

Новая характеристика функций, интегрируемых по Риману

В. К. ЗАХАРОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: valeri@zaharov.mccme.ru

А. А. СЕРЕДИНСКИЙ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: aleksandrs@aksion.com

УДК 517.518.121+517.987.1+517.518.2

Ключевые слова: равномерные функции, интеграл Римана, характеристика.

Аннотация

В работе даётся описание функций, интегрируемых по Риману, с помощью нового класса *равномерных функций*. Это описание позволяет прояснить «счётную» природу отношения между пространством функций, интегрируемых по Риману, и пространством непрерывных функций. Изложение ведётся для произвольного топологического пространства T с ограниченной радоновской мерой μ , носитель которой совпадает с T .

Abstract

V. K. Zakharov, A. A. Seredinskii, *A new characterization of Riemann-integrable functions*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 73–83.

In this paper, we describe Riemann-integrable functions with the help of a new class of *uniform functions*. This description allows us to uncover the “countable” nature of the relation between the space of Riemann-integrable functions and the space of continuous functions. The argumentation is performed for any given topological space T with limited Radon measure μ the support of which coincides with T .

Введение

В 1904 году Лебегом [4] и независимо от него Витали [5] была дана знаменитая характеристика функций, интегрируемых по Риману: *ограниченная функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой по Риману тогда и только тогда, когда множество точек разрыва функции f имеет меру нуль*. Несмотря на кажущуюся простоту описания функций, интегрируемых по Риману, отношение между пространством этих функций и подпространством непрерывных функций оказалось весьма загадочным.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 73–83.

© 2004 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

В данной работе даётся другое описание функций, интегрируемых по Риману, с помощью нового класса *равномерных функций*, введённых в [2, 3, 6] (следствие 3 теоремы 3). Это описание позволяет прояснить «счётную» природу отношения между указанными выше пространствами (предложение 2). Изложение ведётся для произвольного топологического пространства T с ограниченной радоновской мерой μ , носитель которой совпадает с T . Однако такое обобщение несколько не усложняет доказательства по сравнению с классическим случаем отрезка $[a, b]$ с мерой Лебега λ , порождённой длиной интервалов $l(|x, y|) \equiv y - x$. Результаты являются новыми и для классического случая. Авторы выражают благодарность Б. С. Кашину, Т. П. Лукашенко и В. А. Скворцову за плодотворное обсуждение.

1. Основные понятия

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство и μ — положительная ограниченная радоновская мера на T , то есть σ -аддитивная функция $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, a] \subset \mathbb{R}$, определённая на σ -алгебре $\mathcal{B}$ всех борелевских множеств пространства T , такая что $\mu B = \sup\{\mu K \mid K \subset B \text{ и } K \text{ — компактное множество}\}$ для любого $B \in \mathcal{B}$. Через $\mathcal{LN}_\mu$ обозначим σ -идеал всех μ -пренебрежимых множеств из T . Кроме того, будем считать, что T является носителем меры μ , то есть $\mu G \neq 0$ для любого открытого множества G .

Рассмотрим множество Δ всех конечных разбиений $\varkappa \equiv (Q_k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{LN}_\mu \mid k \in K)$ множества T , состоящих из открытых множеств и μ -пренебрежимых множеств. Скажем, что разбиение $\lambda \equiv (R_l \in \mathcal{G} \cup \mathcal{LN}_\mu \mid l \in L)$ является более тонким, чем разбиение $\varkappa$ ($\lambda \geq \varkappa$), если для любого $k \in K$ существует такое $L' \subseteq L$, что $Q_k = \bigcup (R_l \in \mathcal{G} \cup \mathcal{LN}_\mu \mid l \in L')$.

Относительно этого порядка Δ является направленным вверх. Для каждого разбиения $\varkappa \in \Delta$ рассмотрим *нижнюю* $s(f, \varkappa) \equiv \sum (\inf(f(t) \mid t \in Q_k) \mu Q_k \mid k \in K)$ и *верхнюю* $S(f, \varkappa) \equiv \sum (\sup(f(t) \mid t \in Q_k) \mu Q_k \mid k \in K)$ *суммы Дарбу* ограниченной функции $f: T \rightarrow \mathbb{R}$. Ясно, что $(s(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta)$ возрастает, $(S(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta)$ убывает и $s(f, \varkappa) \leq S(f, \varkappa)$.

Ограниченная функция f называется *μ -интегрируемой по Риману*, если

$$\sup(s(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta) = \inf(S(f, \varkappa) \mid \varkappa \in \Delta).$$

То, что данное определение является обобщением обычного определения для отрезка $[a, b]$ с мерой Лебега λ , порождённой длиной интервалов $l(|x, y|) \equiv y - x$, будет следовать из теоремы 2, следствия 1 теоремы 3 и характеристики Лебега—Витали (см. следствие 2 теоремы 3).

Множество всех ограниченных μ -интегрируемых по Риману функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через RI_μ . Это множество является линейным решёточным пространством. Рассмотрим его фактор-множество $R_\mu \equiv \text{RI}_\mu / \mathcal{LN}_\mu$. Оно тоже является линейным решёточным пространством. Класс эквивалентности функции $f \in \text{RI}_\mu$ относительно идеала $\mathcal{LN}_\mu$ будем обозначать через $\bar{f} \bmod \mathcal{LN}_\mu$.

