Топологический первичный квазирадикал

Б. БАЗИГАРАН, С. Т. ГЛАВАЦКИЙ, А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: serge@cnit.msu.ru

УДК 519.48

Ключевые слова: топологическое кольцо, первичный радикал.

Аннотация

В статье рассматривается топологический первичный квазирадикал $\mu(R)$ — пересечение всех замкнутых первичных идеалов в топологическом кольце R. Приведённые примеры показывают отличие $\mu(R)$ от ранее изучаемых топологических аналогов первичного радикала. Доказан ряд свойств $\mu(R)$, исследованы топологические первичные квазирадикалы колец матриц и колец многочленов.

Abstract

B. Bazigaran, S. T. Glavatsky, A. V. Mikhalev, A topological prime quasiradical, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 11—22.

In this paper, we consider a topological prime quasi-radical $\mu(R)$, which is the intersection of closed prime ideals in a topological ring R. Examples are given that show that $\mu(R)$ is different from those topological analogs of the prime radical that have been studied earlier. The topological prime quasi-radicals of matrix rings and rings of polynomials are investigated.

Введение

В [2] Арнаутов определил и рассмотрел топологический радикал Бэра $L(R)$ и множество $\mathfrak{M}(R)$ и показал, что они, вообще говоря, не совпадают. В первом параграфе мы определяем топологический первичный квазирадикал $\mu(R)$ как пересечение всех замкнутых первичных идеалов и приводим примеры, которые показывают, что $L(R) \neq \mu(R) \neq \mathfrak{M}(R)$. Во втором параграфе мы рассматриваем обычное радикальное свойство $\mu(R)$ и свойство топологических m-систем и получаем равносильное определение $\mu(R)$ как пересечения всех минимальных замкнутых первичных идеалов. В третьем параграфе мы рассматриваем кольцо матриц и доказываем, что $(\mu(R))_n = \mu(R_n)$. В четвёртом параграфе мы рассматриваем кольцо многочленов и доказываем, что $\mu(R[X]) = (\mu(R))[X]$ и $L(R)[X] \subseteq L(R[X])$, а также приводим пример, который показывает, что для некоторых колец $L(R)[X] \neq L(R[X])$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 11—22.

§ 1. Определения и примеры

Определение 1. Пусть R — топологическое кольцо. Замкнутый идеал I в R называется топологическим первичным идеалом, если из $AB \subseteq I$ следует $A \subseteq I$ или $B \subseteq I$, где A и B — замкнутые левые идеалы в R.

Предложение 1. *Если R — топологическое кольцо, $A \subseteq R$, $B \subseteq R$ и*

$$AB = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; a_i \in A,\ b_i \in B \text{ для каждого } i, \text{ удовлетворяющего условию } 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

то $[A]_R[B]_R \subseteq [AB]_R$, где $[C]_R$ — замыкание C в R.

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a'_i b'_i \in [A]_R[B]_R$, где $a'_i \in [A]_R$, $b'_i \in [B']_R$, и U — произвольная окрестность x. Для любого i найдётся такая окрестность U'_i, что $a'_i b'_i \in U'_i$, причём $U'_1 + \ldots + U'_n \subseteq U$, и найдутся окрестности V_i, W_i, такие что $a'_i \in V_i$, $b'_i \in W_i$, причём $V_i \cdot W_i \subseteq U'_i$. Так как $a'_i \in [A]_R$ и $a'_i \in V_i$ для любого i, то найдётся $a_i \in A \cap V_i$. Аналогично, так как $b'_i \in [B]_R$, найдётся $b_i \in B \cap W_i$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in V_1 W_1 + \ldots + V_n W_n \subseteq U'_1 + \ldots + U'_n \subseteq U.$$

Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \in AB$, то $x \in [AB]_R$. □

Предложение 2. *Пусть R — топологическое кольцо, A и B — левые идеалы в R, а I — замкнутый идеал. Равносильны следующие условия*:

1) *если $AB \subseteq I$, то $A \subseteq I$ или $B \subseteq I$;*
2) *если A и B — замкнутые идеалы и $AB \subseteq I$, то $A \subseteq I$ или $B \subseteq I$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна. Докажем 2) $\Longrightarrow$ 1). Если A и B — левые идеалы и $AB \subseteq I$, то $[A]_R[B]_R \subseteq [AB]_R \subseteq [I]_R = I$, т. е. $A \subseteq [A]_R \subseteq I$ или $B \subseteq [B]_R \subseteq I$. □

Следствие 1. *I является топологическим первичным идеалом тогда и только тогда, когда I — замкнутый первичный идеал.*

Определение 2. Пусть R — произвольное топологическое кольцо,

$$\mu(R) = \bigcap \{P \mid P \text{ — замкнутый первичный идеал в } R\}.$$

Назовём последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ элементов кольца R m'-последовательностью (см. [2]), если $b_{i+1} \in (b_i)^2$. Назовём последовательность $b_1, b_2, b_3, \ldots$ элементов топологического кольца R исчезающей, если для любой окрестности нуля V существует такое n, что $b_n \in V$. Обозначим через $\mathfrak{M}(R)$ множество всех элементов $b \in R$, для которых любая m'-последовательность, начинающаяся с b, является исчезающей.

