О слабо проективных правых полигонах Рисса

У. КНАУЭР, Х. ОЛТМАННС
Университет Ольденбурга, Германия
e-mail: ulrich.knauer@uni-oldenburg.de

УДК 512.56

Ключевые слова: слабо проективные полигоны, $(S/I, S/J)$-проективные полигоны, слабо проективные правые полигоны Рисса.

Аннотация

В данной работе представлено расширение понятия слабо проективных полигонов на так называемые $(S/I, S/J)$-проективные полигоны. Рассматриваются ретракты, копроизведения и произведения полигонов, а также факторы Рисса с точки зрения этих свойств. Они будут использоваться для описания моноидов, являющихся непересекающимся объединением группы с полугруппой левых нулей или с непересекающимся объединением простых правых идеалов. Вводятся понятия слабых QF-моноидов.

Abstract

U. Knauer, H. Oltmanns, On Rees weakly projective right acts, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 85—96.

In this article, we present an extension of the concept of weakly projective acts to the so-called $(S/I, S/J)$-projective acts. Retracts, coproducts, and products of acts as well as Rees factor acts are considered from the point of view of these properties. They are used to describe monoids that are disjoint unions of a group with a left zero semigroup or with a disjoint union of simple right ideals. We suggest concepts of weak QF-monoids.

1. Введение

Через S обозначается моноид с единицей 1_S (или просто 1). Элемент $z \in S$ называется *левым нулём в* S, если $zS = \{z\}$. Моноид S называется *моноидом левых нулей*, если все его отличные от 1_S элементы являются левыми нулями; аналогично вводится понятие моноида правых нулей. *Обратимые справа элементы* и (*главные*) *правые идеалы* моноида S определяются обычным образом.

Правый S-полигон A_S — это множество A, на котором S действует единично справа, т. е. $a(st) = (as)t$ и $a1 = a$ для $a \in A$, $s, t \in S$, $1 \in S$. *Одноэлементный полигон* обозначается через Θ_S. Правые S-полигоны A_S с $A_S = aS$ для некоторого $a \in A_S$ называются *циклическими*, а a называется *порождающим элементом*. Если A_S и B_S — правые S-полигоны и $f\colon A_S \to B_S$ — функция, то f называется *гомоморфизмом*, если $f(as) = f(a)s$ для $a \in A$, $s \in S$. Эпиморфизмы — это сюръективные гомоморфизмы.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 85—96.

Через $\mathbf{Act}$-S мы обозначаем категорию правых S-полигонов. *Копроизведение* в этой категории — это непересекающееся объединение, обозначающееся через $\coprod$, с вложениями, *произведение* — это декартово произведение, обозначающееся через $\prod$, с проекциями и с покомпонентным умножением на элементы из S.

Отношение эквивалентности ϱ на моноиде S называется *правой конгруэнцией*, если из $x \ \varrho \ y$ следует $xt \ \varrho \ yt$ для $x, y, t \in S$. Соответствующий фактор-полигон обозначается через $(S/\varrho)_S$ или S/ϱ, класс конгруэнтности элемента $x \in S$ — через x_ϱ. Для класса единицы 1 мы также используем обозначение $1_{S/\varrho}$. Заметим, что S/ϱ является циклическим правым S-полигоном, порождённым элементом 1_ϱ, и все циклические S-полигоны имеют такой вид с точностью до изоморфизма.

Если $I \subseteq S$ — правый идеал, определим *фактор-полигон Рисса* $S/I := (S \setminus I) \cup \{\theta\}$ обычным правым действием S на S/I. Через π_I обозначим естественный эпиморфизм из S на S/I. Правую конгруэнцию ϱ назовём *правой конгруэнцией Рисса*, если $S/\varrho = S/I$ для некоторого правого идеала $I \subseteq S$; обозначим её через ϱ_I. Если $I = sS$ — главный правый идеал в S, порождённый элементом $s \in S$, соответствующая правая конгруэнция называется *главной правой конгруэнцией Рисса*. Класс I обозначается через $\theta_{S/I}$, он является нулём в $(S/I)_S$.

Правый идеал I в S называется *простым*, если он не содержит собственных правых подыдеалов. Моноид S называется *реверсивным слева*, если любые два правых идеала в S имеют непустое пересечение.

Рассмотрим в категории $\mathbf{Act}$-S гомоморфизмы $\pi\colon A_S \to B_S$ и $\gamma\colon B_S \to A_S$ с $\pi\gamma = \mathrm{id}_{B_S}$, что, в частности, означает, что π сюръективен и γ инъективен. Тогда назовём π *ретракцией*, B_S — *ретрактом* в A_S, а γ — *коретракцией* (см. [4] и др.).

