Множества рядов Гильберта и их приложения*

Д. И. ПИОНТКОВСКИЙ
Центральный
экономико-математический институт РАН
e-mail: piont@mccme.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: градуированное кольцо, ряд Гильберта, функция Гильберта, козюлева фильтрация, рост алгебр.

Аннотация

Рассматриваются конечно представимые алгебры и модули над полем. При определённых ограничениях множество рядов Гильберта таких алгебр (модулей) оказывается конечным. Утверждения такого рода влекут рациональность рядов Гильберта и Пуанкаре некоторых алгебр и модулей, в частности периодичность функции Гильберта многих (в том числе нётеровых) модулей и алгебр линейного роста.

Abstract

D. I. Piontkovski, Sets of Hilbert series and their applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 143—156.

We consider graded finitely presented algebras and modules over a field. Under some restrictions, the set of Hilbert series of such algebras (or modules) becomes finite. Claims of that type imply the rationality of Hilbert and Poincaré series of some algebras and modules, including the periodicity of Hilbert functions of many (e.g., Noetherian) modules and algebras of linear growth.

1. Введение

Рассматриваются градуированные конечно представимые алгебры и модули над фиксированным основным полем k. Множество рядов Гильберта таких алгебр (или модулей), удовлетворяющих некоторым дополнительным ограничениям, оказывается конечным. Мы укажем несколько применений результатов такого рода: рациональная зависимость рядов Гильберта и рациональность рядов Пуанкаре идеалов в конечно представимых алгебрах, а также периодичность функции Гильберта для многих конечно представимых алгебр линейного роста.

Статья построена следующим образом. В разделе 1.2 напоминается терминология и вводятся обозначения. Затем, в разделе 2, мы переходим к основным результатам о множествах рядов Гильберта. В частности, здесь доказывается следующая теорема.

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 02-01-00468.

Теорема 1.1 (теорема 2.4(a)). *Для данных четырёх натуральных чисел n, a, b, c обозначим через $D(n,a,b,c)$ множество всех связных градуированных алгебр A с не более чем n порождающими, таких что $m_1(A) \leqslant a$, $m_2(A) \leqslant b$ и $m_3(A) \leqslant c$. Тогда множество рядов Гильберта алгебр из $D(n,a,b,c)$ конечно.*

Здесь $m_i(A) = \sup\{j \mid \operatorname{Tor}_i^A(k,k)_j \neq 0\}$ (если $\operatorname{Tor}_i^A(k,k) = 0$, положим $m_i(A) = 0$). В частности, $m_1(A)$ — точная оценка на степени порождающих алгебры A, а $m_2(A)$ — точная оценка на степени её соотношений. Например, алгебра A козюлева тогда и только тогда, когда $m_i(A) \leqslant i$ для всех $i \geqslant 0$.

Теорема 1.1 доказывается также в [Pi1] (её версия для козюлевых алгебр ранее была доказана в [PP]), однако здесь дано новое доказательство, которое представляется более простым. Оно основывается на следующем утверждении.

Теорема 1.2 (теорема 2.2). *Пусть D, D_0, $D \geqslant D_0$, — два целых числа. Рассмотрим множество $E(D_0,D)$ всевозможных градуированных (би)модулей M над связными градуированными алгебрами A, таких что A и M порождаются не более чем D элементами, порождающие модуля имеют степени не менее D_0, а степени порождающих и соотношений A и M не превосходят D. Тогда множество всевозможных рядов Гильберта (би)модулей из $E(D_0,D)$ не содержит бесконечных возрастающих цепей (относительно лексикографического порядка на рядах Гильберта).*

Эта теорема обобщает результат Д. Аника [An], где рассматривалось $M = A$.

Упомянутые теоремы дают новое следствие.

Следствие 1.3 (следствие 2.7). *Пусть A — конечно представимая алгебра, $D > 0$ — целое число. Тогда множество рядов Гильберта правых идеалов в A, у которых порождающие и соотношения имеют степени не выше D, конечно.*

Приведённые результаты о множествах рядов Гильберта имеют ряд интересных приложений [Pi1]. Конечно представимый градуированный модуль M над связной градуированной алгеброй A называется *эффективно когерентным*, если существует такая функция $D_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что если градуированный подмодуль $L \subset M$ порождается в степенях не выше d, то его соотношения имеют степени не выше $D(d)$. Модуль M называется *эффективным для рядов*, если для любого натурального d существует лишь конечное число возможностей для рядов Гильберта подмодулей в M, порождённых в степени не выше d. Теорема 1.1 существенно использовалась при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 1.4 ([Pi1]).

(a) *Любая сильно нётерова связная алгебра над алгебраически замкнутым полем эффективно когерентна.*

(b) *Любая эффективно когерентная алгебра эффективна для рядов.*

Напомним, что алгебра A называется сильно нётеровой [ASZ], если алгебра $A \otimes C$ нётерова для любой коммутативной нётеровой k-алгебры C. В частности, большинство колец, известных в некоммутативной проективной геометрии, являются сильно нётеровыми алгебрами [ASZ].

