Многообразия разрешимых индекса 2 алгебр типа (γ, δ)

С. В. ПЛАТОНОВА
Рязанский государственный педагогический университет им. С. А. Есенина
e-mail: mpsa@yandex.ru

УДК 512.554.5

Ключевые слова: многообразие, тождество, алгебра типа (γ, δ), разрешимые индекса 2 алгебры, метабелевы алгебры, аддитивный базис, нильпотентность.

Аннотация

Работа посвящена изучению строения множества всех ненильпотентных подмногообразий многообразия разрешимых индекса 2 алгебр типа (γ, δ). Построен аддитивный базис свободной метабелевой (γ, δ)-алгебры и доказано, что любое тождество ненильпотентной метабелевой (γ, δ)-алгебры степени $\geqslant 6$ является следствием четырёх определяющих соотношений.

Abstract

S. V. Platonova, Varieties of two-step solvable algebras of type (γ, δ), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 157—180.

The structure of the set of all nonnilpotent subvarieties of the variety of two-step solvable algebras of type (γ, δ) is studied. An additive basis of a free metabelian (γ, δ)-algebra is constructed. It is proved that any identity in a nonnilpotent metabelian (γ, δ)-algebra of degree at least 6 is a consequence of four defining relations.

Введение

Понятия разрешимости и нильпотентности играют важную роль в теории неассоциативных алгебр. Первые примеры разрешимых, но не нильпотентных альтернативных алгебр и алгебр типа $(-1, 1)$ построил Г. В. Дорофеев [2, 3]. Он же привёл пример конечномерной правоальтернативной правонильпотентной алгебры, которая не является нильпотентной [3].

Многообразия разрешимых индекса 2 (или, в другой терминологии, метабелевых) алгебр достаточно активно изучались различными авторами [1, 4—8]. Так, в 1976 г. В. П. Белкин [3] доказал существование многообразия метабелевых правоальтернативных алгебр, которое не может быть задано никакой конечной системой тождеств. Ю. А. Медведев [5] доказал, что многообразия метабелевых альтернативных, йордановых, мальцевских алгебр и алгебр типа $(-1, 1)$ шпехтовы. С. В. Пчелинцевым [7] был получен ряд результатов

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 157—180.
© 2004 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

о строении решёток многообразий метабелевых алгебр, близких к ассоциативным. В настоящей работе изучаются алгебры типа (γ, δ), которые были введены А. А. Албертом [9] и представляют собой важный класс 2-многообразий (многообразие называется 2-*многообразием*, если в алгебрах этого класса выполнено свойство «квадрат идеала — идеал»). Напомним, что алгебра над полем Φ характеристики, отличной от 2 и 3, называется *алгеброй типа* (γ, δ), если она удовлетворяет тождествам

$$(x, x, x) = 0, \tag{1}$$

$$(x, y, z) + \gamma(y, x, z) + \delta(z, x, y) = 0, \tag{2}$$

$$(x, y, z) - \gamma(x, z, y) + (1 - \delta)(y, z, x) = 0, \tag{3}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор, и верно связывающее скаляры равенство

$$\gamma^2 - \delta^2 + \delta - 1 = 0. \tag{4}$$

Всюду в работе предполагается, что $\gamma \neq \pm 1$, $\delta \neq 0, 1$. Эти ограничения связаны с тем, что при $\gamma = \pm 1$ равенство (4) принимает вид $\delta^2 - \delta = 0$ и, значит, выполняется только при $\delta = 0, 1$. Тем самым получаются следующие четыре типа наборов: $(-1, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$. Строение множества ненильпотентных подмногообразий многообразия метабелевых алгебр типа $(-1, 1)$ было описано С. В. Пчелинцевым [7], аналогичные результаты для многообразия метабелевых алгебр типа $(1, 1)$ были недавно получены автором. Так как известно [6], что алгебра типа $(-\gamma, 1 - \delta)$ антиизоморфна алгебре типа (γ, δ), получаем решение этой задачи для многообразий метабелевых алгебр типа $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Рассмотрению остальных случаев и посвящена данная статья.

Статья состоит из четырёх разделов. В разделе 1 доказываются простейшие следствия из определяющих соотношений. В разделах 2 и 3 рассматриваются операторные слова длины 3 и 4, основным результатом является доказательство кососимметричности операторных слов длины, большей трёх. В разделе 4 строится базис свободной ненильпотентной метабелевой алгебры типа (γ, δ) и доказывается основной результат работы.

Основная теорема. *Всякое тождество степени* $\geqslant 6$ *ненильпотентного подмногообразия многообразия* M *метабелевых* (γ, δ)*-алгебр над полем* Φ *характеристики, отличной от* 2 *и* 3*, является следствием определяющих тождеств многообразия* M.

Из основной теоремы получаем следствие 1 (используется терминология [7]).