Правый S-полигон A_S называется *проективным*, если в следующей ситуации в $\mathbf{Act}$-S каждый гомоморфизм f *может быть поднят до* B_S для любого эпиморфизма g:

$$\begin{tikzcd} & A_S \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] \\ B_S \arrow[r, "g"'] & C_S \end{tikzcd}$$

т. е. существует функция f', замыкающая диаграмму в $\mathbf{Act}$-S до коммутативной. Напомним, что проективные правые S-полигоны изоморфны копроизведениям вида $\coprod\limits_{i \in I} e_i S$, где $e_i^2 = e_i \in S$ для всех $i \in I$.

Следуя [5], будем называть правый S-полигон A_S *слабо проективным* в категории $\mathbf{Act}$-S, если A_S проективен по отношению ко всем эпиморфизмам $g\colon S_S \to (S/\varrho)_S$, т. е. если для любой правой конгруэнции ϱ на S, для любого гомоморфизма $f\colon A_S \to (S/\varrho)_S$ и для любого эпиморфизма $g\colon S_S \to (S/\varrho)_S$ существует такая функция $f'\colon A_S \to S_S$, что $gf' = f$. Если в этой ситуации ϱ —

(главная) правая конгруэнция Рисса, то назовём полигон A_S (*главным*) *слабо проективным по Риссу*. Следуя [5], будем использовать сокращения Rwp и pRwp для соответствующих слабых проективностей.

Эти понятия, с одной стороны, аналогичны слабо инъективным полигонам (см. [4]), а с другой — R-проективным R-модулям (одна из первых статей в этой области — [8]). Напомним, что, например, внимание привлекли $\mathbb{Z}$-проективные абелевы группы (см. [1] и дальнейшие работы).

Эта статья содержит часть результатов диссертации второго автора [7]. Дальнейшие результаты опубликованы в [3] и [8].

Далее мы обобщим понятие слабо проективных полигонов Рисса.

2. $(S/I, S/J)$-проективности

Пусть $(\mathcal{P})\mathcal{RI}$ обозначает множество всех (главных) правых идеалов в S. Правый S-полигон A_S называется $(S/I, S/J)$-*проективным* в $\mathbf{Act}$-S, если в следующей ситуации для любых $I, J \in (\mathcal{P})\mathcal{RI}$ и эпиморфизма g каждый гомоморфизм f может быть поднят до $(S/I)_S$:

$$\begin{tikzcd} & A_S \arrow[dl, "f'"'] \arrow[d, "f"] \\ (S/I)_S \arrow[r, two heads, "g"'] & (S/J)_S \end{tikzcd}$$

то есть если существует функция f', замыкающая данную диаграмму в $\mathbf{Act}$-S до коммутативной.

Если все I или все J являются главными правыми идеалами, порождёнными элементами s или t соответственно, мы используем сокращения «$(S/I, S/tS)$-, $(S/sS, S/J)$- или $(S/sS, S/tS)$-проективные». Значит, pRwp — это «$(S, S/tS)$-проективный», а Rwp — это «$(S, S/J)$-проективный».

Предложение 2.1. *Слабая проективность Рисса влечёт $(S/I, S/J)$-проективность, а главная слабая проективность Рисса влечёт $(S/I, S/tS)$-проективность. Если S является группой или содержит левый нуль, то обратная импликация также верна.*

Доказательство. Пусть A_S — (главный) слабо проективный полигон Рисса, возьмём $I \in \mathcal{RI}$, $J \in (\mathcal{P})\mathcal{RI}$, $s \in S$, и пусть $g\colon (S/I)_S \to (S/J)_S$ — эпиморфизм, а $f\colon A_S \to (S/J)_S$ — гомоморфизм. Тогда $g\pi_I\colon S_S \to (S/J)_S$ — эпиморфизм. Таким образом, существует функция $f'\colon A_S \to S_S$, такая что $(g\pi_I)f' = f$. Тогда для $f'' := \pi_I f'\colon A_S \to (S/I)_S$ имеем $gf'' = f$.

Обратно, если S — группа, то соотношения на идеалы пусты. Если S содержит левый нуль z, мы получаем $S \cong S/\{z\}$ и можем взять такое S для S/I. Таким образом, обе обратные импликации в обоих случаях выполняются. $\square$

Предложение 2.2. *Возьмём* $I \in \mathcal{RI}$, $J \in (\mathcal{P})\mathcal{RI}$ *и* $s \in S$. *Тогда полигон* $A_S \in \mathbf{Act}\text{-}S$ *является* $(S/I, S/J)$*-проективным тогда и только тогда, когда он* $(S/sS, S/J)$*-проективен.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности возьмём $i \in I$. Тогда $iS \subseteq I$ и, значит, существует эпиморфизм $\pi \colon S/iS \to S/I$. Остальная часть доказательства может быть проведена аналогично предложению 2.1, где S_S должно быть заменено на S/sS, а π_I — на π. $\square$

Значит, мы можем сосредоточить наше внимание на $(S/sS, S/J)$-проективных полигонах с $J \in (\mathcal{P})\mathcal{RI}$.