Обозначим через $\mathfrak{N}(R)$ замыкание суммы всех топологических нильпотентных левых идеалов топологического кольца R (см. [2]). Для каждого ординала α определим замкнутый идеал $\mathfrak{N}_\alpha(R)$ следующим образом. Положим $\mathfrak{N}_0(R) = 0$. Пусть $\mathfrak{N}_\alpha(R)$ определены для всех $\alpha < \beta$. Если β предельный ординал, возьмём $\mathfrak{N}_\alpha(R) = \Big[\sum\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{N}_\alpha(R)\Big]_R$. Если же $\beta = \gamma+1$, то рассмотрим $\bar{R} = R/\mathfrak{N}_\gamma(R)$ и в качестве $\mathfrak{N}_\beta(R)$ возьмём прообраз идеала $\mathfrak{N}(\bar{R})$ в R. Существует такой ординал τ, что $\mathfrak{N}_\tau(R) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(R)$, обозначим $L(R) = \mathfrak{N}_\tau(R)$.

Приведём примеры, которые показывают, что $\mu(R) \neq L(R)$ и $\mu(R) \neq \mathfrak{M}(R)$.

Пусть R — свободно порождённое кольцо с бесконечным числом образующих $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и A_n обозначает множество всевозможных конечных сумм слов вида $ba_{i_1} \ldots a_{i_n} c a_{i_1} \ldots a_{i_n} d$, где a_{i_j} пробегают все a_i и b, c, d — либо целые числа, либо произвольные слова из R (см. [3, с. 1226]). Известно, что A_n образует базис окрестностей нуля топологии на R. Пусть p — простое число и $B_p = \big\{\sum a_{i_1} \ldots a_{i_n} \mid \exists j \colon a_{i_j} = a_p\big\}$, т. е. B_p состоит из конечных сумм, которые имеют сомножитель a_p. Очевидно, что B_p — идеал.

Предложение 3. *B_p — первичный замкнутый идеал.*

Доказательство. Если A и B — такие левые идеалы в R, что $A \nsubseteq B_p$ и $B \nsubseteq B_p$, то найдётся $x = \sum a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in A$ с таким слагаемым $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, что $a_{i_s} \neq a_p$, $1 \leqslant s \leqslant k$. Найдётся также $y = \sum a_{j_1} \ldots a_{j_n} \in B$ с таким слагаемым $a_{j_1} \ldots a_{j_k}$, что $a_{j_s} \neq a_p$, $1 \leqslant s \leqslant l$. Тогда $xy \notin B_p$, т. е. $AB \nsubseteq B_p$, и B_p — первичный идеал.

Пусть $x = \sum a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ — произвольный элемент из R/B_p. Тогда найдётся по крайней мере одно слагаемое $a_{j_1} \ldots a_{j_m}$ в $x = \sum a_{i_1} \ldots a_{i_n}$, такое что для любого j_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, выполнено $a_{j_k} \neq a_p$. Таким образом, все элементы в $x + A_m$ содержат слагаемое, которое не обладает сомножителем a_p. Поэтому существует такая окрестность $x + A_m$, что $(x + A_m) \cap B_p = \varnothing$, т. е. B_p замкнут. Следовательно, $\mu(R) \subseteq \bigcap\limits_p B_p = \{0\}$, но $\mathfrak{M}(R) = R$ [2, с. 1226], а это значит, что $\mu(R) \neq \mathfrak{M}(R)$.

Покажем, что $\mu(R) \neq L(R)$. Пусть R и B_p определены как и ранее, определим новый базис $\{A'_n\}$ окрестностей нуля. Пусть

$$A'_m = \Big\{\sum a_{i_1} \ldots a_{i_n} \;\Big|\; \exists a_{i_{j_1}} \ldots a_{i_{j_m}} : a_{i_j} = a_2,\ 1 \leqslant k \leqslant m\Big\},$$

т. е. A'_m состоит из конечных сумм, в каждом слагаемом которых a_2 появится сомножителем по крайней мере m раз.

Ясно, что A'_n является идеалом, что $A'_{m+1} \subseteq A'_m$ и $\{A'_m\}$ является базисом окрестностей нуля в R, где $\bigcap\limits_m A'_m = \{0\}$. Заметим, что A'_m — топологический нильпотентный идеал, так как для любой окрестности нуля C найдётся A'_n, такой что $A'_n \subseteq C$. Если $n \leqslant m$, то $A'_m \subseteq A'_n \subseteq C$, а если $m < n$, то $(A'_m)^n \subseteq A'_n \subseteq C$. Следовательно, $L(R) \neq 0$.

Покажем, что B_p замкнут. Пусть $x = \sum a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in R \setminus B_p$, тогда существует по крайней мере одно слагаемое $a_{j_1} \ldots a_{j_n}$ в x, такое что $a_{j_k} \neq a_p$ для любого j_k, $1 \leqslant k \leqslant m$. Таким образом, все элементы в $x + A'_{m+1}$ имеют слагаемое, которое не обладает сомножителем a_p, и поэтому $(x + A'_{m+1}) \cap B_p = \varnothing$, т. е. B_p — замкнутый первичный идеал. Тогда $\mu(R) \subseteq \bigcap\limits_p B_p = \{0\}$, $L(R) \neq \{0\}$. Отсюда $\mu(R) \neq L(R)$. □

