Слабо примитивные суперкольца

С. В. ЛИМАРЕНКО
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: sergei_limarenko@mail.ru

УДК 512.553.1+512.552.34

Ключевые слова: примитивные кольца, слабо примитивные кольца, суперкольца, градуированные кольца, сжимаемые модули, супермодули, градуированные модули, теорема плотности.

Аннотация

В работе получены результаты, связанные со сжимаемыми модулями, примитивными и слабо примитивными кольцами. Также изучены свойства аналогичных объектов в суперслучае. Основным результатом является расширенная теорема плотности для суперколец. В дополнение рассмотрен случай градуированных по группе колец и модулей.

Abstract

S. V. Limarenko, Weakly primitive superrings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 97—142.

Some results concerning compressible modules, primitive rings, and weakly primitive rings are obtained. Properties of analogous objects in the supercase are considered. The main result is the extended density theorem for superrings. In addition, rings and modules graded by a group are studied.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению слабо примитивных суперколец. Получен ряд результатов как в области теории ассоциативных колец, так и в области градуированных колец и модулей. Основным объектом внимания является теорема плотности Джекобсона [2], а также её расширения и следствия [12, 13]. Доказаны аналоги этих теорем для случая суперколец и колец, градуированных по группе. Изучены свойства сжимаемых модулей, среди которых особо выделены критически сжимаемые. Также получены некоторые результаты для суперколец частных и расширенного центроида суперкольца. Общая теория градуированных колец подробно изложена в [10].

В разделе 2 изучаются свойства критически сжимаемых модулей. Впервые эти объекты появились в работах Зельмановица [12, 13]. Понятие сжимаемого модуля возникло при попытке расширить теорию примитивных колец и стало

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 97—142.

естественным обобщением понятия неприводимого (простого) модуля. Это объясняет тот факт, что в целом ряде работ развитие новой теории шло параллельно классической. Однако сжимаемые модули оказались крайне интересными объектами сами по себе. В данной работе проводится исследование этих модулей как таковых, а также осуществляется поиск их принципиальных отличий от неприводимых модулей. В связи с этим отдельное внимание уделено распознаванию простых модулей среди сжимаемых. Дополнительно затрагивается вопрос классификации сжимаемых модулей. Вводится понятие изоморфно сжимаемого модуля. Среди прочих выделяются критически сжимаемые модули, подробно рассмотренные Зельмановицем в целом ряде работ (см. [12, 13]). Зельмановиц также ввёл понятие слабо примитивного кольца как кольца, обладающего точным критически сжимаемым модулем. В [7] исследуются несингулярные однородные (униформные) модули, которые тесно связаны с критически сжимаемыми (см. [5]). Некоторые вопросы теории сжимаемых модулей были изложены автором в [5]. Там же, а также в [13] читатель может найти подробное описание связи между областями Оре и слабо примитивными кольцами как критически сжимаемыми модулями над собой.

Следующий раздел посвящён слабо примитивным кольцам с точными критически сжимаемыми правыми идеалами. Среди них также выделен класс колец, являющихся точными критически сжимаемыми модулями над собой. Дано описание связи этих колец с областями Оре.

Раздел 4 содержит изложение подхода, основанного на идеях Зельмановица, к обобщению теоремы плотности Джекобсона. Автор в ряде случаев приводит свои формулировки, а также некоторые свои уточнения и комментарии.

В следующих пяти разделах речь идёт о суперкольцах. В первом из них приведены необходимые определения и утверждения, имеющие аналоги в теории обычных ассоциативных колец. В разделе 6 дано подробное описание структуры двустороннего правого суперкольца частных. Случай обычных колец рассматривается в [8]. Следующий раздел посвящён изучению свойств расширенного центроида суперкольца. В разделе 8 сформулированы и доказаны утверждения, связанные с примитивными суперкольцами и неприводимыми супермодулями. Приведены аналоги как самой теоремы плотности, так и её следствий. Обобщение этих результатов на случай слабо примитивных суперколец получено в разделе 9. Главным объектом рассмотрения является расширенная теорема плотности для суперколец, сформулированная в терминах ровной однородности, и те дополнительные условия на градуированные кольцо и модуль, в предположении которых все три условия в формулировке теоремы становятся равносильными.

Заключительный раздел содержит расширенную теорему плотности для колец, градуированных по коммутативной группе. Также получено уточнение этого результата в случае конечной группы.

Теория градуированных колец подробно изложена в [10]. По [11] читатель может ознакомиться с теорией примитивных суперколец. Работы [1, 3, 4] посвящены изучению расширенной теоремы плотности для градуированных колец (в частности, суперколец). В [5] изложены некоторые результаты, касающиеся слабо примитивных колец.

Автор хотел бы поблагодарить профессора А. В. Михалёва за помощь и внимание к работе.

2. Критически сжимаемые модули

Определение 1. R-модуль M называется сжимаемым, если он может быть вложен в каждый из своих ненулевых подмодулей.

Определение 2. R-модуль M называется изоморфно сжимаемым, если он изоморфен любому своему ненулевому подмодулю.

Определение 3. Сжимаемый R-модуль называется критически сжимаемым, если он не может быть вложен ни в какой из своих собственных фактор-модулей.

Замечание 1. Модуль, который одновременно и критически сжимаем, и изоморфно сжимаем, мы будем называть критически изоморфно сжимаемым.

Сразу отметим, что ненулевой подмодуль критически сжимаемого модуля также является критически сжимаемым. Среди сжимаемых модулей можно выделить простые (неприводимые) модули, которые являются объектом рассмотрения классической теории примитивных колец. Для нас будет интересен случай, в котором в качестве сжимаемых модулей выступают кольца, являющиеся сжимаемыми модулями над собой, например кольца главных идеалов, включая и кольцо целых чисел.

Пример 1. Пусть R — кольцо главных идеалов (коммутативное, без делителей нуля). Тогда R_R есть критически сжимаемый модуль, более того, изоморфно сжимаемый. Кольцо целых чисел как модуль над собой будет служить первым примером непростого критически изоморфно сжимаемого модуля.

Пример 2. Пусть R — кольцо главных идеалов. Пусть $M_n(R)$ — кольцо матриц над R. Тогда R^n будет критически изоморфно сжимаемым модулем над $M_n(R)$. Более того, как модуль R^n изоморфно одному из односторонних идеалов кольца $M_n(R)$.

Последний пример показывает, что среди сжимаемых модулей можно выделить класс односторонних собственных идеалов колец, которые являются сжимаемыми модулями над своим кольцом, в то время как само кольцо не является сжимаемым модулем над собой.

Пример 3. Пусть R — кольцо главных идеалов. Пусть aR — собственный идеал кольца R. Тогда $R \times aR$ будет критически сжимаемым модулем над кольцом матриц $M_2(aR)$, который, однако, не будет изоморфно сжимаем. В частности, этот модуль не изоморфен своему подмодулю $aR \times aR$, хотя и вкладывается в него.

Рассмотрим сжимаемый модуль M_R и его подмодуль N_R. По определению существует вложение $\sigma\colon M_R \to N_R$. Пусть L_R также подмодуль в M_R. Тогда сужение мономорфизма σ на подмодуль L_R есть также вложение L_R в N_R. Если положить $L_R = N_R$, то получим нетождественное (за исключением случая $L_R = M_R$) вложение подмодуля L_R в себя. Итак, получаем, что любые два подмодуля сжимаемого модуля вкладываются друг в друга. Другими словами, каждый подмодуль содержит изоморфный образ любого другого подмодуля, включая себя. Причём если исходный модуль не является простым, то каждый его подмодуль обладает по крайней мере одним нетождественным вложением в себя.

Сжимаемый модуль может иметь либо ровно два подмодуля (тогда это простой модуль), либо иметь бесконечное число подмодулей. Более того, непростой сжимаемый модуль не может иметь минимального (по включению) подмодуля, в противном случае этот минимальный подмодуль, отличный от всего модуля в силу непростоты последнего, должен был бы содержать свой изоморфный нетождественный образ, что нарушало бы его минимальность. Формулируя это в терминах убывающих цепочек подмодулей, получаем, что сжимаемый модуль артинов тогда и только тогда, когда прост.

Следует также отметить, что любой подмодуль, в частности циклический, сжимаемого модуля сжимаем. Далее, в силу бесконечности числа подмодулей, непростой сжимаемый модуль бесконечен. Следовательно, бесконечен и любой его подмодуль, в частности любой циклический подмодуль, а следовательно, бесконечно и само кольцо. Более того, кольцо должно иметь бесконечное число односторонних идеалов.

Для выявления простых модулей среди сжимаемых полезно следующее утверждение.

Предложение 1. *Сжимаемый правый модуль прост во всех перечисленных ниже случаях*:

(1) *модуль конечен*;
(2) *модуль имеет конечное число подмодулей*;
(3) *модуль имеет нетривиальный конечный подмодуль*;
(4) *модуль имеет простой подмодуль.*

Замечание 2. Первое, второе и третье условия суть частные случаи четвёртого.

Если сжимаемый модуль точен, то мы можем получить условия и на само кольцо.

Предложение 2. *Точный сжимаемый правый модуль прост во всех перечисленных ниже случаях*:

(1) *кольцо конечно*;
(2) *кольцо имеет конечное число правых идеалов*;
(3) *кольцо имеет конечный правый идеал*;
(4) *кольцо имеет минимальный правый идеал*;
(5) *кольцо артиново справа.*

Замечание 3. Первое, второе и третье условия суть частные случаи четвёртого.

Стоит отметить, что в том случае, когда подмодуль собственный, существует бесконечное число различных вложений исходного модуля в него. Действительно, пусть N_R — собственный подмодуль сжимаемого модуля M_R, пусть σ_1 — вложение M_R в N_R. Тогда $\sigma_1(N)_R$ — собственный подмодуль как в N_R, так и в $\sigma_1(M)_R$. Далее, существует вложение σ_2 модуля M_R в его подмодуль $\sigma_1(N)_R$. Для нас важен тот факт, что $\sigma_2(M)$ строго содержится в $\sigma_1(M)$. Таким же образом строим σ_3. Продолжая этот процесс, получаем цепочку строго вложенных друг в друга подмодулей

$$N \supseteq \sigma_1(M) \supset \sigma_2(M) \supset \ldots \supset \sigma_i(M) \supset \sigma_{i+1}(M) \supset \ldots,$$

в силу чего все вложения σ_i различны.

По определению сжимаемого модуля мы можем каждому его подмодулю сопоставить вложение, т. е. некоторый мономорфизм исходного модуля. Как мы убедились, это сопоставление неоднозначно. Возможна ситуация, при которой двум или нескольким подмодулям соответствует одно и то же вложение. Вопрос заключается в том, сколько подмодулей может соответствовать одному вложению. Количество таких подмодулей может быть произвольным. Если оно конечно, то модуль является критически сжимаемым.

Зафиксируем теперь кольцо R и рассмотрим над ним сжимаемые модули. Два различных R-модуля могут быть связаны соотношением вложимости, а именно может существовать вложение каждого из этих модулей в другой. Покажем, что данное отношение является отношением эквивалентности между классами изоморфных модулей. Рефлексивность очевидна. Покажем симметричность. Пусть M_R и N_R — сжимаемые модули, пусть $\sigma\colon M \to N$ — мономорфизм, т. е. R-модуль M вкладывается в R-модуль N. Следовательно, $\sigma(M)$ — нетривиальный R-подмодуль в N_R. Так как N_R сжимаем, то существует мономорфизм $\alpha\colon N \to \sigma(M)$, но тогда $\sigma^{-1}\alpha\colon N \to \sigma(M) \to M$ есть вложение R-модуля N в R-модуль M. Таким образом, имеет место симметричность отношения вложимости. Покажем теперь транзитивность. Для этого рассмотрим сжимаемые R-модули L, M и N и их вложения $\alpha\colon L \to M$ и $\beta\colon M \to N$. Очевидно, что их композиция $\beta\alpha$ будет вложением R-модуля L в R-модуль N.

Однако отметим, что над одним и тем же кольцом могут существовать сжимаемые модули, которые не вкладываются друг в друга. Чтобы свойство вложимости всё же имело место, необходимы дополнительные условия либо на модули, либо на само кольцо.

Выберем теперь из целого класса эквивалентности одного представителя, т. е. некоторый сжимаемый R-модуль M. Тогда все элементы класса эквивалентности содержатся в M в качестве подмодулей (с точностью до изоморфизма), более того, класс эквивалентности совпадает с классом ненулевых подмодулей R-модуля M, т. е. каждый ненулевой подмодуль содержится в том же классе, что и сам модуль, и каждый представитель класса изоморфен некоторому подмодулю в M. Если модуль изоморфно сжимаем, то его класс состоит только из изоморфных ему же модулей. Любой простой модуль, будучи изоморфно сжимаемым, также удовлетворяет этому условию. Таким образом, в классе либо все модули изоморфны (тогда он изоморфно сжимаем), либо бесконечно много неизоморфных модулей.

Встаёт вопрос, сколько классов эквивалентности сжимаемых модулей может иметь кольцо. Классический результат теории примитивных колец утверждает, что в случае существования точного минимального правого идеала над кольцом существует только один точный простой модуль. В таком случае ни одного другого (неизоморфного) точного сжимаемого модуля не существует, иначе каждый из них содержал бы простой подмодуль, что невозможно. Кольцо главных идеалов имеет единственный класс точных сжимаемых модулей, состоящий из него самого как модуля над собой и изоморфных ему. В [5] уделено внимание случаю непростых критически сжимаемых модулей. В этом случае существенным оказывается условие несингулярности сжимаемого модуля.

Определение 4. Подмодуль $N_R \in M_R$ называется существенным в M, если он нетривиально пересекается с любым собственным подмодулем в M.

Определение 5. Пусть M_R — модуль, тогда его подмножество

$$Z(M_R) = \{m \mid \mathrm{Ann}_R(m) \text{ — существенный правый идеал в } R\}$$

является подмодулем и называется сингулярным. Более того, $Z(R_R)$ является двусторонним идеалом в R и называется правым сингулярным идеалом кольца R.

Определение 6. Модуль M_R называется сингулярным, если $Z(M_R) \neq 0$, и несингулярным в противном случае.

Следующую теорему мы докажем позже, а пока только сформулируем её для полноты изложения.

Теорема 1. *Пусть R — кольцо с точным критически сжимаемым правым идеалом I, тогда любые два точных несингулярных критически сжимаемых модуля над R могут быть вложены друг в друга.*

Предложение 3. *Если M_R — сжимаемый модуль, то $\mathrm{Ann}_R(N) = \mathrm{Ann}_R(M)$ для любого ненулевого подмодуля N модуля M.*

Последнее утверждение справедливо в силу двух следующих соображений. Первое: изоморфные модули имеют одинаковые аннуляторы в кольце. Второе: аннулятор подмодуля содержит аннулятор всего модуля.

Следствие 1. *В сжимаемом модуле M_R при условии, что $MR \neq 0$, имеет место следующая импликация:*

$$mR = 0 \implies m = 0 \text{ для всех } m \in M.$$

Доказательство. Действительно, если $m \neq 0$, то $mR+\mathbb{Z}m = \mathbb{Z}m$, что влечёт противоречивое равенство правых идеалов $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_R(mR + \mathbb{Z}m) = \mathrm{Ann}_R(\mathbb{Z}m) = \mathrm{Ann}_R(m) = R$. □

Напомним, что аннулятор произвольного подмножества правого модуля есть правый идеал кольца, над которым рассматривается модуль; аннулятор же подмодуля есть двусторонний идеал.

В [5] приведён пример, демонстрирующий неотъемлемость условия несингулярности. В связи с этим полезно следующее соображение. Если сжимаемый модуль M_R имеет ненулевой сингулярный подмодуль $Z(M_R)$, то он полностью с ним совпадает: $M_R = Z(M_R)$. Это означает, что все элементы модуля имеют существенные аннуляторы в кольце R; более того, каждое конечное множество элементов модуля имеет существенный аннулятор.

Предложение 4. *Точный сжимаемый правый модуль M_R над кольцом R несингулярен в каждом из следующих случаев*:

(i) *M конечен*;

(ii) *R конечно*;

(iii) *R имеет конечное число правых идеалов* (*в частности, не имеет собственных*);

(iv) *R имеет конечное число существенных правых идеалов* (*в частности, не имеет собственных*);

(v) *R артиново справа*;

(vi) *пересечение всех существенных правых идеалов в R нетривиально*;

(vii) *R коммутативно.*

Доказательство. При условии (i) сингулярность модуля влекла бы нетривиальность аннулятора всего модуля, что противоречило бы условию точности. Условие (vi) есть следствие любого из условий (ii)—(v), в этом случае сингулярность модуля также означала бы нетривиальность аннулятора всего модуля, так как этот аннулятор должен содержать пересечение всех существенных правых идеалов. Пусть теперь кольцо R коммутативно, а модуль M точен, сжимаем и сингулярен. Тогда существует ненулевой элемент m модуля M с аннулятором, отличным от всего кольца, и существует аннулирующий его элемент $r \neq 0$ кольца R, а значит, $mrR = 0$ и, в силу коммутативности кольца, $mRr = 0$, т. е. r аннулирует целый нетривиальный подмодуль в сжимаемом модуле, следовательно, аннулирует и весь модуль, что противоречит условию точности. $\square$

Приведём пример точного сжимаемого сингулярного модуля. Более того, модуль в нашем примере будет неприводимым.

Пример 4. Рассмотрим кольцо многочленов от одной переменной над полем как модуль над алгеброй Вейля, т. е. алгеброй линейных операторов, порождённой оператором дифференцирования и оператором умножения на переменную. Этот модуль точен, неприводим и сингулярен, а алгебра Вейля ещё и правая и левая область Оре.

Определение 7. Пусть M_R — правый R-модуль, тогда $d(M_R)$ (размерность M как правого R-модуля) есть супремум числа ненулевых слагаемых, прямая сумма которых $M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ является подмодулем в M.

Определение 8. Модуль M_R называется униформным, если $d(M_R) = 1$, т. е. если для любых ненулевых подмодулей M_1 и M_2 модуля M их пересечение нетривиально: $M_1 \cap M_2 \neq 0$.

Предложение 5 (Зельмановиц). *Следующие условия на сжимаемый модуль M равносильны*:

(i) *M критически сжимаем*;

(ii) *каждый нетривиальный частичный эндоморфизм модуля M является мономорфизмом.*

Более того, каждый модуль, удовлетворяющий условию (ii)*, является униформным.*

Определение 9. Кольцо R называется слабо примитивным, если оно обладает точным критически сжимаемым модулем.

Первый и самый простой пример слабо примитивного кольца — кольцо целых чисел.

Пример 5. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ является точным критически сжимаемым модулем над самим собой. Таким образом, $\mathbb{Z}$, не будучи примитивным, является, однако, слабо примитивным кольцом.

Очевидно, что неприводимый модуль критически сжимаем, а примитивное кольцо является слабо примитивным.

Пример 6. Рассмотрим свободный n-мерный $\mathbb{Z}$-модуль M, тогда кольцо матриц $M_n(\mathbb{Z})$ есть кольцо эндоморфизмов этого модуля. M есть точный критически сжимаемый модуль над своим кольцом эндоморфизмов. Действительно, любой его подмодуль представляет собой не что иное, как $k \cdot M$, где $k \in \mathbb{N}$.

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, следует ввести одно крайне важное и полезное понятие.

Определение 10. Правой областью Оре называется кольцо S без делителей нуля и такое, что для любых его ненулевых элементов $a, b \in S$ найдутся $x, y \in S$ с условием $ax = by \neq 0$ (т. е. S_S — униформный модуль).

Заметим, что правая область Оре S обладает правым кольцом частных

$$\bar{S} = \{ab^{-1} \mid a \in S,\ 0 \neq b \in S\}.$$

Понятие области Оре понадобится нам не один раз, прежде всего для следующего наблюдения.

Предложение 6. *Если M_R — критически сжимаемый R-модуль, то его кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_R(M)$ является правой областью Оре.*

Подробное доказательство этого утверждения можно найти в [13]. Напомним лишь, что в случае неприводимого модуля кольцо эндоморфизмов является телом. Позже будет продемонстрировано, что область Оре в теории слабо примитивных колец играет ту же роль, что и тело в классической теории примитивных колец. Также будет доказан тот факт, что слабо примитивные кольца, являющиеся точными критически сжимаемыми модулями над собой, есть не что иное, как области Оре. Но прежде потребуются некоторые вспомогательные рассуждения.

Выше было упомянуто свойство униформности критически сжимаемого модуля. Обращение этого утверждения имеет место только при дополнительных условиях.