Следствие 1. *Множество ненильпотентных многообразий* (γ, δ)*-алгебр конечномерно. Если поле* Φ *конечно, то указанное множество многообразий также конечно.*

Поскольку не всякая метабелева (γ, δ)-алгебра нильпотентна [6], справедливо следствие 2.

Следствие 2. *Топологический ранг многообразия метабелевых алгебр типа* (γ, δ) *равен* 2.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю С. В. Пчелинцеву за постановку задачи и полезные обсуждения в процессе работы.

1. Простейшие следствия из определяющих соотношений

Напомним, что алгебра называется *метабелевой*, если в ней справедливо тождество $(xy)(zt) = 0$. В дальнейшем термин «алгебра» означает метабелеву алгебру типа (γ, δ), а тождество метабелевости используется без дополнительных пояснений. В алгебре A операторы правого и левого умножения на элемент x, действующие на квадрате A^2, обозначаются, как обычно, через $R(x)$ и $L(x)$; T является общим обозначением для операторов R и L. Для коммутаторов и йордановых произведений используются стандартные обозначения $[x, y] = xy - yx$, $x \circ y = xy + yx$.

Полагая $x \in A^2$ в (3), получим

$$(1-\delta)L_z L_y = R_y R_z - \gamma R_z R_y. \tag{5}$$

Полагая $y \in A^2$ в (3), получим

$$[L_x, R_z] = (\delta - 1)R_z R_x - \gamma L_z L_x. \tag{6}$$

Полагая $z \in A^2$ в (2), получим

$$\delta R_x R_y = L_y L_x + \gamma L_x L_y. \tag{7}$$

Из соотношений (5) и (6) на основании равенства (4) имеем

$$\begin{aligned} L_x R_z - R_z R_x &= (\delta - 1)R_z R_x - \gamma \left(\frac{1}{1-\delta} R_x R_z - \frac{\gamma}{1-\delta} R_z R_x \right) = \\ &= (\delta - 1)R_z R_x - \frac{\gamma}{1-\delta} R_x R_z + \frac{\gamma^2}{1-\delta} R_z R_x = \\ &= \frac{-1 + 2\delta - \delta^2 + \gamma^2}{1-\delta} R_z R_x - \frac{\gamma}{1-\delta} R_x R_z = \frac{\delta}{1-\delta} R_z R_x - \frac{\gamma}{1-\delta} R_x R_z, \end{aligned}$$

т. е.

$$R_z L_x = L_x R_z + \frac{\gamma}{1-\delta} R_x R_z - \frac{\delta}{1-\delta} R_z R_x. \tag{8}$$

Из равенств (5)—(8) индукцией по длине операторного слова выводим следующее утверждение.

Лемма 1. *Всякое операторное слово метабелевой алгебры типа* (γ, δ) *представимо с сохранением состава в виде линейной комбинации слов вида* $T_a R_b \dots R_c$.

2. Переработка операторных слов длины 3

Свойство 1.

$$R_xR_yL_z = L_zR_xR_y + \frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_xR_y + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}R_xR_zR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_xR_yR_z.$$

Доказательство. В силу соотношения (8)

$$\begin{aligned}R_xR_yL_z &= R_x(L_zR_y + \frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_yR_z) = \\ &= L_zR_xR_y + \frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_xR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_xR_zR_y + \frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_zR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_xR_yR_z = \\ &= L_zR_xR_y + \frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_xR_y + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}R_xR_zR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_xR_yR_z.\end{aligned}$$

Свойство 2. $R_x^3 = 0$.

Доказательство. Из равенства (5) следует, что

$$L_x^3 = \frac{1-\gamma}{1-\delta}L_xR_x^2.$$

С другой стороны, в силу соотношения (5) и свойства 1 получаем

$$L_x^3 = \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^2L_x = \frac{1-\gamma}{1-\delta}\left(L_xR_x^2 + \frac{2(\gamma-\delta)}{1-\delta}R_x^3\right).$$

Таким образом,

$$\frac{1-\gamma}{1-\delta}L_xR_x^2 = \frac{1-\gamma}{1-\delta}\left(L_xR_x^2 + \frac{2(\gamma-\delta)}{1-\delta}R_x^3\right),$$

откуда

$$\frac{2(\gamma-\delta)(1-\gamma)}{(1-\delta)^2}R_x^3 = 0.$$

Так как $\gamma \neq \pm 1$, то $1-\gamma \neq 0$. Если $\gamma - \delta = 0$, то из равенства (4) следует, что $\delta - 1 = 0$, а этот случай мы не рассматриваем. Таким образом, $R_x^3 = 0$.

Свойство 3. $L_xR_x^2 = 0$.