§ 2. Отношения включения

Предложение 4. *Пусть I — замкнутый идеал в топологическом кольце R и $\omega\colon R \to R/I$ — естественная проекция. Если A — топологический первичный идеал в R, такой что $I \subseteq A$, и B — топологический первичный идеал в R/I, то $\omega(A)$ и $\omega^{-1}(B)$ — топологические первичные идеалы.*

Доказательство. Ясно, что $\omega(A)$ и $\omega^{-1}(B)$ — замкнутые идеалы. Также ясно, что $\omega(A)$ — первичный идеал, т. е. $\omega(A)$ — топологический первичный идеал. Пусть C и D — такие левые идеалы в R, что $CD \subseteq \omega^{-1}(B)$, тогда $(C+I)(D+I) \subseteq$ $\subseteq CD+ID+CI+I^2 \subseteq CD+I \subseteq \omega^{-1}(B)$. Далее, $((C+I)/I)((D+I)/I) \subseteq B$, значит, $((C+I)/I) \subseteq B$ или $((D+I)/I) \subseteq B$, поэтому $C \subseteq \omega^{-1}(B)$ или $D \subseteq \omega^{-1}(B)$, т. е. $\omega^{-1}(B)$ — топологический первичный идеал. □

Следствие 2. *Если R — топологическое кольцо, то $\mu(R/\mu(R)) = \{0\}$.*

Следствие 3. *$\mu(R)$ является пересечением всех замкнутых идеалов I в R, таких что $\mu(R/I) = \{0\}$.*

Предложение 5. *Пусть I — идеал в кольце R и P — первичный идеал в R. Тогда $P \cap I$ является первичным идеалом в кольце I.*

Следствие 4. *Пусть R — топологическое кольцо и I — замкнутый идеал в R, и пусть R/I и I не имеют замкнутых первичных идеалов. Тогда R тоже не имеет замкнутых первичных идеалов, т. е. если $\mu(I) = I$ и $\mu(R/I) = R/I$, то $\mu(R) = R$.*

Следствие 5. *Пусть I — идеал в топологическом кольце R, тогда $\mu(I) \subseteq$ $\subseteq I \cap \mu(R)$.*

Предложение 6. *Пусть J — первичный идеал в кольце I и I — идеал в кольце R. Тогда J является идеалом в R.*

Доказательство. Так как $\langle J \rangle_R^3 \subseteq J$, то $\langle J \rangle_R \subseteq J$, следовательно, $J = \langle J \rangle_R$. □

Следствие 6. *$\mu(I)$ является идеалом в топологическом кольце R для каждого идеала I.*

Предложение 7. *Для открытого идеала I топологического кольца R имеем $\mu(I) = \mu(R) \cap I$.*

Доказательство. Если I как кольцо имеет замкнутый первичный идеал J, известно, что $I \setminus J$ является m-системой в I, а также в R (см. [1]), что $I \setminus J$ — открытое множество в R и что J — замкнутый идеал в R, для которого $J \cap (I \setminus J) = \varnothing$. Следовательно, существует первичный идеал P, такой что $J \subseteq P$, $P \cap (I \setminus J) = \varnothing$ и $P \cap I = J$. Идеал P замкнутый, потому что в противном случае $P \subsetneq [P]_R$ и $[P]_R \cap (I \setminus J) \neq \varnothing$, но так как $I \setminus J$ — открытое множество, то $P \cap (I \setminus J) \neq \varnothing$, что неверно. Следовательно, существует замкнутый первичный идеал P в R, такой что $J = P \cap I$, т. е.

$$\mu(I) \subseteq \bigcap\{P \cap I \mid P \text{ — замкнутый первичный идеал в } R\} = \mu(R) \cap I. \quad \square$$

Определение 3. Подмножество K топологического кольца R назовём топологической m-системой в R, если K открыто и для любых двух элементов a и b из R множество aRb содержит по крайней мере один элемент из K, т. е. $aRb \cap K \neq \varnothing$.

Ясно, что идеал I кольца R тогда и только тогда является топологическим первичным идеалом этого кольца, когда $R \setminus I$ является топологической m-системой.

Предложение 8. *Всякая топологическая m-система K без нуля кольца R содержится в топологической m-системе K^*, которая является максимальной в классе топологических m-систем без нуля.*

Доказательство. По лемме Цорна в классе m-систем, содержащих K и не содержащих нуля, существует максимальная m-система K^*. $\square$

Предложение 9. *Пусть в топологическом кольце R дана произвольная топологическая m-система K без нуля. Тогда в кольце R существует топологический первичный идеал I, который является максимальным в классе топологических первичных идеалов, не пересекающихся с K.*

Доказательство. Известно, что существует первичный идеал I, который является максимальным в классе первичных идеалов, не пересекающихся с K. Идеал I замкнут, потому что в противном случае $I \subsetneq [I]_R$ и $[I]_R \cap K \neq \varnothing$, но так как K — открытое множество, то $I \cap K \neq \varnothing$, что неверно. $\square$

Предложение 10. *Топологический первичный идеал I кольца R тогда и только тогда является минимальным топологическим первичным идеалом этого кольца, когда $R \setminus I$ является максимальной в классе топологических m-систем без нуля.*

Предложение 11. *Каждый топологический первичный идеал I кольца R содержит минимальный топологический первичный идеал этого кольца.*

Следствие 7. *Пусть R — произвольное топологическое кольцо, тогда*

$$\mu(R) = \bigcap\{P \mid P \text{ — минимальный топологический первичный идеал в } R\}.$$