В данной работе рассматриваются другие приложения множеств рядов Гильберта. В разделе 3 изучается следующий вопрос: когда функция Гильберта $f_V(n) := \dim V_n$ градуированной алгебры или модуля V периодична? Очевидное необходимое условие состоит в том, что алгебра (модуль) V должна иметь линейный рост, т. е. $\operatorname{GK-dim} V \leqslant 1$. Оказывается, в некоторых общих случаях это условие является также достаточным.

Теорема 1.5 (теорема 3.1). *Пусть M — конечно представимый градуированный модуль над связной конечно представимой алгеброй A. Предположим, что $\operatorname{GK-dim} M = 1$ и что выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

(a) *поле k конечно*;

(b) *векторные пространства $\operatorname{Tor}_2^A(M, k)$ и $\operatorname{Tor}_3^A(k, k)$ конечномерны.*

Тогда ряд Гильберта $M(z)$ рационален, т. е. функция Гильберта $f_M(n) = \dim M_n$ периодична.

Следствие 1.6. *Пусть M — градуированный конечно порождённый (конечно представимый) модуль над нётеровой справа (соответственно когерентной справа) связной алгеброй A. Если $\operatorname{GK-dim} M \leqslant 1$, то функция Гильберта модуля M периодична.*

Отметим, что в контексте некоммутативной проективной геометрии критические модули линейного роста оказываются во взаимно-однозначном соответствии с замкнутыми точками в $\operatorname{q-coh} A$. Поэтому период функции Гильберта оказывается числовым инвариантом таких точек.

Существуют градуированные алгебры с не являющейся периодической, но ограниченной функцией Гильберта, например алгебра $k\langle x, y \mid yxy, x^2, xy^{2^n}x, n \geqslant 1\rangle$. Если поле k конечно, эта алгебра является даже эффективной для рядов.

Неизвестно, любая ли конечно представимая алгебра линейного роста имеет периодическую функцию Гильберта. Тем не менее в ряде важных случаев периодичность имеет место.

Следствие 1.7 (следствие 3.2). *Пусть A — конечно порождённая связная алгебра единичной размерности Гельфанда—Кириллова. Предположим, что A удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:

(i) *нётерова (справа или для двусторонних идеалов)*;

(ii) *(полу)первична*;

(iii) *когерентна*;

(iv) *конечно представима над конечным полем*;

(v) *козюлева*;

(vi) *A имеет конечный рэйт (в смысле Бакелина).*

Тогда функция Гильберта алгебры A периодична.

Здесь по определению алгебра A имеет конечный рэйт тогда и только тогда, когда существует такое число r, что каждое векторное пространство $\operatorname{Tor}_i^A(k, k)$ сосредоточено в степенях не выше ri [Ba]. Алгебра A называется когерентной (точнее, градуированно когерентной справа), если любой конечно порождённый однородный правый идеал конечно определён, или, эквивалентно, если ядро любого градуированного отображения $F_1 \to F_2$ между двумя градуированными свободными модулями F_1, F_2 является конечно порождённым [Bu, F].

В некогерентной алгебре какой-нибудь идеал также может оказаться конечно представимым, и даже может иметь свободную резольвенту конечного типа. Чтобы описать некоторые такие идеалы, вводится следующее понятие.

Определение 1.8. Пусть A — связная градуированная алгебра, и пусть $\mathbf{F}$ — некоторое множество конечно порождённых правых идеалов в A. Множество $\mathbf{F}$ называется квазикогерентным семейством идеалов, если $0 \in \mathbf{F}$ и для любого $0 \neq I \in \mathbf{F}$ существуют такие $J_1, J_2 \in \mathbf{F}$, что $J_1 \neq I$, $m_0(J_1) \leqslant m_0(I)$ и $I/J_1 \cong A/J_2[-t]$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что квазикогерентное семейство $\mathbf{F}$ имеет степень d, если $m_0(I) \leqslant d$ для всех $I \in \mathbf{F}$.

Если максимальный идеал $\bar{A} := A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ принадлежит $\mathbf{F}$, то квазикогерентное семейство $\mathbf{F}$ называется *когерентным* [Pi1]. Например, когерентные семейства конечной степени содержатся в любой конечно представимой мономиальной алгебре [Pi1] и в некоторых однородных координатных кольцах [CNR]. Когерентные семейства степени 1 называются *козюлевыми фильтрациями*, они изучались в ряде работ [Bl,Co1,Co2,CRV,CTV,Pi2]. Квазикогерентное семейство единичной степени называется *козюлевым семейством*. Например, такие семейства можно построить в координатных кольцах некоторых конечных множеств точек в проективном пространстве [Po].

Нетрудно убедиться, что любой идеал в квазикогерентном семействе обладает свободной резольвентой конечного типа. С помощью описанных свойств множеств рядов Гильберта мы выводим отсюда следующее утверждение.

Предложение 1.9 (следствие 4.3). *Пусть $\mathbf{F}$ — квазикогерентное семейство степени d в конечно представимой алгебре A. Тогда множество рядов Гильберта всевозможных идеалов $I \in \mathbf{F}$ конечно.*

Вариант предложения 1.9 для когерентных семейств был доказан в [Pi1], его обобщение на квазикогерентные семейства использует следствие 1.3.

Как показано в [Pi1, Pi2], любой идеал в когерентном семействе конечной степени обладает рациональным рядом Гильберта, а в козюлевой фильтрации — ещё и рациональным рядом Пуанкаре. Предложение 1.9 позволяет получить аналогичные результаты для квазикогерентных семейств.