Множество всех непрерывных ограниченных функций на пространстве $(T, \mathcal{G})$ обозначим через C . Рассмотрим отображение $u: C \rightarrow R_\mu$, такое что $uc \equiv \bar{c} \bmod \mathcal{LN}_\mu$. Функционально-факторное расширение $u: C \mapsto R_\mu$ называется *расширением Римана линейного решётчатого пространства C* .

2. Описание функций, μ -интегрируемых по Риману

Множество *конуль-множеств* $\text{coz } f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ всех непрерывных функций f на $(T, \mathcal{G})$ обозначим через $\mathcal{G}^0$.

σ -идеал $\mathcal{LN}_\mu$ является слишком большим для семейства RI_μ , поэтому понадобится ввести более подходящий идеал множеств.

Далее будем считать меру μ продолженной на семейство $\mathcal{LM}_\mu$ всех множеств, μ -измеримых по Лебегу. μ -измеримое множество X будем называть множеством полной меры, если $T \setminus X \in \mathcal{LN}_\mu$.

Семейство $\{U \in \mathcal{G}^0 \mid T \setminus U \in \mathcal{LN}_\mu\}$ всех конуль-множеств полной меры обозначим через $\mathcal{U}_\mu^0$. Оно порождает идеал множеств $\mathcal{R}_\mu \equiv \{R \subset T \mid \exists U \in \mathcal{U}_\mu^0 (R \subset T \setminus U)\}$. Этот идеал является *тощим*, то есть непустые открытые множества ему не принадлежат. Этот идеал не является σ -идеалом. Ясно, что $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{LN}_\mu$.

Множество X из T назовём S_μ -множеством, если $X = G \cup R$ для некоторых множеств $G \in \mathcal{G}^0$ и $R \in \mathcal{N}_\mu$. Семейство всех S_μ -множеств из T обозначим $\mathcal{SP}_\mu$. Оно является решёткой относительно объединений и пересечений, а также содержит края $\emptyset$ и T .

Для того чтобы описать функции, μ -интегрируемые по Риману, нам потребуется не пространство измеримых функций, а совсем другое функциональное пространство, которое мы введём ниже.

Пусть $\mathcal{S}$ — произвольное семейство множеств на множестве T . Напомним, что функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ называется $\mathcal{S}$ -измеримой, если $f^{-1}[G] \in \mathcal{S}$ для любого открытого множества G из $\mathbb{R}$. Множество всех таких функций на T обозначим через $M(T, \mathcal{S})$. Эти функции были введены Лебегом в начале 20-го века. Множество $M(T, \mathcal{S})$ является линейным решёточным пространством, если $\mathcal{S}$ является σ -аддитивным мультипликативным ансамблем с краями $\emptyset$ и T . Это условие на $\mathcal{S}$ является очень стесняющим. Поэтому в [2, 3, 6] было введено другое семейство функций на T . Функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ назовём $\mathcal{S}$ -равномерной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие $\sigma \equiv (S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T , такое что колебание $\omega(f, S_i) \equiv \sup(|f(s) - f(t)| \mid s, t \in S_i)$ функции f на каждом множестве S_i меньше ε . Семейство всех $\mathcal{S}$ -равномерных функций на T обозначим через $U(T, \mathcal{S})$. Оно является линейным решёточным пространством, если $\mathcal{S}$ является мультипликативным ансамблем с краями $\emptyset$ и T . Ясно, что $M_b(T, \mathcal{S}) \subset U(T, \mathcal{S})$.

Имея решёточное семейство $\mathcal{SP}_\mu$ всех S_μ -множеств на T , мы можем рассмотреть линейное решёточное пространство $U(T, \mathcal{SP}_\mu)$ всех равномерных функций относительно этого семейства.

Лемма 1. Пусть $f \in M(T, \mathcal{LM}_\mu)$ и $|f| \leq z\mathbf{1}$. Тогда множество $\mathcal{X} \equiv \{f^{-1}(y) \mid y \in [-z, z] \text{ и } f^{-1}(y) \notin \mathcal{LN}_\mu\}$ счётное.

Доказательство. По условию $\mu M \leq a$ для любого $M \in \mathcal{LM}_\mu$ и некоторого $a \in \mathbb{R}_+$. Возьмём $\mathcal{X}_n \equiv \{X \in \mathcal{X} \mid \mu X > 1/n\}$. Тогда $\mathcal{X} = \bigcup (\mathcal{X}_n \mid n \in \mathbb{N})$. Предположим, что хотя бы одно $\mathcal{X}_n$ бесконечно. Тогда существует инъективное отображение $u: \omega \rightarrow X_n$. Пусть $X_i \equiv u(i) \in \mathcal{X}_n$ и $L = \bigcup (X_i \in \mathcal{X}_n \mid i \in ([a]+2)n)$. Если $i \neq j$, то $X_i \neq X_j$, и, значит, $X_i \cap X_j = \emptyset$. Поэтому в силу аддитивности меры μ мы получаем $\mu L = \sum (\mu X_i \mid i \in ([a]+2)n) \geq (1/n)([a]+2)n = [a]+2 > a$. С другой стороны, $\mu L \leq a$. Значит, все $\mathcal{X}_n$ конечны, а $\mathcal{X}$ счётное.