Доказательство. Из соотношений (8) и (5) следует, что

$$L_xR_xL_x = L_x^2R_x + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}L_xR_x^2 = \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}L_xR_x^2.$$

С другой стороны, применяя последовательно равенства (8), (5) и (7), (5) и (4), имеем

$$L_xR_xL_x = R_xL_x^2 + \frac{\delta-\gamma}{1-\delta}R_x^2L_x = \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{1}{\delta}\frac{\delta-\gamma}{1-\delta}(1+\gamma)L_x^3 =$$
$$= \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{(\delta-\gamma)(1+\gamma)}{\delta(1-\delta)}\frac{1-\gamma}{1-\delta}L_xRx^2 = \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{(\delta-\gamma)(1-\gamma^2)}{\delta(1-\delta)^2}L_xR_x^2 =$$
$$= \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{(\delta-\gamma)(\delta-\delta^2)}{\delta(1-\delta)^2}L_xR_x^2 = \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{\delta-\gamma}{(1-\delta)}L_xR_x^2.$$

Таким образом,

$$\frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}L_xR_x^2 = \frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^3 + \frac{\delta-\gamma}{(1-\delta)}L_xR_x^2,$$

т. е.

$$\frac{2(\gamma-\delta)}{1-\delta}L_xR_x^2 = 0.$$

Так как $\gamma - \delta \neq 0$, то $L_xR_x^2 = 0$.

Свойство 4.

$$(2-\gamma-\delta)L_xR_yR_x + (1-\gamma)L_xR_xR_y + (1+\delta)R_x^2R_y + (2+\gamma+\delta)R_xR_yR_x = 0.$$

Доказательство. Из соотношений (1) и (5) следует, что

$$x^2R_xL_y = x^2L_xL_y = \frac{1}{1-\delta}x^2R_yR_x - \frac{\gamma}{1-\delta}x^2R_xR_y.$$

С другой стороны, в силу равенства (8) имеем

$$x^2R_xL_y = x^2L_yR_x + \frac{\gamma}{1-\delta}x^2R_yR_x - \frac{\delta}{1-\delta}x^2R_xR_y.$$

Таким образом,

$$x^2\left(\frac{1}{1-\delta}R_yR_x - \frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_y - L_yR_x - \frac{\gamma}{1-\delta}R_yR_x + \frac{\delta}{1-\delta}R_xR_y\right) = 0,$$

и после умножения на знаменатель получаем

$$x^2((1-\gamma)R_yR_x + (\delta-\gamma)R_xR_y - (1-\delta)L_yR_x) = 0.$$

Линеаризуем последнее соотношение по x, считая, что $a, b \in A$, $c \in A^2$:

$$\begin{aligned}
&(ac+ca)((1-\gamma)R_yR_b + (\delta-\gamma)R_bR_y - (1-\delta)L_yR_b) + \\
&\quad + (bc+cb)((1-\gamma)R_yR_a + (\delta-\gamma)R_aR_y - (1-\delta)L_yR_a) = 0, \\
&(1-\gamma)L_aR_yR_b + (\delta-\gamma)L_aR_bR_y - (1-\delta)L_aL_yR_b + \\
&\quad + (1-\gamma)R_aR_yR_b + (\delta-\gamma)R_aR_bR_y - (1-\delta)R_aL_yR_b + \\
&\quad + (1-\gamma)L_bR_yR_a + (\delta-\gamma)L_bR_aR_y - (1-\delta)L_bL_yR_a + (1-\gamma)R_bR_yR_a + \\
&\quad + (\delta-\gamma)R_bR_aR_y - (1-\delta)R_bL_yR_a = 0.
\end{aligned}$$

Положим $a = b = x$. Тогда последнее соотношение примет вид

$$\begin{aligned}
&(1-\gamma)L_xR_yR_x + (\delta-\gamma)L_xR_xR_y - (1-\delta)L_xL_yR_x + \\
&\qquad + (1-\gamma)R_xR_yR_x + (\delta-\gamma)R_x^2R_y - (1-\delta)R_xL_yR_x = 0.
\end{aligned}$$

В силу (5) и (8)

$$(1-\gamma)L_xR_yR_x+(\delta-\gamma)L_xR_xR_y-R_yR_x^2+\gamma R_xR_yR_x+$$
$$+(1-\gamma)R_xR_yR_x+(\delta-\gamma)R_x^2R_y-(1-\delta)L_yR_x^2-\gamma R_yR_x^2+\delta R_xR_yR_x=0,$$
$$(1-\gamma)L_xR_yR_x+(\delta-\gamma)L_xR_xR_y+(\delta-\gamma)R_x^2R_y-$$
$$-(1-\delta)L_yR_x^2-(1+\gamma)R_yR_x^2+(1+\delta)R_xR_yR_x=0.$$

Наконец, на основании свойств 2 и 3

$$(2-\gamma-\delta)L_xR_yR_x+(1-\gamma)L_xR_xR_y+(1+\delta)R_x^2R_y+(2+\delta+\gamma)R_xR_yR_x=0.$$

Свойство 5.