Следствие 1.10 (следствия 4.4, 4.5). *Пусть $\mathbf{F}$ — квазикогерентное семейство степени d в конечно представимой алгебре A.*

(i) *Для любого идеала $I \in \mathbf{F}$ существуют два многочлена с целыми коэффициентами $p(z)$, $q(z)$, такие что $I(z) = A(z)\frac{p(z)}{q(z)}$.*

(ii) *Предположим, что $d = 1$, т. е. $\mathbf{F}$ — козюлево семейство. Тогда для любого идеала $I \in \mathbf{F}$ его ряд Пуанкаре $P_I(z) := \sum_{i \geqslant 0} (\dim \mathrm{Tor}_i(I, k)) z^i$ является рациональной функцией.*

1.1. Благодарности

Я благодарен Леониду Посицельскому, Дж. Тобиасу Стаффорду и Виктору Уфнаровскому за полезные замечания и обсуждения.

1.2. Обозначения и предположения

Мы рассматриваем $\mathbb{Z}_+$-градуированные связные ассоциативные алгебры над фиксированным основным полем k, т. е. алгебры вида $R = \bigoplus\limits_{i\geqslant 0} R_i$, где $R_0 = k$. По умолчанию все модули и идеалы градуированные и правосторонние.

Для такого R-модуля M мы будем обозначать через H_iM градуированное векторное пространство $\mathrm{Tor}_i^R(M,k)$. Через H_iR обозначим градуированное векторное пространство $\mathrm{Tor}_i^R(k,k) = H_ik_A$. Векторное пространство H_1R изоморфно линейной оболочке минимального множества однородных порождающих алгебры R, а H_2R — линейной оболочке минимального множества её однородных соотношений. Аналогично, векторное пространство H_0M — это линейная оболочка однородных порождающих модуля M, а H_1M — линейная оболочка его однородных соотношений.

Обозначим через $m(M) = m_0(M)$ супремум степеней однородных порождающих модуля M. Если M — векторное пространство с тривиальной структурой модуля, то это просто супремум степеней элементов M. Для любого $i \geqslant 0$ положим также $m_i(M) := m(H_iM) = \sup\{j \mid \mathrm{Tor}_i^R(M,k)_j \neq 0\}$. Аналогично положим $m_i(R) = m(H_iR) = m_i(k_R)$. Например, $m(R) := m_0(R)$ — супремум степеней порождающих алгебры R, а $m_1(R)$ ($m_1(M)$) — супремум степеней соотношений алгебры R (соответственно модуля M).

Отметим, что символы H_iR и m_iR для алгебры имеют иной смысл, чем соответствующие символы H_iR_R и m_iR_R для R, рассматриваемой как модуль над собой. Однако гомологии H_iR_R модуля R_R тривиальны, так что недоразумений возникнуть не должно.

Ряд Гильберта локально конечного градуированного векторного пространства (алгебры, модуля...) V определяется как формальный степенной ряд $V(z) = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} (\dim V_i) z^i$. Например, эйлерова характеристика минимальной свободной резольвенты тривиального модуля k_R даёт формулу

$$R(z)^{-1} = \sum_{i\geqslant 0} (-1)^i H_iR(z).$$

Как обычно, мы пишем $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_iz^i = o(z^n)$, если $a_i = 0$ при $i \leqslant n$.

Введём линейный порядок (лексикографический) на множестве формальных степенных рядов с целыми коэффициентами, т. е. положим $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_iz^i >_{\mathrm{lex}} \sum\limits_{i\geqslant 0} b_iz^i$, если существует такое $q \geqslant 0$, что $a_i = b_i$ для $i < q$ и $a_q > b_q$. Этот порядок продолжает покоэффициентный частичный порядок, заданный условием, что $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i z^i \geqslant \sum\limits_{i\geqslant 0} b_i z^i$ тогда и только тогда, когда $a_i \geqslant b_i$ для всех $i \geqslant 0$.

2. Свойства множеств рядов Гильберта

Следующая теорема, принадлежащая Анику, показывает, что множество рядов Гильберта алгебр с ограниченными по степеням и количеству порождающими и соотношениями вполне упорядоченно.

Теорема 2.1 ([An, теорема 4.3]). *Пусть n, a, b — три натуральных числа, пусть $C(n,a,b)$ — множество всевозможных n-порождённых связных алгебр R, для которых $m_1(R) \leqslant a$ и $m_2(R) \leqslant b$, и пусть $\mathcal{H}(n,a,b)$ — множество рядов Гильберта таких алгебр. Тогда упорядоченное множество $(\mathcal{H}(n,a,b), >_{\mathrm{lex}})$ не содержит бесконечных возрастающих цепей.*

Пример бесконечной *убывающей* цепи рядов Гильберта в множестве $C(7,1,2)$ построен в [An, пример 7.7].

Мы докажем более общую версию этой теоремы, в которой алгебры заменяются на (би)модули. Доказательство основывается на той же идее, что и в [An].

