сервантная вполне характеристическая подгруппа в G. Пусть $x_{i2} = a_{i2} \oplus b_{i2}$, где $a_{i2} \in A$, $b_{i2} \in B_1$. Тогда

$$\varphi_{ji} x_i = \alpha_{ji} x_{i1} \oplus \delta_{ji} a_{i2} \oplus (\gamma_{ji} x_{i1} + \delta_{ji} b_{i2}) \in G_1 \oplus A \oplus B.$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{ji} x_i = a_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ в точности тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i = 0 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\gamma_{ji} x_{i1} + \delta_{ji} b_{i2})$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{ji} a_{i2} = a_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Последнее равенство означает, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{ji} a_{i2} = a_j$, где $a_{i2} \in A$, т. е. исходная система уравнений имеет решение в A, что и требовалось показать.

Рассмотрим теперь случай $\lambda G \subset G_1 \oplus G_2 \subset G$, где $\lambda \neq 1$, $R(G_2) \cong \mathbb{Q}$. Покажем, что модуль ${}_{E(G)}G$ чисто прост. При этом будем пользоваться тем, что если A — эндочистый подмодуль в G, то $A \neq G_1$ и $A \neq G_2$, так как в противном случае ${}_{E(G)}A$ выделяется прямым слагаемым в модуле ${}_{E(G)}G$, но это противоречит условию $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$.

a) Допустим, что G содержит эндочистый подмодуль A ранга 2. Тогда $\lambda A \subset (A \cap G_1) \oplus (A \cap G_2) \subset A$ и так как $A \neq G_2$, то $A \approx G_1 \oplus B$, где B — сервантная подгруппа в G_2. Так как $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) \neq 0$, то $\mathrm{Hom}(G_1, B) \neq 0$. Действительно, если $\varphi\colon G_1 \to G_2$, то $\varphi\lambda \in E(G)$ и для всех $x \in G_1$ имеем $(\varphi\lambda)x \in A \cap G_2 = B$, значит, $\varphi\lambda\colon G_1 \to B$. Следовательно, типы $t(G_1)$ и $t(B)$ сравнимы. Так как $t(B) \geqslant t(G_1)$, то для любого элемента $x \in A \setminus B$ справедливо $t(x) = t(G_1)$. Отсюда по лемме Бэра (см. [4, лемма 1.12] или [3, предложение 86.5]) получаем $A = D \oplus B$, где $D \cong G_1$. Без потери общности можно считать $D = G_1$, так как $G_1 \subset D \oplus B$, т. е. $G_1 \oplus G_2 \subset D \oplus G_2$ и $\lambda G \subset D \oplus G_2 \subset G$. Итак, $A = G_1 \oplus B \subset G_1 \oplus G_2$. Возьмём элемент $g \in G \setminus G_1 \oplus G_2$, тогда $\lambda g = h_1 + h_2$ $(h_i \in G_i)$, причём $h_1, h_2 \neq 0$. Пусть $\pi\colon G_1 \oplus G_2 \to G_1$ — проекция, тогда $\pi\lambda \in E(G)$ и $\pi\lambda(z) = \lambda z$ для всех $z \in G_1$. Отсюда получаем, что уравнение $\pi\lambda x = h_1$ $(h_1 \in G_1 \subset A)$ имеет решение $x = g$ в G. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдётся такой элемент $a \in A$, что $a = a_1 + b$ $(a_1 \in G_1,\ b \in B)$ и $\pi\lambda a = h_1$. Отсюда $\lambda a_1 = h_1$. Но тогда $h_2 = \lambda(g - a_1)$ и в силу сервантности G_2 в G получаем, что $g - a_1 = a_2 \in G_2$. Таким образом, $g = a_1 + a_2 \in G_1 \oplus G_2$, что противоречит условию $g \notin G_1 \oplus G_2$. Полученное противоречие означает, что группа G не может содержать эндочистых подмодулей ранга 2.

b) Допустим, что G содержит эндочистый подмодуль A ранга 1. Тогда $A \subset G_2$ и $\mathrm{Hom}(G_1, A) = 0$. Пусть $\{g_1, g_2, g_3\}$ — такая максимальная независимая система элементов группы G, что $G_1 = \langle g_1 \rangle_*$, $g_2 \in \sum\limits_{f\colon G_1 \to G_2} f(G_1)$ и $A = \langle g_3 \rangle_*$. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов группы G имеет вид

$$R(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ t & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \;\middle|\; r, s, t \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Возьмём элемент $g \in G \setminus G_1 \oplus G_2$. Тогда $\lambda g = h_1 + h_2$ $(h_i \in G_i)$, причём $h_1, h_2 \neq 0$. Расписав λg по базису, получим $n\lambda g = k_1 g_1 + k_2 g_2 + k_3 g_3$, где