Следствие. В условиях предыдущей леммы множество $\mathcal{Y} \equiv \{y \in [-z, z] \mid f^{-1}(y) \notin \mathcal{LN}_\mu\}$ счётное.

Лемма 2. Рассмотрим функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $|f| \leq z\mathbf{1}$. Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существуют конуль-множество полной меры $U \in \mathcal{U}_\mu^0$ и его конечное покрытие $(G_k \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K)$, такие что $\omega(f, G_k) < \varepsilon$.

Доказательство. Импликация 1) $\implies$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ разобьём интервал, содержащий множество значений функции f , точками x_{ni} так, чтобы $x_{ni+1} - x_{ni} < 1/4n$. Рассмотрим множества $Q_{ni} \equiv f^{-1}[x_{ni-1}, x_{ni+1}]$, $H_{ni} \equiv \bigcup \{G_{nk} \in \mathcal{G}^0 \mid G_{nk} \cap Q_{ni} \neq \emptyset\}$ и $R_{ni} \equiv (T \setminus U_n) \cap Q_{ni}$. Тогда S_μ -множество $X_{ni} \equiv H_{ni} \cup R_{ni}$ образует искомое покрытие T и $\omega(f, X_{ni}) < 1/n$.

Теорема 1. $U(T, \mathcal{SP}_\mu) \subset \text{RI}_\mu$.

Доказательство. Рассмотрим множества

$$Y \equiv f^{-1}[x, y] \text{ и } Y_n \equiv f^{-1}[x + 1/n, y - 1/n].$$

Тогда $Y = \bigcup X_n$, где $X_n \equiv \bigcup \{X_{nk} \in \mathcal{SP}_\mu \mid X_{nk} \cap Y_n \neq \emptyset\}$ и $(X_{nk} \in \mathcal{SP}_\mu \mid k \in K_n)$ — конечные покрытия T , такие что $\omega(f, X_{nk}) < 1/n$. Следовательно, $Y = G \cup I$ для некоторых непересекающихся $G \in \mathcal{G}$ и $I \in \mathcal{LN}_\mu$. Это означает, что $Y \in \mathcal{LM}_\mu$. Поэтому $f^{-1}(x) \in \mathcal{LM}_\mu$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Пусть f принимает значения в интервале $[-z, z]$. По следствию леммы 1 множество $\mathcal{Y} \equiv \{y \in [-z, z] \mid f^{-1}(y) \notin \mathcal{LN}_\mu\}$ является счётным. Поэтому для каждого n найдётся конечная последовательность

$$y_{n0} \equiv -(z+1) < \dots < y_{ni} < \dots < y_{np} \equiv z+1,$$

такая что $y_{ni} - y_{ni-1} < 1/n$ и $y_{ni} \notin \mathcal{Y}$. Действительно, предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ не существует такого набора y_{ni} . Это означает, что существует такой интервал $[a, b] \subset [-(z+1), z+1]$, что $f^{-1}(y) \notin \mathcal{LN}_\mu$ для любого $y \in [a, b]$. Отсюда $[a, b] \subset \mathcal{Y}$, что противоречит счётности множества $\mathcal{Y}$. Рассмотрим разбиение T , состоящие из множеств $X_{ni} \equiv f^{-1}[y_{ni-1}, y_{ni}]$ и $J_{ni} \equiv f^{-1}(y_{ni}) \in \mathcal{LN}_\mu$. Как установлено выше, X_{ni} разбивается на множества $G_{ni} \in \mathcal{G}$ и $I_{ni} \in \mathcal{LN}_\mu$.

Разбиение $(G_{ni} \in \mathcal{G}, I_{ni} \in \mathcal{LN}_\mu, J_{ni} \in \mathcal{LN}_\mu \mid i \in I)$ обозначим через $\varkappa_n$. Имеем $S(f, \varkappa) - s(f, \varkappa) < \mu T/n$. Значит, $f \in \text{RI}_\mu$.

Поскольку идеал $\mathcal{N}_\mu$ не является σ -идеалом, нам потребуется несколько иное определение эквивалентности функций относительно этого идеала.

Функции f и g на T называются *эквивалентными относительно идеала* $\mathcal{N}_\mu$, если $\{t \in T \mid |f(t) - g(t)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{N}_\mu$ для любого $\varepsilon > 0$. Обозначим это отношение эквивалентности так: $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Следствие. Пусть $f, g \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$. Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) $f \sim g \bmod \mathcal{LN}_\mu$;
- 2) $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Рассмотрим функцию $h \equiv f - g \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$. Пусть $|h(t)| < 1/n$ для любого $t \notin I_n \in \mathcal{LN}_\mu$. По лемме 2 существуют $U_n \in \mathcal{U}_\mu^0$ и $(G_{nk} \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K_n)$, такие что $\omega(h, G_{nk}) < 1/n$. Пусть $t \in U_n$. Тогда $t \in G_{nk}$ для некоторого k . Возьмём некоторую точку $s \in G_{nk} \setminus I_n$. Так как $|h(s)| < 1/n$, то $|h(t)| < 2/n$, следовательно, $f \sim g \bmod \mathcal{N}_\mu$. Импликация 2) $\implies$ 1) очевидна.