В соответствии с предыдущими предложениями и тем фактом, что $\mathcal{PRI} \subseteq \mathcal{RI}$, мы получаем следующую схему импликаций, где $(S/sS, S/J)$-проективность обозначается через $(S/sS, S/J)$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathrm{proj}} \arrow[d] & \\
\boxed{\mathrm{Rwp}} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \boxed{\mathrm{pRwp}} \arrow[dd] \\
\boxed{(S, sS, S/J)} \arrow[dr] & \\
& \boxed{(S, sS, S/tS)}
\end{tikzcd}$$

Мы предполагаем, что моноид S не является группой, в частности что $S \neq \{1\}$, так как иначе S не содержал бы правых идеалов и обсуждаемые соотношения выполнялись бы совершенно тривиальным образом. Для оставшейся части работы мы берём $s \in S$ и $J \in (\mathcal{P})\mathcal{RI}$.

Что касается самой проективности (см., например, [4, предложение 1.7.30]), мы получаем следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Каждый ретракт* $(S/sS, S/J)$*-проективного правого* S*-полигона является* $(S/sS, S/J)$*-проективным.*

Предложение 2.4. *Пусть* A_k, $k \in K$, *— неразложимые правые* S*-полигоны. Тогда* $\coprod_{k \in K} A_k$ *является* $(S/sS, S/J)$*-проективным тогда и только тогда, когда* A_k *является* $(S/sS, S/J)$*-проективным для всех* $k \in K$.

Напомним, что S-полигон называется неразложимым, если он не является копроизведением собственных подполигонов [4]. Заметим, что для доказательства необходимости в соответствующем результате для слабых проективностей мы используем тот факт, что S имеет левый нуль (см. [5, предложение 2.6]). Для произведений получаем следующий результат.

Предложение 2.5. *Пусть S — моноид с левым нулём, а A_k, $k \in K$, — правые S-полигоны. Если $\prod\limits_{k\in K} A_k$ является $(S/sS, S/J)$-проективным, то A_k является $(S/sS, S/J)$-проективным для всех $k \in K$.*

Доказательство. Пусть $A_k \in \mathbf{Act}\text{-}S$, $k \in K$, и пусть $p_k\colon \prod\limits_{k\in K} A_k \to A_k$ — естественные проекции. Так как S содержит левый нуль, то каждый правый S-полигон A_k имеет по крайней мере один нуль, который мы обозначим θ_k. Тогда для $j \in K$ отображение $i_j\colon A_j \to \prod\limits_{k\in K} A_k$, определённое по правилу $i_j(a) = (x_k)_{k\in K}$, где $x_k = \theta_k$ и $x_j = a$ для $j \neq k$, является гомоморфизмом, причём $p_k i_k = \mathrm{id}_{A_k}$, т. е. каждый A_k является ретрактом произведения $\prod\limits_{k\in K} A_k$. Применение предложения 2.3 завершает доказательство. □

Факторы Рисса и $(S/sS, S/J)$-проективности

Предложение 2.6. *Одноэлементный правый S-полигон Θ_S является $(S/sS, S/J)$-проективным. В частности, Θ_S является* pRwp *тогда и только тогда, когда S содержит левый нуль.*

Доказательство. Если S содержит левый нуль z, то $\Theta_S \cong zS$, и, значит, Θ_S является проективным, так как z — идемпотент, что влечёт $(S/sS, S/J)$-проективность.

Если S — моноид без левого нуля, то каждый фактор-полигон Рисса S/J содержит единственный нуль $\theta_{S/J}$, и для эпиморфизма $g\colon S/sS \to S/J$ получаем $g(\theta_{S/sS}) = \theta_{S/J}$. Более того, для гомоморфизма $f\colon \Theta_S \to S/J$ имеем $f(\Theta_S) = \theta_{S/J}$. Тогда f может быть поднят по отношению к g до $f'\colon \Theta_S \to S/sS$, для которого $f'(\Theta_S) = \theta_{S/sS}$, т. е. Θ_S является $(S/sS, S/J)$-проективным. Часть утверждения, касающаяся Θ_S со свойством pRwp, очевидна. □

Лемма 2.7. *Возьмём $I, J \in \mathcal{RI}$. Если $I \subseteq J$, то существуют гомоморфизм $\alpha\colon (S/I)_S \to (S/J)_S$, для которого $\alpha(1_{S/I}) = 1_{S/J}$, и α — эпиморфизм.*