Теорема 2. *Пусть M_R — несингулярный униформный модуль, в котором $\mathrm{Hom}_R(M,N) \neq 0$ для каждого ненулевого подмодуля $N_R \in M_R$. Тогда M_R критически сжимаем.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $0 \neq m \in M$. В силу несингулярности модуля его аннулятор в кольце R не является существенным идеалом, т. е. в R имеется ненулевой правый идеал I_m, тривиально пересекающийся с $\mathrm{Ann}_R(m)$. Итак, $mq \neq 0$ для всех $0 \neq q \in I_m$. Произвольность выбора m приводит нас к системе правых идеалов

$$\{I_m \text{ — правый идеал в } R \mid 0 \neq m \in M\}.$$

Остаётся показать, что каждый частичный эндоморфизм в M_R есть мономорфизм. Так как каждый эндоморфизм можно считать частичным, мы в таком случае будем иметь сжимаемость модуля M_R. Действительно, пусть $f\colon U_R \to V_R$ — частичный эндоморфизм, где U и V — R-подмодули в M, более того, V есть полный образ U. Если f не мономорфизм, то $f(u) = 0$ для некоторого $u \in U$. Пусть элемент $w \in U$ такой, что $f(w) \neq 0$. Отметим, что подмодуль uR полностью аннулируется частичным эндоморфизмом f, но в то же время $f(wq) \neq 0$ для любого $0 \neq q \in I_{f(w)}$. Таким образом, f не аннулирует ни один ненулевой элемент подмодуля $wI_{f(w)}$. Но M_R — униформный модуль, поэтому $uR \cap wI_{f(w)} \neq 0$, что приводит к противоречию. Действительно, в таком случае каждый ненулевой элемент этого пересечения должен был бы аннулироваться и не аннулироваться частичным эндоморфизмом f одновременно. □

Критически сжимаемый модуль, равно как и неприводимый, может быть сингулярным. Это очевидным образом иллюстрирует следующий простой пример.

Пример 7. $\mathbb{Z}_2$ — неприводимый сингулярный модуль над $\mathbb{Z}_4$. Более того, он неточный.

Случай точных модулей будет рассмотрен позже.

3. Слабо примитивные кольца с точными критически сжимаемыми правыми идеалами

Далее будет полезно следующее соображение, ранее уже упоминавшееся немного в ином виде: пусть в модуле M_R существует такой ненулевой элемент m, что его аннулятор не является существенным правым идеалом в кольце R, тогда существует нетривиальный правый идеал I_m кольца R (возможно, это всё кольцо), такой что никакой его элемент не аннулирует m (тривиальное пересечение именно с этим правым идеалом приводит к несущественности аннулятора m). Тогда I_m и mI_m изоморфны как правые R-модули. Действительно, отображение, действующее по правилу $r \mapsto mr$, есть изоморфизм этих модулей. Пользуясь этим фактом, можно получить некоторые важные утверждения. Начнём с предложения общего плана. Будем говорить, что какое-то условие Cond на модуль переносится на подмодули, если из того, что этому условию удовлетворяет сам модуль, следует то, что этому условию удовлетворяет и любой его ненулевой подмодуль, т. е. имеет место импликация

$$\mathrm{Cond}(M_R) \implies \mathrm{Cond}(N_R) \text{ для всех } 0 \neq N_R \in M_R.$$

Предложение 7. *Пусть модуль M_R удовлетворяет некоторому переносимому на подмодули условию* Cond, *пусть также существует элемент $m \in M$ с несущественным аннулятором* (*другими словами, сингулярный подмодуль не совпадает со всем модулем*)*. Тогда в кольце R существует ненулевой правый идеал, удовлетворяющий условию* Cond (*как правый R-модуль*)*.*

Доказательство. В кольце существует правый идеал I_m. Тогда mI_m есть ненулевой подмодуль в M_R, причём он изоморфен I_m как правый R-модуль. Пользуясь переносимостью условия Cond на подмодули, получаем требуемый результат. □

В качестве Cond можно рассматривать следующие условия:

— неприводимость;
— сжимаемость;
— критическую сжимаемость;
— униформность;
— артиновость.

Прежде всего нас будут волновать два следствия, в которых в качестве Cond фигурируют неприводимость и критическая сжимаемость соответственно.

Предложение 8. *Следующие условия на примитивное кольцо эквивалентны*:

(i) *оно обладает точным несингулярным неприводимым* (*правым*) *модулем*;
(ii) *оно обладает минимальным правым идеалом.*

Доказательство.

Докажем импликацию (ii) $\implies$ (i). Пусть I — минимальный правый идеал кольца R, тогда именно он будет точным несингулярным неприводимым правым R-модулем. Точность и неприводимость этого идеала часто используются в классической литературе. Мы покажем лишь несингулярность. Допустим, что имеет место сингулярность идеала I. Тогда I, будучи минимальным, совпадает со своим сингулярным подмодулем. Следовательно, произвольный элемент $r \in I$ имеет существенный аннулятор в кольце R, что, в свою очередь, влечёт нетривиальность пересечения $\mathrm{Ann}_R(r) \cap I \neq 0$. Снова используя минимальность I, получаем $\mathrm{Ann}_R(r) \cap I = I$. В результате, поскольку r произволен, получаем $I^2 = 0$, что противоречит первичности примитивного кольца. □

Предложение 9. *Следующие условия на слабо примитивное кольцо эквивалентны*:

(i) *оно обладает точным несингулярным критически сжимаемым* (*правым*) *модулем*;

(ii) *оно обладает точным критически сжимаемым правым идеалом.*

Доказательство. Чтобы проверить импликацию (ii) $\Longrightarrow$ (i), нужно показать несингулярность точного критически сжимаемого правого идеала первичного кольца. Это будет сделано в доказательстве следующего утверждения. $\square$

Замечание 4. В предыдущем предложении условие слабой примитивности кольца можно заменить на условие его первичности.

Теорема 3. *Пусть R — первичное кольцо, тогда равносильны следующие условия на правый идеал I*:

(i) *I — несингулярный униформный правый идеал в R*;

(ii) *I — точный критически сжимаемый правый идеал в R.*

Доказательство. Докажем импликацию (i) $\Longrightarrow$ (ii). В предыдущем разделе было уже показано, что несингулярный униформный правый R-модуль при условии существования нетривиального гомоморфизма в каждый собственный подмодуль критически сжимаем. Поскольку кольцо R первично, то каждый его правый идеал I точен. Так как кольцо R первично, то для любого правого идеала $J \subset I$ существует такой элемент $r \in J$, что $rI \neq 0$ (иначе $J^2 \subseteq JI = 0$). Гомоморфизм правых R-модулей $I \to J$, действующий по правилу левого умножения на тот самый элемент $r \in J$, будет ненулевым, что и требовалось. Далее, опять же в силу первичности, каждый правый идеал кольца R точен как правый модуль над ним.

Проверим справедливость импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i). Униформность была показана раньше для модулей. Докажем несингулярность. Поскольку R первично, $I^2 \neq 0$, поэтому мы можем выбрать $t \in I$ с условием $tI \neq 0$. Пусть $f \in \mathrm{End}_R(I)$ действует по правилу $f(r) = tr$, $f \neq 0$ является мономорфизмом. Следовательно, $I \cap \mathrm{Ann}_R(t) = 0$, из чего можно сделать вывод, что $t \notin Z(I)$, где $Z(I)$ обозначает сингулярный подмодуль модуля I_R. Но I_R сжимаемый, поэтому либо $Z(I) = I$, либо $Z(I) = 0$. Итак, если I сингулярен, то $t \notin I$, что противоречит самому выбору t. $\square$

Возвращаясь к областям Оре, в качестве следствий можно получить несколько интересных утверждений.

Следствие 2. *Если S — правая область Оре, то S_S — точный критически сжимаемый модуль* (*как модуль над самим собой*), *т. е. S — слабо примитивное кольцо.*

Доказательство. Используем предыдущую теорему. Первичность S как кольца, несингулярность и униформность S_S как модуля над самим собой очевидны. $\square$

Опираясь на всё сказанное выше, мы можем получить характеризацию некоторого специального класса слабо примитивных колец.

Предложение 10. *Равносильны следующие условия на кольцо R:*

(i) *R — правая область Оре;*

(ii) *R_R — точный критически сжимаемый модуль.*

Элементы доказательства уже обсуждались выше.

Широко известен тот факт, что любые два точных неприводимых (правых) модуля над примитивным кольцом с минимальным правым идеалом изоморфны, в частности, они изоморфны этому идеалу. Можно попытаться сформулировать аналогичный результат и для слабо примитивных колец. Максимум, на что мы можем рассчитывать, — это вложение одного модуля в другой. Ни о каком изоморфизме речи идти не может. Мы уже отмечали, что свойство вложимости есть отношение эквивалентности на множестве всех сжимаемых R-модулей. Свойство сжимаемости модулей, очевидно, играет здесь ключевую роль. Пример алгебры Вейля демонстрирует тот факт, что кольцо с точным критически сжимаемым (несингулярным униформным) односторонним идеалом может обладать точными критически сжимаемыми модулями, не вкладываемыми друг в друга. А именно, алгебра Вейля есть (правая) область Оре, в силу чего является точным критически сжимаемым модулем над собой, а также, будучи собственным правым идеалом, является несингулярным униформным модулем опять же над собой. Однако соответствующее кольцо многочленов есть неприводимый сингулярный модуль над алгеброй Вейля, в силу чего не вкладывается в саму алгебру Вейля как модуль.

При более детальном рассмотрении оказывается, что вся проблема заключается в сингулярности. При дополнительном условии несингулярности модулей их взаимная вложимость всё же имеет место.

Теорема 4. *Пусть R — слабо примитивное кольцо с точным критически сжимаемым (несингулярным униформным) правым идеалом I, тогда любые два несингулярных униформных модуля над R могут быть вложены друг в друга.*

Доказательство. Как и в случае примитивных колец, мы докажем, что именно правый идеал I вкладывается в любой несингулярный униформный R-модуль. Далее, пользуясь тем, что вложимость сжимаемых R-модулей есть свойство эквивалентности, легко получаем требуемый результат. Рассмотрим произвольный несингулярный униформный модуль M_R. Точность M приводит к существованию такого элемента $m \in M$, что $mI \neq 0$. Гомоморфизм правых R-модулей $f\colon I \to mI$, действующий по правилу $l \mapsto ml$ для каждого $l \in I$, есть мономорфизм. Действительно, $f \neq 0$. Допустим, что $\mathrm{Ann}_I(m) \neq 0$. Пусть $r \in I$ удовлетворяет условию $mr \neq 0$. Рассмотрим произвольный правый идеал J в кольце R. Тогда $rJ \in I$, т. е. либо $rJ = 0$, либо $rJ \cap \mathrm{Ann}_I(m) \neq 0$. В обоих случаях получаем $J \cap \mathrm{Ann}_R(m) \neq 0$, что в силу произвольности выбора J противоречит несингулярности M. $\square$

4. Расширенная теорема плотности

Главный результат данного раздела — аналог теоремы плотности для слабо примитивных колец, впервые опубликованный Зельмановицем. Мы позволили себе несколько видоизменить его результаты, а также добавить некоторые свои соображения.

Теорема плотности для примитивных колец представляет собой центральный результат в классической теории ассоциативных колец. Суть её заключается в том, что примитивное кольцо является плотным подкольцом кольца эндоморфизмов линейного пространства над некоторым телом. Так как в случае точного критически сжимаемого модуля кольцо эндоморфизмов может не являться телом, то мы, пользуясь тем фактом, что правая область Оре имеет правое тело частных, будем рассматривать линейную зависимость элементов модуля над этим телом.

Теорема 5 (теорема плотности для критически сжимаемых модулей). *Пусть M_R — точный критически сжимаемый модуль, пусть Δ — правое тело частных правой области Оре $\mathrm{End}(M_R)$. Тогда для любого конечного набора линейно независимых над Δ элементов $m_1, \ldots, m_k \in M$ найдётся такой элемент $0 \neq a \in \mathrm{End}(M_R)$, что для произвольного набора $n_1, \ldots, n_k \in M$ существует элемент $r \in R$ со свойством*

$$an_i = m_i r \text{ для всех } i = 1, \ldots, k.$$

Доказательство. Пусть дана конечная линейно независимая над Δ последовательность $m_1, \ldots, m_k \in M$. Определим конечную последовательность правых идеалов $A_i = \bigcap\limits_{j \neq i} m_j R$, $i = 1, \ldots, k$. Заметим, что эта последовательность в силу независимости набора $\{m_i\}_{i=1}^k$ обладает свойством $m_i A_i \neq 0$. Униформность модуля M влечёт нетривиальность пересечения $\bigcap\limits_{i=1}^k m_i A_i$. Следовательно, существует $0 \neq a \in \mathrm{Hom}_R\Big(M, \bigcap\limits_{i=1}^k m_i A_i\Big)$. Тогда для каждого n_i найдётся $r_i \in A_i$ со свойством $an_i = m_i r_i$. Осталось положить $r = \sum\limits_{i=1}^k r_i$. □

Заметим, что предыдущее утверждение отличается от теоремы плотности для примитивных колец множителем $a \in \mathrm{End}(M_R)$. Действительно, при произвольном выборе элементов $n_1, \ldots, n_k \in M$ может случиться так, что некоторые из них просто не попадут в R-модуль, порождённый набором $m_1, \ldots, m_k \in M$, что и заставит нас перевести все n_i по крайней мере в подмодуль $m_1 R + \ldots + m_k R \subseteq M$.

Далее мы приведём более общий результат, полученный Зельмановицем в [12, 13], а также переформулируем ряд следствий из него.

Прежде всего стоит заметить, что правое тело частных кольца эндоморфизмов точного критически сжимаемого модуля есть не что иное, как кольцо эндоморфизмов его квазиинъективной оболочки. Этот факт, собственно говоря, и позволяет усилить результат, полученный ранее. По сути, далее мы введём ряд новых понятий и установим определённую связь между ними, что даст несколько иной взгляд на теорему плотности для слабо примитивных колец. Отметим также, что уже полученный результат будет трактоваться как слабая плотность слабо примитивного кольца в кольце линейных преобразований над некоторым телом.

Определение 11. Квазиинъективным называется модуль, любой частичный эндоморфизм которого продолжается до полного.

Каждый модуль M_R может может быть вложен в наименьший (по включению) квазиинъективный $\bar{M}_R$, который называется квазиинъективной оболочкой модуля M_R. Для полноты изложения упомянем также, что инъективная оболочка строится аналогичным образом, более того, она естественным образом оказывается шире и является максимальным существенным расширением модуля, т. е. максимальным из тех модулей, каждый подмодуль которых нетривиально пересекается с исходным модулем M. Отсюда, очевидно, следует существенность квазиинъективного расширения. Для более подробного изучения этих объектов можно ознакомиться с [9]. Мы же ограничимся следующими фактами: 1) квазиинъективная оболочка (равно как и инъективная) определена с точностью до изоморфизма; 2) $\bar{M} = \Delta M$, где $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$.

Перейдём непосредственно к критически сжимаемым модулям.

Предложение 11. *Если M_R — критически сжимаемый модуль, то элементы кольца $D = \mathrm{End}_R(M)$ могут быть продолжены единственным образом на инъективную оболочку $\bar{M}$, т. е. имеют единственное расширение до элементов кольца $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$. Более того, кольцо Δ является телом и правым кольцом частных области Оре D.*

Следствие 3. *Если M_R — критически сжимаемый модуль, то он неприводим в том и только том случае, когда является квазиинъективным.*

Определение 12. Пусть M_R — модуль над кольцом R, пусть V_R — его квазиинъективная оболочка, пусть $\Delta = \mathrm{End}_R(V)$. Тогда подкольцо $S \in \Delta$ называется слабо плотным в $\mathrm{End}_\Delta(V)$, если для произвольного линейно независимого над Δ набора $v_1, \ldots, v_k \in V$ существует такой элемент $0 \neq a \in \Delta$, что для произвольного набора $n_1, \ldots, n_k \in M$ найдётся $s \in S$ с условием $an_i = v_i s \in M$ для каждого $i = 1, \ldots, k$.

Нам также пригодятся понятия регулярного элемента кольца и локального порядка в кольце.

Определение 13. Элемент кольца называется регулярным, если он не является делителем нуля.

Определение 14. Пусть Q — кольцо с единицей, пусть S — подкольцо в Q. Тогда S называется правым порядком в Q, если каждый регулярный элемент кольца S имеет обратный в Q и для любого $q \in Q$ существуют такие $a, b \in S$, где b регулярен, что $q = ab^{-1}$.

Определение 15. Пусть M_R — модуль над кольцом R, пусть V_R — его квазиинъективная оболочка, пусть $\Delta = \mathrm{End}_R(V)$. Тогда подкольцо $S \in \Delta$ называется (правым) локальным порядком в $\mathrm{End}_\Delta(V)$, если для произвольного $\tau \in \mathrm{End}_\Delta V$ и линейно независимых над Δ элементов $m_1, \ldots, m_k \in M$ найдутся $r, s \in S$ со свойством $m_i \tau r = m_i s$ и $0 \neq m_i r \in \Delta m_i$ для каждого i.

Все эти определения были введены с целью упростить самую общую формулировку теоремы плотности для слабо примитивных колец.

Теорема 6 (общая теорема плотности). *Равносильны следующие условия на кольцо R:*

(i) *R — слабо примитивное кольцо;*

(ii) *R — слабо плотное подкольцо в кольце $\mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$, где $\bar{M}_R$ — квазиинъективная оболочка некоторого модуля M_R, а $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$ является телом;*

(iii) *R — локальный порядок в кольце $\mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$, где $\bar{M}_R$ — квазиинъективная оболочка некоторого модуля M_R, а $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$ является телом.*

Теперь приведём ряд простых переформулировок и следствий из всего вышесказанного.

Следствие 4. *Пусть R — точный критически сжимаемый модуль M_R, пусть Δ — кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_R(\bar{M})$, где $\bar{M}_R$ — квазиинъективная оболочка модуля M_R. Тогда R — слабо плотное подкольцо в кольце $\mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$.*

Отметим, что предыдущее утверждение, строго говоря, не следует из общей теоремы плотности, так как в условии (i) ничего не говорится про сам точный критически сжимаемый модуль над кольцом R, а утверждается лишь его существование. Но в действительности каждый точный критически сжимаемый модуль над кольцом R подходит на роль M в условии (ii).

Следствие 5. *Если R — слабо примитивное кольцо, то оно является слабо плотным подкольцом в кольце эндоморфизмов модуля над некоторым телом.*

Следствие 6. *Если R — слабо примитивное кольцо, то оно является локальным порядком в кольце эндоморфизмов модуля над некоторым телом.*

5. Суперкольца и супермодули

Под ассоциативным суперкольцом будем понимать $\mathbb{Z}_2$-градуированное ассоциативное кольцо.

Будем называть элементы a_α и b_β суперкольца R суперкоммутирующими, если $a_\alpha b_\beta = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta a_\alpha$.

Если $R = R_0 + R_1$ — суперкольцо, то антиизоморфное ему суперкольцо R^{op} определяется следующим образом: R^{op} равно R как аддитивная группа и $a_\alpha {}^{\mathrm{op}} b_\beta = (-1)^{\alpha\beta} b_\beta a_\alpha$.

Обозначим через $\mathrm{End}(M,+) = \mathrm{End}_0(M,+) + \mathrm{End}_1(M,+)$ суперкольцо эндоморфизмов M как аддитивной группы. По определению $f_\alpha \in \mathrm{End}_\alpha(M,+)$, если имеет место $f_\alpha(M_\beta) \subseteq M_{\alpha+\beta}$. Положим

$$\mathrm{End}_\alpha({}_RM) = \{f_\alpha \in \mathrm{End}_\alpha(M,+) \mid f_\alpha r_\rho = r_\rho f_\alpha \text{ для всех } r_\rho \in R_\rho\},$$
$$\mathrm{Cen}_\alpha({}_RM) = \{f_\alpha \in \mathrm{End}_\alpha(M,+) \mid f_\alpha r_\rho = (-1)^{\alpha\rho} r_\rho f_\alpha \text{ для всех } r_\rho \in R_\rho\}.$$

Будем называть $\mathrm{End}({}_RM) = \mathrm{End}_0({}_RM) + \mathrm{End}_1({}_RM)$ суперкольцом эндоморфизмов супермодуля ${}_RM$, а $\mathrm{Cen}({}_RM) = \mathrm{Cen}_0({}_RM) + \mathrm{Cen}_1({}_RM)$ — централизатором супермодуля ${}_RM$. Более того, обычный эндоморфизм f модуля M может быть представлен в виде суммы двух однородных суперэндоморфизмов M как супермодуля. Действительно, для этого достаточно положить $f_\alpha(m_\mu) = (f(m_\mu))_{\alpha+\mu}$. Надо лишь проверить тот факт, что f_α правильно выносит однородные скаляры:

$$f_\alpha(r_\rho m_\mu) = (f(r_\rho m_\mu))_{\alpha+\mu+\rho} =$$
$$= ([(f(m_\mu))_{\alpha+\mu} + (f(m_\mu))_{\alpha+\mu+1}]r_\rho)_{\alpha+\mu+\rho} = (f(m_\mu))_{\alpha+\mu} r_\rho = f_\alpha(m_\mu) r_\rho.$$

Заметим, что $\mathrm{End}({}_RM)$ и $\mathrm{Cen}({}_RM)$ антиизоморфны (здесь мы предполагаем, что $\mathrm{End}({}_RM)$ и $\mathrm{Cen}({}_RM)$ действуют по разные стороны). Действительно, пусть $f_\gamma \in \mathrm{End}_\gamma({}_RM)$. Тогда, положив $g_\gamma(m_\mu) = (-1)^{\gamma\mu}(m_\mu) f_\gamma$, получим, что $g_\gamma \in \mathrm{Cen}_\gamma({}_RM)$, более того, при этом отображении имеет место антиизоморфность

$$a_\alpha \overset{\mathrm{End}}{\cdot} b_\beta \to (-1)^{\alpha\beta} b_\beta \overset{\mathrm{Cen}}{\cdot} a_\alpha,$$

что и требовалось.