Это означает, что $\bar{f} \bmod \mathcal{LN}_\mu = \bar{f} \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Лемма 3. Рассмотрим функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, такую что $|f| \leq z\mathbf{1}$, и множество $G \in \mathcal{G}^0$, такое что $f|_G \in C(G)$. Тогда $f^{-1}[x, y] \in \mathcal{G}^0$ для любого интервала $]x, y[$.

Доказательство. Пусть $G = \text{coz } c$ для некоторой функции $c \in C$ и $h \in C(G)$. Определим функцию $g \in C$, положив $g(t) \equiv h(t)c(t)$ для любого $t \in G$ и $g(t) \equiv 0$ для $t \notin G$. Тогда $\text{coz } g = \text{coz } h \in \mathcal{G}^0$. Положим $h(t) \equiv ((f(t) - x) \vee 0) \wedge ((y - f(t)) \vee 0)$. Тогда $f^{-1}[x, y] = \text{coz } g \in \mathcal{G}^0$.

Предложение 1. Пусть $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда равносильны следующие утверждения:

- 1) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$;
- 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют конуль-множество $U_n \in \mathcal{U}_\mu^0$ полной меры и функция $f_n: T \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $f_n|_{U_n} \in C(U_n)$ и $|f(t) - f_n(t)| < 1/n$ для любого $t \in U_n$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Рассмотрим для функции f множества $U_n \in \mathcal{U}_\mu^0$ и покрытия $(G_{nk} \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K_n)$ из леммы 2. Для них выполняется $\omega(f, G_{nk}) < 1/n$. Зафиксируем число n . Пусть $G_{nk} = \text{coz } f_k$ для некоторой функции $f_k \in C$, такой что $0 < f_k \leq 1/2$. Рассмотрим для $i \geq 3$ множества $C_{ki} \equiv f_k^{-1}[1/(i+1), 1/(i-1)[$ и $D_{ki} \equiv f_k^{-1}[1/(i+2), 1/(i-2)[$.

Рассмотрим функции $f_{ki} \equiv ((f_k - 1/(i+2)) \vee 0) \wedge ((1/(i-2) - f_k) \vee 0)$. Иначе говоря, $f_{ki}(t) = 0$, если $f_k(t) \leq 1/(i+2)$; $f_{ki}(t) = f_k(t) - 1/(i+2)$, если $f_k(t) > 1/(i+2)$ и $f_k(t) - 1/(i+2) \leq 1/(i-2) - f_k(t)$; $f_{ki}(t) = (1/(i-2) - f_k(t))$, если $f_k(t) < 1/(i-2)$ и $f_k(t) - 1/(i+2) > 1/(i-2) - f_k(t)$; наконец, $f_{ki}(t) = 0$,

если $f_k(t) \geq 1/(i-2)$ для любого $t \in T$. Тогда $f_{ki}(t) \geq 1/(i+1)(i+2)$ для любого $t \in C_{ki}$.

Теперь рассмотрим функции $g_{ki} \equiv (i+1)(i+2)f_{ki} \wedge 1$ ($g_{ki}(t)$ равняется минимуму из чисел $(i+1)(i+2)f_{ki}(t)$ и 1 для любого $t \in T$). Ясно, что $\text{coz } g_{ki} = D_{ki}$ и $g_{ki}[C_{ki}] = \{1\}$. Положим $x_{ki} \equiv \inf\{f_k(t) \mid t \in C_{ki}\}$. Определим функцию g на T , положив $g(t) \equiv \sup(x_{ki}g_{ki}(t) \mid k \in K_n, i \in I)$ для любого $t \in U_n$ и $g(t) \equiv 0$ для $t \notin U_n$. Если $D_{ki} \cap D_{kj} \neq \emptyset$, то $|i-j| \leq 4$. Следовательно, покрытие $(D_{ki} \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K_n)$ множества U_n является локально конечным. Поэтому функция g является непрерывной на U_n . Если $t \in U_n$, то $t \in C_{ki}$ для некоторых индексов $k, i \in \mathbb{N}$, и, следовательно, $f(t) \geq g(t) \geq x_{ki} \geq f(t) - 1/n$.

Импликация 2) $\implies$ 1) является простым следствием лемм 3 и 2).

Установим теперь связь между пространствами C и $U(T, \mathcal{SP}_\mu)$. Рассмотрим семейство S_1^0 всех ограниченных функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, таких что $f^{-1}[[x, \infty[\in \mathcal{G}^0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Эти функции будем называть $\mathcal{G}^0$ -полу непрерывными снизу. Аналогично определим семейство S_u^0 всех функций, $\mathcal{G}^0$ -полу непрерывных сверху.