Доказательство. Ясно, что соотношение $\alpha(1_{S/I}) = 1_{S/J}$ может быть продолжено до гомоморфизма $\alpha\colon (S/I)_S \to (S/J)_S$, так как из $I \subseteq J$ следует $\varrho_I \subseteq \varrho_J$. Сюръективность α очевидна. □

Лемма 2.8. *Возьмём $I, J \in \mathcal{RI}$. Предположим, что S не содержит левых нулей или обратим слева. Если существует гомоморфизм $\alpha\colon (S/I)_S \to (S/J)_S$, для которого $\alpha(1_{S/I}) = 1_{S/J}$, то $I \subseteq J$.*

Доказательство. Предположим, что S является моноидом без левого нуля, тогда каждый фактор-полигон Рисса содержит единственный нуль. Так как α является гомоморфизмом, мы получаем $\alpha(\theta_{S/I}) = \theta_{S/J}$. Таким образом, для каждого $i \in I$ имеем

$$\theta_{S/J} = \alpha(\theta_{S/I}) = \alpha(i_{\varrho_I}) = \alpha(1_{S/I}i) = \alpha(1_{S/I})i = 1_{S/J}i = i_{\varrho_J},$$

т. е. $i_{\varrho_J} = \theta_{S/J}$, и, значит, $i \in J$.

Предположим теперь, что S обратим слева, тогда существует $i \in I \cap J$, для которого мы получаем

$$\alpha(\theta_{S/I}) = \alpha(i_{\varrho_I}) = i_{\varrho_J} = \theta_{S/J}.$$

Таким образом, для каждого $i' \in I$ имеем

$$\alpha(i'_{\varrho_I}) = \alpha(i_{\varrho_{S/I}}) = \theta_{S/J},$$

значит, $I \subseteq J$. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть $I \in (\mathcal{P})\mathcal{RI}$. Если $(S/I)_S$ является $(S/sS, S/J)$-проективным, то для каждого $i \in I$ фактор-полигон Рисса $(S/I)_S$ является ретрактом $(S/iS)_S$ с ретракцией α, такой что $\alpha(1_{S/iS}) = 1_{S/I}$.*

Доказательство. Для всех $i \in I$ имеем $iS \subseteq I$, значит, $\alpha\colon S/iS \to S/I$, для которого $\alpha(1_{S/iS}) = 1_{S/I}$, не является эпиморфизмом по лемме 2.7. Так как $(S/I)_S$ является $(S/sS, S/J)$-проективным, то тождество id на $(S/I)_S$ может быть поднято по отношению к α, т. е. существует $\mathrm{id}'\colon (S/I)_S \to (S/iS)_S$, для которого $\alpha\,\mathrm{id}' = \mathrm{id}$, т. е. α является ретракцией. $\square$

Лемма 2.10. *Если фактор-полигон Рисса $(S/I)_S$ является $(S/sS, S/J)$-проективным для собственного правого идеала I в S, то I прост, т. е. $iS = I$ для всех $i \in I$.*

Доказательство. Если $|I| = 1$, то I прост. Пусть $|I| \neq 1$. Если $(S/I)_S$ является $(S/sS, S/J)$-проективным, то по лемме 2.9 он является ретрактом в $(S/iS)_S$ для каждого $i \in I$ с ретракцией α, такой что $\alpha(1_{S/iS}) = 1_{S/I}$, и коретракцией γ. Теперь из $I \neq S$ следует $1_{S/iS} = \{1\} = 1_{S/I}$, значит, $\gamma(1_{S/I}) = 1_{S/iS}$ для всех $i \in I$. Возьмём опять $i \in I$, тогда для любого $j \in I$ имеем $j_{\varrho_I} = i_{\varrho_I}$ и получаем

$$\gamma(j_{\varrho_I}) = \gamma(1_{S/I}j) = \gamma(1_{S/I})j = 1_{S/iS}j = j_{\varrho_{iS}}$$

и, аналогично,

$$\gamma(i_{\varrho_I}) = \gamma(1_{S/I}i) = \gamma(1_{S/I})i = 1_{S/iS}i = i_{\varrho_{iS}},$$

откуда следует $j_{\varrho_{iS}} = i_{\varrho_{iS}}$. Таким образом, $j\ \varrho_{iS}\ i$, что эквивалентно $j \in iS$. Следовательно, $I \subseteq iS$, и, значит, $I = iS$. $\square$

3. Гомологическая классификация

Теперь перейдём к гомологической классификации. Мы будем говорить, что «*S является непересекающимся объединением полугруппы T и моноида R*», если T является подполугруппой в S, R является подмоноидом в S, а множество S является непересекающимся объединением множеств T и R, произведения tt', $t, t' \in T$, и rr', r, $r' \in R$, являются соответствующими произведениями R и T, причём произведения tr и rt могут лежать в T или в R.