а) $L_xR_xR_y=\dfrac{\delta-1-\gamma\delta}{\delta(1-\delta)}R_x^2R_y+\dfrac{1}{(1-\delta)^2}R_xR_yR_x;$

б) $L_xR_yR_x=\dfrac{\gamma\delta-\gamma-\delta^2}{\delta(1-\delta)}R_x^2R_y+\dfrac{\gamma^2+\gamma-1}{(1-\delta)^2}R_xR_yR_x;$

в) $L_yR_x^2=\dfrac{\gamma^2+\gamma}{\delta(1-\delta)}R_x^2R_y-\dfrac{\gamma^2+\gamma}{(1-\delta)^2}R_xR_yR_x;$

г) $R_x^2R_y=\alpha R_xR_yR_x,$ где $\alpha=\dfrac{2\delta-2\delta^2+2\gamma\delta}{(1-\delta)(\gamma-\delta)};$

д) $R_yR_x^2=\beta R_xR_yR_x,$ где $\beta=\dfrac{\delta^2-\delta-\gamma-\gamma\delta}{(1-\delta)(\gamma-\delta)}.$

Доказательство. Прежде всего в силу равенства (5) имеем

$$L_xL_yL_z=L_x\left(\frac{1}{1-\delta}R_zR_y-\frac{\gamma}{1-\delta}R_yR_z\right)=\frac{1}{1-\delta}L_xR_zR_y-\frac{\gamma}{1-\delta}L_xR_yR_z.$$

С другой стороны, учитывая вновь (5) и свойство 1, получаем

$$L_xL_yL_z=\left(\frac{1}{1-\delta}R_yR_x-\frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_y\right)L_z=\frac{1}{1-\delta}R_yR_xL_z-\frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_yL_z=$$
$$=\frac{1}{1-\delta}\left(L_zR_yR_x+\frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_yR_x+\frac{\gamma-\delta}{1-\delta}R_yR_zR_x-\frac{\delta}{1-\delta}R_yR_xR_z\right)-$$
$$-\frac{1}{1-\delta}\left(-\gamma L_zR_xR_y-\frac{\gamma^2}{1-\delta}R_zR_xR_y+\frac{\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_xR_zR_y+\frac{\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_z\right).$$

Приравнивая правые части полученных равенств, имеем после умножения на $(1-\delta)$

$$L_xR_zR_y-\gamma L_xR_yR_z-L_zR_yR_x+\gamma L_zR_xR_y=$$
$$=\frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_yR_x+\frac{\gamma-\delta}{1-\delta}R_yR_zR_x-\frac{\delta}{1-\delta}R_yR_xR_z-$$
$$-\frac{\gamma^2}{1-\delta}R_zR_xR_y+\frac{\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_xR_zR_y+\frac{\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_z. \qquad (9)$$

Из последнего равенства вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&L_xR_yR_x - \gamma L_xR_xR_y - L_yR_x^2 + \gamma L_yR_x^2 = \\
&\quad = \frac{\gamma}{1-\delta}R_yR_x^2 + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x - \frac{\delta}{1-\delta}R_x^2R_y - \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{1-\delta}R_yR_x^2 + \frac{\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{\gamma\delta}{1-\delta}R_x^2R_y = \\
&\quad = \frac{\gamma-\gamma^2}{1-\delta}R_yR_x^2 + \frac{\gamma-\delta+\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{\gamma\delta-\delta}{1-\delta}R_x^2R_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L_xR_xR_y - \gamma L_xR_yR_x - L_xR_yR_x + \gamma L_xR_xR_y = \\
&\quad = \frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}R_yR_x^2 - \frac{\delta}{1-\delta}R_yR_x^2 - \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{1-\delta}R_x^2R_y + \frac{\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_x^2R_y + \frac{\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x = \\
&\quad = \frac{\gamma+\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{\gamma-2\delta}{1-\delta}R_yR_x^2 + \frac{\gamma\delta-2\gamma^2}{1-\delta}R_x^2R_y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&L_yR_x^2 - \gamma L_yR_x^2 - L_xR_xR_y + \gamma L_xR_yR_x = \\
&\quad = \frac{\gamma}{1-\delta}R_x^2R_y + \frac{\gamma-\delta}{1-\delta}R_x^2R_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x - \\
&\quad - \frac{\gamma^2}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_yR_x^2 + \frac{\gamma\delta}{1-\delta}R_yR_x^2 = \\
&\quad = \frac{2\gamma-\delta}{1-\delta}R_x^2R_y - \frac{\gamma^2+\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{2\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_yR_x^2,
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
&L_xR_yR_x - \gamma L_xR_xR_y + (\gamma-1)L_yR_x^2 = \\
&\quad = \frac{\gamma-\delta+\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{\gamma\delta-\delta}{1-\delta}R_x^2R_y + \frac{\gamma-\gamma^2}{1-\delta}R_yR_x^2, \qquad (10)\\
&(\gamma+1)L_xR_xR_y - (\gamma+1)L_xR_yR_x = \\
&\quad = \frac{\gamma+\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{\gamma\delta-2\gamma^2}{1-\delta}R_x^2R_y + \frac{\gamma-2\delta}{1-\delta}R_yR_x^2, \qquad (11)\\
&(1-\gamma)L_yR_x^2 - L_xR_xR_y + \gamma L_xR_yR_x = \\
&\quad = \frac{2\gamma-\delta}{1-\delta}R_x^2R_y - \frac{\gamma^2+\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x + \frac{2\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}R_yR_x^2. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Из соотношения (10) и свойств 2 и 3 вытекает, что