Теорема 2.2. *Пусть D, D_0, $D \geqslant D_0$, — два целых числа. Рассмотрим множество $E(D_0,D)$ всевозможных градуированных (би)модулей M над связными градуированными алгебрами A, таких что A и M порождаются не более чем D элементами, порождающие модуля имеют степени не менее D_0, а степени порождающих и соотношений A и M не превосходят D. Тогда множество всевозможных рядов Гильберта (би)модулей из $E(D_0,D)$ не содержит бесконечных возрастающих цепей.*

Для доказательства нам потребуются дополнительные обозначения.

Пусть дано четыре формальных степенных ряда $V(z)$, $R(z)$, $W(z)$, $S(z)$. Обозначим через $\mathcal{M} = \mathcal{M}(V(z), R(z), W(z), S(z))$ множество всевозможных модулей M над алгебрами A, таких что $H_1A(z) = V(z)$, $H_2A(z) = R(z)$, $H_0M(z) = W(z)$ и $H_1M(z) = S(z)$.

Мы можем считать, что все такие алгебры порождаются одним и тем же векторным пространством V, а все модули — одним и тем же векторным пространством W. Пусть $D = \max\{\deg R(z), \deg S(z)\}$, и пусть $m = \dim T(V)_{\leqslant D}$, $n = \dim(W \otimes T(V))_{\leqslant D}$. Поскольку любое соотношение $r \in H_2A$ алгебры A представимо как элемент из $T(V)_{\leqslant D}$, его можно рассматривать как элемент векторного пространства k^m. Поэтому векторное пространство H_2A определяется вектором из k^{rm}, где $r = R(1)$ — размерность пространства H_2A. Аналогично, каждое векторное пространство соотношений модуля $M \in \mathcal{M}$ определяется некоторым вектором из k^{sn}, где $s = S(1)$ — размерность пространства H_1M. Это означает, что каждый модуль $M_u \in \mathcal{M}$ определяется вектором u из векторного пространства $Q = k^{rm+sn}$.

Рассмотрим топологическое пространство $\bar{\mathcal{M}}(V(z), R(z), W(z), S(z)) := \{u \mid M_u \in \mathcal{M}\} \subset Q$ с индуцированной топологией Зариского.

Лемма 2.3. *Пусть $V(z)$, $R(z)$, $W(z)$, $S(z)$ — четыре многочлена с неотрицательными целыми коэффициентами, и пусть $h(z)$ — некоторый формальный степенной ряд. Тогда подмножества $L_>(h(z)) := \{u \mid M_u(z) \geqslant h(z)\}$ и $L_{>_{\mathrm{lex}}}(h(z)) := \{u \mid M_u(z) \geqslant_{\mathrm{lex}} h(z)\}$ в $\bar{\mathcal{M}}(V(z), R(z), W(z), S(z))$ замкнуты и алгебраичны.*

Доказательство. Пусть $M = M_u \in \mathcal{M}$ — модуль над алгеброй A и R, S — минимальные множества соотношений для A и M. Тогда M является фактор-модулем модуля $F = W \otimes T(V)$ по $T(V)$-подмодулю $N = W \otimes T(V) R T(V) + S T(V)$. Положим $h(z) = \sum\limits_{i \geqslant 0} h_i z^i$ и $\tilde{h}(z) = \sum\limits_{i \geqslant 0} h_i z^i := F(z) - h(z)$.

Условие $u \in L_>(h(z))$ означает, что $N(z) \leqslant \tilde{h}(z)$, т. е. что $\dim N_i \leqslant h_i$ для любого $i \geqslant 0$. Для каждого $i \geqslant 0$ последнее условие означает в свою очередь, что ранг системы векторов, порождающих векторное пространство N_i, ограничен числом h_i. Очевидно, это условие на u алгебраическое, поскольку оно означает равенство нулю определённых миноров. Следовательно, множество $L_>(h(z))$ является счётным пересечением замкнутых алгебраических подмножеств, и потому оно само алгебраическое.

Условие $u \in L_{>_{\mathrm{lex}}}(h(z))$ означает, что $N(z) \leqslant_{\mathrm{lex}} \tilde{h}(z)$. Значит, множество $L_{>_{\mathrm{lex}}}(h(z))$ представляется в виде счётного пересечения множеств L_i, $i \geqslant 0$, где

$$L_i = \{u \mid N(z) \leqslant h(z) + o(z^i)\} \cup \bigcup_{j=0}^{i} \{u \mid \dim N_j < h_j\} \subset \subset \bar{\mathcal{M}}(V(z), R(z), W(z), S(z)).$$

Каждое множество L_i алгебраическое, поэтому L также алгебраическое. □

Доказательство теоремы 2.2. Во-первых, с точностью до сдвига градуировки можно считать $D_0 = 0$. Во-вторых, каждый бимодуль над алгеброй A можно рассматривать как правый модуль над алгеброй $B = A \otimes A^{\mathrm{op}}$. Поскольку $m_1(B) = m_1(A) \leqslant D$ и $m_2(B) \leqslant \max\{m_1(A)^2, m_2(A)\} \leqslant D^2$, то достаточно доказывать теорему 2.2 (для всех D) для подмножества $E'(0, D) \subset E(0, D)$, состоящего из правых модулей (т. е. бимодулей с тривиальным левым действием). Действительно, так как соотношения произвольного правого модуля M как бимодуля имеют степени не выше $\max\{m_0(M) + m_1(A), m_1(M)\} \leqslant 2D$, то утверждение теоремы о множестве $E(0, D)$ будет следовать из аналогичного утверждения для множества $E'(0, \max\{2D, D^2\})$.