Из вышесказанного, в частности, следует, что любой левый (правый) Cen-супермодуль можно рассматривать как правый (левый) End-супермодуль.

Важно отметить, что супермодуль называется простым (неприводимым), если он не имеет собственных суперподмодулей. Хотя, возможно, у него существуют собственные подмодули, не являющиеся суперподмодулями.

Сформулируем для суперколец и супермодулей простой, но важный результат, широко известный под названием «лемма Шура».

Лемма 1 (лемма Шура). *Любой однородный ненулевой супергомоморфизм неприводимых R-супермодулей обратим. Централизатор супермодуля есть супертело.*

$\mathbb{Z}_2$-градуировка матричного кольца может порождаться двумя способами. Во-первых, если элементы матрицы обладают суперструктурой, то она переносится и на матричное кольцо, т. е. $(M_n(K))_\alpha = M_n(K_\alpha)$. Во-вторых, пусть $n = p + q$, тогда за нулевую компоненту возьмём диагональные блоки $M_p(K)$ и $M_q(K)$, а за единичную — внедиагональные блоки (в этом случае K не обязано иметь суперструктуру). Последнюю градуировку будем называть (p, q).

В дальнейшем нам пригодится одна конструкция. Пусть S — суперкольцо, ${}_SN$ — супермодуль, Cen — его централизатор, тогда ${}_{\mathrm{Cen}}N$ и $N_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$ — супермодули. Рассмотрим некоторый супермодуль $M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$. Тогда $\mathrm{Hom}(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}; N_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}})$ — левый S-супермодуль. Пусть T — S-суперподмодуль. Будем называть T тотальным, если $Tm_\mu \neq 0$ для каждого $m_\mu \in M_\mu$. Описанную конструкцию будем называть S-контекстом (эту конструкцию можно также называть S-суперконтекстом).

Определение 16. Пусть M_R и N_R — супермодули, $T \subseteq \mathrm{Hom}(M_R; N_R)$, тогда T называется слабо плотным, если для любых $m_{1\alpha}, \ldots, m_{k\alpha} \in M_\alpha$, таких что $m_{1\alpha} \notin \sum\limits_{i=2}^{k} m_{i\alpha}\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}$, существует такой элемент $t_\beta \in T_\beta$, что $t_\beta m_{1\alpha} \neq 0$, $t_\beta m_{i\alpha} = 0$ при $i \geqslant 2$.

Теорема 7 (теорема слабой плотности для суперколец). *Пусть дан S-контекст с квазиинъективным супермодулем ${}_SN$ и тотальным супермодулем T, тогда T слабо плотен.*

Доказательство. Проведём индукцию по k (используем те же обозначения, что и в предыдущем определении). Пусть $k = 1$. Поскольку T тотален, то для произвольного $m_\alpha \in M_\alpha$ найдётся такой элемент $t_\beta \in T_\beta$, что $t_\beta m_\alpha \neq 0$. Пусть дан набор $m_{1\alpha}, \ldots, m_{k\alpha} \in M_\alpha$ с условием $m_{1\alpha} \notin \sum\limits_{i=2}^{k} m_{i\alpha}\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}$ и утверждение выполняется для любого $n < k$.

Пусть для нашего набора утверждение неверно, т. е. если $t_\beta m_{i\alpha} = 0$ для каждого $i \geqslant 1$, то $t_\beta m_{1,\alpha} = 0$. Обозначим через $J = J_0 + J_1$ аннулятор набора $\{m_i\alpha,\ i \geqslant 3\}$. Заметим, что J — левый S-суперподмодуль в T. Если $m_{2\alpha} \in \sum\limits_{i=3}^{k} m_{i\alpha}\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}$, то по предположению индукции всё доказано. Пусть $m_{2\alpha} \notin \sum\limits_{i=3}^{k} m_{i\alpha}\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}$. По предложению индукции $Jm_{2\alpha} \neq 0$. $Jm_{2\alpha}$ — левый S-суперподмодуль супермодуля ${}_SN$. Определим $f_0\colon Jm_{2\alpha} \to N$ по правилу $t_\xi m_{2\alpha} \mapsto t_\xi m_{1\alpha}$ для каждого $t_\xi \in J_\xi$ (определение корректно, так как $t_\xi m_{2\alpha} = 0$ влечёт $t_\xi m_{1\alpha} = 0$). Поскольку f_0 — однородный частичный эндоморфизм квазиинъективного супермодуля ${}_SN$, то он продолжается до полного эндоморфизма. Отождествим f_0 с его продолжением. Заметим, что $J(f_0(m_{2\alpha}) - m_{1\alpha}) = 0$. Поскольку $m_{1\alpha} \notin \sum\limits_{i=2}^{k} m_{i\alpha}\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}$, то $(f_0(m_{2\alpha}) - m_{1\alpha}) \notin \sum\limits_{i=3}^{k} m_{i\alpha}\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}$. По предположению индукции $J(f_0(m_{2\alpha}) - m_{1\alpha}) = 0$, получили противоречие. $\square$

Сформулируем теорему слабой плотности в терминах неровной однородности. В дальнейшем иногда будет удобнее применять её именно в таком виде.

Теорема 8. *Пусть дан S-контекст с квазиинъективным супермодулем ${}_SN$ и тотальным T, тогда для любых $m_{1\alpha_1}, \ldots, m_{k\alpha_k} \in M$, таких что $m_{1\alpha_1} \notin$ $\notin \sum\limits_{i=2}^{k} m_{i\alpha_i}\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$, существует такой элемент $t_\beta \in T_\beta$, что $t_\beta m_{1\alpha_1} \neq 0$, $t_\beta m_{i\alpha_i} = 0$ при $i \geqslant 2$.*

Доказательство. В доказательстве предыдущей теоремы надо лишь заменить индексы однородности. В частности, эндоморфизм f будет иметь индекс $\alpha_0 + \alpha_1$. $\square$

Если A и B — суперали гебры над полем K, то $T = A \otimes_K B$ будет суперали гебрoй, где $T_0 = A_0 \otimes_K B_0 + A_1 \otimes_K B_1$, $T_1 = A_0 \otimes_K B_1 + A_1 \otimes_K B_0$. Умножение в этом тензорном произведении задаётся по правилу

$$(a_\alpha \otimes b_\beta) \cdot (c_\gamma \otimes d_\delta) = (-1)^{\beta\gamma} a_\alpha c_\gamma \otimes b_\beta d_\delta.$$

6. Суперкольца частных

Для суперколец частных нам понадобятся понятие и свойства плотного суперидеала.

Определение 17. Правый суперидеал $J \subseteq R$ называется плотным, если для произвольных элементов $0 \neq r_{1\alpha}$, $r_{2\beta}$ из R существует такой элемент $r_\rho \in R_\rho$, что $r_{1\alpha} r_\rho \neq 0$, $r_{2\beta} r_\rho \in J_{\beta+\rho}$.

Определение 18. Правый суперидеал $J \subseteq R$ называется слабо плотным, если для произвольных элементов $0 \neq r_{1\alpha}$, $r_{2\alpha}$ из R существует такой элемент $r_\rho \in R_\rho$, что $r_{1\alpha} r_\rho \neq 0$, $r_{2\alpha} r_\rho \in J_{\alpha+\rho}$.

То, что первое определение сильнее второго, иллюстрирует следующий пример.

Пример 8. Пусть R — суперкольцо верхнетреугольных (2×2)-матриц с коэффициентами из Z_2, т. е.

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad R_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь правый суперидеал

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

является слабо плотным, но не является плотным.

Будем обозначать множество плотных суперидеалов суперкольца R через $D(R)$. Введём обозначение

$$(a_\alpha : J) = (a_\alpha : J)_0 + (a_\alpha : J)_1, \quad \text{где} \quad (a_\alpha : J)_\beta = \{x_\beta \in R_\beta \mid a_\alpha x_\beta \in J_{\alpha+\beta}\}.$$

Далее будем считать R полупервичным, т. е. не имеющим ненулевых нильпотентных суперидеалов. Для полноты заметим, что

$$\text{суперкольцо } R \text{ полупервично} \iff a_\alpha R a_\alpha \neq 0 \text{ для всех } 0 \neq a_\alpha \in R_\alpha,$$
$$\text{суперкольцо } R \text{ первично} \iff a_\alpha R b_\beta \neq 0 \text{ для всех } 0 \neq a_\alpha \in R_\alpha,\ 0 \neq b_\beta \in R_\beta.$$

Приведём основные свойства плотных идеалов.

Предложение 12. *Пусть $I, J, S \in D(R)$, $f_\gamma \colon I_R \to R_R$ — супергомоморфизм правых супермодулей, тогда*:

(1) $f_\gamma^{-1}(J) \in D(R)$;
(2) $(a_\alpha : J) \in D(R)$ *для каждого* $a_\alpha \in R_\alpha$;
(3) $I \cap J \in D(R)$;

(4) *если K — правый супеpидеал и $I \subseteq K$, то $K \in D(R)$;*

(5) *$l(I) = r(I) = 0$, где $l(I)$ и $r(I)$ соответственно левый и правый аннуляторы супеpидеала I в суперкольце R;*

(6) *если K — правый супеpидеал и $(a_\alpha : K) \in D(R)$ для каждого $a_\alpha \in I_\alpha$, то $K \in D(R)$;*

(7) *если L — правый супеpидеал и $g_\pi \colon L_S \to R_S$ — супергомоморфизм правых S-супермодулей, то g_π — супергомоморфизм правых R-супермодулей;*

(8) *$IJ \in D(R)$.*

Доказательство. Проверим справедливость утверждения (1). Пусть даны $0 \neq r_{1\alpha}, r_{2\beta} \in R$, тогда существует такой элемент $r'_\rho \in R_\rho$, что $r_{1\alpha}r'_\rho \neq 0$ и $r_{2\beta}r'_\rho \in J_{\beta+\rho}$. Аналогично, $(r_{1\alpha}r'_\rho)r''_\sigma \neq 0$ и $f_\gamma(r_{2\beta}r'_\rho)r''_\sigma \in J_{\beta+\gamma+\rho+\sigma}$ для некоторого r''_σ. Положим $r_{\rho+\sigma} = r'_\rho r''_\sigma$, тогда $r_{1\alpha}r_{\rho+\sigma} \neq 0$ и $r_{2\beta}r_{\rho+\sigma} \in f_\gamma^{-1}(J)$.

Убедимся, что верно (2). Пусть l_{a_α} — левое умножение на a_α, тогда $(a_\alpha : J) = l_{a_\alpha}^{-1}$. Осталось применить (1).

Проверим (3). Пусть i — вложение $I \to R$, тогда $I \cap J = i^{-1}(J)$. Осталось применить (1).

Утверждение (4) очевидно.

Докажем (5). Пусть $0 \neq a_\beta \in r(I)$. Положим $r_{1\beta} = r_{2\beta} = a_\beta$, тогда существует такой элемент $r_\gamma \in R_\gamma$, что $0 \neq a_\beta r_\gamma \in I_{\beta+\gamma}$. Следовательно, $a_\beta r_\gamma R a_\beta r_\gamma \subseteq I a_\beta r_\gamma = 0$, т. е. получаем противоречие с полупервичностью R. Пусть теперь $l(I) \neq 0$. Так как R полупервично, то $a_\alpha b_\beta \neq 0$ для некоторых $a_\alpha, b_\beta \in l(I)$, следовательно, существует такой элемент $r_\rho \in R_\rho$, что $a_\alpha b_\beta r_\rho \neq 0$ и $b_\beta r_\rho \in I_{\alpha+\rho}$. Но $a_\alpha b_\beta r_\rho \in a_\alpha I = 0$, получили противоречие.

Убедимся, что справедливо (6). Пусть $0 \neq r_{1\alpha}, r_{2\beta} \in R$, тогда найдётся такой элемент $r'_\rho \in R_\rho$, что $r_{1\alpha}r'_\rho \neq 0$ и $r_{2\beta}r'_\rho \in I_{\beta+\rho}$. Следовательно, $(r_{2\beta}r'_\rho : K) \in D(R)$. Используя (5), получим $l((r_{2\beta}r'_\rho : K)) = 0$. Значит, существует такой элемент $r''_\gamma \in (r_{2\alpha}r'_\beta : K)_\gamma$, что $r_{1\alpha}r'_\rho r''_\gamma \neq 0$ и $r_{2\beta}r'_\rho r''_\gamma \in K$, откуда получаем плотность K.

Проверим (7). Пусть $x_\sigma \in L_\sigma$ и $r_\rho \in R_\rho$. Утверждение (2) даёт $(r_\rho : S)_R \in D(R)$, (3) даёт $M = (r_\rho : S)_R \cap S \in D(R)$. Тогда для произвольного $y_\delta \in M_\delta \subseteq S_\delta$ имеем $r_\rho y_\delta \in S_{\rho+\delta}$. Таким образом,

$$(g_\pi(x_\sigma r_\rho) - g_\pi(x_\sigma)r_\rho)y_\delta = g_\pi(x_\sigma r_\rho)y_\delta - g_\pi(x_\sigma)(r_\rho y_\delta) = \\ = g_\pi(x_\sigma r_\rho y_\delta) - g_\pi(x_\sigma r_\rho y_\delta) = 0.$$

Из (5) следует, что $g_\pi(x_\sigma r_\rho) = g_\pi(x_\sigma)r_\rho$.

Докажем (8). Пусть даны $0 \neq r_{1\alpha}, r_{2\beta} \in R$. Используя (2), получим $L = (r_{2\beta} : I) \in D(R)$, и по (5) существует такой элемент $r'_\gamma \in L_\gamma$, что $r_{1\alpha}r'_\gamma \neq 0$. Далее, существует такой элемент $r''_\rho \in J_\rho$, что $r_{1\alpha}r'_\gamma r''_\rho \neq 0$. Положим $r_{\gamma+\rho} = r'_\gamma r''_\rho$, тогда $r_{1\alpha}r_{\gamma+\rho} \neq 0$ и $r_{2\beta}r_{\gamma+\rho} = (r_{2\beta}r'_\gamma)r''_\rho \in IJ$. □

Исходя из этих свойств, можно сформулировать равносильное определение плотного супеpидеала.

Определение 19. Правый суперидеал J плотный, если $l((a_\alpha : J)) = 0$ для каждого $a_\alpha \in R_\alpha$.

То, что правый суперидеал обладает этим свойством, легко увидеть из предыдущего предложения. Докажем обратное утверждение. Пусть $0 \neq r_{1\alpha}, r_{2\beta} \in R$, тогда $(r_{2\beta} : J)$ есть суперидеал и $l((r_{2\beta} : J)) = 0$. Следовательно, либо $r_{1\alpha}(r_{2\beta} : J)_0 \neq 0$, либо $r_{1\alpha}(r_{2\beta} : J)_0 \neq 0$. Пусть $r_{1\alpha}(r_{2\beta} : J)_\rho \neq 0$, тогда найдётся такой элемент $r_\rho \in (r_{2\beta} : J)_\rho$, что $r_{1\alpha} r_\rho \neq 0$ и $r_{2\beta} r_\rho \in J$, что и требовалось.

Замечание 5. Правый плотный идеал есть правый существенный, т. е. нетривиально пересекается с любым другим ненулевым правым суперидеалом. Действительно, для произвольного элемента $a_\alpha \in R_\alpha$ найдётся такой элемент $r_\beta \in R_\beta$, что $0 \neq a_\alpha r_\beta \in J_{\alpha+\beta}$, откуда $a_\alpha r_\beta \in J \cap a_\alpha R$.

Предложение 13. *Пусть J — правый суперидеал суперкольца R, и пусть $f_\gamma\colon J_R \to R_R$ — супергомоморфизм правых R-супермодулей, тогда*

(1) *если $a_\alpha \in R_\alpha$ и $r(a_\alpha) \in D(R)$, то $a_\alpha = 0$;*

(2) *если $\operatorname{Ker}(f_\gamma) \in D(R)$, то $f_\gamma = 0$.*

Доказательство. Докажем утверждение (1). Пусть $r(a_\alpha) \in D(R)$, тогда $a_\alpha \in l(r(a_\alpha))$, откуда $a_\alpha = 0$.

Проверим (2). Пусть $\operatorname{Ker}(f_\gamma) \in D(R)$, тогда для произвольного элемента $b_\beta \in R_\beta$ имеем $(b_\beta : \operatorname{Ker}(f_\gamma)) \in D(R)$ и $f_\gamma(b_\beta)(b_\beta : \operatorname{Ker}(f_\gamma)) = 0$. Поэтому $r(f_\gamma(b_\beta)) \supseteq (b_\beta : \operatorname{Ker}(f_\gamma))$, откуда $r(f_\gamma(b_\beta)) \in D(R)$. Таким образом, используя (1), получаем $f_\gamma(b_\beta) = 0$. □

Теперь мы готовы дать определение суперкольца частных. Для этого рассмотрим множество

$$H_\alpha = \{(f_\alpha; J) \mid J \in D(R),\ f_\gamma\colon J_R \to R_R\}.$$

Зададим на этом множестве отношение эквивалентности:

$$(f_\alpha; J) \sim (g_\alpha; K),\ \text{если существует такое } L \subseteq (J \cap K),\quad \text{что } L \in D(R) \text{ и } f_\alpha = g_\alpha \text{ на } L.$$

Множество классов эквивалентности $[f_\alpha; J]$ с операциями

$$[f_\alpha; J] + [g_\beta; K] = [f_\alpha + g_\beta; J \cap K],$$
$$[f_\alpha; J] \cdot [g_\beta; K] = [f_\alpha g_\beta; g_\beta^{-1}(J)]$$

образует максимальное правое суперкольцо частных $Q_{\mathrm{mr}}(R) = Q_0 + Q_1$, где $Q_\alpha = \{[f_\alpha; J]\}$.

Предложение 14. $Q_{\mathrm{mr}}(R)$ *имеет следующие свойства*:

(1) *R — суперподкольцо в Q_{mr};*

(2) *для каждого $q_\alpha \in Q_{\mathrm{mr}}$ найдётся такой элемент $J \in D(R)$, что $q_\alpha J \subseteq R$;*

(3) *для каждого $q_\alpha \in Q_{\mathrm{mr}}$ и каждого $J \in D(R)$ справедливо, что $q_\alpha J = 0$ тогда и только тогда, когда $q_\alpha = 0$;*

(4) *для каждого* $J \in D(R)$ *и каждого* $f_\gamma\colon J_R \to R_R$ *найдётся такой элемент* $q_\gamma \in Q_{\mathrm{mr}}$, *что* $f_\gamma(x) = q_\gamma x$ *для каждого* $x \in J$.

Более того, свойства (1)—(4) *определяют* Q_{mr} *с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Чтобы убедиться в справедливости (1), строим вложение по правилу $a_\alpha \mapsto [l_{a_\alpha}; R]$.

Заметим, что $[f_\beta; J] \cdot [l_{a_\alpha}; R] = [l_{f_\beta(a_\alpha)}; R]$, поэтому $[f_\beta; J] \cdot J^i \subseteq R^i$. Это доказывает (2).

Проверим (3). Пусть $q_\beta = [f_\beta; J]$ и $K \in D(R)$. Допустим, что $q_\beta K^i = 0$. Тогда для произвольного $a_\alpha \in J \cap K$ имеем $0 = [f_\beta; J] \cdot [l_{a_\alpha}; R] = [l_{f_\beta(a_\alpha)}; R]$, следовательно, $f_\beta(a_\alpha) = 0$, т. е. $f_\beta = 0$.

Для проверки (4) заметим, что для любого $a_\alpha \in J_\alpha$ справедливо $0 = [f_\beta; J] \cdot [l_{a_\alpha}; R] = [l_{f_\beta(a_\alpha)}; R]$, и положим $q_\beta = [f_\beta; J]$.