§ 3. Случай колец матриц

Предложение 12. *Любое топологическое кольцо R можно вложить в качестве открытого идеала в топологическое кольцо R' с единицей так, что если I — замкнутый первичный идеал в R, то его образ I' в R' тоже замкнутый первичный идеал и $\mu(R) = \mu(R')$.*

Доказательство. Пусть $R' = \{(n, a) \mid n \in \mathbb{Z}$ и $a \in R\}$. Определим умножение и сложение следующим образом:

$$(n_1, a_1)(n_2, a_2) = (n_1 n_2, a_1 a_2 + n_1 a_2 + n_2 a_1),$$
$$(n_1, a_1) + (n_2, a_2) = (n_1 + n_2, a_1 + a_2).$$

Определим базис окрестностей нуля в кольце R':

$$\mathfrak{B}'_0 = \{(0, a) \mid a \in V, \text{ где } V \text{ — окрестность нуля в } R\}.$$

Очевидно, что R' с этой топологией является топологическом кольцом, которое содержит R в качестве открытого идеала. Следовательно, если I — замкнутый первичный идеал в R, то его образ I' в R' тоже замкнутый первичный идеал и $\mu(R) = \mu(R')$. Согласно предложению 7 $\mu(R) = \mu(R') \cap R$. Так как кольцо R'/R изоморфно кольцу целых чисел с дискретной топологией и так как $\mu(R')$ есть пересечение всех замкнутых идеалов I в R', то $\mu(R'/I) = \{0\}$ и $\mu(R') \subseteq R$. Следовательно, $\mu(R) = \mu(R') \cap R = \mu(R')$. □

Пусть R — топологическое кольцо. Обозначим через R_n кольцо всех матриц n-го порядка с топологией, которую порождает базис окрестностей нуля

$$\mathfrak{B}_0 = \{\|a_{ij}\| \mid a_{ij} \in V, \text{ где } V \text{ — окрестность нуля в } R\}.$$

Лемма 1. *Пусть R — топологическое кольцо. Идеал $A \subseteq R$ замкнут тогда и только тогда, когда идеал $A_n = \{\|a_{ij}\| \mid a_{ij} \in A\}$ замкнут в R_n.*

Доказательство. Пусть $\|a_{ij}\| \notin A_n$, тогда хотя бы один из элементов a_{ij} не принадлежит A. Значит, существует такая окрестность нуля V в R, что $(x_{ij} + V) \cap A = \varnothing$. Тогда $(\|x_{ij}\| + V_n) \cap A_n = \varnothing$, где $V_n = \{\|a_{ij}\| \mid a_{ij} \in V\}$, т. е. A_n замкнут в R_n.

Пусть A_n замкнут в R_n, $b \in R/A$ и

$$B = \begin{bmatrix} b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $B \notin A_n$ и существует такая окрестность нуля V в R, что $(B + V_n) \cap A_n = \varnothing$. Значит, $(b + V) \cap A = \varnothing$, т. е. A замкнут в R. □

Лемма 2. *Пусть R — топологическое кольцо с единицей. Идеал I первичный в R тогда и только тогда, когда идеал I_n первичный в R_n.*

Следствие 8. *Пусть R — топологическое кольцо с единицей. Идеал I — замкнутый первичный идеал в R тогда и только тогда, когда идеал I_n — замкнутый первичный идеал в R_n.*

Предложение 13. *Для топологического кольца R имеет место равенство $(\mu(R))_n = \mu(R_n)$.*

Доказательство. Из следствия 8 вытекает, что

$$\mu(R'_n) = \bigcap\{I_n \mid I \text{ — замкнутый первичный идеал в } R'\}.$$

Таким образом, $\|a_{ij}\| \in \mu(R'_n)$ тогда и только тогда, когда для любого замкнутого первичного идеала $I \in R'$ и любых i и j имеем $a_{ij} \in I$, т. е. $a_{ij} \in \mu(R')$ для любых i и j, иными словами, $\|a_{ij}\| \in (\mu(R'))_n$. Теперь из предложения 12 следует, что $\mu(R_n) = \mu(R'_n) = (\mu(R'))_n = (\mu(R))_n$. □

Следствие 9. *$\mu(R) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(R_n) = 0$.*

§ 4. Случай колец многочленов

Теперь рассматривается топологический первичный квазирадикал топологического кольца многочленов $R[X]$, где R — хаусдорфово топологическое кольцо с единицей и X — полное регулярное топологическое пространство (см. [5, с. 392]). Если X — вполне регулярное пространство, то через F_X обозначим свободную полугруппу с единицей, которую порождает множество X. Пусть R — кольцо с единицей, тогда полугрупповое кольцо RF_X называется кольцом многочленов и обозначается через $R[X]$. Пусть R — хаусдорфово топологическое кольцо с единицей, X — вполне регулярное пространство и Δ — семейство всех непрерывных действительных функций на X, такое что для любого закрытого подмножества F в X и любого элемента $x \in X \setminus F$ существует $\varphi \in \Delta$, такое что $1 - \varphi \in \Delta$, $\varphi(x) = 1$ и $\varphi(y) = 0$ для любого $y \in F$. Пусть $P_0(X) = \{\gamma \mid \gamma\colon X \cup \{0\} \to X \cup \{0\}$ и $\gamma(0) = 0$, где $0 \in R\}$. Через $\tilde{\gamma}$ для любого $\gamma \in P_0(X)$ обозначаем эндоморфизм на $\{0\} \cup F_X$, такой что

$$\tilde{\gamma}(x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}) = (\gamma(x_1))^{k_1} \cdot (\gamma(x_2))^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\gamma(x_n))^{k_n},$$

и пусть $\Gamma = \{\tilde{\gamma} \mid \gamma \in P_0(X)\}$ (см. [5]).