Следствие. Рассмотрим функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $|f| \leq z1$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$;
- 2) для f существуют функции $g \in S_1^0$ и $h \in S_u^0$, такие что $g \leq f \leq h$ и $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$;
- 3) для f существуют функции $g \in S_1^0 \cap U(T, \mathcal{SP}_\mu)$ и $h \in S_u^0 \cap U(T, \mathcal{SP}_\mu)$, такие что $g \leq f \leq h$ и $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть $|f| \leq z1$. Возьмём для $\varepsilon \equiv 1/n$ множества U_n и $(G_{nk} \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K_n)$ из леммы 2. Рассмотрим числа $x_{nk} \equiv \inf(f(t) \mid t \in G_{nk})$ и $y_{nk} \equiv \sup(f(t) \mid t \in G_{nk})$. Определим функции $g_{nk} \in S_1^0$, полагая $g_{nk} \equiv -z$ для любого $t \notin G_{nk}$ и $g_{nk} \equiv x_{nk}$ для любого $t \in G_{nk}$. Определим также функции $h_{nk} \in S_u^0$, полагая $h_{nk} \equiv z$ для любого $t \notin G_{nk}$ и $g_{nk} \equiv y_{nk}$ для любого $t \in G_{nk}$. Рассмотрим $g \in S_1^0$ и $h \in S_u^0$, такие что $g(t) \equiv \sup(g_{nk}(t) \mid n \in \mathbb{N}, k \in K_n)$ и $h(t) \equiv \inf(h_{nk}(t) \mid n \in \mathbb{N}, k \in K_n)$. Тогда $g \leq f \leq h$ и $0 \leq h(t) - g(t) < 1/n$ для любого $t \in U_n$.

Проверим импликацию 2) $\implies$ 3). Возьмём $\varepsilon \equiv 1/n$. Из определения эквивалентности следует, что $h(t) - g(t) < 1/2n$ для некоторого множества полной меры $U_n \in \mathcal{U}_\mu^0$ и каждого $t \in U_n$. Разобьём интервал, содержащий множества значений функций f и h , точками x_i так, что $x_{i+1} - x_i = 1/2n$. Рассмотрим множества $G_{ni} \equiv g^{-1}[[x_{i-1}, \infty[\cap h^{-1}[[-\infty, x_{i+1}[\cap U_n$. Пусть $t \in U_n$, тогда из того, что $x_{i-1} < g(t) \leq x_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$, следует $t \in G_{ni}$. Следовательно, $U_n = \bigcup (G_{ni} \in \mathcal{G}^0 \mid i \in I)$. Пусть $s, t \in G_{ni}$. Тогда $g(s) - g(t) \leq h(s) - g(t) < x_{i+1} - x_{i-1} = 1/n$ и $g(s) - g(t) \geq g(s) - h(t) > x_{i-1} - x_{i+1} = -1/n$. Это означает, что $\omega(g, G_{ni}) < \varepsilon$. Аналогично, $\omega(h, G_{ni}) < \varepsilon$. По лемме 2 $g, h \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 1). Так как $g, h \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся конечные покрытия $(Q_k \in \mathcal{SP}_\mu \mid k \in K)$ и $(R_l \in \mathcal{SP}_\mu \mid l \in L)$, та-

кие что $\omega(g, Q_k) < \varepsilon/2$ и $\omega(h, R_l) < \varepsilon/2$ для всех $k \in K$ и $l \in L$. Из определения эквивалентности следует, что $h(t) - g(t) < \varepsilon/2$ для некоторого конуль-множества полной меры $U \in \mathcal{U}_\mu^0$ и каждого $t \in U$. По определению $Q_k = G_k \cup I_k$ и $R_l = H_l \cup J_l$ для некоторых $G_k, H_l \in \mathcal{G}^0$ и $I_k, J_l \in \mathcal{N}_\mu$. Рассмотрим конуль-множество полной меры

$$V \equiv U \cap \left(\bigcup (G_k \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K) \right) \cap \left(\bigcup (H_l \in \mathcal{G}^0 \mid l \in L) \right)$$

и его конечное покрытие $(F_{kl} \in \mathcal{G}^0 \mid (k, l) \in K \times L)$, где $F_{kl} \equiv U \cap G_k \cap H_l$. Тогда

$$f(s) - f(t) \leq h(s) - g(t) < h(t) + \varepsilon/2 - g(t) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

и

$$f(s) - f(t) \geq g(s) - h(t) > g(s) - (h(s) + \varepsilon/2) > -\varepsilon/2 - \varepsilon/2 = -\varepsilon.$$

Это означает, что $\omega(f, F_{kl}) < \varepsilon$. По лемме 2 $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$.