Пусть теперь имеют место утверждения (1)—(4) для некоторого $Q \supseteq R$. Определим $j\colon Q \to Q_{\mathrm{mr}}$ по правилу $(q_\nu)^j = [l_{q_\nu}; (q_\nu : R)_R]$. Из свойств (1)—(4) следует, что j — изоморфизм, тождественный на R. □

Аналогичным образом строится и двустороннее правое суперкольцо частных $Q_{\mathrm{r}}(R)$.

Определение 20. Суперидеал I полупервичного суперкольца R называется плотным, если $l(I) = 0$.

Обозначим множество таких суперидеалов через $\mathcal{I}(R)$. Прежде всего заметим, что $\mathcal{I}(R)$ замкнут относительно конечных пересечений и произведений. Положим $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1$, где $\mathcal{T}_\alpha = \{(f_\alpha; I) \mid I \in \mathcal{T},\ f_\alpha\colon I_R \to R_R\}$. Введём отношение эквивалентности

$$(f_\alpha; J) \simeq (g_\alpha; K), \text{ если существует такое } L \subseteq (J \cap K), \\ \text{что } L \in \mathcal{T}(R) \text{ и } f_\alpha = g_\alpha \text{ на } L.$$

Множество классов эквивалентности $\{f_\alpha; J\}$ с операциями

$$\{f_\alpha; J\} + \{g_\beta; K\} = \{f_\alpha + g_\beta; KJ\},$$
$$\{f_\alpha; J\} \cdot \{g_\beta; K\} = \{f_\alpha g_\beta; KJ\}$$

образует двустороннее правое суперкольцо частных $Q_{\mathrm{r}}(R) = Q_0 + Q_1$, где $Q_\alpha = \{\{f_\alpha; J\}\}$.

Предложение 15. *Пусть R — полупервичное суперкольцо, тогда*:

(1) R — *суперподкольцо в* Q_{r};

(2) *для каждого* $q_\alpha \in Q_{\mathrm{r}}$ *найдётся такой элемент* $J \in \mathcal{I}(R)$, *что* $q_\alpha J \subseteq R$;

(3) *для каждого* $q_\alpha \in Q_{\mathrm{r}}$ *и каждого* $J \in \mathcal{I}(R)$ *справедливо, что* $q_\alpha J = 0$ *тогда и только тогда, когда* $q_\alpha = 0$;

(4) *для каждого* $J \in \mathcal{I}(R)$ *и каждого* $f_\gamma\colon J_R \to R_R$ *найдётся такой элемент* $q_\gamma \in Q_{\mathrm{r}}$, *что* $f_\gamma(x) = q_\gamma x$ *для каждого* $x \in J$.

Более того, свойства (1)—(4) *определяют* Q_{r} *с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Чтобы доказать (1), строим вложение i по правилу $a_\alpha \mapsto \{l_{a_\alpha}; R\}$.

Для проверки (2) заметим, что $\{f_\beta; J\} \cdot \{l_{a_\alpha}; R\} = \{l_{f_\beta(a_\alpha)}; R\}$, поэтому $\{f_\beta; J\} \cdot J^i \subseteq R^i$.

Докажем (3). Пусть $q_\beta = \{f_\beta; J\}$ и $K \in \mathcal{I}$ такие, что $q_\beta K^i = 0$. Тогда для произвольного $a_\alpha \in J \cap K$ имеем $0 = \{f_\beta; J\} \cdot \{l_{a_\alpha}; R\} = \{l_{f_\beta(a_\alpha)}; R\}$, следовательно, $f_\beta(a_\alpha) = 0$, т. е. $f_\beta = 0$.

Для доказательства (4) возьмём $q_\beta = \{f_\beta; J\}$.

Пусть теперь имеют место свойства (1)—(4) для некоторого $Q \supseteq R$. Тогда если $q_\gamma \in Q_\gamma$, то найдётся такой элемент $J \in \mathcal{I}$, что $q_\gamma J \subseteq R$. Положим $f_\gamma(x) = q_\gamma x$ для каждого $x \in J$. Получаем супергомоморфизм $Q \to Q_{\mathrm{r}}$, действующий по правилу $q_\gamma \mapsto \{f_\gamma; J\}$. По свойству (3) это инъекция, а по свойству (4) это сюръекция. $\square$

Следующее предложение описывает связь между $Q_{\mathrm{mr}}(R)$ и $Q_{\mathrm{r}}(R)$.

Предложение 16. *Пусть R полупервично, тогда существует единственный тождественный на R супермономорфизм суперколец $\sigma\colon Q_{\mathrm{r}}(R) \to Q_{\mathrm{mr}}(R)$ со свойством*

$$\mathrm{Im}(\sigma) = \mathrm{Im}(\sigma)_0 + \mathrm{Im}(\sigma)_1,$$

где

$$\mathrm{Im}(\sigma)_\alpha = \{q_\alpha \in Q_{\mathrm{mr}}(R) \mid q_\alpha J \subseteq R \text{ для некоторого } J \in \mathcal{I}\}.$$

Доказательство. Определим $\sigma\colon Q_{\mathrm{r}} \to Q_{\mathrm{mr}}$ по правилу $\{f; J\}^\sigma = [f; J]$. Отображение задано корректно, и оно тождественно на R. Так как

$$(\{f_\alpha; J\} + \{g_\beta; K\})^\sigma = \{f_\alpha + g_\beta; KJ\}^\sigma = [f_\alpha + g_\beta; KJ] = [f_\alpha + g_\beta; K \cap J],$$

то σ аддитивно. Аналогично показывается, что σ сохраняет произведения и является мономорфизмом. Если $\sigma'\colon Q_{\mathrm{r}} \to Q_{\mathrm{mr}}$ — другой мономорфизм суперколец, тождественный на R, то для произвольных $q_\pi \in (Q_{\mathrm{r}})_\pi$ и $x_\tau \in ((q_\pi : R)_R)_\tau$ имеем

$$(q_\pi^\sigma - q_\pi^{\sigma'})x_\tau = q_\pi^\sigma x_\tau^\sigma - q_\pi^{\sigma'} x_\tau^{\sigma'} = q_\pi x_\tau - q_\pi x_\tau = 0.$$

Следовательно, имеет место единственность. Теперь положим

$$Q_\alpha = \{q_\alpha \in Q_{\mathrm{mr}}(R) \mid q_\alpha J \subseteq R \text{ для некоторого } J \in \mathcal{I}\}, \quad Q = Q_0 + Q_1.$$

Очевидно, $\mathrm{Im}(\sigma) \in Q$. Пусть $q_\alpha \in Q_\alpha$, тогда $q_\alpha J \subseteq R$ для некоторого $J \in \mathcal{I}$. Определим $f_\alpha\colon J \to R$ по правилу $f_\alpha(x) = q_\alpha x$. Таким образом, $q_\alpha = \{f_\alpha; J\}$, откуда $Q = \mathrm{Im}(\sigma)$. $\square$

Пусть R первично и $a_\alpha, b_\beta \in Q_{\mathrm{mr}}(R)$. Предположим, что $a_\alpha R b_\beta = 0$. Тогда либо $a_\alpha = 0$, либо $b_\beta = 0$. Действительно, пусть $a_\alpha \neq 0 \neq b_\beta$, тогда найдутся такие $r_\rho, s_\sigma \in R$, что $0 \neq a_\alpha r_\rho \in R$ и $0 \neq b_\beta s_\sigma \in R$. Но тогда $(a_\alpha r_\rho)R(b_\beta s_\sigma) = 0$. Получаем противоречие с первичностью.

7. Расширенный центроид суперкольца

Расширенным центроидом $C(R)$ полупервичного суперкольца R будем называть суперцентр его кольца частных. Также имеет место другое равносильное определение.

Определение 21. Расширенный центроид — суперкольцо $C = C_0 + C_1$, где

$$C_\alpha = \{q_\alpha \in (Q_{\mathrm{mr}})_\alpha \mid q_\alpha r_\rho = (-1)^{\alpha\rho} r_\rho q_\alpha \text{ для всех } r_\rho \in R_\rho\}.$$

Если обозначить через l_{c_γ} левое умножение на элемент $c_\gamma \in C_\gamma$ в кольце Q_{mr}, то нетрудно заметить, что $l_{c_\gamma} \in \mathrm{Cen}_\gamma({}_R Q) \cap \mathrm{End}_\gamma(Q_R)$ (т. е. $l_{c_\gamma} \in \mathrm{End}_\gamma(Q_{R,R^{\mathrm{op}}})$). Верно и обратное утверждение.

Теорема 9. *Пусть R — полупервичное суперкольцо, $Q = Q_{\mathrm{mr}}(R)$, ${}_R U_R \subseteq {}_R Q_R$ — супербиподмодуль, пусть $f_\alpha \in \mathrm{Cen}_\alpha({}_R U; {}_R Q) \cap \mathrm{Hom}_\alpha(U_R; Q_R)$. Тогда существует такой элемент $\lambda_\alpha \in C_\alpha$, что $f_\alpha(u) = \lambda_\alpha u$ для каждого $u \in U$.*

Доказательство. Рассмотрим $W = U \cap R$ — ненулевой суперидеал в суперкольце R, положим $I(w_\varphi) = (f_\alpha(w_\varphi) : R)_R$ и $V = \sum\limits_{w_\varphi \in W} w_\varphi I(w_\varphi)$. Заметим, что $f_\alpha(r_\rho w_\varphi) = (-1)^{\alpha\rho} r_\rho f_\alpha(w_\varphi)$, откуда $I(w_\varphi) \subseteq I(r_\rho w_\varphi)$. Сумма V — двусторонний суперидеал, и

$$f_\alpha(V) = \sum_{w_\varphi \in W} f_\alpha(w_\varphi)(f_\alpha(w_\varphi) : R)_R \subseteq R.$$

Определим отображение $g_\alpha \colon V \oplus r_R(V) \to R$ по правилу $g_\alpha(v + v') = f_\alpha(v)$, $v \in V$, $v' \in r_R(V)$. Отображение g_α — однородный супергомоморфизм правых R-супермодулей. Так как $V \oplus r_R(V) \in D(R)$, то найдётся такой элемент $\lambda_\alpha \in Q$, что $g_\alpha(x) = \lambda_\alpha x$ для каждого $x \in V \oplus r_R(V)$. Далее,

$$\lambda_\alpha r_\rho x_\sigma = g_\alpha(r_\rho x_\sigma) = (-1)^{\alpha\rho} r_\rho g_\alpha(x_\sigma) = (-1)^{\alpha\rho} r_\rho \lambda_\alpha x_\sigma$$
$$\text{для всех } x_\sigma \in V \oplus r_R(V) \text{ и } r_\rho \in R_\rho,$$

т. е. $r_\rho \lambda_\alpha = (-1)^{\alpha\rho} \lambda_\alpha r_\rho$, следовательно, $\lambda_\alpha \in C_\alpha$. Пусть теперь $u_\pi \in U_\pi$, $D = (U_\pi : R)_R$, $d_\delta \in D_\delta$. Тогда для произвольного $r_\rho \in (f_\alpha(u_\pi d_\delta) : R)_R$ имеем

$$f_\alpha(u_\pi) d_\delta r_\rho = f_\alpha(u_\pi d_\delta r_\rho) = g_\alpha(u_\pi) d_\delta r_\rho = \lambda_\alpha(u_\pi) d_\delta r_\rho.$$

Следовательно, $(f_\alpha(u_\pi) - \lambda_\alpha u_\pi) d_\delta r_\rho = 0$, откуда $(f_\alpha(u_\pi) - \lambda_\alpha u_\pi) d_\delta = 0$ для любого $d_\delta \in D_\delta$. Таким образом, $f_\alpha(u_\pi) = \lambda_\alpha u_\pi$ для каждого $u_\pi \in U_\pi$. □

Рассмотрим кольцо частных $Q = Q_{\mathrm{mr}}(R)$ полупервичного суперкольца R в качестве левого C^{op}-супермодуля. Рассмотрим два суперподкольца линейных преобразований супермодуля ${}_{C^{\mathrm{op}}}Q$:

(1) $R_{(r)}$, элементы которого r_ρ действуют по правилу $x_\chi \mapsto x_\chi r_\rho$;

(2) $R_{(r)}^{\mathrm{op}}$, элементы которого r_ρ действуют по правилу $x_\chi \mapsto x_\chi{}^{\mathrm{op}} r_\rho = (-1)^{\chi\rho} r_\rho x_\chi$.

Заметим ещё, что композиция в (1) есть произведение в R, а в (2) — произведение в R^{op}. Теперь рассмотрим произведение $R_{(r)} R_{(r)}^{\mathrm{op}} \subseteq \mathrm{End}({}_{C^{\mathrm{op}}}Q)$.

Теорема 10. *Пусть R — полупервичное суперкольцо, $Q = Q_{\mathrm{r}}(R)$, C — расширенный центроид, элементы $q_{1\gamma}, \ldots, q_{n\gamma} \in Q_\gamma$ таковы, что $q_{1\gamma} \notin \sum\limits_{i=2}^{n} q_{i\gamma} C_0$. Тогда существует такой элемент $p_\pi \in R^{\mathrm{op}}_{(r)} R_{(r)}$, что*

$$q_{1\gamma} p_\pi = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\gamma\alpha_j} a_{j\alpha_j} q_{1\gamma} b_{j\beta_j} \neq 0, \quad q_{j\gamma} p_\pi = 0 \quad \text{при} \quad j \geqslant 2,$$

где

$$p_\pi = \sum_{j=1}^{k} r_{a^{\mathrm{op}}_{j\alpha_j}} r_{b_{j\beta_j}}, \quad \alpha_j + \beta_j = \pi.$$

Доказательство. Считаем Q правым C-супермодулем. Для применения теоремы слабой плотности построим контекст. $S = R^{\mathrm{op}}_{(r)} R_{(r)}$, $N = M = Q$, далее считаем Q правым S-супермодулем, его централизатор будет совпадать с C. Тогда $\mathrm{Hom}({}_{C^{\mathrm{op}}}M, {}_{C^{\mathrm{op}}}N) = \mathrm{End}({}_{C^{\mathrm{op}}}Q)$ — правый S-супермодуль (эндоморфизмы действуют справа), $T = S$ — правый S-суперподмодуль супермодуля $\mathrm{End}({}_{C^{\mathrm{op}}}Q)$. Контекст построен, теперь заметим, что супермодуль $T = S = R^{\mathrm{op}}_{(r)} R_{(r)}$ тотальный, так как для любого $q_\sigma \in Q_\sigma$ имеет место $q_\sigma T = R q_\sigma R \supseteq R q_\sigma (q_\sigma : R)_R \neq 0$. Заметим также, что Q замкнуто по предыдущей теореме. По теореме слабой плотности всё доказано. □

Если применить теорему слабой плотности в терминах неровной однородности, то получим аналогичный результат.

Теорема 11. *Пусть R — полупервичное суперкольцо, $Q = Q_{\mathrm{r}}(R)$, C — расширенный центроид, элементы $q_{1\gamma_1}, \ldots, q_{n\gamma_n} \in Q$ таковы, что $q_{1\gamma_1} \notin \sum\limits_{i=2}^{n} q_{i\gamma_i} C$. Тогда существует такой элемент $p_\pi \in R^{\mathrm{op}}_{(r)} R_{(r)}$, что*

$$q_{1\gamma_1} p_\pi = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{\gamma_1\alpha_j} a_{j\alpha_j} q_{1\gamma_1} b_{j\beta_j} \neq 0, \quad q_{j\gamma_j} p_\pi = 0 \quad \text{при} \quad j \geqslant 2,$$

где

$$p_\pi = \sum_{j=1}^{k} r_{a^{\mathrm{op}}_{j\alpha_j}} r_{b_{j\beta_j}}, \quad \alpha_j + \beta_j = \pi.$$

Перейдём теперь к случаю первичных суперколец. Прежде всего стоит заметить, что все ненулевые элементы расширенного центроида обратимы. В частности, C_0 — поле.

Теорема 12. *Пусть R — первичное суперкольцо, $Q = Q_{\mathrm{mr}}(R)$, $a_\gamma b_\gamma \in Q_\gamma$. Если $a_\gamma x_\chi b_\gamma = b_\gamma x_\chi a_\gamma$ для каждого $x_\chi \in R_\chi$, то a_γ и b_γ C_0-зависимы.*

Доказательство. Пусть a_γ и b_γ C_0-независимы, тогда по предыдущей теореме существует такой элемент $p_\pi \in R^{\mathrm{op}}_{(r)} R_{(r)}$, что $d_{\gamma+\pi} = a_\gamma p_\pi \neq 0$ и $b_\gamma p_\pi = 0$.

Для произвольного $r_\rho \in R_\rho$ имеем

$$0 = a_\gamma r_\rho \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\gamma\alpha_i} a_{i\alpha_i} b_\gamma b_{i\beta_i} = \sum_{i=1}^{m} (a_\gamma r_\rho (-1)^{\gamma\alpha_i} a_{i\alpha_i} b_\gamma) b_{i\beta_i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (b_\gamma r_\rho (-1)^{\gamma\alpha_i} a_{i\alpha_i} a_\gamma) b_{i\beta_i} = b_\gamma r_\rho \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\gamma\alpha_i} a_{i\alpha_i} a_\gamma b_{i\beta_i} = b_\gamma r_\rho d_{\gamma+\pi},$$

где $p_\pi = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i\alpha_i}^{\mathrm{op}} b_{i\beta_i}$ ($\alpha_i + \beta_i = \pi$ для каждого i). Таким образом, $b_\gamma R d_{\gamma+\pi} = 0$. Выберем $x_\chi, y_\psi \in R$ такими, что $0 \neq b_\gamma x_\chi \in R$, $0 \neq d_{\gamma+\pi} y_\psi \in R$. Следовательно, $(b_\gamma x_\psi) R (d_{\gamma+\pi} y_\psi) = 0$. Получили противоречие с первичностью R. □

Определение 22. Полупервичное суперкольцо R будем называть центрально замкнутым, если R является C_0-суперподалгеброй супералгебры $Q_{\mathrm{mr}}(R)$, где C — расширенный центроид.