Пусть $V \in \mathfrak{B}_\mathrm{o}(R)$, $\Phi\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Delta$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, тогда через $U(V, \Phi, n, \varepsilon)$ (см. [5]) обозначаем множество всех таких элементов $u \in R[X]$, что

$$u = \sum_{k=1}^{t} v_k \cdot z_k + \sum_{i=1}^{s} f_i \cdot (x_i - y_i) \cdot h_i + g,$$

где

$$\begin{aligned} &v_k \in R, \quad z_k \in F_X \text{ и } \deg z_k < n && \text{для } 1 \leqslant k \leqslant t;\\ &x_i, y_i \in X \text{ и } g, f_i, h_i \in R[X] && \text{для } 1 \leqslant i \leqslant s. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\sum_{\tilde{\gamma}(z_k)=z} v_k \in V \text{ для любого } \tilde{\gamma} \in \Gamma \text{ и } z \in F_X,\ \deg z < n,$$

$$\sum_{i=1}^{s} |\varphi(x_i) - \varphi(y_i)| < \varepsilon \text{ для любого } \varphi \in \Phi,$$

причём g равно 0 или сумме одночленов из $R[X]$ степени больше или равной n.

Будем отождествлять естественным образом кольцо R с подкольцом кольца $R[X]$.

Предложение 14. *Пусть R — топологическое кольцо и A — левый идеал в R.*

1. *A замкнут в R тогда и только тогда, когда $A[X]$ замкнут в $R[X]$.*
2. *Если A плотен в R, то $A[X]$ плотен в $R[X]$.*

Доказательство. Пусть A замкнут в R и $f = \sum\limits_{k \in K} a_k z_k \in R[X] \setminus A[X]$, причём $z_k \in F_X$, $a_k \in R$. Найдётся $i \in K$, такое что $a_i \notin A$. Пусть $\mathfrak{B}_0(R)$ — базис окрестностей нуля в R, тогда существует такая окрестность нуля $V \in \mathfrak{B}_0(R)$, что $(a_i + V) \cap A = \varnothing$. Пусть $\deg z_i = n$, $\varphi = \{\varphi_j \mid \varphi_j \colon X \to \{j\},\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ и $\varepsilon = 1/2$. Тогда $(a_i z_i + U(V, \varphi, n+1, \varepsilon)) \cap A[X] = \varnothing$, следовательно, $(f + U(V, \varphi, n+1, \varepsilon)) \cap A[X] = \varnothing$, т. е. $A[X]$ замкнут в $R[X]$. Так как $A[X]$ замкнут в $R[X]$, то $A = A[X] \cap R$ замкнут в R.

Пусть теперь $f \in R[X]$ и $U(V, \varphi, n, \varepsilon))$ — произвольная окрестность нуля в $R[X]$, и пусть $f = \sum\limits_{k=1}^{m} b_k z_k + h$, причём для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ выполнено $\deg z_k < n$, и $h = \sum c_\alpha z_\alpha \in F[X]$, где $\deg z_\alpha \geqslant n$. Тогда существует такая окрестность нуля $W \in \mathfrak{B}_0(R)$, что

$$\underbrace{W + \ldots + W}_{m} \subseteq V.$$

Так как A плотен в R, то для любого k, $1 \leqslant k \leqslant m$, найдётся такой элемент $a_k \in A$, что $b_k - a_k \in W$. Пусть $g = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k z_k$, тогда $f - g = \sum\limits_{k=1}^{m} (b_k - a_k) z_k + h \in U(V, \varphi, n, \varepsilon)$, а $g \in A[X]$. Отсюда $A[X]$ плотен в $R[X]$. $\square$

Предложение 15. *Пусть R — кольцо и I — идеал в R. Если I — первичный идеал в R, то $I[X]$ — первичный идеал в $R[X]$.*

Доказательство. Пусть $X = \{x\}$, $f(x)g(x) \in I[X]$ и $f(x) \notin I[X]$, где $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ и $f(x)g(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{m+n} x^{m+n}$. Пусть $k = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \notin I\}$. Тогда $b_0 \in I$ (так как $c_k = (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_{k-1} b_1) + a_k b_0$), и если $\{b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}\} \subseteq I$, то

$$\underbrace{(b_0a_{s+k}+b_1a_{s+k-1}+\ldots+b_{s-1}a_{k+1})}_{\in I}+b_sa_k+ \\ +\underbrace{(b_{s+1}a_{k-1}+\ldots+b_{s+k-1}a_1+b_{s+k}a_0)}_{\in I}=c_{s+k}\in I,$$

т. е. $b_s \in I$ и, следовательно, $g(x) \in I[x]$. Теперь пусть $AB \subseteq I[x]$, причём A и B — левые идеалы в $R[x]$ и $A \nsubseteq I[x]$. Тогда найдётся $f(x) \in F \setminus I[x]$. Так как $A \cdot B \subseteq AB \subseteq I[x]$, то $f(x)g(x) \in I[x]$ для любого $g(x) \in B$, и из доказанного следует, что $B \subseteq I[x]$, т. е. $I[x]$ — первичный идеал в $R[x]$. Повторяя это рассуждение, получаем, что $I[x_1, x_2]$ — первичный идеал в $R[x_1, x_2]$ и что $I[x_1, \ldots, x_n]$ — первичный идеал в $R[x_1, \ldots, x_n]$.