Для каждого моноида S пусть $R = \{s \in S \mid \exists s' \in S\colon ss' = 1\}$ обозначает подмоноид в S, состоящий из всех обратимых справа элементов из S, и N — правый идеал не обратимых справа элементов из S. Тогда S является непересекающимся объединением $S = R \cup N$.

Лемма 3.1. *Если в $S = R \cup N$ правый идеал N не обратимых справа элементов является непересекающимся объединением простых правых идеалов, то R является группой.*

Доказательство. Пусть $r' \in S$ — правый обратный для $r \in R$, т. е. $rr' = 1$. Если r' не принадлежит R, то $r'S$ является простым правым идеалом в S, то есть для каждого $x \in S$ существует такой $y \in S$, что $r'xy = r'$, в частности для $x = r'$ получаем $y \in S$ с $r'r'y = r'$. Мы вычисляем $r'y = 1r'y = rr'r'y = rr' = 1$, откуда получаем, что r' обратим справа. Следовательно, R — группа. □

Следующий результат является простым и полезным с точки зрения гомологической классификации.

Предложение 3.2. *Для $s \in S$ и $J \in (\mathcal{P})\mathcal{RI}$ эквивалентны следующие условия*:

(i) *все правые S-полигоны $(S/sS, S/J)$-проективны*;
(ii) *все фактор-полигоны Рисса $(S/J)_S$ $(S/sS, S/J)$-проективны*;
(iii) *каждый эпиморфизм $g\colon S/sS \to S/J$ является ретракцией.*

Доказательство. Импликация (i) $\implies$ (ii) очевидна.

Докажем справедливость импликации (ii) $\implies$ (iii). Пусть $g\colon S/sS \to S/J$ — эпиморфизм. Так как $(S/J)_S$ $(S/sS, S/J)$-проективен, то тождественное отображение $\mathrm{id}_{S/J}$ может быть поднято по отношению к g, т. е. существует такой морфизм $\gamma\colon S/J \to S/sS$, что $g\gamma = \mathrm{id}_{S/J}$. Таким образом, g является ретракцией.

Докажем (iii) $\implies$ (i). Для каждого правого S-полигона A_S каждый гомоморфизм $f\colon A_S \to S/J$ может быть поднят по отношению к каждому эпиморфизму g с помощью $\gamma f\colon A \to S/sS$, где γ является коретракцией к g. Таким образом, каждый правый S-полигон $(S/sS, S/J)$-проективен. □

Всё $(S/sS, S/J)$-проективно

Лемма 3.3. *Если все фактор-полигоны Рисса $(S/sS, S/J)$-проективны, то S имеет самое большее один левый нуль, который тогда является нулём.*

Доказательство. Если z, z' — левые нули в S, то $I = \{z, z'\}$ — правый идеал в S, простой по лемме 2.10. Отсюда следует $z = z'$. □

Предложение 3.4. *Если все правые S-полигоны $(S/sS, S/J)$-проективны, то S содержит в точности один собственный правый идеал и этот идеал есть N, множество не обратимых справа элементов в S. Если S содержит левый нуль, то $N = \{0\}$, т. е. S является группой с нулём. В частности, в обоих случаях S является обратимым слева.*

Доказательство. Если все полигоны $(S/sS, S/J)$-проективны, то таковы и все фактор-полигоны Рисса. Тогда по лемме 2.10 каждый правый идеал в S прост, т. е. $I = iS$ для всех $i \in I$. Объединение двух разных простых идеалов снова является правым идеалом, который также прост, значит, это должен быть именно S. Теперь из $1 \in S$ следует, что 1 принадлежит одному из этих двух идеалов, то есть S. Это доказывает единственность. Теперь N — множество необратимых справа элементов в S — будет собственным идеалом, так как мы не рассматриваем группы. Если мы имеем левый нуль z в S, то для всех $i \in N$ выполнено включение $izS = \{iz\} \subseteq iS = N$, т. е. izS будет собственным подыдеалом в N. Таким образом, $N = \{z\}$. Левая обратимость очевидна. □