Предложение 2. Рассмотрим функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $|f| \leq z\mathbf{1}$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$;
- 2) для f существуют счётные коллекции $(g_i \in C \mid i \in I)$ и $(h_j \in C \mid j \in J)$, такие что $g_i \leq f \leq h_j$ для любых i и j , и $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$, где $g(t) \equiv \sup(g_i(t) \mid i \in I)$ и $h(t) \equiv \inf(h_j(t) \mid j \in J)$ для любого $t \in T$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). По условию $|f| \leq z\mathbf{1}$. Возьмём для $\varepsilon \equiv 1/n$ множества U_n и $(G_{nk} \in \mathcal{G}^0 \mid k \in K_n)$ из теоремы 1. Рассмотрим числа $x_{nk} \equiv \inf(f(t) \mid t \in G_{nk})$ и $y_{nk} \equiv \sup(f(t) \mid t \in G_{nk})$. Пусть $G_{nk} = \text{coz } g_{nk}$ для некоторой функции $g_{nk} \in C_+$. Положим $g_{nkm} \equiv (-z\mathbf{1} + mg_{nk}) \wedge x_{nk}\mathbf{1} \in C$. Тогда $g_{nkm} \leq f$ и $g_{nkm} \in C$. Определим функцию $g_n \in S_1^0$, полагая $g_n(t) \equiv \sup(g_{nkm}(t) \mid k \in K_n, m \in \mathbb{N})$ для любого $t \in U_n$. Аналогично строятся коллекция $h_{nkm} \equiv (z\mathbf{1} - mg_{nk}) \vee y_{nk}\mathbf{1} \in C$ и функция $h_n \in S_1^0$, такая что $h_n(t) \equiv \inf(h_{nkm}(t) \mid k \in K_n, m \in \mathbb{N})$. Для функций g_n и h_n выполняется неравенство $|h_n - g_n| \leq 1/n$ для любого $t \in U_n$. Рассмотрим функции g и h , такие что $g(t) \equiv \sup(g_n(t) \mid n \in \mathbb{N})$ и $h(t) \equiv \inf(h_n(t) \mid n \in \mathbb{N})$. Тогда эти функции эквивалентны относительно $\mathcal{N}_\mu$ и $g \leq f \leq h$.

Рассмотрим счётные множества $I \equiv J \equiv \bigcup (\{n\} \times K_n \times \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^3$ и индексы $i \equiv j \equiv (n, (k, m))$, такие что $k \in K_n$. В результате получим искомые счётные коллекции $(g_i \in C \mid i \in I)$ и $(h_j \in C \mid j \in J)$, такие что $g(t) = \sup(g_i(t) \mid i \in I)$ и $h(t) = \inf(h_j(t) \mid j \in J)$ для любого $t \in T$.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Легко проверить, что $g(t) \in S_1^0$ и $h(t) \in S_1^0$. Так как $g \leq f \leq h$ и $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$, то по следствию предложения 1 $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$.

Предложение 2 показывает «счётную» природу отношения между пространством $U(T, \mathcal{SP}_\mu)$ и его подпространством C .

Покажем, наконец, что определение функций, μ -интегрируемых по Риману, данное в разделе 1, является обобщением обычного определения для отрезка $[a, b]$. Для этого сначала докажем аналог характеристики Лебега—Витали.

Теорема 2. Рассмотрим функцию $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $|f| \leq z1$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$;
- 2) мера μ множества точек разрыва функции f равна нулю.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). По следствию предложения 1 существуют функции $g \in S_1^0 \cap U(T, \mathcal{SP}_\mu)$ и $h \in S_u^0 \cap U(T, \mathcal{SP}_\mu)$, такие что $g \leq f \leq h$ и $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$. Положим $E \equiv \{t \in T \mid g(t) = h(t)\}$. Для $t_0 \in E$ выполняется $g(t_0) = f(t_0) = h(t_0) \equiv y$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества $G \equiv g^{-1}[y - \varepsilon, \infty[\in \mathcal{G}^0$ и $H \equiv h^{-1}[-\infty, y + \varepsilon] \in \mathcal{G}^0$. Тогда $t_0 \in F \equiv G \cap H \in \mathcal{G}^0$. Для любого $t \in F$ верно, что $y - \varepsilon < g(t) \leq f(t) \leq h(t) < y + \varepsilon$. Следовательно, $f[F] \subset]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$. Это означает, что t_0 — точка непрерывности функции f . По определению эквивалентности функций g и h множество $D_n \equiv \{t \in T \mid |g(t) - h(t)| \geq 1/n\}$ принадлежит идеалу $\mathcal{N}_\mu$. Так как $\mu D_n = 0$ и $T \setminus E = \bigcup (D_n \mid n \in \mathbb{N})$, то $\mu(T \setminus E) = 0$. Из доказанного выше следует, что множество D точек разрыва функции f содержится во множестве $T \setminus E$. Следовательно, $\mu D = 0$.

Проверим импликацию 2) $\implies$ 1). Пусть D — множество точек разрыва функции f . Положим $E \equiv T \setminus D$. Для любого $t \in E$ фиксируем $\varepsilon = 1/m$. Точка t является точкой непрерывности функции f , следовательно, существует такое множество $H_t \in \mathcal{G}$, что $t \in H_t$ и $f[H_t] \subset]f(t) - \varepsilon/4, f(t) + \varepsilon/4[$. Множество H_t является объединением конуль-множеств, поэтому существует такое множество $G_t \in \mathcal{G}^0$, что $t \in G_t$ и $f[G_t] \subset]f(t) - \varepsilon/4, f(t) + \varepsilon/4[$. Рассмотрим множество $V_m \equiv \bigcup (G_t \in \mathcal{G}^0 \mid t \in E) \in \mathcal{G}$. Так как мера μ радоновская, то для любого $n \in \mathbb{N}$ существует компактное множество $K_n \subset V_m$, такое что $\mu(V_m \setminus K_n) \leq 1/n$. Из покрытия $(G_t \in \mathcal{G}^0 \mid t \in E)$ множества K_n выделяем конечное подпокрытие $(G_{ni} \in \mathcal{G}^0 \mid i \in I_n)$. Тогда $(G_{ni} \in \mathcal{G}^0 \mid i \in I_n, n \in \mathbb{N})$ — покрытие множества $\bigcup (K_n \mid n \in \mathbb{N}) \equiv L$. Рассмотрим множество $U_m \equiv \bigcup (G_{ni} \mid i \in I_n, n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{G}^0$. Так как $L \subset U_m \subset V_m$ и $\mu L = \mu V_m$, то $\mu U_m = \mu V_m$. Значит, $U_m \in \mathcal{U}_\mu^0$. По условию $f[G_{ni}] \subset]f(t) - \varepsilon/4, f(t) + \varepsilon/4[$. Рассмотрим числа $x_{ni} \equiv \inf(f(t) \mid t \in G_{ni})$ и $y_{ni} \equiv \sup(f(t) \mid t \in G_{ni})$. Для них верно $f[G_{ni}] \subset]x_{ni}, y_{ni}[$ и $|y_{ni} - x_{ni}| < \varepsilon/2$.