Предположим, что существует бесконечная возрастающая цепь

$$M_1(z) <_{\mathrm{lex}} M_2(z) <_{\mathrm{lex}} \ldots$$

в $E'(0, D)$, состоящая из модулей над некоторыми алгебрами $A_1, A_1, \ldots \in C(D, D, D)$. Можно считать, что все эти алгебры порождаются одним и тем же конечномерным градуированным векторным пространством V и что их минимальные пространства соотношений $R_1, R_2, \ldots \subset T(V)$ имеют один и тот же ряд (многочлен) Гильберта $R_i(z) = R(z)$. Аналогично можно считать, что все модули M_i порождаются одним и тем же конечномерным градуированным векторным пространством W и что их минимальные пространства соотношений $S_1, S_2, \ldots$ имеют один и тот же ряд Гильберта $S_i(z) = S(z)$.

Тогда мы получаем бесконечную убывающую цепь алгебраических подмножеств в $\bar{\mathcal{M}}(V(z), R(z), W(z), S(z))$

$$L_{>_{\mathrm{lex}}}(M_1(z)) \supset L_{>_{\mathrm{lex}}}(M_2(z)) \supset \ldots.$$

Противоречие. □

Следующая теорема — основной результат этого раздела. Другое её доказательство можно найти в [Pi1].

Теорема 2.4. *Пусть n, a, b, c, m, p_1, p_2, q, r — девять целых чисел.*

(a) *Обозначим через $D(n,a,b,c)$ множество всех связных градуированных алгебр A с не более чем n порождающими, таких что $m_1(A) \leqslant a$, $m_2(A) \leqslant b$ и $m_3(A) \leqslant c$. Тогда множество рядов Гильберта алгебр из $D(n,a,b,c)$ конечно.*

(b) *Пусть $DM = DM(n,a,b,c,m,p_1,p_2,q,r)$ — множество всевозможных правых модулей над алгебрами из $D(n,a,b,c)$ с не более чем m порождающими, таких что $M_i = 0$ при $i < p_1$, $m_0(M) \leqslant p_2$, $m_1(M) \leqslant q$ и $m_2(M) \leqslant r$. Тогда множество HDM рядов Гильберта модулей из DM конечно.*

Для доказательства нам потребуется следующая стандартная версия леммы Кёнига.

Лемма 2.5. *Пусть P — линейно упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям обрыва и возрастающих, и убывающих цепей. Тогда P конечно.*

Доказательство теоремы 2.4. С точностью до сдвига градуировки можно считать $p_1 = 0$. Пусть $M \in DM$ — модуль над алгеброй $A \in D(n,a,b,c)$. Рассмотрим начальные члены минимальной свободной резольвенты для M:

$$0 \to \Omega \to H_0(M) \otimes A \to M \to 0.$$

Здесь порождающие модуля сизигий Ω имеют степени не выше $m_1(M) \leqslant q$, а соотношения — не выше $m_2(M) \leqslant r$. Поскольку $H_0(\Omega) = H_1(M)$, количество $\dim H_0(\Omega)$ его порождающих не превосходит $\dim(H_0(M) \otimes A)_{\leqslant q} \leqslant m(1 + n + \ldots + n^q) =: D'$. Получаем, что $\Omega \in E(0, D)$, где $D = \max\{D', q, r\}$, так что множество всевозможных рядов Гильберта для Ω удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей.

Предположим временно, что $M = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ (чтобы объединить случаи (a) и (b), мы считаем здесь $m = n$, $p_2 = a$, $q = b$ и $r = c$). Получаем $M(z) = A(z) - 1$ и $H_0(M) = H_1(A)$. Из эйлеровой характеристики получаем

$$\Omega(z) - H_1(A)(z)A(z) + M(z) = 0,$$

или

$$A(z) = (1 - \Omega(z))(1 - H_1(A)(z))^{-1} = (1 - \Omega(z))(1 + H_1(A)(z) + H_1(A)(z)^2 + \ldots).$$

Заметим, что порядок $<_{\mathrm{lex}}$ согласован с умножением неравенств на формальный степенной ряд с положительными коэффициентами. Так как имеется лишь конечное число возможностей для $H_1(A)(z)$, множество рядов Гильберта $A(z)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. По теореме 2.1 оно также удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей. Согласно лемме 2.5 отсюда следует утверждение (a).

Вернёмся теперь к общему случаю (b). Имеем $M(z) = H_0(M)(z)A(z) - \Omega(z)$. Здесь имеется лишь конечное число возможностей для $H_0(M)(z)$ (так как и число, и размерности ненулевых компонент ограничены). Кроме того, по утверждению (a) имеется лишь конечное число возможностей для $A(z)$. Следовательно, множество HDM всех таких рядов Гильберта $M(z)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Так как $HDM \subset E(0, \max\{n, a, b, m, p_2, q\})$, оно удовлетворяет и условию обрыва возрастающих цепей по теореме 2.2. По лемме 2.5 оно конечно. $\square$

Если ограничиться рассмотрением только модулей над единственной алгеброй A, дополнительное условие $m_3(A) < \infty$ можно опустить.