Пусть X — некоторое множество и $f(x)g(x) \in I[X]$, причём $f, g \in R[x]$, и пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество всех элементов из X, которые появились в f и g. Тогда $fg \in I[x_1, \ldots, x_n]$ и, следовательно, $f \in I[x_1, \ldots, x_n] \subseteq I[X]$, значит, $g \in I[x_1, \ldots, x_n] \subseteq I[X]$. Отсюда $I[X]$ — первичный идеал в R. □

Следствие 10. *Если I — замкнутый первичный идеал в топологическом кольце R, то $I[X]$ — замкнутый первичный идеал в $R[X]$.*

Предложение 16. *Пусть R — кольцо, $X = \{x_j \mid j \in J\}$ — множество, $j_0 \in J$ и $\pi\colon R[X] \to R$ — отображение, заданное следующим образом: для $f = \sum\limits_{j\in J} a_j z_j \in R[X]$, где $z_j \in F_X$, $a_j \in R$, положим $\pi(f) = a_{j_0}$, если $\deg z_{j_0} = 0$ и $\deg z_j \neq 0$ для любого $j \neq j_0$.*

1. *Если I — первичный идеал в R, то $\pi^{-1}(I)$ — первичный идеал в $R[X]$, а $\pi^{-1}(I) \cap R = I$.*
2. *Если P — первичный идеал в $R[X]$, то $P \cap R$ — первичный идеал в R.*
3. *Если R — топологическое кольцо, то π — непрерывный и открытый гомоморфизм.*

Доказательство.

1. Пусть A и B — идеалы в $R[X]$. Если $AB \subseteq \pi^{-1}(I)$, то $\pi(A)\pi(B) \subseteq I$ и, следовательно, $\pi(A) \subseteq I$ или $\pi(B) \subseteq I$, т. е. $A \subseteq \pi^{-1}(I)$ или $B \subseteq \pi^{-1}(I)$.

2. Пусть A и B — идеалы в R и $AB \subseteq P \cap R$. Так как $A[X]B[X] \subseteq (P \cap R)[X] \subseteq P$, то $A[X] \subseteq P$ или $B[X] \subseteq P$, а значит, $A = A[X] \cap R \subseteq P \cap R$ или $B = B[X] \cap R \subseteq P \cap R$.

3. Пусть $V \in \mathfrak{B}_0(R)$, тогда $U(V, \varphi, n, \varepsilon) \subseteq \pi^{-1}(V)$ и $\pi(U(V, \varphi, n, \varepsilon)) = V$ для любых φ, n, ε, т. е. π непрерывен и открыт. □

Предложение 17. *Пусть R — топологическое кольцо, тогда $\mu(R[X]) = (\mu(R))[X]$.*

Доказательство. Из предложения 16 следует, что если I — замкнутый первичный идеал в R, то $\pi^{-1}(I)$ — замкнутый первичный идеал в $R[X]$ и $\pi^{-1}(I) \cap R = I$, а если P — замкнутый первичный идеал в $R[X]$, то $P \cap R$ — замкнутый первичный идеал в R. Поэтому $\mu(R[X]) \cap R = \mu(R)$ и, следовательно, $(\mu(R))[X] \subseteq \mu(R[X])$.

Если P — замкнутый первичный идеал в $R[X]$, то из следствия 10 следует, что $(P \cap R)[X]$ — замкнутый первичный идеал в $R[X]$ и $(P \cap R)[X] \subseteq P$. Поэтому

$$\mu(R[X]) = \bigcap\{P \mid P \text{ — замкнутый первичный идеал в } R[X]\} =$$
$$= \bigcap\{(P \cap R)[X] \mid P \text{ — замкнутый первичный идеал в } R[X]\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcap\{I[X] \mid I \text{ — замкнутый первичный идеал в } R\} = \mu(R[X]). \quad \square$$

Предложение 18. *Пусть R — топологическое кольцо.*

1. *Если P — топологический нильпотентный идеал в $R[X]$, то $P \cap R$ — топологический нильпотентный идеал в R.*
2. *Если P — топологический нильпотентный идеал в R, то $P[X]$ — топологический нильпотентный идеал в $R[X]$.*

Доказательство.

1. Пусть $U' \in \mathfrak{B}_0(R)$, тогда найдётся такая окрестность нуля $U = U(V, \varphi, n, \varepsilon) \in \mathfrak{B}_0(R[X])$, что $U' = U \cap R$. Найдётся $k \in \mathbb{N}$, такое что $P^k \subseteq U$, а $(P \cap R)^k \subseteq P^k$, поэтому $(P \cap R)^k \subseteq U$. Так как $(P \cap R)^k \subseteq R$, то $(P \cap R)^k \subseteq U \cap R = U'$, т. е. $P \cap R$ — топологический нильпотентный идеал в R.