Теорема 13. *Пусть A — центрально замкнутое первичное суперкольцо, C — его расширенный центроид, пусть B — C_0-супералгебра, в которой $r_B(B) = l_B(B) = 0$. Тогда каждый ненулевой суперидеал суперкольца $A \otimes_{C_0} B$ содержит ненулевой элемент вида $a_\alpha \otimes b_\beta$.*

Доказательство. Пусть $0 \neq w \in W = A \otimes B$, тогда $w = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} \otimes b_{i\beta_i}$. Пусть $r_\rho, s_\sigma \in B$ такие, что $r_\rho b_{1\beta_1} s_\sigma \neq 0$. Для $a_{1\alpha_1} \ldots a_{k\alpha_k}$ применим теорему 11. Тогда W содержит элемент

$$\sum_{i=1}^{l} (d_{i\delta_i} \otimes r_\rho) \tilde{w} (e_{i\varepsilon_i} \otimes s_\sigma) =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} d_{i\delta_i} \tilde{a}_{j\alpha_j} e_{i\varepsilon_i} \otimes r_\rho b_{j\beta_j} s_\sigma = \sum_{i=1}^{l} d_{i\delta_i} \tilde{a}_{1\alpha_1} e_{i\varepsilon_i} \otimes r_\rho b_{1\beta_j} s_\sigma \neq 0,$$

где $p_\pi = \sum\limits_{i=1}^{l} d_{i\delta_i}^{\mathrm{op}} e_{i\varepsilon_i} \in A_{(r)}^{\mathrm{op}} A_{(r)}$. □

Теорема 14. *Пусть $A = A_0 + A_1$ — центрально замкнутое первичное суперкольцо, $C = C_0 + C_1$ — его расширенный центроид, A^{op} — антиизоморфное суперкольцо. Тогда $A^{\mathrm{op}} \otimes_{C_0} A \cong A_{(r)}^{\mathrm{op}} A_{(r)} \subseteq \mathrm{End}_{C_0}(A)$, где $A_{(r)}$ — правые умножения на элементы из A.*

Доказательство. Пусть отображение $\tau\colon A^{\mathrm{op}} \otimes_{C_0} A \to A^{\mathrm{op}} \cdot A$ действует по правилу $\sum\limits_i a_{i\alpha_i} \otimes b_{i\beta_i} \mapsto \sum\limits_i r_{a_{i\alpha_i}}^{\mathrm{op}} r_{b_{i\beta_i}}$. Очевидно, τ сюръективно и сохраняет сумму. Докажем, что τ сохраняет произведения ($\mathrm{End}_{C_0}(A)$ действуют справа):

$$\tau(a_\alpha^{\mathrm{op}} \otimes b_\beta \cdot c_\gamma^{\mathrm{op}} \otimes d_\delta) = \tau((-1)^{\beta\gamma} a_\alpha^{\mathrm{op}} c_\gamma^{\mathrm{op}} \otimes b_\beta d_\delta) = \tau((-1)^{\beta\gamma+\alpha\gamma} c_\gamma a_\alpha \otimes b_\beta d_\delta)\colon$$
$$r_\rho \mapsto (-1)^{\beta\gamma+\alpha\gamma+(\alpha+\gamma)\rho} c_\gamma a_\alpha r_\rho b_\beta d_\delta,$$
$$\tau(a_\alpha^{\mathrm{op}} \otimes b_\beta)\tau(c_\gamma^{\mathrm{op}} \otimes d_\delta)\colon r_\rho \mapsto (-1)^{\alpha\rho} a_\alpha r_\rho b_\beta \mapsto (-1)^{\alpha\rho+(\alpha+\rho+\beta)\gamma} c_\gamma a_\alpha r_\rho b_\beta d_\delta.$$

Осталось показать тривиальность ядра τ. По предыдущей теореме супеределал $\mathrm{Ker}(\tau)$ (если он нетривиален) содержит ненулевой элемент вида $a_\alpha \otimes b_\beta$. Но тогда $0 = \tau(a_\alpha b_\beta) = r^{\mathrm{op}}_{a_\alpha} r_{b_\beta}$ и $a_\alpha A b_\beta = 0$, что приводит к противоречию с первичностью A. □

8. Теорема плотности Джекобсона для суперколец

Теорема 15 (теорема плотности Джекобсона для суперколец). *Пусть $R = R_0 + R_1$ — левое примитивное суперкольцо, $V = V_0 + V_1$ — точный неприводимый левый R-супермодуль, $\mathrm{Cen} = \mathrm{Cen}_0 + \mathrm{Cen}_1$ — его централизатор, $x_{1\alpha}, \ldots, x_{n\alpha}$ — линейно независимые над Cen_0 элементы V_α, $y_{1\beta}, \ldots, y_{n\beta}$ — произвольные элементы V_β. Тогда существует такой элемент $r_{\alpha+\beta} \in R_{\alpha+\beta}$, что $r_{\alpha+\beta} x_{i\alpha} = y_{i\beta}$,* где $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Наше доказательство базируется на применении теоремы слабой плотности, поэтому для начала необходимо построить контекст. Положим $S = R$, ${}_S N = {}_R V$, Cen — централизатор супермодуля ${}_R V$. Заметим, что $\mathrm{Hom}(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}, N_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}) = \mathrm{End}(V_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}})$ — левый R-супермодуль линейных преобразований, который содержит и левые R-умножения. Супермодуль $T = R$ тотальный, так как Rv_α не является тривиальным ни для какого $v_\alpha \in V_\alpha$ в силу неприводимости. Супермодуль V замкнут вследствие неприводимости и по определению Cen. Положим

$$(J_i)_\gamma = \{r_\gamma \in R_\gamma \mid r_\gamma x_{j\alpha} = 0,\ i \neq j\}$$

и $J = J_0 + J_1$. По теореме слабой плотности $J_i x_{i\alpha} \neq 0$, но тогда $J_i x_{i\alpha} = V$, и мы можем выбрать такой элемент $r_{i,\alpha+\beta}$, что $r_{i,\alpha+\beta} x_{i\alpha} = y_{i\beta}$. Осталось положить $r_{\alpha+\beta} = r_{1,\alpha+\beta} \ldots r_{n,\alpha+\beta}$. □

Наша следующая цель — топологический вариант теоремы плотности. Пусть ${}_R M$ — супермодуль, а Cen — его централизатор. Рассмотрим M как правый $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$-супермодуль. Тогда левое умножение на однородный элемент из R является линейным преобразованием в $M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$. Введём в суперкольце $\mathrm{End}(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}})$ топологию. Пусть $f \in \mathrm{End}(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}})$, положим базисом окрестностей точки f множества вида

$$f + \left(\bigcap_{i=1}^{n} x_{i0}^{\perp}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} y_{j1}^{\perp}\right),$$

где

$$(z_\alpha^{\perp})_\beta = \{g_\beta \in \mathrm{End}_\alpha(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}) \mid g_\beta(z_\alpha) = 0\}, \quad (z_\alpha^{\perp}) = (z_\alpha^{\perp})_0 + (z_\alpha^{\perp})_1.$$

Иначе эти множества можно задать как

$$O^{\{x_i\},\{y_j\}}(f) = O_0^{\{x_i\},\{y_j\}}(f) + O_1^{\{x_i\},\{y_j\}}(f),$$

где

$$O_\alpha(f) = \\ = \{g \in \mathrm{End}(M_{C^{\mathrm{op}}}) \mid g(x_i) = f(x_i),\ i = 1, \ldots, n;\ g(y_j) = f(y_j),\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Здесь мы рассматриваем M как дискретное пространство. Окрестностями фиксированной точки $f \in \mathrm{End}(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}})$ являются всевозможные объединения элементов базиса.

Далее мы приведём доказательство топологического варианта теоремы плотности, не опирающееся на саму теорему плотности, однако укажем и короткое доказательство в некотором частном случае с использованием теоремы плотности. Для начала нам понадобится несколько вспомогательных утверждений, небесполезных и в следующих разделах.

Лемма 2. *Пусть ${}_RM$ — такой квазиинъективный супермодуль, что $Rm_\alpha = 0$ влечёт $m_\alpha = 0$. Тогда $\mathrm{Ann}_R(m_\alpha) \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{t} \mathrm{Ann}(m_{i\alpha_i})$ тогда и только тогда, когда $m_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{i,\alpha+\alpha_i}(m_{i\alpha_i})$ для некоторых $f_{i,\alpha+\alpha_i} \in (\mathrm{End}({}_RM))_{\alpha+\alpha_i}$.*

Доказательство. Проведём индукцию по t. Пусть $t = 1$, т. е. $\mathrm{Ann}(m_\alpha) \supseteq \mathrm{Ann}(m_{1\alpha_1})$. Построим $f_{1,\alpha-\alpha_1} \colon Rm_{1\alpha_1} \to Rm_\alpha$ по правилу $r_\rho m_{1\alpha_1} \mapsto r_\rho m_\alpha$. Заметим, что $Rm_{1\alpha_1} \neq 0$ по условию (иначе $m_{1\alpha_1} = 0$). Отображение $f_{1,\alpha-\alpha_1}$ задано корректно, так как если $r_\rho m_{1\alpha_1} = 0$, то $r_\rho m_\alpha = 0$. Продолжим $f_{1,\alpha-\alpha_1}$ на всё M, при этом $R(f_{1,\alpha-\alpha_1}(m_{1\alpha_1}) - m_\alpha) = 0$, откуда $f_{1,\alpha-\alpha_1}(m_{1\alpha_1}) = m_\alpha$, что и требовалось.

Пусть теперь наше утверждение верно для $t = k$, докажем его для $t = k + 1$. Имеем $\mathrm{Ann}(m_\alpha) \supseteq \bigcap\limits_{i=1}^{k+1} \mathrm{Ann}(m_{i\alpha_i})$. Положим $J = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Ann}(m_{i\alpha_i})$, J — левый суперидеал. Тогда $\mathrm{Ann}(m_\alpha) \supseteq J \cap \mathrm{Ann}(m_{(k+1)\alpha_{(k+1)}})$. Положим $f_{(k+1),\alpha-\alpha_{(k+1)}} \colon Jm_{(k+1),\alpha_{(k+1)}} \to Jm_\alpha$ (если $Jm_{(k+1),\alpha_{(k+1)}} = 0$, то выкидываем $m_{(k+1),\alpha_{(k+1)}}$ из набора и применяем предположение индукции). Отображение $f_{(k+1),\alpha-\alpha_{(k+1)}}$ задано корректно, так как если $jm_{(k+1),\alpha_{(k+1)}} = 0$, то $jm_\alpha = 0$. Продолжаем $f_{(k+1),\alpha-\alpha_{(k+1)}}$ на всё M. Заметим, что

$$J \subseteq \mathrm{Ann}(m_\alpha - f_{(k+1),\alpha-\alpha_{(k+1)}}(m_{(k+1),\alpha_{(k+1)}})),$$

так как

$$j(m_\alpha - f_{(k+1),\alpha-\alpha_{(k+1)}}(m_{(k+1),\alpha_{(k+1)}})) = \\ = jm_\alpha - f_{(k+1),\alpha-\alpha_{(k+1)}}(jm_{(k+1),\alpha_{(k+1)}}) = jm_\alpha - jm_\alpha = 0.$$

Таким образом, имеем

$$\mathrm{Ann}(m_\alpha - f_{(k+1),\alpha-\alpha_{(k+1)}}(m_{(k+1),\alpha_{(k+1)}})) \supseteq J = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ann}(m_{i\alpha_i}).$$

По предположению индукции найдутся такие $f_{1,\alpha_1-\alpha}, \ldots, f_{k,\alpha_k-\alpha}$, что

$$f_{1,\alpha_1-\alpha}(m_{\alpha_1}) + \ldots + f_{k,\alpha_k-\alpha}(m_{\alpha_k}) = m_\alpha - f_{(k+1),\alpha_{(k+1)}-\alpha}(m_{(k+1),\alpha_{(k+1)}}). \quad \square$$

Пример 9. Пусть $R = M_2(\mathbb{Z}_2)$ — суперкольцо (2×2)-матриц с коэффициентами из Z_2, M — (2×1)-векторы, т. е.

$$R_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \right\}.$$

Здесь ${}_RM$ будет точным неприводимым супермодулем, причём $\mathrm{Cen}_0 = \mathrm{End}_0 = \{0, e\}$, $\mathrm{Cen}_1 = \mathrm{End}_1 = \{0\}$.

Лемма 3. *Пусть ${}_RM$ — точный неприводимый супермодуль, $M_1 \neq \{0\}$, $\mathrm{End}_1 = \{0\}$, тогда для произвольного m_α имеем $\mathrm{Ann}(m_\alpha) \neq 0$ и для произвольных m_0 и m_1 $\mathrm{Ann}(m_0) \not\subseteq \mathrm{Ann}(m_1)$, $\mathrm{Ann}(m_0) \not\supseteq \mathrm{Ann}(m_1)$.*

Доказательство. Из точности и неприводимости следует, что для произвольного $m_\alpha \neq 0$ имеем $Rm_\alpha \neq 0$. Пусть существуют не равные нулю элементы m_α, $m_{\alpha+1}$ с условием $\mathrm{Ann}(m_\alpha) \subseteq \mathrm{Ann}(m_{\alpha+1})$ (если существует такой элемент m_α, что $\mathrm{Ann}(m_\alpha) = 0$, то берём его и произвольный $m_{\alpha+1}$). Тогда определим $f_1 \colon M \to M$ по правилу $rm_\alpha \mapsto rm_{\alpha+1}$. По условию леммы определение корректно, и $Rm_\alpha = M$, $Rm_{\alpha+1} \neq 0$, откуда $f_1 \neq 0$. □

Теперь мы готовы сформулировать и доказать основной результат этого раздела.

Теорема 16 (теорема плотности Джекобсона для суперколец, топологическая формулировка). *Пусть $R = R_0 + R_1$ — левое примитивное суперкольцо, $V = V_0 + V_1$ — точный неприводимый супермодуль, $\mathrm{Cen} = \mathrm{Cen}_0 + \mathrm{Cen}_1$ — его централизатор. Тогда R — плотное суперподкольцо суперкольца линейных преобразований V над $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $f_\alpha \in \mathrm{End}_\alpha(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}})$ и любого конечного набора элементов $m_{10}, \ldots, m_{n0} \in M_0$, $m_{11}, \ldots, m_{l1} \in M_1$ существует такой элемент $r_\alpha \in R_\alpha$, что f_α и r_α как линейные преобразования на $M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$ совпадают на всём наборе. Без потери общности можем считать набор $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$-независимым. Далее приведены два разных доказательства, но первое из них имеет место только в случае $\mathrm{Cen}_1 \neq \{0\}$.

1. Если $\mathrm{Cen}_1 \neq \{0\}$, то домножим нечётную часть набора на произвольный $c_1 \in \mathrm{Cen}_1$ и получим новый $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$-независимый чётный набор. По теореме плотности найдётся такой элемент $r_\alpha \in R_\alpha$, что $r_\alpha x_{i0} = f_\alpha(x_{i0})$, $i = 1, \ldots, n$, и $r_\alpha(x_{j1}c_1) = f_\alpha(x_{j1}c_1)$, $j = 1, \ldots, l$. Далее воспользуемся леммой Шура и получим $r_\alpha(x_{j1}) = f_\alpha(x_{j1})$, $j = 1, \ldots, l$.

2. Для каждого элемента $x_{k\alpha_k}$ определим I_k как пересечение всех аннуляторов других элементов набора. Заметим, что I_k — левый идеал и $I_k x_{k\alpha_k} \neq 0$, иначе по предыдущей лемме набор будет $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$-зависимым. Тогда $I_k x_{k\alpha_k} = M$. Следовательно, существует такой элемент $r_{k\alpha} \in I_k$, что $r_{k\alpha} x_{k\alpha_k} = f_\alpha(x_{k\alpha_k})$. Осталось положить $r_\alpha = r_{1\alpha} + \ldots + r_{k\alpha}$. □

Замечание 6. Если ${}_RM$ — точный неприводимый супермодуль, то в силу леммы Шура линейная $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$-(не)зависимость элементов супермодуля $M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$ понимается абсолютно так же, как и в случае линейных суперпространств.

Если $\mathrm{Cen}_1 = 0$, то M_0 и M_1 можно рассматривать как отдельные $\mathrm{Cen} = \mathrm{Cen}_0$-модули и строить базис в M_0 и M_1 независимо. При этом получим, что $\dim M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}} = \dim M_{0\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}} + \dim M_{1\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$. Если же $\mathrm{Cen}_1 \neq 0$, то $\dim M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}} = \dim M_{0\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}} = \dim M_{1\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$, и базис однородной компоненты будет базисом всего супермодуля. Заметим также, что всё сказанное справедливо для произвольного супермодуля над произвольным супертелом.

Приведём без доказательства элементарное, но важное следствие, аналог которого имеет место и в случае обычных колец.

Следствие 7. *Пусть ${}_RM$ — точный неприводимый модуль, Cen — его централизатор. Пусть M конечномерен над $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$, тогда $R \cong \mathrm{End}(M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}) \cong M_n(\mathrm{Cen}_{\mathrm{op}})$. В случае $\mathrm{Cen}_1 = \{0\}$ имеем $n = p + q$, где $p = \dim M_{0\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}}$, $q = \dim M_{1\mathrm{Cen}_0^{\mathrm{op}}}$ и градуировка имеет тип (p, q); в случае $\mathrm{Cen}_1 \neq \{0\}$ имеем $n = \dim M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}} = \dim M_{0\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}} = \dim M_{1\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$ и матричная градуировка порождается градуировкой суперкольца $\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}$.*

Имеет место также более общее утверждение.

Следствие 8. *Пусть $R = R_0 + R_1$ — левое примитивное суперкольцо. Тогда либо $R \cong M_n(D)$, где $D = D_0 + D_1$ — некоторое супертело, либо для любого натурального n существует супергомоморфизм некоторого суперподкольца суперкольца R на $M_n(D)$, где $D = D_0 + D_1$ — некоторое супертело.*

Доказательство. Первая альтернатива имеет место в конечномерном случае, описанном в предыдущем утверждении. Осталось доказать, что в бесконечномерном случае справедлива вторая альтернатива. Действительно, пусть $M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$ — бесконечномерный супермодуль. Для произвольного натурального m пусть $N_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}} \subseteq M_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$ — некоторый m-мерный суперподмодуль. Пусть теперь $S = S_0 + S_1$ — суперподкольцо в R, отображающее N в себя. Тогда, сузив S на N, получим (ввиду плотности R) полное суперкольцо линейных преобразований супермодуля $N_{\mathrm{Cen}^{\mathrm{op}}}$. □

Теорема 17. *Пусть D — конечномерная супералгебра с делением над нулевой компонентой своего центра C_0, F — максимальное суперполе в D. Тогда существует такое натуральное n, что $D \otimes_{C_0} F \cong M_n(F)$, где $n = \dim_F D = \dim_{C_0} F$, $\dim_{C_0} D = n^2$.*

Доказательство. Положим $R = D_{(l)} \cdot F_{(r)} \subseteq \mathrm{End}_{C_0}(D)$, где $D_{(l)}$ — супералгебра левых умножений на элементы D, аналогично, $F_{(r)}$ — супералгебра правых умножений на элементы F. Так как D — супералгебра с делением, то R действует неприводимо на D. Следовательно, R примитивно. Пусть $f_\gamma \in \mathrm{End}_R(D)$. Тогда

$$f_\gamma(d_\delta) = f_\gamma(l_{d_\delta} \cdot 1) = l_{d_\delta} f_\gamma(1) = d_\delta f_\gamma(1),$$

откуда получаем, что $f_\gamma = r_{f_\gamma(1)}$. Далее, $[f_\gamma(1), x_\chi] = 0$ для каждого $x_\chi \in F_\chi$. Таким образом, поскольку F максимально, $f_\gamma(1) \in F_\gamma$. Следовательно, $\mathrm{End}({}_RD) = F$. По теореме плотности $D_{(l)}F_{(r)} \cong M_n(F)$, где $n = \dim_F(D)$. Как уже было показано ранее, $D_{(l)}F_{(r)} \cong D \otimes_{C_0} F$ (здесь эндоморфизмы действуют слева).

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned}\dim_{C_0}(D) = \dim_F(D \otimes_{C_0} F) = n^2 = \\ = \dim_{C_0}(D) = \dim_{C_0}(F)\cdot \dim_F(D) = n\cdot \dim_{C_0}(F). \quad \square\end{aligned}$$

Плотностный результат, называемый леммой Амицура, говорит о существовании элемента, переводящего независимые элементы в независимые, т. е. сохраняющего линейную независимость, в то время как в теореме плотности Джекобсона независимость элементов образа не требуется.

Лемма 4 (лемма Амицура для суперколец). *Пусть $D = D_0 + D_1$ — супертело, $B = B_0 \oplus B_1$ — аддитивная абелева группа, $U = U_0 + U_1$ — левое D-суперпространство, $V = V_0 + V_1$ — конечномерное суперподпространство в U. Пусть $t_{1\alpha}, \ldots, t_{k\alpha}$ — D_0-независимые элементы $\mathrm{Hom}(B, U)$ и $T = Dt_{1\alpha} + \ldots + Dt_{k\alpha} \subseteq \mathrm{Hom}(B, U)$. Пусть T не содержит ненулевого элемента конечного ранга. Тогда существует такой элемент $b_\beta \in B_\beta$, что $t_{1\alpha}(b_\beta), \ldots, t_{k\alpha}(b_\beta)$ D_0-независимы по модулю $V_{\alpha+\beta}$.*

Доказательство. Проведём индукцию по k. Пусть $k = 1$. Если $t_{1\alpha}$ имеет бесконечный ранг, то $t_{1\alpha}(B) \nsubseteq V$, т. е. существует такой элемент $b_\beta \in B_\beta$, что $t_{1\alpha}(b_\beta) \nsubseteq V_{\alpha+\beta}$, что и требовалось.