Следствие 2.6. *Пусть A — конечно представимая алгебра. Задав пять произвольных целых чисел m, p_1, p_2, q, r, рассмотрим множество $DM_A = DM_A(m, p_1, p_2, q, r)$ конечно представимых A-модулей M с не более чем m порождающими, таких что $M_i = 0$ при $i < p_1$, $m_0(M) \leqslant p_2$, $m_1(M) \leqslant q$ и $m_2(M) \leqslant r$. Тогда множество рядов Гильберта модулей из DM_A конечно.*

Доказательство. Как это было сделано в доказательстве теоремы 2.4, положим $p_1 = 0$ и рассмотрим точную последовательность

$$0 \to \Omega \to H_0(M) \otimes A \to M \to 0.$$

Как и выше, получаем, что множество всевозможных рядов Гильберта $\Omega(z)$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей, так что множество HDM_A рядов Гильберта $M(z) = H_0(M)(z)A(z) - \Omega(z)$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей. Поскольку $DM_A \subset E(0, D)$ при $D = \max\{m_1(A), m_2(A), \dim H_0(A), p_2, q_r\}$, из леммы 2.5 следует, что множество рядов Гильберта модулей из DM_A конечно. $\square$

Следствие 2.7. *Пусть $D > 0$ — целое число, и пусть A — конечно представимая алгебра.*

(a) *Множество рядов Гильберта (двусторонних или правых) идеалов в A, порождённых в степени не выше D, удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.*

(b) *Множество рядов Гильберта правых идеалов в A, у которых порождающие и соотношения имеют степени не выше D, конечно.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 2.2 и следствие 2.6 к модулям A/I, где I — идеал. □

3. Периодические функции Гильберта

Теорема 3.1. *Пусть M — конечно представимый градуированный модуль над связной конечно представимой алгеброй A. Предположим, что* $\operatorname{GK-dim} M = 1$ *и что выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

(a) *поле k конечно*;

(b) *векторные пространства* $\operatorname{Tor}_2^A(M, k)$ *и* $\operatorname{Tor}_3^A(k, k)$ *конечномерны.*

Тогда ряд Гильберта $M(z)$ рационален, т. е. функция Гильберта $f_M(n) = \dim M_n$ периодична.

Следствие 3.2. *Пусть A — конечно порождённая связная алгебра единичной размерности Гельфанда—Кириллова. Предположим, что A удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий*:

(i) *нётерова* (*справа или для двусторонних идеалов*);

(ii) (*полу*)*первична*;

(iii) *когерентна*;

(iv) *конечно представима над конечным полем*;

(v) *козюлева*;

(vi) *A имеет конечный рэйт* (*в смысле Бакелина*).

Тогда функция Гильберта алгебры A периодична.

Доказательство. Напомним, что любая аффинная алгебра A, для которой $\operatorname{GK-dim} A = 1$, является PI-алгеброй [SSW], поэтому в нётеровом случае она имеет рациональный ряд Гильберта [L]. Более того, как показано в [L], любой нётеров модуль над PI-алгеброй также имеет рациональный ряд Гильберта. Поскольку любой нётеров A-бимодуль является нётеровым модулем над PI-алгеброй $A^{\mathrm{op}} \otimes A$, получаем, что любая слабо нётерова (т. е. нётерова для двусторонних идеалов) PI-алгебра имеет рациональный ряд Гильберта. Это доказывает случай (i).

Любая полупервичная алгебра линейного роста является конечным модулем над своим нётеровым центром [SSW], поэтому она также имеет рациональный ряд Гильберта. Это доказывает (ii).

Остальные пять случаев следуют из теоремы 3.1. Отметим, что случай (v) был также доказан Л. Посицельским (результат не опубликован). □

Лемма 3.3. *Пусть M — бесконечномерный градуированный* (*неотрицательными целыми числами*) *модуль над связной градуированной алгеброй A. Обозначим через M^n A-модуль $\bigoplus_{t \geqslant n} M^t$, градуировка на котором сдвинута на n, т. е. $(M^n)_t = M_{n+t}$ для всех $t \geqslant 0$. Тогда эквивалентны следующие условия*:

(a) $\operatorname{GK-dim} M = 1$ *и $M(z)$ — рациональная функция*;

(b) *для некоторых* $i \neq j$ *имеем* $M^i(z) = M^j(z)$;

(c) *множество рядов Гильберта* $\mathcal{H}_M = \{M^n(z) \mid n \geqslant 0\}$ *конечно.*

В этом случае последовательность $\{\dim M^n\}$ *периодична с периодом* d, *таким что* $d \leqslant |\mathcal{H}_M|$ *и* $d \leqslant |i-j|$.

Доказательство. Если $\operatorname{GK-dim} M = 1$, то рациональность ряда $M(z)$ означает, что существуют такие натуральные d, D, что $\dim M_n = \dim M_{n+d}$ для всех $n \geqslant D$, т. е. $M^n(z) = M^{n+d}(z)$ для всех $n \geqslant D$. В таком случае множество $\mathcal{H}_M = \{M^n(z) \mid n < D+d\}$ конечно.

С другой стороны, если $M^n(z) = M^{n+d}(z)$ для некоторых $n \geqslant 0$, $d > 0$, то $\dim M_i = \dim M_{i+d}$ для всех $i \geqslant n$, так что $\dim M_i \leqslant \max_{j \leqslant n+d} M_j$. В частности, получаем, что $\operatorname{GK-dim} M = 1$.