2. Для любого $U = U(V, \varphi, n, \varepsilon) \in \mathfrak{B}_o(R[X])$ найдётся $k \in \mathbb{N}$, такое что $P^k \subseteq V$. Для любого $f = \sum\limits_{\alpha \in A} a_\alpha z_\alpha \in (P[X])^k$ и для любого $\alpha \in A$ выполнено $a_\alpha \in P^k$. Так как P^k является идеалом и $P^k \subseteq V$, то $(P[X])^k \subseteq U(V, \varphi, n, \varepsilon)$, т. е. $P[X]$ — топологический нильпотентный идеал в $R[X]$. $\square$

Предложение 19. *Пусть R — топологическое кольцо.*

1. *Если I — идеал в R, то $R[X]/I[X]$ и $(R/I)[X]$ топологически изоморфны.*
2. *Пусть J_1 и J_2 — идеалы в R, $J_1 \subseteq J_2$, $\varphi\colon R/J_1 \to R/J_2$, $\varphi(r + J_1) = r + J_2$. Если $\bar{I}$ — топологический нильпотентный идеал в R/J_1, то $\varphi(\bar{I})$ тоже топологический нильпотентный идеал в R/J_2, и если $\psi_i\colon R \to R/J_i$, $i = 1, 2$, — естественные гомоморфизмы, то $\psi_1^{-1}(\bar{I}) \subseteq \psi_2^{-1}(\bar{I})$.*

Доказательство.

1. Пусть $\psi\colon (R/I)[X] \to R[X]/I[X]$, где $\psi\big(\sum (r_\alpha + I) z_\alpha\big) = \sum r_\alpha z_\alpha + I[X]$, $r_\alpha \in R$, $z_\alpha \in F_X$. Очевидно, ψ — корректно определённый изоморфизм. Также ясно, что $\psi(U(V + I, \varphi, n, \varepsilon)) = U(V, \varphi, n, \varepsilon) + I[X]$, где $V \in \mathfrak{B}_0(R)$. Поэтому ψ непрерывен и открыт (см. [5, с. 75]) и, следовательно, ψ — гомеоморфизм.

2. Пусть $\bar{I} = I/J$ — топологический нильпотентный идеал в R/J_1 и $V + J_2 \in \mathfrak{B}_0(R/J_2)$, где $V \in \mathfrak{B}_0(R)$. Найдётся $k \in \mathbb{N}$, такое что $\bar{I}^k = I^k + J_1 \subseteq V_1 + J_1$. Тогда для любого $x \in I^k$ найдётся такой элемент $v \in V$, что $x - v \in J_1 \subseteq J_2$. Значит, $\varphi(\bar{I})^k = I^k + J_2 \subseteq V + J_2$, т. е. $\varphi(\bar{I})$ — топологический нильпотентный идеал. Ясно, что $\varphi_1^{-1}(\bar{I}) \subseteq \varphi_2^{-1}\varphi(\bar{I})$. $\square$

Предложение 20. *Пусть R_i, $i = 1, 2$, — кольца, $f\colon R_1 \to R_2$ — эпиморфизм. Если I_α, $\alpha \in \Omega$, — идеалы в R_2, то $\sum\limits_{\alpha \in \Omega} f^{-1}(I_\alpha) = f^{-1}\Big(\sum\limits_{\alpha \in \Omega} I_\alpha\Big)$.*

Доказательство. Так как $J_1 = \sum\limits_{\alpha\in\Omega} f^{-1}(I_\alpha)$ и $J_2 = f^{-1}\Big(\sum\limits_{\alpha\in\Omega} I_\alpha\Big)$ являются такими идеалами, что $\ker f \subseteq J_1$, $\ker f \subseteq J_2$ и $f(J_1) = f(J_2) = \sum\limits_{\alpha\in\Omega} I_\alpha$, то $J_1 = J_2$. □

Предложение 21. *Пусть R — топологическое кольцо, I — идеал в R, $\varphi\colon R \to R/I$ — естественный эпиморфизм. Если A — идеал в R/I, то $\varphi^{-1}([A]_{R/I}) = [\varphi^{-1}(A)]_R$.*

Предложение 22. *Если R — топологическое кольцо, то $L(R)[X] \subseteq L(R[X])$.*

Доказательство. Требуется доказать, что $L(R) \subseteq L(R[X])$. Для этого докажем, что для любого α справедливо $\mathfrak{R}_\alpha(R) \subseteq \mathfrak{R}_\alpha(R[X])$ (см. [2]). Если $\alpha = 0$, то по определению $\mathfrak{R}_\alpha(R) = \mathfrak{R}_\alpha(R[X]) = 0$. Пусть $\{I_\alpha\}_\Omega$ — семейство всех топологических нильпотентных идеалов в R. По предложениям 18 и 19 $I_\alpha[X]$ — топологический нильпотентный идеал в $R[X]$ для любого $\alpha \in \Omega$ и $I_\alpha \subseteq I_\alpha[X]$, поэтому $\sum\limits_{\alpha\in\Omega} I_\alpha \subseteq \sum\limits_{\alpha\in\Omega} I_\alpha[X]$. Ясно, что

$$\mathfrak{R}_1(R) = \Big[\sum_{\alpha\in\Omega} I_\alpha\Big]_R \subseteq \Big[\sum_{\alpha\in\Omega} I_\alpha[X]\Big]_{R[X]} \subseteq \mathfrak{R}_1(R[X]),$$

т. е. $\mathfrak{R}_1(R) \subseteq \mathfrak{R}_1(R[X])$.