$$\begin{aligned}
&(2-\gamma)L_xR_yR_x + (1-2\gamma)L_xR_xR_y = \\
&\qquad = \frac{\gamma\delta-\delta+\gamma^2-\gamma}{1-\delta}R_x^2R_y + \frac{-\delta+\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Из соотношения (11) и свойств 2 и 3 вытекает, что

$$-(\gamma+1)L_xR_yR_x+(\gamma+1)L_xR_xR_y= \\ =\frac{\gamma\delta-2\gamma^2-\gamma+2\delta}{1-\delta}R_x^2R_y+\frac{2\delta+\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x. \quad (14)$$

Из соотношения (12) и свойств 2 и 3 вытекает, что

$$(2\gamma-1)L_xR_yR_x+(\gamma-2)L_xR_xR_y= \\ =\frac{2\gamma-\delta-2\gamma\delta+\gamma^2}{1-\delta}R_x^2R_y-\frac{\delta+2\gamma\delta}{1-\delta}R_xR_yR_x. \quad (15)$$

Если ввести обозначения $A=L_xR_xR_y$, $B=L_xR_yR_x$, $C=R_x^2R_y$, $D=R_xR_yR_x$, равенства (13)—(15) принимают вид

$$(1-2\gamma)A+(2-\gamma)B=\frac{\gamma\delta-\delta+\gamma^2-\gamma}{1-\delta}C+\frac{-\delta+\gamma\delta}{1-\delta}D, \quad (16)$$

$$(\gamma+1)A-(\gamma+1)B=\frac{\gamma\delta-2\gamma^2-\gamma+2\delta}{1-\delta}C+\frac{2\delta+\gamma\delta}{1-\delta}D, \quad (17)$$

$$(\gamma-2)A+(2\gamma-1)B=\frac{2\gamma-\delta-2\gamma\delta+\gamma^2}{1-\delta}C-\frac{\delta+2\gamma\delta}{1-\delta}D. \quad (18)$$

Вычитая из равенства (16) равенство (18), получаем

$$(3-3\gamma)A+(3-3\gamma)B=\frac{3\gamma\delta-3\gamma}{1-\delta}C+\frac{3\gamma\delta}{1-\delta}D.$$

После сокращения на 3 имеем

$$(1-\gamma)A+(1-\gamma)B=-\gamma C+\frac{\gamma\delta}{1-\delta}D. \quad (19)$$

Вычитая из равенства (17) равенство (19), получаем

$$2\gamma A-2B=\frac{2\delta-2\gamma^2}{1-\delta}C+\frac{2\delta}{1-\delta}D.$$

Так как ввиду равенства (4) верно $\gamma^2=\delta^2-\delta+1$, то $\delta-\gamma^2=-(1-\delta)^2$, тогда последнее соотношение принимает вид

$$\gamma A-B=(\delta-1)C+\frac{\delta}{1-\delta}D. \quad (20)$$

Сложим теперь равенства (19) и (20):

$$A-\gamma B=(\delta-\gamma-1)C+\frac{\delta+\gamma\delta}{1-\delta}D. \quad (21)$$

Выражая B из соотношения (20) и подставляя полученное выражение в (21), на основании равенства (4) получаем

$$A=\frac{\delta-1-\gamma\delta}{\delta(1-\delta)}C+\frac{1}{(1-\delta)^2}D, \quad (22)$$

что и доказывает пункт а).

Аналогично, выражая A из соотношения (21) и подставляя полученное выражение в соотношение (20), получаем

$$B = \frac{\gamma\delta - \gamma - \delta^2}{\delta(1-\delta)} C + \frac{\gamma^2 + \gamma - 1}{(1-\delta)^2} D, \tag{23}$$

что доказывает пункт б).