$n, k_i \in \mathbb{Z}$ и $k_1g_1+k_2g_2 \in G_1 \oplus \langle g_2\rangle_*$. Покажем, что $G_1 \oplus \langle g_2\rangle_*$ является сервантной подгруппой в G. Пусть $H = \{g \in G \mid \lambda g \in G_1 \oplus \langle g_2\rangle_*\}$. Тогда подгруппа H сервантна в G и $\lambda H \subset G_1 \oplus \langle g_2\rangle_* \subset H$. Так как $t(G_1) \leqslant t(g_2)$, то $H = G_1 \oplus \langle g_2\rangle_*$ (используются те же рассуждения, что и в случае а) относительно прямого разложения подгруппы A). Рассмотрим теперь матрицу

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -k_2/k_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in R(G).$$

Существует такое число $m \in \mathbb{Z}$, что $m\alpha \in E(G)$ и $m\alpha g = \frac{m}{n\lambda}k_3g_3 \in A$. В силу чистоты ${}_{E(G)}A$ в ${}_{E(G)}G$ найдётся такой элемент $a \in A$, что $m\alpha g = m\alpha a$, т. е. $a = \frac{k_3}{n\lambda}g_3$. Следовательно, $g - a = \frac{1}{n\lambda}(k_1g_1 + k_2g_2) \in G$. Но тогда из сервантности $G_1 \oplus \langle g_2\rangle_*$ в G следует, что $\frac{1}{n\lambda}(k_1g_1 + k_2g_2) \in G_1 \oplus \langle g_2\rangle_*$. Таким образом, $g \in G_1 \oplus \langle g_2\rangle_* \oplus A \subset G_1 \oplus G_2$, что противоречит условию $g \notin G_1 \oplus G_2$. Полученное противоречие означает, что модуль ${}_{E(G)}G$ чисто прост. Таким образом, утверждение 1В полностью доказано. □

Утверждение 2. *Если $G \approx G_1 \oplus G_2$, $R(G) \cong \mathbb{Q}$ и $\mathrm{Hom}(G_1, G_2) = \mathrm{Hom}(G_2, G_1) = 0$, то модуль ${}_EG$ содержит чистые подмодули ранга 1 при $G = G_1 \oplus G_2$, а при $G \neq G_1 \oplus G_2$ модуль ${}_EG$ не содержит чистых подмодулей ранга 1.*

Доказательство. Если $G = G_1 \oplus G_2$, то G_2 является эндочистым подмодулем группы G. Тогда всякая сервантная подгруппа из G_2 служит эндочистым подмодулем группы G и не выделяется в G прямым слагаемым.

Пусть теперь $\lambda G \subset G_1 \oplus G_2 \subset G$ и $\lambda \neq 1$. Покажем, что ${}_EG$ не содержит чистых подмодулей ранга 1. Допустим, что B — эндочистый подмодуль ранга 1 в группе G. Тогда $B \neq G_1$ и $B \subset G_2$. Покажем, что подгруппа $A = \{g \in G \mid \lambda g \in G_1 \oplus B\}$ сервантна и вполне характеристична в G. Если $ng = a$ ($g \in G$, $a \in A$), то $n\lambda g = \lambda a = h_1 + b_1$, где $h_1 \in G_1$, $b_1 \in B$, $\lambda g = g_1 + g_2$ ($g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$). Отсюда $g_2 \in B$ и $g \in A$. Далее, если $\varphi \in E$, то $\varphi\colon G_1 \to G_1$, $\varphi\colon B \to B$, следовательно, $\lambda(\varphi a) = \varphi(\lambda a) = \varphi(h_1 + b_1) \in G_1 \oplus B$ и $\varphi a \in A$. Из всего этого следует, что $\lambda A \subset G_1 \oplus B \subset A$ и ${}_EB$ есть чистый подмодуль в ${}_EA$. Взяв произвольный элемент $a \in A$ и квазипроекцию $\rho \in E$ группы G на G_2, получим равенство $\rho a = b$, где $\lambda a = h_1 + b$ ($h_1 \in G_1$, $b \in B$). В силу чистоты найдётся элемент $b_1 \in B$, такой что $b = \rho b_1 = \lambda b_1$. Отсюда $h_1 = \lambda(a - b_1) = \lambda g_1$, где $g_1 \in G_1$. Следовательно, $a = g_1 + b_1$ и $A = G_1 \oplus B$. Теперь можно показать, что ${}_EA$ является сервантным подмодулем в ${}_EG$. Действительно, если $\varphi g = a$, где $\lambda g = g_1 + g_2$ ($g_i \in G_i$) и $a = h_1 + b_1$ ($h_1 \in G_1$, $b_1 \in B$), то $\varphi g_1 = \lambda h_1 \in G_1$, $\varphi g_2 = \lambda b_1 \in B$. Значит, $g_2 \in B$ и $g \in A$. Но из сервантности ${}_EA$ в ${}_EG$ следует сервантность ${}_EG_1$ в ${}_EG$, а это противоречит тому, что $\lambda \neq 1$, так как в этом случае G_1 выделяется прямым слагаемым в G (см. лемму 1). □