Лемма 3.5. *Пусть S — моноид. Положим $N = S \backslash R$, где R — множество обратимых справа элементов из S. Тогда каждый эпиморфизм $g\colon (S/N)_S \to (S/N)_S$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Так как $S = R \cup N$, мы можем написать $S/N = R \cup \{\theta\}$, так как мы не рассматриваем группы S. Так как $1 \notin N$, получаем $|S/N| \geqslant 2$. Предположим, что существует такое $v \in S \backslash N = R$, что $g(v) = \theta$. Тогда $g(1_{S/I}) = g(vv^{-1}) = g(v)v^{-1} = \theta v^{-1} = \theta$. Отсюда следует, что $g(S/N) = \theta$, иначе отображение g не было бы сюръективным. Таким образом, любой элемент из R переходит в элемент из R. Более того, отсюда следует, что $g(\theta) = \theta$, так как отображение g сюръективно. Если для $v, w \in S/N$ мы имеем $g(v) = g(w)$, мы можем предположить, что $v, w \in R$. Снова, так как отображение g сюръективно, существует такой элемент $s \in R$, что $g(s) = 1_{S/N}$. Теперь $g(v) = g(ss^{-1}v) = g(s)s^{-1}v = 1_{S/N}s^{-1}v = s^{-1}v$ и, аналогично, $g(w) = s^{-1}w$. Таким образом, $g(v) = g(w)$ означает, что $s^{-1}v = s^{-1}w$, откуда следует $v = w$.

Таким образом, g также инъективно, т. е. g — изоморфизм. □

Теорема 3.6. *Все правые S-полигоны $(S/sS, S/J)$-проективны тогда и только тогда, когда $S = R \cup N$, где N является единственным собственным правым идеалом S и состоит из всех не обратимых справа элементов из S.*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 3.4.

Докажем достаточность. Если S содержит левый нуль z, то с помощью предложения 3.4 мы получаем, что $|N| = 1$. Таким образом, все фактор-полигоны Рисса над S изоморфны S_S или Θ_S. Эпиморфизмы, которые должны рассматриваться в этом случае, имеют следующий вид: нулевой гомоморфизм $g_1\colon S_S \to \Theta_S$, тождественное отображение id_{Θ_S} и эпиморфизмы $g_2\colon S_S \to S_S$. Тождественное отображение очевидным образом является ретракцией, g_1 является ретракцией, так как S содержит левый нуль, а каждый эпиморфизм g_2 является ретракцией, так как S_S проективно. Таким образом, мы пришли к пункту (iii) предложения 3.2, что завершает доказательство этого случая.

Если S не содержит левого нуля, то мы имеем фактор-полигоны Рисса $S/S = \Theta_S$ и $S/N \cong R \cup \{\theta\}$. Нулевой гомоморфизм $g_1 \colon R \cup \{\theta\} \to \Theta_S$ является ретракцией, так как $R \cup \{\theta\}$ содержит нуль. Очевидно, что тождественное отображение id_Θ является ретракцией. По лемме 3.5 каждый эпиморфизм $g_2 \colon R \cup \{\theta\} \to R \cup \{\theta\}$ является изоморфизмом, т. е. является ретракцией. Таким образом, снова по предложению 3.2, мы получаем искомый результат. □

Если S содержит левый нуль z, то слабая проективность Рисса равносильна $(S/sS, S/J)$-проективности, так как в этом случае $S/zS \cong S$ (см. предложение 2.1). Напомним соответствующий результат из [5].

Следствие 3.7. *Для любого моноида S равносильны следующие утверждения*:

(i) *все правые S-полигоны слабо проективны по Риссу, т. е. $(S, S/J)$-проективны*;

(ii) *S содержит левый нуль, а все правые S-полигоны $(S/sS, S/J)$-проективны*;

(iii) *S является группой с присоединённым нулём.*

Доказательство. Проверим импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii). Соответствующая проективность Θ_S даёт нам левый нуль в S (см. предложение 2.6), остальное следует из предложения 2.1.

Импликация (ii) $\Longrightarrow$ (iii) верна по предложению 3.4.

Докажем (iii) $\Longrightarrow$ (i). Если S является группой с присоединённым нулём, то все фактор-полигоны Рисса над S изоморфны S или Θ_S. Так как S проективна, то она $(S, S/J)$-проективна, таким образом, $\Theta_S \cong 0S$. □

Заметим, что в обоих случаях мы имеем только два фактор-полигона Рисса, а именно S_S и Θ_S или $R \cup \{\theta\}$ и Θ_S. Заметим также, что условия следствия 3.7 также характеризуют моноиды, для которых все циклические полигоны удовлетворяют условию (P) (см. [4, теорема 4.9.9]).

Всё $(S/sS, S/tS)$-проективно

Теперь мы изучим моноиды, над которыми все правые S-полигоны $(S/sS, S/tS)$-проективны. Заметим, что левая обратимость здесь не является необходимым условием (см. замечание 3.10).