Складывая теперь почленно равенства (22) и (23), имеем

$$A + B = \frac{\delta - 1 - \gamma - \delta^2}{\delta(1-\delta)} C + \frac{\gamma^2 + \gamma}{(1-\delta)^2} D.$$

Отсюда на основании свойства 3 и равенства (4) получаем равенство

$$L_y R_x^2 = -L_x R_y R_x - L_x R_x R_y = -(A + B) = \frac{\gamma^2 + \gamma}{\delta(1-\delta)} C - \frac{\gamma^2 + \gamma}{(1-\delta)^2} D,$$

совпадающее с утверждением пункта в).

Из свойства 4 следует, что

$$(1-\gamma)A + (2 - \gamma - \delta)B = -(1+\delta)C - (2 + \gamma + \delta)D.$$

Вычитая из последнего равенства соотношение (19), получаем

$$(1-\delta)B = (\gamma - \delta - 1)C - \frac{2 - \delta + \gamma - \delta^2}{1-\delta} D,$$
$$B = \frac{(\gamma - \delta - 1)}{1-\delta} C - \frac{2 - \delta + \gamma - \delta^2}{(1-\delta)^2} D.$$

Из последнего равенства и соотношения (23) следует, что

$$\frac{\gamma - \delta - 1}{1-\delta} C - \frac{2 - \delta + \gamma - \delta^2}{(1-\delta)^2} D = \frac{\gamma\delta - \gamma - \delta^2}{\delta(1-\delta)} C + \frac{\gamma^2 + \gamma - 1}{(1-\delta)^2} D,$$
$$\frac{\gamma - \delta}{\delta(1-\delta)} C = \frac{1 - \delta - \delta^2 + \gamma^2 + 2\gamma}{(1-\delta)^2} D.$$

В силу равенства (4) имеем $\gamma^2 - \delta^2 = 1 - \delta$, следовательно, последнее соотношение принимает вид

$$\frac{\gamma - \delta}{\delta(1-\delta)} C = \frac{2 - 2\delta + 2\gamma}{(1-\delta)^2} D.$$

Так как $\gamma \neq \delta$, то

$$C = \frac{2\delta - 2\delta^2 + 2\gamma\delta}{(1-\delta)(\gamma - \delta)} D,$$

что доказывает пункт г). Наконец, пункт д) вытекает из пункта г) и свойства 2.

3. Переработка операторных слов длины 4

Свойство 6.

а) $R_x^2 R_y R_x = 0$;
б) $R_x R_y R_x^2 = 0$.

Доказательство.
а) В силу свойств 2 и 5г) имеем $0 = R_x^3 R_y = \alpha R_x^2 R_y R_x$. Если $\gamma = \delta - 1$, то, учитывая (4), получим, что $\delta = 0$, а этот случай мы не рассматриваем, значит, $\alpha \neq 0$ и $R_x^2 R_y R_x = 0$.

б) В силу пункта а) и свойства 5г) $0 = R_x^2 R_y R_x = \alpha R_x R_y R_x^2$, значит, $R_x R_y R_x^2 = 0$.

Свойство 7.

а) $R_y R_x^2 R_y = R_y^2 R_x^2$;
б) $R_x^2 R_y^2 = R_y^2 R_x^2$;
в) $(R_x R_y)^2 = -2R_x^2 R_y^2$.

Доказательство.
а) Ввиду свойства 5г) имеем $R_x^2 R_y = \alpha R_x R_y R_x$, $R_y^2 R_x = \alpha R_y R_x R_y$. Тогда

$$R_y R_x^2 R_y = R_y \cdot R_x^2 R_y = \alpha R_y R_x R_y R_x = \alpha R_y R_x R_y \cdot R_x = R_y^2 R_x^2.$$

б) Ввиду свойства 5д) имеем $R_y R_x^2 = \beta R_x R_y R_x$, $R_x R_y^2 = \beta R_y R_x R_y$. Тогда

$$R_y R_x^2 \cdot R_y = \beta R_x R_y R_x \cdot R_y = R_x \cdot \beta R_y R_x R_y = R_x \cdot R_x R_y^2 = R_x^2 R_y^2.$$

Отсюда в силу пункта а) получаем требуемое в пункте б) равенство.