Утверждение 3А. *Если $G \approx G_1 \oplus G_2$, $R(G_2) \cong \mathbb{Q}$ и $r(\mathrm{Hom}(G_2, G_1)) = 2$, то модуль ${}_EG$ чисто прост.*

Доказательство. Если A — эндочистый подмодуль группы G и $\lambda G \subset \subset G_1 \oplus G_2 \subset G$, то $\lambda A \subset (A \cap G_1) \oplus (A \cap G_2) \subset A$. Допустим, что $A \cap G_1 = 0$, тогда $A \subset G_2$ и найдётся такой $\varphi \in E$, что $\varphi(G_2) \subset G_1$ и $\varphi(G_1) = 0$. Но тогда $\varphi(A) \subset G_1$, что противоречит вполне характеристичности A. Допустим, что $A \cap G_2 \neq G_2$. Тогда найдутся $g \in G_2 \setminus A$ и $\psi \in E$, такие что $\psi g = a \in G_1$ и $\psi(G_1) = \psi(A) = 0$, что противоречит чистоте ${}_E A$ в модуле ${}_E G$. Таким образом, $A \cap G_1 = G_1$ и $A \cap G_2 = G_2$, т. е. $A = G$. □

Рассмотрим последний случай, когда $G \approx G_1 \oplus G_2$, $R(G_2) \cong \mathbb{Q}$ и $r(\mathrm{Hom}(G_2, G_1)) = 1$. Пусть φ — произвольный гомоморфизм $G_2 \to G_1$ и $a \in \ker \varphi$. Тогда для любого $f \in \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$ имеем $\ker f = \langle a \rangle_*$. Дополним элемент a элементом b до максимальной независимой системы группы G_2. Тогда $f(a) = 0$ и $f(b) \neq 0$, если $f \neq 0$. В этих обозначениях имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3B. *В группе G подгруппа $A = \langle a \rangle_*$ является сервантным подмодулем тогда и только тогда, когда A выделяется прямым слагаемым в подгруппе $\langle G_1, A \rangle_*$ группы G.*

Доказательство. Допустим, что A является сервантным подмодулем в ${}_E G$. Рассмотрим подгруппу $B = \{g \in G \mid \lambda g \in G_1 \oplus A\}$. Так же, как и в доказательстве утверждения 2, можно показать, что B является сервантной вполне характеристической подгруппой в G, $B = \langle G_1, A \rangle_*$ и A выделяется прямым слагаемым в B.

Обратно, если A служит прямым слагаемым в $B = \langle G_1, A \rangle_* = \{g \in G \mid \lambda g \in G_1 \oplus A\}$ и $\varphi g = a$, где $\varphi \in E$, $g \in G$ и $a \in A$, то имеем $\lambda g = g_1 + g_2$ $(g_i \in G_i)$ и $g_2 = xa + yb$, где $x, y \in \mathbb{Q}$. Считая, что $\{g_1, a, b\}$ есть максимальная независимая система в G, равенство $\varphi g = a$ можно записать в матричном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} s & 0 & r \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s, r, t \in \mathbb{Q}.$$

Отсюда $tx = \lambda a$ и $ty = 0$, т. е. $t \neq 0$, $y = 0$. Это означает, что $g_2 \in A$ и $g \in B$. Так как A выделяется прямым слагаемым в B, то проекция элемента g в A является решением уравнения $\varphi x = a$ в A, что и требовалось показать. □

Так как группа B имеет ранг 2, утверждение 3B можно переписать следующим образом.

Утверждение 3B. *Если $G \approx G_1 \oplus G_2$, $R(G_2) \cong \mathbb{Q}$ и $r(\mathrm{Hom}(G_2, G_1)) = 1$, то эквивалентны следующие условия*:

1) $A = \langle a \rangle_*$ — *сервантный подмодуль модуля* ${}_E G$;
2) $A = \langle a \rangle_*$ — *прямое слагаемое подгруппы* $\langle G_1, A \rangle_*$ *группы* G;
3) ${}_E A$ — *чистый подмодуль модуля* ${}_E B$, *где* $B = \langle G_1, A \rangle_*$.

Литература

[1] Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. — М., 1969.

[2] Турманов М. А. Эндочистые подмодули абелевых групп. — Автореферат дисс.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1991.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М., 1974. Т. 2. — М., 1977.

[4] Arnold D. Finite rank torsion-free Abelian groups and rings. — 1982. — Lecture Notes Math. Vol. 931.

[5] Cohn P. On the free product of associative rings I // Math. Z. — 1959. — Vol. 71. — P. 380—398.

[6] Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion-free group // Topics in Abelian Groups. — Chicago, 1963. — P. 51—68.