Рассмотрим счётное множество $A \equiv \bigcup (\{n\} \times I_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}^2$ и индексы $\alpha \equiv (n, i) \in A$, такие что $i \in I_n$. Определим функцию $g_\alpha \in S_1^0$, полагая $g_\alpha \equiv -z$ для любого $t \notin G_\alpha$ и $g_\alpha \equiv x_\alpha$ для любого $t \in G_\alpha$. Определим также функции $h_\alpha \in S_u^0$, полагая $h_\alpha \equiv z$ для любого $t \notin G_\alpha$ и $h_\alpha \equiv y_\alpha$ для любого $t \in G_\alpha$. Рассмотрим $g \in S_1^0$ и $h \in S_u^0$, такие что $g(t) \equiv \sup(g_\alpha(t) \mid \alpha \in A)$ и $h(t) \equiv \inf(h_\alpha(t) \mid \alpha \in A)$. Тогда $g \leq f \leq h$ и $0 \leq h(t) - g(t) < 1/m$ для любого $t \in U_m$. Таким образом, $g \sim h \bmod \mathcal{N}_\mu$. Отсюда по следствию предложения 1 заключаем, что $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$.

Напомним, что функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ называется *полуниепрерывной снизу*, если $f^{-1}[x, \infty[\in \mathcal{G}$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Семейство всех таких ограниченных функций обозначим через S_1 . Аналогично определим семейство S_u всех *ограниченных полуниепрерывных сверху функций*.

Определим для ограниченной функции $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ её *нижнюю регулярную функцию* $l(f)$ и *верхнюю регулярную функцию* $u(f)$, полагая $l(f)(t) \equiv \sup(\inf(f(s) \mid s \in G) \mid G \in \mathcal{G}_t)$ и $u(f)(t) \equiv \inf(\sup(f(s) \mid s \in G) \mid G \in \mathcal{G}_t)$, где $\mathcal{G}_t$ — множество всех открытых окрестностей точки t . Ясно, что $l(f) \leq f \leq u(f)$. Согласно [1, глава V, § 1] эти функции обладают следующими свойствами:

- 1) $l(f) \in S_l$ и $u(f) \in S_u$;
- 2) если $g \in S_l$ ($h \in S_u$) и $g \leq f$ ($f \leq h$), то $g \leq l(f)$ (соответственно $u(f) \leq h$).

Лемма 4. Пусть даны ограниченная функция $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ и некоторое разбиение $\varkappa \in \Delta$ множества T . Тогда $s(f, \varkappa) = s(l(f), \varkappa)$ и $S(f, \varkappa) = S(u(f), \varkappa)$.

Доказательство. Пусть $\varkappa \equiv (Q_k \in \mathcal{G} \cup \mathcal{LN}_\mu \mid k \in K) \in \Delta$. Рассмотрим множество $K_+ \equiv \{k \in K \mid Q_k \in \mathcal{G} \setminus \{\emptyset\}\}$. Ясно, что $\mu Q_k = 0$ для любого $k \in K \setminus K_+$.

Пусть $k \in K_+$. Тогда

$$\begin{aligned} x_k \equiv \inf(f(t) \mid t \in Q_k) &\geq \inf(l(f)(t) \mid t \in Q_k) \geq \\ &\geq \inf(\inf(f(t) \mid t \in Q_k)) = \inf(x_k \mid t \in Q_k) = x_k \end{aligned}$$

влечёт $x_k = \inf(l(f)(t) \mid t \in Q_k)$. Аналогично,

$$\begin{aligned} y_k \equiv \sup(f(t) \mid t \in Q_k) &\leq \sup(u(f)(t) \mid t \in Q_k) \leq \\ &\leq \sup(\sup(f(t) \mid t \in Q_k)) = \sup(y_k \mid t \in Q_k) = y_k \end{aligned}$$

влечёт $y_k = \sup(u(f)(t) \mid t \in Q_k)$. Следовательно,

$$s(f, \varkappa) = \sum (x_k \mu Q_k \mid k \in K_+) = \sum (\inf(l(f)(t) \mid t \in Q_k \mid k \in K_+) = s(l(f), \varkappa)$$

и

$$S(f, \varkappa) = \sum (y_k \mu Q_k \mid k \in K_+) = \sum (\sup(u(f)(t) \mid t \in Q_k \mid k \in K_+) = S(u(f), \varkappa).$$

Теорема 3. $RI_\mu \subset U(T, SP_\mu)$.