в) Последний пункт вытекает из пункта а) и свойства 2:

$$0 = R_x R_y R_x R_y + R_x R_y^2 R_x + R_x^2 R_y^2 = (R_x R_y)^2 + 2R_x^2 R_y^2.$$

Лемма 2. *Если A — метабелева алгебра типа (γ, δ), такая что γ не является корнем уравнения*

$$15\gamma^3 + 5\gamma^2 - 15\gamma - 9 = 0, \qquad (*)$$

то в ней справедливы соотношения

$$(R_x R_y)^2 = R_x^2 R_y^2 = R_y R_x^2 R_y = 0.$$

Доказательство. В силу свойства 7в) $(R_x R_y)^2 + 2R_x R_y^2 R_x = 0$, следовательно, ввиду свойства 5г)

$$(R_x R_y)^2 + \frac{2(2\delta - 2\delta^2 + 2\gamma\delta)}{(1-\delta)(\gamma-\delta)}(R_x R_y)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{\gamma + 3\delta + 3\gamma\delta - 3\delta^2}{(1-\delta)(\gamma-\delta)}(R_x R_y)^2 = 0.$$

Если $(R_xR_y)^2 \neq 0$, то $\gamma + 3\delta + 3\gamma\delta - 3\delta^2 = 0$. Так как в силу равенства (4) $3\delta - 3\delta^2 = 3 - 3\gamma^2$, то $\gamma + 3\gamma\delta + 3 - 3\gamma^2 = 0$. Выражая из этого уравнения δ и подставляя его в равенство (4), получаем

$$\gamma^2 - \left(\frac{3\gamma^2 - \gamma - 3}{3\gamma}\right)^2 + \frac{3\gamma^2 - \gamma - 3}{3\gamma} - 1 = 0,$$
$$15\gamma^3 + 5\gamma^2 - 15\gamma - 9 = 0.$$

Таким образом, если A — такая алгебра типа (γ, δ), что γ не является корнем уравнения $(*)$, то в ней выполняется соотношение $(R_xR_y)^2 = 0$. Учитывая равенства из свойства 7, получаем остальные требуемые в лемме соотношения.

Лемма 3. *Если A — метабелева алгебра типа (γ, δ), то*

$$(R_xR_y)^2 = R_x^2R_y^2 = R_yR_x^2R_y = 0.$$

Доказательство. Пусть A — такая алгебра типа (γ, δ), что γ является корнем уравнения $(*)$, B — алгебра, антиизоморфная алгебре A. Известно [6], что B — алгебра типа $(-\gamma, 1-\delta)$. Так как уравнение $(*)$ не имеет двух противоположных корней, то $-\gamma$ не является корнем уравнения $(*)$. Тогда для алгебры B справедлива лемма 2. Так как алгебры A и B антиизоморфны, то в алгебре A справедливы равенства $(L_xL_y)^2 = L_xL_y^2L_x = L_x^2L_y^2 = 0$.

Из соотношения (5) следует равенство

$$0 = L_x^2L_y^2 = (\frac{1-\gamma}{1-\delta})^2R_x^2R_y^2.$$

Так как $\gamma \neq 1$, то $R_x^2R_y^2 = 0$. Учитывая свойство 7, получаем остальные требуемые соотношения.

Свойство 8. $\gamma R_x^2R_zR_y + (\gamma\delta - \gamma^2)R_zR_x^2R_y - \delta R_zR_yR_x^2 = 0.$

Доказательство. В силу свойства 5а) имеем

$$R_zL_xR_xR_y = \frac{\delta - 1 - \gamma\delta}{\delta(1-\delta)}R_zR_x^2R_y + \frac{1}{(1-\delta)^2}R_zR_xR_yR_x.$$

Далее, учитывая равенство (8) и свойство 5б), получаем

$$\begin{aligned}
R_zL_xR_xR_y &= L_xR_zR_xR_y + \frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_zR_xR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_zR_x^2R_y = \\
&= \frac{\gamma\delta - \gamma - \delta^2}{\delta(1-\delta)}R_x^2R_zR_y + \frac{\gamma^2 + \gamma - 1}{(1-\delta)^2}R_xR_zR_xR_y + \\
&+ \frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_zR_xR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_zR_x^2R_y = \\
&= \frac{\gamma\delta - \gamma - \delta^2}{\delta(1-\delta)}R_x^2R_zR_y + \frac{\gamma^2 + 2\gamma - \gamma\delta - 1}{(1-\delta)^2}R_xR_zR_xR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_zR_x^2R_y.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\gamma\delta-\gamma-\delta^2}{\delta(1-\delta)}R_x^2R_zR_y+\frac{\gamma^2+2\gamma-\gamma\delta-1}{(1-\delta)^2}R_xR_zR_xR_y-\frac{\delta}{1-\delta}R_zR_x^2R_y-$$
$$-\frac{\delta-1-\gamma\delta}{\delta(1-\delta)}R_zR_x^2R_y-\frac{1}{(1-\delta)^2}R_zR_xR_yR_x=0,$$

откуда после приведения подобных членов и умножения на $(1-\delta)$ имеем

$$\frac{\gamma\delta-\gamma-\delta^2}{\delta}R_x^2R_zR_y+\frac{\gamma^2+2\gamma-\gamma\delta-1}{(1-\delta)}R_xR_zR_xR_y-$$
$$-\frac{\delta-1-\gamma\delta+\delta^2}{\delta}R_zR_x^2R_y-\frac{1}{(1-\delta)}R_zR_xR_yR_x=0.$$