Лемма 3.8. *Возьмём $r \in S$. Если фактор-полигон Рисса S/rS является $(S/sS, S/tS)$-проективным, то либо r обратим справа, либо rS прост.*

Доказательство. Если rS — собственный правый идеал в S, то из предложения 2.10 следует, что rS прост. Если $rS = S$, то r обратим справа. □

Теорема 3.9. *Если все правые S-полигоны $(S/sS, S/tS)$-проективны, то S является непересекающимся объединением подгруппы R в S, состоящей из всех* *обратимых справа элементов из S, и непересекающегося объединения простых правых идеалов в S.*

Доказательство. Пусть R — подмоноид обратимых справа элементов из S, положим $I = \{i \in S \mid iS$ — собственный простой правый идеал в $S\}$. Тогда $R \cap I = \varnothing$. Если $i, j \in I$, то либо $iS \cap jS = \varnothing$, либо $iS = jS$, так как оба идеала просты. Тогда I является непересекающимся объединением простых правых идеалов в S. Так как все полигоны $(S/sS, S/tS)$-проективны, то по лемме 3.8 либо элемент из S обратим справа, либо порождает простой правый идеал в S, т. е. $S = R \cup I$. Теперь R является группой по лемме 3.1. □

Замечание 3.10. Как и в предложении 3.4, мы получаем, что S является моноидом без левого нуля, если существует простой главный правый идеал rS моноида S, для которого $|rS| \neq 1$. Если S содержит левый нуль, то все собственные простые правые идеалы из S одноэлементны и состоят из левых нулей. Таким образом, мы не имеем аналога леммы 3.3.

Теорема 3.11. *Для каждого моноида S равносильны следующие утверждения:*

(i) *все правые S-полигоны являются главными и слабо проективными по Риссу, т. е. $(S, S/tS)$-проективными;*

(ii) *моноид S содержит левый нуль, а все правые S-полигоны $(S/sS, S/tS)$-проективны;*

(iii) *моноид S является непересекающимся объединением группы и полугруппы левых нулей.*

Доказательство. Равносильность утверждений (i) и (ii) следует из предложения 2.1, если использовать тот факт, что Θ_S — главный слабо проективный полигон Рисса тогда и только тогда, когда S содержит левый нуль.

Докажем (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Так как S содержит левый нуль, каждый простой главный правый идеал S одноэлементен, т. е. порождён левым нулём. Таким образом, по теореме 3.9 моноид S является непересекающимся объединением R и полугруппы I левых нулей, являющейся непересекающимся объединением одноэлементных правых идеалов в S. Теперь R является группой по лемме 3.1.

Проверим (iii) $\Longrightarrow$ (i). Если все элементы, не являющиеся левыми нулями, обратимы справа, то все фактор-полигоны Рисса S/tS, $t \in S$, полигона S изоморфны S_S или Θ_S и, значит, проективны. Напомним, что Θ_S проективен, так как S имеет левый нуль. Значит, все фактор-полигоны Рисса S/tS, $t \in S$, из S являются, в частности, $(S, S/tS)$-проективными. Предложения 3.2 и 2.1 завершают эту часть доказательства. □

Замечание 3.12. Если все правые S-полигоны $(S/sS, S/tS)$-проективны, то моноид S не обязан быть обратимым слева. Например, если S является двухэлементной полугруппой левых нулей $\{z, z'\}$ с присоединённой единицей, то S является непересекающимся объединением группы и полугруппы левых нулей, но так как $zS \cap z'S = \varnothing$, он не является обратимым слева.

Следствие 3.13. *Пусть S — обратимый слева моноид. Равносильны следующие утверждения*:

(i) *все правые S-полигоны $(S/sS, S/tS)$-проективны*;

(ii) *моноид S является непересекающимся объединением простого правого идеала и полугруппы R в S, состоящей из всех обратимых справа элементов из S*;

(iii) *все правые S-полигоны $(S/sS, S/J)$-проективны.*

Доказательство. Проверим импликацию (i) $\implies$ (ii). Пусть S — моноид с левым нулём. По теореме 3.11 получаем, что S является непересекающимся объединением группы и полугруппы левых нулей. Так как S реверсивен слева, для левых нулей z, z' в S получаем $zS \cap z'S \neq \varnothing$, откуда следует $z = z'$. Таким образом, левый нуль в S единствен и, следовательно, является нулём, т. е. S есть непересекающееся объединение группы и нуля.

Пусть S — моноид без левого нуля. По теореме 3.9 мы получаем, что S есть непересекающееся объединение правых простых полугрупп iS, $i \in S$, и группы R. Для $i', i'' \in S$ левая обратимость S даёт существование $j \in i'S \cap i''S$. Тогда $jS \subseteq i'S$ и $jS \subseteq i''S$. Так как $i'S$ и $i''S$ — простые правые идеалы, то $i'S = jS = i''S$. Значит, непересекающееся объединение правых простых полугрупп состоит из одной только правой простой полугруппы iS.