Наконец, если множество $\mathcal{H}_M$ конечно, то условие (b) очевидным образом выполняется. □

Замечание 3.4. Более того, аналогично можно показать, что если $\operatorname{GK-dim} M \leqslant 1$ и $M^i(z) \leqslant M^j(z)$ для некоторых $i \neq j$, то функция Гильберта модуля M периодична.

Лемма 3.5. *Пусть* M *— неотрицательно градуированный модуль над связной градуированной алгеброй* A, *и пусть модули* M^n *те же, что и в лемме* 3.3. *Тогда* $m_i(M^n) < \max\{m_i(M), m_{i+1}(A)\}$ *для всех* $n \geqslant 1$, $i \geqslant 0$.

Доказательство. По определению $m_i(M^0) = m_i(M)$ для всех $i \geqslant 0$. Докажем индукцией по $n \geqslant 1$, что $\operatorname{Tor}_i^A(M^{n+1}, k)_{j-1} = 0$, если $\operatorname{Tor}_i^A(M^n, k)_j = \operatorname{Tor}_{i+1}^A(k, k)_j = 0$.

Пусть $s = \dim A_n$. Точная последовательность

$$0 \to M^{n+1}[-1] \to M^n \to k^s \to 0$$

даёт точную тройку

$$\operatorname{Tor}_{i+1}^A(k^s, k) \to \operatorname{Tor}_i^A(M^{n+1}, k)[-1] \to \operatorname{Tor}_i^A(M^n, k)$$

для каждого $i \geqslant 0$. Осталось заметить, что $\operatorname{Tor}_{i+1}^A(k^s, k) = \bigoplus\limits_1^s \operatorname{Tor}_{i+1}^A(k, k)$. □

Доказательство теоремы 3.1. С точностью до сдвига градуировки можно считать, что $M_i = 0$ при $i < 0$. Положим $g_A = m(A)$, $g_M = m(M)$, $r_A = m_2(A)$ и $r_M = m_1(M)$. Пусть N — такое число, что $\dim M_n \leqslant N$ для всех $n \geqslant 0$. По лемме 3.5 каждый модуль M^n изоморфен фактор-модулю свободного модуля $F = V \otimes A$ по подмодулю, порождённому однородным подпространством $W \subset F_{[1..r_M]} = F_1 \oplus \ldots \oplus F_{r_M}$, где $V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_{g_M}$ — градуированное векторное пространство, для которого $\dim V_i = N$, $0 \leqslant i \leqslant g_M$.

Случай (a). Пусть q — число элементов в k. Поскольку $\dim F_{[1..r_M]}$ конечно (а именно поскольку $\dim F_{[1..r_M]} < g_A r_M N =: T$, то $|F_{[1..r_M]}| < q^T$), то имеется лишь конечное число вариантов выбора его подмножества W (а именно существует не более чем 2^{q^T} собственных подмножеств в $F_{[1..r_M]}$). Тогда существует лишь конечное число изоморфных классов модулей M^n, и потому по лемме 3.3 последовательность $\{\dim M_n\}$ периодична с некоторым периодом $d < 2^{q^T}$.

Случай (b). По лемме 3.5 для каждого $n \geqslant 2$ имеем $m_2(M^n) \leqslant m_3(A) - 1$. Согласно следствию 2.6 имеется лишь конечное число возможностей для рядов Гильберта $L(z)$ модулей L с ограниченными $\dim H_0(L)$ и $m_i(L)$ при $i \leqslant 2$. Мы заключаем, что множество рядов Гильберта модулей M^i конечно. Осталось применить лемму 3.3. □

4. Квазикогерентные семейства идеалов

Определение 4.1. Пусть A — связная градуированная алгебра, и пусть $\mathbf{F}$ — некоторое множество конечно порождённых правых идеалов в A. Множество $\mathbf{F}$ называется квазикогерентным семейством идеалов, если $0 \in \mathbf{F}$ и для любого $0 \neq I \in \mathbf{F}$ существуют такие $J_1, J_2 \in \mathbf{F}$, что $J_1 \neq I$, $m_0(J_1) \leqslant m_0(I)$ и $I/J_1 \cong A/J_2[-t]$ для некоторого $t \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что квазикогерентное семейство $\mathbf{F}$ имеет степень d, если $m_0(I) \leqslant d$ для всех $I \in \mathbf{F}$.

Квазикогерентное семейство степени 1 называется *козюлевым семейством* идеалов. Оно введено А. Полищуком [Po] для доказательства козюлевости однородных координатных колец конечных множеств точек в проективном пространстве. Если $A_{\geqslant 1} \in \mathbf{F}$, то квазикогерентное семейство называется *когерентным* [Pi1]. Термин «квазикогерентное семейство» появился потому, что каждый идеал в таком семействе конечно представим, подобно конечно порождённым подмодулям в квазикогерентном модуле. Более того, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Пусть $\mathbf{F}$ — квазикогерентное семейство в алгебре A. Тогда каждый идеал $I \in \mathbf{F}$ обладает свободной резольвентой конечного типа. Если $\mathbf{F}$ имеет степень d, то для любого $I \in \mathbf{F}$ имеем $m_i(I) \leqslant m_0(I) + id$ для всех $i \geqslant 0$.*

Доказательство аналогично доказательству подобного утверждения для когерентных семейств [Pi1].