Пусть утверждение верно для $k-1$ и неверно для k. Тогда для произвольного b_β найдётся такой набор $\{d_{i0}\}_{i=1}^{k} \subseteq D_0$, что

$$\sum_{i=1}^{k} d_{i0} t_{i\alpha}(b_\beta) \in V_{\alpha+\beta},$$

т. е. если $t_{2\alpha}(x_\chi) \ldots t_{k\alpha}(x_\chi)$ D_0-независимы по модулю V, то

$$t_{1\alpha}(x_\chi) = \sum_{i=2}^{k} \delta_{i0} t_{i\alpha}(x_\chi) + u_{\alpha+\chi}$$

для некоторых единственных $\{\delta_{i0}\}$ и $u_{\alpha+\chi}$. По предположению индукции существует такой элемент $b_{1\beta} \in B_\beta$, что $t_{2\alpha}(b_\beta) \ldots t_{k\alpha}(b_\beta)$ D_0-независимы по модулю V, т. е.

$$t_{1\alpha}(b_{1\beta}) = \sum_{i=2}^{k} \alpha_{i0} t_{i\alpha}(b_{1\beta}) + u_{1,\alpha+\beta}, \tag{1}$$

где $u_{1,\alpha+\beta}$ и $\{\alpha_{i0}\}$ единственны. Теперь достаточно показать, что

$$\left(t_{1\alpha} - \sum_{i=2}^{k} \alpha_{i0} t_{i\alpha}\right) B \subseteq V.$$

Пусть $b_\beta \in B_\beta$ — произвольный элемент. Положим

$$V' = V + \sum_{i=2}^{k} Dt_{i\alpha}(b_{1\beta}) + \sum_{j=1}^{k} Dt_{j\alpha}(b_\beta).$$

Пусть элемент $b'_\beta \in B_\beta$ такой, что $t_{2\alpha}(b'_\beta), \ldots, t_{k\alpha}(b'_\beta)$ D_0-независимы по модулю V'. Тогда $t_{2\alpha}(b'_\beta), \ldots, t_{k\alpha}(b'_\beta)$ D_0-независимы по модулю V. Следовательно,

$$t_{1\alpha}(b_{2\beta}) = \sum_{i=2}^{k} \beta_{i0} t_{i\alpha}(b_{2\beta}) + u_{2,\alpha+\beta}. \tag{2}$$

Положим $W = \sum\limits_{i=2}^{k} D t_{i\alpha}(b_{1\beta})$ и $W' = \sum\limits_{i=2}^{k} D t_{i\alpha}(b_{2\beta})$. Тогда имеет место

$$W' \cap (V + W) = 0,$$

откуда

$$(V + W) \cap (V + W') = V. \tag{3}$$

Так как

$$t_{i\alpha}(b_{1\beta} + b_{2\beta}) = t_{i\alpha}(b_{2\beta}) \bmod V',$$

то $t_{2\alpha}(b_{1\beta}+b_{2\beta}), \ldots, t_{k\alpha}(b_{1\beta}+b_{2\beta})$ D_0-независимы по модулю V'. Следовательно,

$$t_{1\alpha}(b_{1\beta} + b_{2\beta}) = \sum_{i=2}^{k} \gamma_{i0} t_{i\alpha}(b_{1\beta} + b_{2\beta}) + u_{3,\alpha+\beta}$$

для единственных $u_{3,\alpha+\beta}$ и $\{\gamma_{i0}\}$. Отсюда

$$t_{1\alpha}(b_{1\beta}) - \sum_{i=2}^{k} \gamma_{i0} t_{i\alpha}(b_{1\beta}) = \sum_{i=2}^{k} \gamma_{i0} t_{i\alpha}(b_{2\beta}) - t_{1\alpha}(b_{2\beta}) + u_{3,\alpha+\beta}. \tag{4}$$

По (1) левая часть (4) принадлежит $V+W$. По (2) правая часть (4) принадлежит $V + W'$. В результате обе части (4) принадлежат V. Вследствие единственности получаем $\alpha_{i0} = \beta_{i0} - \gamma_{i0}$ для каждого $i = 2, \ldots, k$,

$$t_{1\alpha}(b_{2\beta}) - \sum_{i=2}^{k} \alpha_{i0} t_{i0}(b_{2\beta}) \in V.$$

Так как

$$t_{i\alpha}(b_\beta + b_{2\beta}) = t_{i\alpha}(b_{2\beta}) \bmod V',$$

то $t_{2\alpha}(b_\beta + b_{2\beta}), \ldots, t_{k\alpha}(b_\beta + b_{2\beta})$ D_0-независимы по модулю V',

$$t_{1\alpha}(b_\beta + b_{2\beta}) - \sum_{i=2}^{k} \alpha_{i0} t_{i0}(b_\beta + b_{2\beta}) \in V.$$

Таким образом,

$$\left(t_{1\alpha} - \sum_{i=2}^{k} \alpha_{i0} t_{i0}\right)(b_\beta) \in -t_{1\alpha}(b_{2\beta}) + \sum_{i=2}^{k} \alpha_{i0} t_{i0}(b_{2\beta}) + V = V. \quad \square$$

9. Расширенная теорема плотности для суперколец

Для обобщения теоремы плотности Джекобсона необходимо ослабить условие примитивности суперкольца, т. е. ослабить условие неприводимости супермодуля. Более подробное изложение всего сказанного в этом разделе для обычных колец и модулей можно найти в [13]. Мы ограничимся лишь констатацией некоторых необходимых для полноты изложения аналогичных фактов для суперколец.

Супермодуль будем называть сжимаемым, если он однородно вкладывается в любой свой ненулевой суперподмодуль. Однородное вложение означает существование однородного супермономорфизма супермодуля в некоторый суперподмодуль данного суперподмодуля. Сжимаемый супермодуль будем называть критически сжимаемым, если он не допускает однородного вложения ни в какой свой фактор-супермодуль. В частности, неприводимый супермодуль является критически сжимаемым.

Предложение 17. *Для сжимаемого супермодуля M_R эквивалентны следующие условия*:

(1) *M_R критически сжимаемый*;
(2) *каждый однородный частичный суперэндоморфизм в M_R является мономорфизмом.*

Более того, из любого условия следует нетривиальность пересечения любых ненулевых суперподмодулей.

Доказательство. Проверим импликацию (1) $\implies$ (2). Пусть $f_\gamma\colon N \to M$ — ненулевой частичный эндоморфизм в M, $g_\delta\colon M \to f(N)$ — вложение (так как M сжимаемый). Но тогда $M \to f_\gamma(N) \cong N/\operatorname{Ker}(f_\gamma) \subseteq M/\operatorname{Ker}(f_\gamma)$ — мономорфизм M в $M/\operatorname{Ker}(f_\gamma)$. Однако поскольку M критически сжимаем, то $\operatorname{Ker}(f_\gamma) = 0$.

Докажем импликацию (2) $\implies$ (1). Предположим, что $f_\gamma\colon M \to M/N$ — мономорфизм, $f_\gamma(M) = L/N$ для некоторого супермодуля L ($N \subset L \subseteq M$). Пусть $\pi\colon L \to L/N$ — канонический супергомоморфизм. Тогда $h_\gamma = f_\gamma^{-1}\pi$ — ненулевой частичный эндоморфизм M. Следовательно, это мономорфизм. Но $N \subseteq \operatorname{Ker}(\pi) \subseteq \operatorname{Ker}(h_\gamma)$, откуда $N = 0$. Далее, пусть M удовлетворяет условию (2), а K и L — ненулевые суперподмодули. Пусть $K \cap L = 0$, тогда проектор $K + L \to L$ есть частичный эндоморфизм с нетривиальным ядром. $\square$

Расширением супермодуля N_R будем называть супермодуль M_R, для которого существует однородный супермономорфизм $a_\alpha\colon N_R \to M_R$. Расширение будем называть существенным, если любой его суперподмодуль имеет ненулевое пересечение с исходным расширяемым модулем.

Свойство инъективности и квазиинъективности супермодулей будем формулировать в терминах однородных гомоморфизмов. Так, квазиинъективным будем называть супермодуль, допускающий продолжение любого частичного однородного суперэндоморфизма до полного однородного. Инъективным будем называть супермодуль, допускающий продолжение любого однородного супергомоморфизма из произвольного супермодуля до однородного супергомоморфизма из его расширения.

Каждый супермодуль может быть вложен в наименьший квазиинъективный и наименьший инъективный супермодули, называемые квазиинъективной и инъективной оболочками. Инъективная оболочка есть наибольшее существенное расширение исходного супермодуля. Обозначим через M, $\bar{M}$, $\hat{M}$ соответственно супермодуль, его квазиинъективную и инъективную оболочки. Положим $\Lambda = \mathrm{End}(\hat{M}_R)$, $\Delta = \mathrm{End}(\bar{M}_R)$. Тогда имеют место следующие соотношения:

(1) $M \subseteq \bar{M} \subseteq \hat{M}$;
(2) $\bar{M}$ и $\hat{M}$ единственны с точностью до изоморфизма;
(3) $\bar{M} = \Lambda M = \Delta M$.

Предложение 18. *Пусть M_R — критически сжимаемый супермодуль, $D = \mathrm{End}(M_R)$, $\Delta = \mathrm{End}(\bar{M}_R)$. Тогда элементы из D имеют единственные продолжения до элементов из Δ. Более того, Δ — суперкольцо с делением и Δ есть классическое суперкольцо частных суперкольца D.*

Доказательство. Пусть $\lambda_\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, \bar{M})$ и $\mathrm{Ker}(\lambda_\alpha) \neq 0$, тогда $\lambda_\alpha = 0$. Действительно, положим $\lambda_{1\alpha} = \lambda_\alpha|_{\lambda_\alpha^{-1}(M \cap \lambda_\alpha M)}$. Если $\lambda_\alpha \neq 0$, то и $\lambda_{1\alpha} \neq 0$. Так как $\lambda_{1\alpha}$ — частичный эндоморфизм, то $\lambda_{1\alpha}$ — мономорфизм. Но $\mathrm{Ker}(\lambda_{1\alpha}) = \mathrm{Ker}(\lambda_\alpha) \cap \lambda_\alpha^{-1}(M \cap \lambda_\alpha M) \neq 0$, откуда $\lambda_\alpha = 0$.

Пусть теперь $\lambda_\alpha \in \mathrm{End}(\bar{M}_R)$ и $\mathrm{Ker}(\lambda_\alpha) \neq 0$. Тогда $\lambda_\alpha = 0$. Действительно, пусть μ_β — произвольный ненулевой элемент суперкольца $\Lambda = \mathrm{End}(\hat{M}_R)$. Тогда $\lambda_\alpha \mu_\beta|_M \in \mathrm{Hom}_R(M, \bar{M})$. Если $\mu_\beta(M) = 0$, то $\mu_\beta(M) \cap \mathrm{Ker}(\lambda_\alpha) \neq 0$, т. е. $\mathrm{Ker}(\lambda_\alpha \mu_\beta|_M) \neq 0$. Так как элемент $\mu_\beta \in \Lambda$ выбирался произвольно, то $\lambda_\alpha \bar{M} = \lambda \Lambda M = 0$. Таким образом, элементы из D единственным образом продолжаются до элементов из Δ. Следовательно, можем считать D суперподкольцом в Δ.

Покажем теперь, что Δ есть суперкольцо с делением. Пусть $0 \neq \lambda_\alpha \in \Lambda_\alpha$, тогда λ_α — мономорфизм. Пусть $\lambda_{1\alpha}$ — расширение λ_α на $\hat{M}_R$, тогда $\lambda_{1\alpha}$ также мономорфизм. Заметим, что $\lambda_{1\alpha}\hat{M} = \hat{M}$ и $\lambda_{1\alpha}$ обратим. Пусть $\mu_{1\alpha} \in \Lambda$ — обратный к $\lambda_{1\alpha}$ элемент. Тогда $\mu_\alpha = \mu_{1\alpha}|_{\bar{M}}$ — обратный к λ_α элемент.

Покажем, что Δ есть правое суперкольцо частных суперкольца D. Пусть $0 \neq \lambda_\alpha \in \Delta$, тогда $N = M \cap \lambda_\alpha^{-1} M \neq 0$. Выбираем $0 \neq \mu_\beta \in \mathrm{Hom}(M, N) \subseteq D$ и получаем, что $0 \neq \lambda_\alpha \mu_\beta \in D$. □

Так же, как и теорему плотности Джекобсона, расширенную теорему плотности Зельмановица для суперслучая мы сформулируем в двух вариантах. Первым рассмотрим случай «неровной» однородности, поскольку он проще.

Теорема 18 (первая расширенная теорема плотности для суперколец). *Следующие условия на суперкольцо $R = R_0 + R_1$ эквивалентны:*

(1) *R слабо примитивно*;

(2) *существует точный супермодуль* $M_R = M_0 + M_1$ *с квазиинъективной оболочкой* $\bar{M}$ *и супертелом* $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$, *такой что для произвольного* Δ*-независимого набора* $v_{1,\varphi_1}, \ldots, v_{k,\varphi_k} \in \bar{M}$ (*здесь* φ_i *могут быть разными для разных* i, *поэтому такой набор будем называть неровным однородным, хотя он может быть и ровным*) *найдётся такой элемент* $0 \neq a_\alpha \in \Delta_\alpha$, *что для произвольного неровного однородного набора* $n_{1,\varphi_1+\rho}, \ldots, n_{k,\varphi_k+\rho} \in M$ *существует элемент* $r_{\rho+\alpha} \in R_{\rho+\alpha}$, *для которого* $a_\alpha n_{i,\varphi_i+\rho} = v_{i,\varphi_i} r_{\alpha+\rho} \in M$ *для каждого* $i = 1, \ldots, k$;

(3) *существует точный супермодуль* $M_R = M_0 + M_1$ *с квазиинъективной оболочкой* $\bar{M}$ *и супертелом* $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$, *такой что для произвольного элемента* $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M}_R)$ *и произвольного неровного однородного* Δ*-независимого набора* $m_{1,\mu_1}, \ldots, m_{k,\mu_k} \in M$ *найдутся такие элементы* $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, *что* $m_{i,\mu_i} f_\tau r_\rho = m_{i,\mu_i} s_{\tau+\rho}$ *и* $0 \neq m_{i,\mu_i} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i,\mu_i}$ *для каждого* i.

Доказательство. Докажем импликацию (1) $\Longrightarrow$ (2). Так как R слабо примитивно, то существует точный критически сжимаемый супермодуль $M_R = M_0 + M_1$. Пусть $v_\varphi \in \bar{M}_\varphi$, тогда $v_\varphi R \neq 0$. Действительно, поскольку M_R сжимаем и $v_\varphi R \cap M \neq 0$, мы можем выбрать супермономорфизм $a_\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, v_\varphi R \cap M)$. Так как M_R точный, то существуют такие $m_\mu \in M_\mu$ и $r_\rho \in R_\rho$, что $m_\mu r_\rho \neq 0$. Далее, для некоторого $s_{\alpha+\mu+\varphi} \in R$ имеем $0 \neq a_\alpha m_\mu = v_\varphi s_{\alpha+\mu+\varphi}$, следовательно,

$$0 \neq a_\alpha(m_\mu r_\rho) = (a_\alpha m_\mu) r_\rho = v_\varphi s_{\alpha+\mu+\varphi} r_\rho \in v_\varphi R.$$

Пусть $v_{1\varphi_1}, \ldots, v_{k\varphi_k} \in \bar{M}$ независимы над Δ_0. Рассмотрим правый супеидеал $A_i = \bigcap\limits_{j \neq i} \mathrm{Ann}(v_{j\varphi_j})$. Так как $v_{i\varphi_i} A_i \neq 0$, то $\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} v_{i\varphi_i} A_i\Big) \cap M \neq 0$. В силу сжимаемости M_R мы можем выбрать супермономорфизм $a_\alpha \in \mathrm{Hom}_R\Big(M, \Big(\bigcap\limits_{i=1}^{k} v_{i\varphi_i} A_i\Big) \cap M\Big)$. Следовательно, для произвольных $n_{1,\varphi_i+\rho}, \ldots, n_{k,\varphi_k+\rho} \in M$ найдётся такой элемент $r_{i,\rho+\alpha} \in A_{i,\rho+\alpha}$, что $a_\alpha n_{i,\varphi_i+\rho} = v_{i\varphi_i} r_{i,\rho+\alpha} \in M_{\alpha+\varphi_i+\rho}$. Осталось положить $r_{\rho+\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{k} r_{i,\rho+\alpha}$. Таким образом, импликация (1) $\Longrightarrow$ (2) доказана.

Зафиксируем в качестве следствий из утверждения (2) два полезных в дальнейшем утверждения.

(∗) Для произвольного ненулевого элемента $m_\mu \in \bar{M}_\mu$ суперподмодуль $m_\mu R$ нетривиален.

(∗∗) Аннулятор любого конечного (неровного) однородного набора $\{v_{i,\varphi_i}\}$ в $\bar{M}$ нетривиален.

Проверим импликацию (2) $\Longrightarrow$ (3). Проведём индукцию по k. Пусть $k = 1$, т. е. даны $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$ и $0 \neq m_\mu \in M$. Пусть $m_\mu f_\tau \notin \Delta_\tau m_\mu$. По условию (2) для независимых m_μ и $m_\mu f_\tau$ существует такой элемент $a_\alpha \in \Delta_\alpha$, что

$a_\alpha m_\mu = m_\mu r_\alpha$ и $0 = m_\mu f_\tau r_\alpha$. Положим $s = 0$, откуда $m_\mu f_\tau r_\alpha = m_\mu s = 0$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $m_\mu f_\tau \in \Delta_\tau m_\mu$. Если $m_\mu f_\tau = 0$, то положим $s = 0$ и применим (2) к m_μ. Получим, что для некоторых $a_\alpha \in \Delta_\alpha$ и $r_\alpha \in R_\alpha$ имеет место $a_\alpha m_\mu = m_\mu r_\alpha$, и (3) выполняется. Значит, можем считать, что $m_\mu f_\tau \neq 0$. Пусть $m_\mu f_\tau = c_\tau m_\mu$, где $c_\tau \in \Delta_\tau$. Снова применяем предыдущую теорему, выбираем a_α для m_μ и b_β для $a_\alpha^{-1} c_\tau m_\mu$. Тогда найдётся такой элемент $r_{\alpha+\beta+\tau} \in R$, что $b_\beta m_\mu = (a_\alpha^{-1} c_\tau m_\mu) r_{\alpha+\beta+\tau}$. Аналогично, существует такой элемент $s_{\alpha+\beta} \in R$, что $a_\alpha (b_\beta m_\mu) = m_\mu s_{\alpha+\beta}$. Таким образом,

$$m_\mu r_{\alpha+\beta+\tau} = (c_\tau^{-1} a_\alpha b_\beta) m_\mu \in \Delta_{\alpha+\beta+\tau} m_\mu,$$

а также

$$m_\mu f_\tau r_{\alpha+\beta+\tau} = c_\tau m_\mu r_{\alpha+\beta+\tau} = a_\alpha a_\alpha^{-1} c_\tau m_\mu r_{\alpha+\beta+\tau} = a_\alpha b_\beta m_\mu = m_\mu s_{\alpha+\beta},$$

откуда $m_m u(\tau_\tau r_{\alpha+\beta+\tau} - s_{\alpha+\beta}) = 0$, что и требовалось.

Пусть $k = n + 1$, а для $k = n$ утверждение теоремы справедливо. Тогда для независимых $m_{1,\mu_1}, \ldots, m_{n,\mu_n}$ и f_τ существуют соответствующие r'_ρ и $s'_{\tau+\rho}$, для которых выполняется свойство $m_{i,\mu_i}(f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}) = 0$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Положим $f'_{\tau+\rho} = f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}$. Опять рассмотрим два случая.

Пусть $m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} \notin \sum\limits_{i=1}^{n+1} \Delta m_{i,\mu_i}$. Тогда по условию (2) для независимых элементов $m_{1,\mu_1}, \ldots, m_{n+1,\mu_{n+1}}, m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho}$ существуют такие $a_\alpha \in \Delta_\alpha$ и $r_\alpha \in R_\alpha$, что

$$a_\alpha m_{1\mu_1} = m_{1\mu_1} r_\alpha, \ldots, a_\alpha m_{n+1,\mu_{n+1}} = m_{n+1,\mu_{n+1}} r_\alpha, \quad a_\alpha 0 = (m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho}) r_\alpha.$$

Положим $s = 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&m_{i\mu_i}(f_\tau r'_\rho r_\alpha - (s_\alpha + s'_{\tau+\rho} r_\alpha)) = \\
&\quad m_{i\mu_i}(f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}) r_\alpha - m_{i\mu_i} s_\alpha = 0 - 0 = 0 \ \text{ для } \ i \leqslant n, \\
&m_{n+1,\mu_{n+1}}(f_\tau r'_\rho r_\alpha - (s_\alpha + s'_{\tau+\rho} r_\alpha)) = \\
&\quad = m_{n+1,\mu_{n+1}}(f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}) r_\alpha - m_{n+1,\mu_{n+1}} s_\alpha = m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} r_\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Пусть теперь $m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} \in \sum\limits_{i=1}^{n+1} \Delta m_{i\mu_i}$. Если $m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} = 0$, то существуют такие $a_\alpha \in \Delta_\alpha$ и $r_\alpha \in R_\alpha$, что $a_\alpha m_{i\mu_i} = m_{i\mu_i} r_\alpha$. Положим $s = 0$ и получим требуемое. Будем считать, что $m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} \neq 0$, тогда $m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} = \sum\limits_{j=1}^{l} c_{j,\gamma_j} m_{j\mu_j}$, где $0 \neq c_{j,\gamma_j} \in \Delta_{\gamma_j}$ (считаем, что коэффициенты при первых l элементах ненулевые, а $\gamma_j = \mu_{n+1} + \tau + \rho + \mu_j$ для каждого j). По условию (2) для независимых $m_{1\mu_1}, \ldots, m_{n+1,\mu_{n+1}}$ выбираем $a_\alpha \in \Delta_\alpha$. Аналогично, для $a_\alpha^{-1} c_{10} m_{1\mu_1}, \ldots, a_\alpha^{-1} c_{l0} m_{l\mu_l}$ и оставшихся $m_{l+1,\mu_{l+1}}, \ldots, m_{n+1,\mu_{n+1}}$ выбираем $b_\beta \in \Delta_\beta$. Тогда найдутся такие $r_{\alpha+\beta}, s_{\alpha+\beta+\tau+\rho} \in R$, что

$$b_\beta c_{i,\gamma_i} m_{i\mu_i} = (a_\alpha^{-1} c_{i,\gamma_i} m_{i\mu_i}) r_{\alpha+\beta} \in M_{\alpha+\beta} \ \text{ для } i \leqslant l,$$
$$b_\beta d_\alpha m_{i\mu_i} = m_{i\mu_i} r_{\alpha+\beta} \ \text{ для оставшихся } i,$$

а также

$$a_\alpha 0 = m_{i\mu_i} s_{\alpha+\beta} \ \text{ для } i \leqslant n,$$
$$a_\alpha b_\beta m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} = m_{n+1,\mu_{n+1}} s_{\alpha+\beta+\tau+\rho}.$$

Здесь d_α — произвольный ненулевой элемент из Δ_α, который использован только для выравнивания индексов, в качестве d_α можно взять и a_α. Таким образом, имеют место следующие равенства:

$$m_{i\mu_i} f'_{\tau+\rho} r_{\alpha+\beta} = m_{i\mu_i}(f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}) r_{\alpha+\beta} = 0 = m_{i\mu_i} s_{\alpha+\beta+\tau+\rho} \ \text{ для } i \leqslant n,$$

а также

$$m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} r_{\alpha+\beta} = \sum_{i=1}^{l} c_{i,\gamma_i} m_{i\mu_i} r_{\alpha+\beta} =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} a_\alpha b_\beta c_{i,\gamma_i} m_{i\mu_i} = a_\alpha b_\beta m_{n+1,\mu_{n+1}} f'_{\tau+\rho} = m_{n+1,\mu_{n+1}} s_{\alpha+\beta+\tau+\rho},$$

что и требовалось, т. е. импликация (2) $\Longrightarrow$ (3) доказана.