Доказательство. Пусть $f \in RI_\mu$. Для каждого числа $a > 0$ рассмотрим множество $P_a \equiv \{t \in T \mid u(f)(t) - l(f)(t) \geq a\}$. Предположим, что $\mu P_a > 0$ для некоторого a . Рассмотрим $\varepsilon \equiv a \mu P_a > 0$. Предположим, что $S(f, \pi) - s(f, \pi) \geq \varepsilon$ для любого $\pi \in \Delta$. Тогда для любых $\rho, \sigma \in \Delta$ справедливо $S(f, \sigma) - s(f, \rho) \geq S(f, \rho \wedge \sigma) - s(f, \rho \wedge \sigma) \geq \varepsilon$, где $\rho \wedge \sigma \equiv \{R \cap S \mid R \in \rho \wedge S \in \sigma\}$. Следовательно, $S(f, \sigma) \geq s(f, \rho) + \varepsilon$ влечёт $i_\mu f \equiv \inf(S(f, \sigma) \mid \sigma \in \Delta) \geq s(f, \rho) + \varepsilon$. Поэтому $s(f, \rho) \leq i_\mu a - \varepsilon$ влечёт $i_\mu f = \sup(s(f, \rho) \mid \rho \in \Delta) \leq i_\mu a - \varepsilon$, что невозможно. Из полученного противоречия следует, что существует такое разбиение $\varkappa \equiv (Q_k \mid k \in K) \in \Delta$, что $x \equiv S(f, \varkappa) - s(f, \varkappa) < \varepsilon$.

По лемме 4 выполняется $x = S(u(f), \varkappa) - s(l(f), \varkappa) < \varepsilon$. Рассмотрим непустое множество $K_a \equiv \{k \in K \mid \mu(Q_k \cap P_a) > 0\}$. Для него справедливо

$$x \geq \sum ((\sup(u(f)(t) \mid t \in Q_k) - \inf(l(f)(t) \mid t \in Q_k)) \mu Q_k \mid k \in K_a).$$

Для каждого $k \in K_a$ выберем некоторую точку $t_k \in Q_k \cap P_a$. Тогда

$$\begin{aligned} x &\geq \sum ((u(f)(t_k) - l(f)(t_k))\mu(Q_k \cap P_a) \mid k \in K_a) \geq \\ &\geq \sum (a\mu(Q_k \cap P_a) \mid k \in K_a) = a\mu P_a = \varepsilon, \end{aligned}$$

что противоречит неравенству $x < \varepsilon$.

Из полученного противоречия следует $\mu P_a = 0$ для любого $a > 0$. Рассмотрим множество $P \equiv \{t \in T \mid u(f)(t) - l(f)(t) > 0\}$. Так как $P = \bigcup (P_{1/n} \mid n \in \mathbb{N})$, то $\mu P = 0$. Следовательно, $f(t) = l(f)(t) = u(f)(t)$ для любой точки $t \in Q \equiv T \setminus P$. Поэтому каждая точка $t \in Q$ является точкой непрерывности точки f . Значит, мера μ множества точек разрыва функции f равна нулю. Из теоремы 2 следует, что $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$.

Следствие 1. $RI_\mu = U(T, \mathcal{SP}_\mu)$.

Доказательство. Равенство следует из теорем 1 и 3.

Следствие 2. Для ограниченной функции $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ эквивалентны следующие утверждения:

- 1) $f \in RI_\mu$;
- 2) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\mu)$;
- 3) мера μ множества точек разрыва функции f равна нулю.

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием из теоремы 2.

Следствие 3. Пусть $T \equiv [a, b] \subset \mathbb{R}$ и λ — мера Лебега на $[a, b]$, порождённая длиной интервалов $l([x, y]) \equiv y - x$. Тогда для любой ограниченной функции $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ эквивалентны следующие утверждения:

- 1) f является интегрируемой по Риману в обычном смысле;
- 2) $f \in RI_\lambda$;
- 3) $f \in U(T, \mathcal{SP}_\lambda)$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 3) следует из теоремы 2 и характеристики Лебега—Витали. Эквивалентность утверждений 2) и 3) доказана в следствии 1 теоремы 3.

Это следствие даёт новую характеристику функций, интегрируемых по Риману в обычном смысле на отрезке $[a, b]$.

Литература

- [1] Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961.
- [2] Захаров В. К. Связь между полным кольцом частных кольца непрерывных функций, регулярным пополнением и расширениями Хаусдорфа—Серпинского // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 6. — С. 133—134.

- [3] Захаров В. К. Счётно-делимое расширение и расширение Бэра кольца и банаховой алгебры непрерывных функций как делимая оболочка // Алгебра и анализ. — 1993. — Т. 5, № 6. — С. 121—138.
- [4] Lebesgue H. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. — Paris: Gauthier-Villars, 1904.
- [5] Vitali G. Sulla integrabilità delle funzioni // Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. (2). — 1904. — Vol. 37. — P. 69—73.
- [6] Zakharov V. K. Alexandrovian cover and Sierpin'skian extension // Studia Sci. Math. Hungar. — 1989. — Vol. 24. — P. 93—117.