Теперь допустим, что $\mathfrak{R}_\alpha(R) \subseteq \mathfrak{R}_\alpha(R[X])$ для любого $\alpha < \beta$. Если β — предельный ординал, то $\sum\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{R}_\alpha(R) \subseteq \sum\limits_{\alpha<\beta} \mathfrak{R}_\alpha(R[X])$ и, значит,

$$\mathfrak{R}_\beta(R) = \Big[\sum_{\alpha<\beta} \mathfrak{R}_\alpha(R)\Big]_R \subseteq \Big[\sum_{\alpha<\beta} \mathfrak{R}_\alpha(R[X])\Big]_{R[X]} = \mathfrak{R}_\beta(R[X]).$$

Если $\beta = \alpha + 1$, то пусть $\bar{I} = I/\mathfrak{R}_\alpha(R)$ — топологический нильпотентный идеал в $R/\mathfrak{R}_\alpha(R)$. Тогда по предложениям 18 и 19 $\bar{I}[X]$ — топологический нильпотентный идеал в $(R/\mathfrak{R}_\alpha(R))[X] \cong^\psi R[X]/\mathfrak{R}_\alpha(R)[X]$, т. е. $\psi(\bar{I}[X])$ — топологический нильпотентный идеал в $R[X]/\mathfrak{R}_\alpha(R)[X]$. Так как $\mathfrak{R}_\alpha(R) \subseteq \mathfrak{R}_\alpha(R[X])$, то $J_1 = \mathfrak{R}_\alpha(R)[X] \subseteq \mathfrak{R}_\alpha(R[X]) = J_2$.

Пусть $\varphi\colon R[X]/\mathfrak{R}_\alpha(R)[X] \to R[X]/\mathfrak{R}_\alpha(R[X])$, $\psi_1\colon R[X] \to R[X]/J_1$, $\psi_2\colon R[X] \to R[X]/J_2$ — естественные гомоморфизмы. Тогда $I \subseteq \psi_1^{-1}\psi(\bar{I}[X]) \subseteq \psi_2^{-1}\varphi\psi(\bar{I}[X])$, т. е. для любого топологического нильпотентного идеала $\bar{I}$ в $R/\mathfrak{R}_\alpha(R)$ существует такой топологический нильпотентный идеал $\varphi\psi(\bar{I}[X])$ в $R[X]/\mathfrak{R}_\alpha(R[X])$, что I — подмножество $\psi_2^{-1}\varphi\psi(\bar{I}[X])$.

Пусть A_1 — множество всех топологических нильпотентных идеалов в $R/\mathfrak{R}_\alpha(R)$ и A_2 — множество всех топологических нильпотентных идеалов в $R[X]/\mathfrak{R}_\alpha(R[X])$, а φ_i — естественные гомоморфизмы $\varphi_1\colon R \to R/\mathfrak{R}_\alpha(R)$ и $\varphi_2\colon R[X] \to R[X]/\mathfrak{R}_\alpha(R[X])$. Тогда из предложения 20 следует, что

$$\varphi_1^{-1}\Big(\sum_{I\in A_1} I\Big) = \sum_{I\in A_1} \varphi_1^{-1}(I) \subseteq \sum_{I\in A_2} \varphi_2^{-1}(I) = \varphi_2^{-1}\Big(\sum_{I\in A_2} I\Big),$$

а по предложению 21 имеем

$$\mathfrak{R}_{\alpha+1}(R) = \varphi_1^{-1}\Big(\Big[\sum_{I\in A_1} I\Big]_R\Big) = \Big[\varphi_1^{-1}\Big(\sum_{I\in A_1} I\Big)\Big]_R \subseteq$$
$$\subseteq \Big[\varphi_2^{-1}\Big(\sum_{I\in A_2} I\Big)\Big]_{R[X]} = \varphi_2^{-1}\Big(\Big[\sum_{I\in A_2} I\Big]_{R[X]}\Big) = \mathfrak{R}_{\alpha+1}(R[X]),$$

т. е. $\mathfrak{R}_\beta(R) \subseteq \mathfrak{R}_\beta(R[X])$. $\square$

Пример. Пусть R — топологическое кольцо, которое не имеет ненулевых топологических нильпотентных идеалов. Ясно, что $L(R) = \{0\}$ и $L(R)[X] = \{0\}$. Пусть $I = \langle X\rangle_{R[X]}$ — идеал, порождённый в $R[X]$ множеством X. Тогда для любого $f = \sum\limits_{\alpha\in\Omega} a_\alpha z_\alpha \in I^n$ и любого $\alpha \in \Omega$ выполнено $\deg z_\alpha \geqslant n$. Следовательно, для любого $U(V,\varphi,n,\varepsilon) \in \mathfrak{B}_0(R[X])$ имеет место $I^n \subseteq U(V,\varphi,n,\varepsilon)$, т. е. I — топологический нильпотентный идеал, поэтому $L(R[X]) \neq \{0\}$. Следовательно, $L(R[X]) \nsubseteq L(R)[X]$.

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебры и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Арнаутов В. И. Топологический радикал Бэра и разложение колец // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1963. — Т. 5, № 6. — С. 1209—1227.

[3] Арнаутов В. И. Общая теория радикалов топологических колец // Изв. АН РМ. Мат. — 1996. — Т. 2 (21).

[4] Бурбаки Н. Общая топология. — М.: ИЛ, 1969.

[5] Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996.