Убедимся в справедливости импликации (3) $\Longrightarrow$ (1). Покажем, что любой ненулевой циклический суперподмодуль $m_\mu R$ супермодуля $M_R = M_0 + M_1$, удовлетворяющего (3), будет точным критически сжимаемым R-супермодулем. Во-первых, для произвольного $0 \neq m_\mu$ супермодуль $m_\mu R$ точный. Действительно, пусть $0 \neq t_\tau \in R_\tau$. Так как M_R точный, то существует такой элемент $n_\nu \in M_\nu$, что $n_\nu t_\tau \neq 0$. Если m_μ и n_ν Δ-зависимы, то по условию (3) выберем элемент r_ρ, обладающий свойством $m_\mu r_\rho \in \Delta_\rho m_\mu$. Тогда $(m_\mu r_\rho) t_\tau = (d_\rho m_\mu) t_\tau = (d_\rho c_{\mu+\nu} n_\nu) t_\tau \neq 0$ для некоторых ненулевых $c_{\mu+\nu}, d_\rho \in \Delta$. Пусть m_μ и n_ν Δ-независимы. Выберем элемент $f_{\mu+\nu} \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$, удовлетворяющий условию $m_\mu f_{\mu+\nu} = n_\nu$. По условию (3) найдутся такие $r_\rho, s_{\rho+\mu+\nu} \in R$, что

$$m_\mu f_{\mu+\nu} r_\rho = m_\mu s_{\rho+\mu+\nu}, \quad m_\mu r_\rho \in \Delta_\rho m_\mu; \quad n_\nu f_{\mu+\nu} r_\rho = n_\nu s_{\rho+\mu+\nu}, \quad n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu.$$

Таким образом, получаем

$$m_\mu s_{\rho+\mu+\nu} t_\tau = m_\mu f_{\mu+\nu} r_\rho t_\tau = n_\nu r_\rho t_\tau \neq 0,$$

что и требовалось.

Докажем теперь сжимаемость супермодуля $m_\mu R$. Пусть N_R — некоторый ненулевой суперподмодуль. Пусть $0 \neq n_\nu \in N_R$. Если $m_\mu d_{\mu+\nu} = n_\nu$ для некоторого ненулевого $d_{\mu+\nu} \in \Delta_{\mu+\nu}$, то $d_{\mu+\nu}$ и есть искомое вложение. Пусть теперь m_μ и n_ν Δ-независимы. Выберем $f_{\mu+\nu} \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$ таким, чтобы $n_\nu f_\tau = m_\mu$. Далее, используя (3), находим такие $r_\rho, s_{\rho+\mu+\nu} \in R$, что

$$m_\mu f_{\mu+\nu} r_\rho = m_\mu s_{\rho+\mu+\nu}, \quad m_\mu r_\rho = a_\rho m_\mu; \quad n_\nu f_{\mu+\nu} r_\rho = n_\nu s_{\rho+\mu+\nu}, \quad n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu.$$

Поэтому имеем

$$a_\rho m_\mu = m_\mu r_\rho = n_\nu f_{\mu+\nu} r_\rho = n_\nu s_{\rho+\mu+\nu} \in N.$$

Следовательно, a_ρ — искомое вложение супермодуля $m_\mu R$ в его суперподмодуль N_R.

По предложению 17 вместо критической сжимаемости супермодуля $m_\mu R$ можно доказывать, что любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм есть мономорфизм. В действительности мы можем доказать это свойство для всего супермодуля M_R. Пусть N_R — суперподмодуль супермодуля M_R. Пусть $0 \neq h_\gamma \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ и $h_\gamma m_\mu \neq 0$. Пусть $0 \neq n_\nu \in N_\nu$ — произвольный элемент. Случай Δ-зависимости m_μ и n_ν тривиален. Пусть m_μ и n_ν Δ-независимы. Выберем $f_{\mu+\nu} \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$ таким, чтобы выполнялось равенство $n_\nu f_{\mu+\nu} = m_\mu$. Применяя (3), находим элементы $r_\rho, s_{\rho+\mu+\nu} \in R$, удовлетворяющие условиям

$$m_\mu f_{\mu+\nu} r_\rho = m_\mu s_{\rho+\mu+\nu}, \quad m_\mu r_\rho \in \Delta_\rho m_\mu; \quad n_\nu f_{\mu+\nu} r_\rho = n_\nu s_{\rho+\mu+\nu}, \quad n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu.$$

Таким образом, получаем

$$(h_\gamma n_\nu) s_{\rho+\mu+\nu} = h_\gamma(n_\nu s_{\rho+\mu+\nu}) = h_\gamma(n_\nu f_{\mu+\nu} r_\rho) = h_\gamma(m_\mu r_\rho) \neq 0.$$

Следовательно, $h_\gamma n_\nu \neq 0$. □

Наша следующая цель — «выравнивание» индексов однородности в условиях (2) и (3). Сформулируем аналоги этих условий следующим образом.

($2'$) Существует точный супермодуль $M_R = M_0 + M_1$ с квазиинъективной оболочкой $\bar{M}$ и супертелом $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$, такой что для произвольного Δ_0-независимого набора $v_{1\varphi}, \ldots, v_{k\varphi} \in \bar{M}$ найдётся такой элемент $0 \neq a_\alpha \in \Delta_\alpha$, что для произвольного однородного набора $n_{1\nu}, \ldots, n_{k\nu} \in M$ существует такой элемент $r_{\alpha+\nu+\varphi} \in R_{\alpha+\nu+\varphi}$, что $a_\alpha n_{i\nu} = v_{i\varphi} r_{\alpha+\nu+\varphi} \in$ $\in M_{\alpha+\nu}$ для каждого $i = 1, \ldots, k$.

($3'$) Существует точный супермодуль $M_R = M_0 + M_1$ с квазиинъективной оболочкой $\bar{M}$ и супертелом $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$, такой что для произвольного $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M}_R)$ и произвольного однородного Δ_0-независимого набора $m_{1\mu}, \ldots, m_{k\mu} \in M$ найдутся такие $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, что $m_{i\mu} f_\tau r_\rho = m_{i\mu} s_{\tau+\rho}$ и $0 \neq m_{i\mu} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i\mu}$ для каждого i.

Эти условия слабее условий (2) и (3), более того, они не равносильны. Как и выше, условие (1) декларирует слабую примитивность суперкольца R.

Теорема 19 (вторая расширенная теорема плотности для суперколец). *Справедливы следующие соотношения между условиями*: (1) $\Longleftrightarrow$ ($2'$) $\Longrightarrow$ ($3'$).

Доказательство. Импликация (1) $\Longrightarrow$ ($2'$) есть ослабление предыдущей теоремы.

Проверим импликацию ($2'$) $\Longrightarrow$ ($1'$). Аналогично тому, как это было сделано в предыдущей теореме, покажем, что любой ненулевой циклический суперподмодуль $m_\mu R$ супермодуля $M_R = M_0 + M_1$, удовлетворяющего условию ($3'$), будет точным критически сжимаемым R-супермодулем. Во-первых, для произвольного $0 \neq m_\mu$ супермодуль $m_\mu R$ точный. Действительно, пусть $0 \neq t_\tau \in R_\tau$. Так как M_R точный, то существует такой элемент $n_\nu \in M_\nu$, что $n_\nu t_\tau \neq 0$. Применим условие ($2'$). Получим $a_\alpha n_\nu = m_\mu r_{\mu+\nu+\alpha}$ для некоторых $a_\alpha \in \Delta_\alpha$, $r_{\mu+\nu+\alpha} \in R_{\mu+\nu+\alpha}$. Тогда $m_\mu r_{\mu+\nu+\alpha} t_\tau = a_\alpha n_\nu t_\tau \neq 0$. Докажем теперь сжимаемость супермодуля $m_\mu R$. Пусть N_R — некоторый ненулевой суперподмодуль. Пусть $0 \neq n_\nu \in N_R$. По условию $(2')$ существуют такие $a_\alpha \in \Delta_\alpha$, $r_{\mu+\nu+\alpha} \in R_{\mu+\nu+\alpha}$, что $a_\alpha m_\mu = n_\nu r_{\mu+\nu+\alpha}$. Следовательно, a_α — искомое вложение.

Теперь докажем, что любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм супермодуля M_R есть мономорфизм. Это следует из того, что $\bar{M}$ — квазиинъективный модуль, поэтому любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм продолжается до элемента из Δ (причём единственным образом вследствие обратимости ненулевых элементов из Δ) и, следовательно, является мономорфизмом.

Импликация $(2') \implies (3')$ также является следствием сказанного. Однако мы докажем её напрямую. Вернее, внесём необходимые изменения в доказательство импликации $(2) \implies (3)$. Пусть даны $0 \neq m_\mu \in M$ и $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M}_R)$. Рассмотрим случай $m_\mu f_\tau \notin \Delta_\tau m_\mu$. Тогда найдётся такой элемент $r_\rho \in \mathrm{Ann}(m_\mu f_\tau)$, что $m_\mu r_\rho \neq 0$, иначе $\mathrm{Ann}(m_\mu f_\tau) \subseteq \mathrm{Ann}(m_\mu)$, откуда следует, что m_μ и $m_\mu f_\tau$ Δ-зависимы. Далее, для $m_\mu r_\rho$, используя $(2')$, найдём $b_\beta \in \Delta_\beta$ и $r_{\beta+\rho}$. Положим $s = 0$. Имеем

$$m_\mu f_\tau(r_\rho r_{\beta+\rho}) = 0 = m_\mu s, \quad m_\mu(r_\rho r_{\beta+\rho}) \in \Delta_\beta m_\mu.$$

Случай Δ-зависимости $m_\mu f_\tau$ и m_μ рассматривается так же, как и аналогичный в предыдущей теореме.

Пусть $k = n + 1$, а для $k = n$ утверждение теоремы справедливо. Тогда для $m_{1\mu}, \ldots, m_{n\mu}$ и f_τ существуют r'_ρ и $s'_{\tau+\rho}$, для которых $m_{i\mu}(f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}) = 0$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Положим $f'_{\tau+\rho} = f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}$ Опять рассмотрим два случая. Пусть $m_{n+1,\mu} f'_{\tau+\rho} \notin \sum\limits_{i=1}^{n+1} \Delta m_{i\mu}$. Если $\Delta_1 \neq 0$, то неровные индексы, возникающие в случае $\tau = 1$, можно выровнять домножением на $0 \neq a_1 \in \Delta_1$. Для каждого $i = 1, \ldots, n+1$ существует $r_{i\rho_i} \in \Big(\bigcap\limits_{i\neq j} \mathrm{Ann}(m_{j\mu}) \cap \mathrm{Ann}(m_{n+1,\mu})\Big) \setminus \mathrm{Ann}(m_{i\mu})$. При условии $\Delta_1 = 0$ для каждого ненулевого $m_\mu r_{i\rho_i}$ по отдельности, применяя $(2')$, находим $a_{i0} \in \Delta_0$ и $\tilde{r}_{i\rho_i} \in R_{\rho_i}$, обладающие свойством $a_{i0} m_{i\mu} = (m_{i\mu} r_{i\rho_i})\tilde{r}_{i\rho_i}$. В результате, положив $r_0 = \sum\limits_{i=1}^{n+1} r_{i\rho_i} \tilde{r} i\rho_i$ и $s = 0$, получим

$$m_{i\mu} r_0 \in \Delta_0 m_{i\mu} \quad \text{для } i = 1, \ldots, n+1,$$

а также

$$m_{n+1,\mu} f_\tau r_0 = 0 = m_{n+1,\mu} s.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} &m_{i\mu}(f_\tau r'_\rho r_0 - (s + s'_{\tau+\rho} r_0)) = \\ &\quad = m_{i\mu}(f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}) r_0 - m_{i\mu} s = 0 - 0 = 0 \quad \text{для } i \leqslant n, \\ &m_{n+1,\mu}(f_\tau r'_\rho r_0 - (s + s'_{\tau+\rho} r_0)) = \\ &\quad = m_{n+1,\mu}(f_\tau r'_\rho - s'_{\tau+\rho}) r_0 - m_{n+1,\mu} s = m_{n+1,\mu} f'_{\tau+\rho} r_0 = 0. \end{aligned}$$

Далее в доказательстве необходимо лишь выровнять индексы при помощи домножений на элементы Δ. $\square$

Рассмотрим три условия на суперкольцо $R = R_0 + R_1$ и супермодуль $M = M_0 + M_1$ над ним. Используем те же обозначения, что и в предыдущих теоремах.

(A) $0 \neq n_\nu r_1 = d_1 n_\nu$ для некоторых $n_\nu \in M_\nu$, $r_1 \in R_1$, $d_1 \in \Delta_1$.

(B) Существует полностью ненулевая тройка $\tilde{m}_{\mu+1}, m_\mu, \hat{m}_{\mu+1} \in M$, такая что $\tilde{m}_{\mu+1}\tilde{r}_1 = m_\mu$, $m_\mu r_1 = \hat{m}_{\mu+1}$ для некоторых $\tilde{r}_1, r_1 \in R_1$.

(C) $R_1^2 \neq 0$.

Всегда выполняется импликации $(A) \implies (B) \implies (C)$. При условии точности на супермодуль M_R имеет место также импликация $(C) \implies (B)$.

Теорема 20. *Пусть $M_R = M_0 + M_1$ — точный супермодуль над суперкольцом $R = R_0 + R_1$ с квазиинъективной оболочкой $\bar{M}$ и супертелом $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$. Пусть для произвольного $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M}_R)$ и произвольного однородного Δ_0-независимого набора $m_{1\mu}, \ldots, m_{k\mu} \in M$ найдутся такие элементы $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, что $m_{i\mu} f_\tau r_\rho = m_{i\mu} s_{\tau+\rho}$ и $0 \neq m_{i\mu} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i\mu}$ для каждого i. Пусть имеет место одно из условий* (A), (B) *или* (C). *Тогда R — слабо примитивное суперкольцо.*

Доказательство. Поскольку супермодуль M_R точный, мы можем считать, что выполняется условие (B). Тогда циклический супермодуль $m_\mu R$ является точным критически сжимаемым над суперкольцом R. Покажем точность. Пусть $0 \neq t_\tau \in R_\tau$. Поскольку супермодуль M_R точный, существует такой элемент $n_\nu \in M_\nu$, что $n_\nu t_\tau \neq 0$. Если $\mu = \nu$, положим $v_\nu = m_\mu$, иначе $v_\nu = \hat{m}_{\mu+1}$. Выберем $f_0 \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $v_\nu f_0 = n_\nu$. Если $n_\nu = d_0 v_\nu$, где $0 \neq d_0 \in \Delta_0$, то $v_\nu f_0 r_\rho = v_\nu s_\rho$ и $0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu$ для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Следовательно, $0 \neq n_\nu r_\rho = d_0 v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$. Если же v_ν и n_ν Δ_0-независимы, то

$$v_\nu f_0 r_\rho = v_\nu s_\rho, \quad 0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu,$$
$$n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho, \quad 0 \neq n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$$

для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Таким образом,

$$v_\nu s_\rho t_\tau = v_\nu f_0 r_\rho t_\tau = n_\nu r_\rho t_\tau \neq 0.$$

Получаем точность супермодуля $m_\mu R$, так как $v_\nu s_\rho \in m_\mu R$.

Покажем сжимаемость супермодуля $m_\mu R$. Пусть N_R — его суперподмодуль и $0 \neq n_\nu \in N_\nu$. Если $\mu = \nu$, то положим $v_\nu = m_\mu$, иначе $v_\nu = \tilde{m}_{\mu+1}$. Выберем $f_0 \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $n_\nu f_0 = v_\nu$. Опять отдельно рассматриваем случаи зависимости и независимости n_ν и v_ν. В итоге получаем, что $n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho$, $0 \neq n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$ и $0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu$ для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Пусть $v_\nu r_\rho = a_\rho v_\nu$ для некоторого $a_\rho \in \Delta_\rho$. Тогда имеем

$$0 \neq a_\rho v_\nu = v_\nu r_\rho = n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho \in N.$$

Так как $m_\mu R \subseteq v_\nu R$, то a_ρ и есть искомое вложение супермодуля $m_\mu R$ в N.

Осталось показать, что любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм является мономорфизмом. Пусть N_R — суперподмодуль супермодуля $m_\mu R$ и $0 \neq f_\gamma \in \mathrm{Hom}_R(N, m_\mu R)$. Пусть $f_\gamma(n_\nu) \neq 0$ для некоторого $n_\nu \in N_\nu$ и $0 \neq l_\lambda \in N_\lambda$. Покажем, что $f_\gamma(l_\lambda) \neq 0$. Если $\lambda + \gamma = \mu$, то положим $v_{\lambda+\gamma} = m_\mu$, иначе $v_{\lambda+\gamma} = \tilde{m}_{\mu+1}$. Так как $n_\nu = v_{\lambda+\gamma} r_{\lambda+\gamma+\nu}$, то $f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) \neq 0$. Выберем $g_\gamma \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $l_\lambda g_\gamma = v_{\lambda+\gamma}$. Опять отдельно рассматриваем случаи зависимости и независимости l_λ и $f_\gamma(v_{\lambda+\gamma})$ над Δ_0. В итоге получаем, что $l_\lambda g_\gamma r_\rho = l_\lambda s_{\rho+\gamma}$, $0 \neq l_\lambda r_\rho \in \Delta_\rho l_\lambda$ и $0 \neq f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) r_\rho \in \Delta_\rho f_\gamma(v_{\lambda+\gamma})$. Таким образом,

$$f_\gamma(l_\lambda) s_{\rho+\gamma} = f_\gamma(l_\lambda s_{\rho+\gamma}) = f_\gamma(l_\lambda g_\gamma r_\rho) = f_\gamma(v_{\lambda+\gamma} r_\rho) = f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) r_\rho \neq 0.$$

Следовательно, $f_\gamma(l_\lambda) \neq 0$ и f_γ — мономорфизм. □

Если супермодуль над суперкольцом является точным сжимаемым, то любой его ненулевой подмодуль неоднороден (мы считаем, что сами суперкольцо и супермодуль неоднородны). Если суперкольцо R удовлетворяет условию $R_1^2 = 0$, то оно не является слабо примитивным. Действительно, пусть существует точный критически сжимаемый супермодуль $M_R = M_0 + M_1$. Пусть $m_\mu r_1 \neq 0$, где $m_\mu \in M_\mu$, $r_1 \in R_1$. Тогда суперподмодуль $m_\mu r_1 R$ однороден.

Теорема 21 (третья расширенная теорема плотности для суперколец). *Условия* (1), (2′), (3′)+(B) *и* (3′)+(C) *на суперкольцо* $R = R_0 + R_1$ *эквивалентны.*

10. Расширенная теорема плотности для градуированных колец

Будем считать, что градуировка модуля производится по коммутативной аддитивной группе, а градуировка кольца — по той же группе или её подгруппе. Индексы однородности (элементы группы) будем обозначать строчными буквами греческого алфавита.