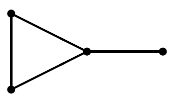
По теореме 3.6 (ii) $\iff$ (iii).

Импликация (iii) $\implies$ (i) тривиальна. □

Пример 3.14. Как пример ситуации теоремы 3.6 возьмём S — группу G с внешним образом присоединённой единицей 1. В этом случае $R = \{1\}$ и $N = G$. Тогда все правые S-полигоны $(S/sS, S/J))$-проективны, но не все не имеют кручения (т. е. существуют правые S-полигоны, на которых сократимые справа элементы из S не действуют инъективно), так как, очевидно, не все сократимые справа элементы из S обратимы справа (см. [4, теорема 4.6.1]). Таким образом, из $(S/sS, S/J)$-проективности не следует отсутствие кручения.

Вместо $N = G$ мы можем взять N равным любой правой группе, т. е. $N = G \times Z$, где G — группа, а Z — полугруппа правых нулей, либо мы можем взять N равным полугруппе Бэра—Леви, являющейся простой справа (см. [2]).

Как пример моноида из теоремы 3.9 возьмём S — моноид (сохраняющих рёбра) эндоморфизмов (для более детального изучения см. [4]) графа



Тогда $S \cong S_2 \cup S_3 \cup S_3$, где S_2 и S_3 — симметрические группы из двух и трёх элементов соответственно. Здесь S_2 и S_3 являются простыми правыми идеалами в S, отображения пишутся справа от аргументов. Таким образом, все правые S-полигоны $(S/sS, S/tS)$-проективны, но не $(S/sS, S/J)$-проективны по теореме 3.6.

Существуют примеры полугрупп, простые правые идеалы которых не изоморфны (см. [2, упражнение 7, с. 94]). Если мы добавим единицу к такой полугруппе, мы получим моноид описанного в теореме 3.9 типа.

Если S — моноид без левого нуля, не являющийся группой, то Θ_S $(S/sS, S/J)$-проективен, но не является главным слабо проективным полигоном Рисса по предложению 2.6, значит, из $(S/sS, S/J)$-проективности не следует pRwp. Мы знаем из [5, раздел 3, пример 4], что из pRwp не следует Rwp.

Замечание 3.15. Можно рассмотреть один классический аналог QF-колец для моноидов, а именно рассмотреть такие моноиды S, что каждый инъективный правый S-полигон проективен. Мы знаем (см. [6, теорема 2]), что этим свойством обладает только $S = \{1\}$.

Мы предлагаем следующее определение. Моноид S называется (*главным*) *слабым QF-моноидом*, если каждый (главный) слабый инъективный правый S-полигон является (главным) слабо проективным по Риссу.

Предположим, что S является группой с присоединённым нулём. Тогда S является слабым QF-моноидом, так как по следствию 3.7 все правые S-полигоны обладают свойством Rwp, S является моноидом регулярного главного правого идеала и, значит, все правые S-полигоны слабо инъективны (см., например, [4, теорема 4.3.7]).

Предположим теперь, что S является непересекающимся объединением группы с полугруппой левых нулей. Тогда S является главным слабым QF-моноидом, так как по теореме 3.11 все правые S-полигоны обладают свойством pRwp, S является регулярным моноидом и, значит, все правые S-полигоны являются главными слабо инъективными (см., например, [4, теорема 4.1.6]).

Литература

[1] Azumaya G., Mbuntue F., Varadarjan K. On M-projective and M-injective modules // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 59, no. 1. — P. 9—16.

[2] Clifford A. H., Preston G. B. The Algebraic Theory of Semigroups. II. — Providence, 1967.

[3] Kilp M., Knauer U. On weakly projective amalgams // Comm. Algebra, to appear.

[4] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[5] Knauer U., Oltmanns H. Weak projectivities for S-acts // General Algebra and Discrete Mathematics / K. Denecke, H.-J. Vogel (Hrg.). — Aachen: Shaker, 1999. — P. 143—159.

[6] Normak P. Analogies of quasi-Frobenius rings for monoids. II // Tartu Ül. Toimetised. — 1983. — Vol. 640. — P. 38—47.

[7] Oltmanns H. Homological Classification of Monoids by Projectivities of Right Acts. — Ph. D. Thesis. — Oldenburg, 2000.

[8] Oltmanns H., Laan V., Knauer U., Kilp M. On (B,B)-Projectivity. — Preprint. — Berlin, 2004.

[9] Wu L. E. T., Jans J. P. On quasi-projectives // Illinois J. Math. — 1967. — Vol. 11. — P. 439—448.