Доказательство. Будем действовать индукцией по i и по I (по включению таких идеалов J_1, что $m_0(J_1) \leqslant m_0(I)$). Пусть J_1, J_2, t те же, что в определении 4.1. В частности, $t \leqslant m_0(I) \leqslant d$. Точная последовательность

$$0 \to J_1 \to I \to A/J_2[-t] \to 0$$

приводит для каждого $i \geqslant 1$ к следующему фрагменту точной последовательности Tor-ов:

$$\ldots \to H_i(J_1)_j \to H_i(I)_j \to H_{i-1}(J_2)_{j-t} \to \ldots.$$

По индукции имеем $m_i(I) \leqslant \max\{m_i(J_1), m_{i-1}(J_2) + t\} < \infty$. Если $t \leqslant d$, имеем также $m_i(I) \leqslant t + id$. □

Следствие 4.3. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *квазикогерентное семейство степени* d *в конечно представимой алгебре* A. *Тогда множество рядов Гильберта идеалов* $I \in \mathbf{F}$ *конечно.*

Доказательство. Ввиду предложения 4.2 можно применить следствие 2.7. □

Следствие 4.4. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *квазикогерентное семейство степени* d *в конечно представимой алгебре* A. *Тогда для любого идеала* $I \in \mathbf{F}$ *существуют два многочлена с целыми коэффициентами* $p(z)$, $q(z)$, *такие что* $I(z) = A(z)\frac{p(z)}{q(z)}$.

Доказательство. Ввиду следствия 4.3 можно применить в точности те же рассуждения, которые доказывают подобное утверждение для когерентных семейств (см. [Pi1, теорема 4.5]). □

Следствие 4.5. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *козюлево семейство* (*т. е. квазикогерентное семейство степени* 1) *в конечно представимой алгебре* A. *Тогда для любого идеала* $I \in \mathbf{F}$ *его ряд Пуанкаре* $P_I(z) := \sum\limits_{i\geqslant 0} (\dim \mathrm{Tor}_i(I,k))z^i$ *является рациональной функцией.*

Доказательство. Любой идеал в козюлевом семействе является козюлевым модулем (см. [Po] или предложение 4.2). По следствию 4.4 имеем $I(z) = p(z)/q(z)$. Из козюлевости получаем $I(z) = P_I(-z)A(z)$, так что $P(z) = p(-z)/q(-z)$. □

Литература

[Pi2] Пионтковский Д. И. Козюлевы алгебры и их идеалы // Функцион. анализ и его прил. — 2005. — В печати. Расширенный вариант: Noncommutative Koszul filtrations. — Preprint math.RA/0301233.

[An] Anick D. Generic algebras and CW-complexes // Proc. of 1983 Conf. on Algebra, Topology and K-Theory in Honor of John Moore. — Princeton Univ., 1988. — P. 247—331.

[ASZ] Artin M., Small L. W., Zhang J. J. Generic flatness for strongly Noetherian algebras // J. Algebra. — 1999. — Vol. 221, no. 2. — P. 579—610.

[Ba] Backelin J. On the rates of growth of homologies of Veronese subrings // Lecture Notes Math. Vol. 1183. — 1986. — P. 79—100.

[Bl] Blum S. Initially Koszul algebras // Beitr. Algebra Geom. — 2000. — Vol. 41, no. 2. — P. 455—467.

[Bu] Burbaki N. Algèbre, Ch. 10. Algèbre homologique. — Masson: Paris, 1980.

[Co1] Conca A. Universally Koszul algebras // Math. Ann. — 2000. — Vol. 317, no. 2. — P. 329—346.

[Co2] Conca A. Universally Koszul algebras defined by monomials // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 2002. — Vol. 107. — P. 1—5.

[CNR] Conca A., de Negri E., Rossi M. E. On the rate of points in projective spaces // Israel J. Math. — 2001. — Vol. 124. — P. 253—265.

[CRV] Conca A., Rossi M. E., Valla G. Gröbner flags and Gorenstein algebras // Compositio Math. — 2001. — Vol. 129. — P. 95—121.

[CTV] Conca A., Trung N. V., Valla G. Koszul property for points in projective spaces // Math. Scand. — 2001. — Vol. 89, no. 2. — P. 201—216.

[F] Faith K. Algebra: Rings, Modules, and Categories. Vol. I. — Corrected reprint. — Berlin: Springer, 1981. — Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Vol. 190.

[L] Lorenz M. On Gelfand—Kirillov dimension and related topics // J. Algebra. — 1988. — Vol. 118, no. 2. — P. 423—437.

[Pi1] Piontkovski D. Linear equations over noncommutative graded rings. — Preprint math.RA/0404419. — 2004; J. Algebra, to appear.

[Po] Polishchuk A. Koszul configurations of points in projective spaces. — Preprint math.AG/0412441. — 2004.

[PP] Polishchuk A., Positselski L. Quadratic algebras. — Preprint (1994—2000).

[SSW] Small L. W., Stafford J. T., Warfield R. B., Jr. Affine algebras of Gelfand—Kirillov dimension one are PI // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1985. — Vol. 97, no. 3. — P. 407—414.