Гомоморфизм f_φ градуированного модуля M будем называть однородным, если выполняется условие

$$f_\varphi(m_\mu) \in M_{\mu+\varphi} \text{ для всех } m_\mu \in M_\mu.$$

Градуированный модуль будем называть сжимаемым, если он однородно вкладывается в любой свой ненулевой подмодуль. Однородное вложение модуля в подмодуль означает существование однородного мономорфизма из этого модуля в этот подмодуль. Сжимаемый модуль будем называть критически сжимаемым, если он не допускает однородного вложения ни в какой свой фактор-модуль. В частности, неприводимый модуль есть критически сжимаемый.

Следует заметить, что при (однородном) вложении градуированного модуля M_R в N_R (кольцо и градуировка одни и те же у обоих модулей) однородные компоненты могут лишь сдвигаться на элемент группы, равный индексу однородности самого вложения. Отсюда следует, что все однородные компоненты ненулевого градуированного подмодуля сжимаемого градуированного модуля нетривиальны. Отсюда, в свою очередь, следует, что любой циклический подмодуль сжимаемого градуированного модуля нетривиален. Действительно, пусть $m_\mu R = 0$ для некоторого $m_\mu \in M_\mu$, тогда подмодуль $m_\mu \mathbb{Z} + m_\mu R$ имеет ровно один ненулевой однородный компонент с индексом однородности μ.

Приведём без доказательства некоторые необходимые в дальнейшем факты.

Предложение 19. *Для сжимаемого градуированного модуля M_R эквивалентны следующие условия*:

(1) *M_R критически сжимаемый*;

(2) *каждый однородный частичный эндоморфизм в M_R является мономорфизмом.*

Более того, из любого условия следует нетривиальность пересечения любых двух ненулевых градуированных подмодулей.

Расширением градуированного модуля N_R будем называть градуированный модуль M_R, для которого существует однородный мономорфизм $a_\alpha\colon N_R \to M_R$. Расширение будем называть существенным, если любой его нетривиальный градуированный подмодуль имеет ненулевое пересечение с исходным расширяемым модулем.

Свойство инъективности и квазиинъективности градуированных модулей будем формулировать в терминах однородных гомоморфизмов. Так, квазиинъективным будем называть градуированный модуль, допускающий продолжение любого частичного однородного эндоморфизма до полного однородного эндоморфизма. Инъективным будем называть градуированный модуль, допускающий продолжение любого однородного гомоморфизма из произвольного модуля до однородного гомоморфизма из его расширения.

Каждый градуированный модуль может быть вложен в наименьший квазиинъективный и наименьший инъективный градуированные модули, называемые квазиинъективной и инъективной оболочками. Инъективная оболочка есть наибольшее существенное расширение исходного модуля. Обозначим через M, $\bar{M}$, $\hat{M}$ соответственно градуированный модуль и его квазиинъективную и инъективную оболочки. Положим $\Lambda = \mathrm{End}(\hat{M}_R)$, $\Delta = \mathrm{End}(\bar{M}_R)$. Тогда имеют место следующие соотношения:

(1) $M \subseteq \bar{M} \subseteq \hat{M}$;

(2) $\bar{M}$ и $\hat{M}$ единственны с точностью до изоморфизма;

(3) $\bar{M} = \Lambda M = \Delta M$.

Предложение 20. *Пусть M_R — критически сжимаемый градуированный модуль, $D = \mathrm{End}(M_R)$, $\Delta = \mathrm{End}(\bar{M}_R)$. Тогда элементы из D имеют единственные продолжения до элементов из Δ. Более того, Δ — градуированное кольцо с делением.*

Пример 10. Рассмотрим счётномерный свободный $\mathbb{Z}$-модуль. Пусть $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ — счётный базис. Обозначим через M подмодуль, натянутый на базис $\{i \cdot e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, а через R — подкольцо линейных преобразований исходного $\mathbb{Z}$-модуля, относительно которых подмодуль M инвариантен. Тогда M_R —

точный критически сжимаемый модуль, M и R можно наделить естественной $\mathbb{Z}$-градуировкой.

Покажем сжимаемость. Пусть подмодуль N содержит элемент вида $n \cdot e_k$, где $n, k \in \mathbb{N}$. Существует такой элемент r кольца R, что $(n \cdot e_k)r = n \cdot e_1$. Следовательно, подмодуль N_R содержит циклический R-подмодуль $(n \cdot e_1)R$, который, по сути, есть $n \cdot M$, т. е. $\mathbb{Z}$-подмодуль модуля M, натянутый на базис $\{n \cdot e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$. Этот циклический R-подмодуль очевидным образом изоморфен M_R.

Покажем теперь критическую сжимаемость. Для этого докажем, что каждый однородный частичный эндоморфизм f_φ в M_R является мономорфизмом. Действительно, пусть $f_\varphi(n \cdot e_k) = 0$ для некоторых $n, k \in \mathbb{N}$, тогда $f_\varphi(nk \cdot e_l) = 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$, на котором он определён, а следовательно, $f_\varphi(\mathbb{Z}l \cdot e_l) = 0$, поэтому $f_\varphi = 0$.

Пример 11. Рассмотрим двумерный модуль над $\mathbb{Z}_2$ как левый модуль над верхнетреугольными матрицами с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой:

$$R_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix} \right\}.$$

Единственным градуированным подмодулем модуля ${}_RM$ является M_0. Поэтому ${}_RM$ не сжимаемый, но точный. Более того, он является квазиинъективным.

Рассмотрим три условия на градуированное кольцо R:

(i) кольцо R слабо примитивно;

(ii) существуют точный градуированный модуль M_R, его квазиинъективная оболочка $\bar{M}$, градуированное тело $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$, такие что для произвольного Δ_0-независимого однородного набора $v_{1\varphi}, \ldots, v_{k\varphi} \in \bar{M}_\varphi$ найдётся такой элемент $0 \neq a_\alpha \in \Delta_\alpha$, что для произвольного однородного набора $n_{1\nu}, \ldots, n_{k\nu} \in M_\nu$ существует такой элемент $r_{\alpha+\nu+\varphi} \in R_{\alpha+\nu+\varphi}$, что $a_\alpha n_{i\nu} = v_{i\varphi} r_{\alpha+\nu+\varphi} \in M_{\alpha+\nu}$ для каждого $i = 1, \ldots, k$;

(iii) существуют точный градуированный модуль M_R, его квазиинъективная оболочка $\bar{M}$, градуированное тело $\Delta = \mathrm{End}_R(\bar{M})$, такие что для произвольного $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$ и произвольного однородного Δ_0-независимого набора $m_{1\mu}, \ldots, m_{k\mu} \in M$ найдутся такие элементы $r_\rho, s_{\tau+\rho} \in R$, что $m_{i\mu} f_\tau r_\rho = m_{i\mu} s_{\tau+\rho}$ и $0 \neq m_{i\mu} r_\rho \in \Delta_\rho m_{i\mu}$ для каждого i.

Теорема 22. *Условия* (i) *и* (ii) *на градуированное кольцо R равносильны.*

Доказательство. В [1] это утверждение было доказано в одну сторону, вернее, было доказано, что из слабой примитивности градуированного кольца R следует существование точного градуированного модуля M_R с ещё более сильным условием на него (в нашем условии элементы из набора имеют одинаковый индекс однородности, а в [1] индексы могут различаться). Докажем наше утверждение в обратную сторону.

Покажем, что любой ненулевой циклический градуированный подмодуль $m_\mu R$ градуированного модуля M_R будет точным критически сжимаемым градуированным R-модулем. Во-первых, для произвольного $0 \neq m_\mu$ модуль $m_\mu R$

точный. Действительно, пусть $0 \neq t_\tau \in R_\tau$. Так как M_R точный, то существует такой элемент $n_\nu \in M_\nu$, что $n_\nu t_\tau \neq 0$. По условию теоремы $a_\alpha n_\nu = m_\mu r_{\mu+\nu+\alpha}$ для некоторых $a_\alpha \in \Delta_\alpha$, $r_{\mu+\nu+\alpha} \in R_{\mu+\nu+\alpha}$. Тогда $m_\mu r_{\mu+\nu+\alpha} t_\tau = a_\alpha n_\nu t_\tau \neq 0$.

Докажем теперь сжимаемость градуированного модуля $m_\mu R$. Пусть N_R — некий ненулевой градуированный подмодуль. Пусть $0 \neq n_\nu \in N_R$. По условию существуют такие $a_\alpha \in \Delta_\alpha$, $r_{\mu+\nu+\alpha} \in R_{\mu+\nu+\alpha}$, что $a_\alpha m_\mu = n_\nu r_{\mu+\nu+\alpha}$. Следовательно, a_α — искомое вложение.

Наконец, докажем, что любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм градуированного модуля M_R есть мономорфизм, а следовательно, это же верно и для любого его подмодуля (в частности, любого циклического). Это следует из того, что $\bar{M}$ квазиинъективный, поэтому любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм продолжается до элемента из Δ (причём единственным образом вследствие обратимости ненулевых элементов из Δ) и, следовательно, является мономорфизмом. □

Следующее утверждение также является следствием результатов, полученных в [1].

Теорема 23. *Из условия* (i) *следует условие* (iii) *на градуированное кольцо* R.

То, что из условия (iii) не следует в общем случае условие (i), иллюстрирует последний пример. Действительно, в этом случае градуированный модуль ${}_RM$ сам является квазиинъективным, Δ состоит из нулевого и тождественного преобразований, $\mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$ — кольцо (2×2)-матриц над $\mathbb{Z}_2$ со стандартной градуировкой. Произвольный однородный Δ_0-независимый набор $m_{1\mu}, \ldots, m_{k\mu} \in M$ может состоять только из одного элемента. Независимо от $f_\tau \in \mathrm{End}_\Delta(\bar{M})$ положим $s_{\tau+\rho} = 0$, а r_ρ находится перебором (поскольку $\Delta_1 = 0$, имеем $\rho = 0$). Итак, градуированный модуль ${}_RM$ удовлетворяет условию (iii), но не удовлетворяет условию (i).

Целью дальнейшего рассмотрения будут дополнительные условия на градуированные кольцо R и модуль M_R, которые в том или ином случае делают условия (i), (ii) и (iii) равносильными.

Рассмотрим следующие дополнительные условия:

(a) существует такой элемент $0 \neq m_\mu \in M_\mu$, что для каждого индекса однородности (элемента группы) ν существуют элементы $\tilde{m}_\nu \in M_\nu$ и $\tilde{r}_{\mu-\nu} \in R_{\mu-\nu}$, такие что $\tilde{m}_\nu r_{\mu-\nu} = m_\mu$, а также элемент $\hat{r}_\nu \in R_\nu$, такой что $m_\mu \hat{r}_\nu \neq 0$;

(b) все однородные компоненты любого градуированного подмодуля модуля M_R нетривиальны;

(c) все однородные компоненты любого градуированного циклического подмодуля модуля M_R нетривиальны.

Очевидно, условия (b) и (c) равносильны.

Теорема 24. *Если градуированные кольцо* R *и модуль* M_R *удовлетворяют условию* (iii) *и одному из условий* (a), (b) *или* (c), *то* R *слабо примитивно.*

Доказательство. Циклический градуированный модуль $m_\mu R$, является точным критически сжимаемым над градуированным кольцом R, если m_μ берётся из условия (a), если же имеет место условие (b) или (c), то в качестве m_μ можно взять произвольный ненулевой элемент. Покажем точность модуля $m_\mu R$. Пусть $0 \neq t_\tau \in R_\tau$. Так как M_R точный, то существует такой элемент $n_\nu \in M_\nu$, что $n_\nu t_\tau \neq 0$. Если $\mu = \nu$, то положим $v_\nu = m_\mu$, иначе $v_\nu = m_\mu \hat{r}_{\nu-\mu}$ (здесь $r_{\nu-\mu} \neq 0$ существует либо в силу условия (a), либо в силу (b) или (c), применённых к градуированному циклическому подмодулю $m_m uR$). Выберем $f_0 \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $v_\nu f_0 = n_\nu$. Если $n_\nu = d_0 v_\nu$, где $0 \neq d_0 \in \Delta_0$, то $v_\nu f_0 r_\rho = v_\nu s_\rho$ и $0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu$ для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Следовательно, $0 \neq n_\nu r_\rho = d_0 v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$. Если же v_ν и n_ν Δ_0-независимы, то

$$v_\nu f_0 r_\rho = v_\nu s_\rho, \quad 0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu,$$
$$n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho, \quad 0 \neq n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$$

для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Таким образом,

$$v_\nu s_\rho t_\tau = v_\nu f_0 r_\rho t_\tau = n_\nu r_\rho t_\tau \neq 0.$$

Получаем точность градуированного модуля $m_\mu R$, так как $v_\nu s_\rho \in m_\mu R$.

Покажем сжимаемость градуированного модуля $m_\mu R$. Пусть N_R — его градуированный подмодуль и $0 \neq n_\nu \in N_\nu$. Если выполняется условие (b) или (c), то мы можем выбрать ν равным μ и положить $v_\nu = m_\mu$. Пусть выполняется условие (a). Если $\mu = \nu$, то положим $v_\nu = m_\mu$, иначе $v_\nu = \tilde{m}_\nu$. Выберем $f_0 \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $n_\nu f_0 = v_\nu$. Опять отдельно рассматриваем случаи зависимости и независимости n_ν и v_ν. В итоге получаем, что $n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho$, $0 \neq n_\nu r_\rho \in \Delta_\rho n_\nu$ и $0 \neq v_\nu r_\rho \in \Delta_\rho v_\nu$ для некоторых $r_\rho, s_\rho \in R_\rho$. Пусть $v_\nu r_\rho = a_\rho v_\nu$ для некоторого $a_\rho \in \Delta_\rho$. Тогда имеем

$$0 \neq a_\rho v_\nu = v_\nu r_\rho = n_\nu f_0 r_\rho = n_\nu s_\rho \in N.$$

Так как $m_\mu R \subseteq v_\nu R$, то a_ρ и есть искомое вложение градуированного модуля $m_\mu R$ в N.

Осталось показать, что любой ненулевой однородный частичный эндоморфизм является мономорфизмом. Пусть N_R — градуированный подмодуль градуированного модуля $m_\mu R$ и $0 \neq f_\gamma \in \mathrm{Hom}_R(N, m_\mu R)$. Пусть $f_\gamma(n_\nu) \neq 0$ для некоторого $n_\nu \in N_\nu$ и $0 \neq l_\lambda \in N_\lambda$. Покажем, что $f_\gamma(l_\lambda) \neq 0$. Если выполняется условие (b) или (c), то мы можем выбрать λ равным $\mu - \gamma$ и положить $v_{\lambda+\gamma} = m_\mu$. Далее, доказав, что $f_\gamma(l_\lambda) \neq 0$, мы можем сделать вывод, что градуированный подмодуль $\mathrm{Ker}(f_\gamma)$ имеет тривиальный однородный компонент с индексом λ, откуда по условию (b) следует тривиальность всего подмодуля $\mathrm{Ker}(f_\gamma)$. Пусть выполняется условие (a). Если $\lambda + \gamma = \mu$, то положим $v_{\lambda+\gamma} = m_\mu$, иначе $v_{\lambda+\gamma} = \tilde{m}_{\lambda+\gamma}$. Так как $n_\nu = v_{\lambda+\gamma} r_{\nu-\lambda-\gamma}$, то $f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) \neq 0$. Выберем $g_\gamma \in \mathrm{End}_R(\bar{M})$ таким, чтобы $l_\lambda g_\gamma = v_{\lambda+\gamma}$. Опять отдельно рассматриваем случаи зависимости и независимости l_λ и $f_\gamma(v_{\lambda+\gamma})$ над Δ_0. В итоге получаем, что $l_\lambda g_\gamma r_\rho = l_\lambda s_{\rho+\gamma}$, $0 \neq l_\lambda r_\rho \in \Delta_\rho l_\lambda$ и $0 \neq f_\gamma(v_{\lambda+\gamma}) r_\rho \in \Delta_\rho f_\gamma(v_{\lambda+\gamma})$. Таким образом,

$$f_\gamma(l_\lambda)s_{\rho+\gamma} = f_\gamma(l_\lambda s_{\rho+\gamma}) = f_\gamma(l_\lambda g_\gamma r_\rho) = f_\gamma(v_{\lambda+\gamma} r_\rho) = f_\gamma(v_{\lambda+\gamma})r_\rho \neq 0.$$

Следовательно, $f_\gamma(l_\lambda) \neq 0$ и f_γ — мономорфизм. □

Заметим, что для точного критически сжимаемого градуированного модуля M_R выполняются условия (b) и (c), а при предположении конечности группы G, по которой производится градуирование, и условие (a). Действительно, пусть M_R — точный критически сжимаемый градуированный модуль. Мы уже говорили, что в силу сжимаемости все компоненты любого его градуированного подмодуля нетривиальны, т. е. выполняются условия (b) и (c). Фиксируем произвольный индекс однородности $\mu \in G$. Для каждого индекса однородности, кроме μ, возьмём произвольный однородный элемент, получим набор $\{n_\nu \in M_\nu,\ \mu \neq \nu \in G\}$. В силу конечности группы G пересечение циклических градуированных модулей $N = \bigcap\limits_{\nu \neq \mu} n_\nu R$, порождённых этими элементами, нетривиально. При этом произвольный $0 \neq m_\mu \in N_\mu$ можно взять в качестве m_μ в условии (a).

Требование конечности группы G для выполнения условия (a) мотивируется примером 10, в котором градуированный по $\mathbb{Z}$ модуль M_R, являясь точным критически сжимаемым, не удовлетворяет условию (a). Покажем это. Рассмотрим произвольный однородный элемент $lk \cdot e_k$ (здесь k не индекс однородности, а номер в базисе $\{e_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, градуировка строится элементарной перенумерацией элементов базиса по $\mathbb{Z}$ и последующей согласованной градуировкой по $\mathbb{Z}$ элементов кольца R). Далее, рассмотрим однородный компонент $\mathbb{Z}n \cdot e_n$, где $n > k$. Никакой его элемент не может быть переведён в $lk \cdot e_k$ домножением на элемент кольца R (элементы кольца R изначально представляли из себя линейные преобразования M как $\mathbb{Z}$-модуля, поэтому они могут только переставлять элементы базиса, $e_i \to e_j$, и растягивать в целое число раз, $e_i \to p \cdot e_i$, $p \in \mathbb{Z}$), что автоматически влечёт невыполнение условия (a).

Итак, мы можем сформулировать основной результат в виде двух утверждений.

Теорема 25 (расширенная теорема плотности для градуированных по группе колец). *Условия* (i), (ii), (iii) + (b) *и* (iii) + (c) *на градуированное по группе кольцо R эквивалентны.*

Теорема 26 (расширенная теорема плотности для градуированных по конечной группе колец). *Условия* (i), (ii), (iii) + (a), (iii) + (b) *и* (iii) + (c) *на градуированное по конечной группе кольцо R эквивалентны.*

Литература

[1] Балаба И. Н., Зеленов С. В., Лимаренко С. В., Михалёв А. В. Теоремы плотности для градуированных колец // Фундам. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 1. — С. 27—49.

[2] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[3] Зеленов С. В. Теорема плотности Зельмановича в градуированном случае // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 3. — С. 167—168.

[4] Лимаренко С. В. Расширенная теорема плотности для градуированных по группе колец и модулей // Успехи мат. наук. — 2002. — Т. 57, № 4. — С. 181—182.

[5] Лимаренко С. В. Кольца с критически сжимаемыми идеалами // Успехи мат. наук. — 2003. — Т. 58, № 2. — С. 165—166.

[6] Лимаренко С. В. Сжимаемые модули // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2005. — № 3. — В печати.

[7] Amitsur S. A. Rings of quotients and Morita context // J. Algebra. — 1971. — Vol. 17. — P. 273—298.

[8] Beidar K. I., Martindale W. S., III, Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[9] Faith C. Lectures on Injective Modules and Quotient Rings. — Berlin: Springer, 1967. — Lect. Notes Math. Vol. 49.

[10] Năstăsescu C., Oystayen F. V. Graded and Filtered Rings and Modules. — Berlin: Springer, 1979. — Lect. Notes Math. Vol. 758.

[11] Racine M. L. Primitive superalgebras with superinvolution // J. Algebra. — 1998. — Vol. 206. — P. 588—614.

[12] Zelmanowitz J. An extension of the Jacobson density theorem // Bull. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 82, no. 4. — P. 551—553.

[13] Zelmanowitz J. Weakly primitive rings // Comm. Algebra. — 1981. — Vol. 9, no. 1. — P. 23—45.