В силу свойства 2

$$\frac{(\gamma\delta-\gamma-\delta^2)(1-\delta)-\delta(\gamma^2+2\gamma-\gamma\delta-1)}{\delta(1-\delta)}R_x^2R_zR_y-$$
$$-\frac{(\delta-1-\gamma\delta+\delta^2)(1-\delta)+\delta(\gamma^2+2\gamma-\gamma\delta-1)}{\delta(1-\delta)}R_zR_x^2R_y-\frac{1}{(1-\delta)}R_zR_xR_yR_x=0,$$

откуда

$$\frac{\gamma\delta-\gamma-\delta^2-\gamma\delta^2+\gamma\delta+\delta^3-\gamma^2\delta-2\gamma\delta+\gamma\delta^2+\delta}{\delta}R_x^2R_zR_y-$$
$$-\frac{\delta^2+\delta-1-\gamma\delta-\delta^3-\delta^2+\delta+\gamma\delta^2+\gamma^2\delta+2\gamma\delta-\gamma\delta^2-\delta}{\delta}R_zR_x^2R_y-R_zR_xR_yR_x=0.$$

В силу (4) верно равенство $\gamma^2\delta-\delta^3+\delta^2-\delta=0$, поэтому

$$-\frac{\gamma}{\delta}R_x^2R_zR_y-\frac{-1+2\delta-\delta^2+\gamma\delta}{\delta}R_zR_x^2R_y-R_zR_xR_yR_x=0.$$

Применяя ещё раз (4), имеем

$$-\frac{\gamma}{\delta}R_x^2R_zR_y-\frac{\delta-\gamma^2+\gamma\delta}{\delta}R_zR_x^2R_y-R_zR_xR_yR_x=0,$$

откуда после умножения обеих частей на δ получаем

$$\gamma R_x^2R_zR_y+(\delta-\gamma^2+\gamma\delta)R_zR_x^2R_y+\delta R_zR_xR_yR_x=0. \tag{24}$$

Используя вновь свойство 2, имеем

$$\gamma R_x^2R_zR_y+(\delta-\gamma^2+\gamma\delta)R_zR_x^2R_y-\delta R_zR_x^2R_y-\delta R_zR_yR_x^2=0,$$

откуда и вытекает требуемое соотношение

$$\gamma R_x^2R_zR_y+(-\gamma^2+\gamma\delta)R_zR_x^2R_y-\delta R_zR_yR_x^2=0.$$

Свойство 9.

$$(\gamma\delta-2\gamma^2)R_x^2R_zR_y+(\delta^2-2\gamma\delta+2\gamma)R_zR_xR_yR_x+(\gamma^2-\gamma^2\delta+\gamma\delta^2-\delta+1)R_yR_x^2R_z=0.$$

Доказательство. Пусть A — метабелева алгебра типа (γ, δ), а B — алгебра, антиизоморфная алгебре A. Тогда B — алгебра типа $(-\gamma, 1-\delta)$ [6]. В силу свойства 8 в алгебре B выполняется равенство

$$-\gamma R_x^2R_zR_y+(-\gamma(1-\delta)-\gamma^2)R_zR_x^2R_y-(1-\delta)R_zR_yR_x^2=0,$$

или

$$-\gamma R_x^2R_zR_y+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)R_zR_x^2R_y+(\delta-1)R_zR_yR_x^2=0.$$

Тогда в алгебре A выполняется операторное соотношение

$$-\gamma L_x^2L_zL_y+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)L_zL_x^2L_y+(\delta-1)L_zL_yL_x^2=0.$$

В силу соотношения (5) имеем

$$\begin{aligned}
&-\frac{\gamma(1-\gamma)}{1-\delta}R_x^2\cdot(\frac{1}{1-\delta}R_yR_z-\frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_y)+\\
&\quad+(\delta-1)(\frac{1}{1-\delta}R_yR_z-\frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_y)\cdot\frac{1-\gamma}{1-\delta}R_x^2+\\
&\quad+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)\left(\frac{1}{1-\delta}R_xR_z-\frac{\gamma}{1-\delta}R_zR_x\right)\left(\frac{1}{1-\delta}R_yR_z-\frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_y\right)=0,
\end{aligned}$$

откуда после умножения на $(1-\delta)^2$ получаем

$$\begin{aligned}
&-\gamma(1-\gamma)(R_x^2R_yR_z-\gamma R_x^2R_zR_y)+(\delta-1)(1-\gamma)(R_yR_zR_x^2-\gamma R_zR_yR_x^2)+\\
&\quad+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)(R_xR_zR_yR_x-\gamma R_xR_zR_xR_y-\gamma R_zR_xR_yR_x+\gamma^2R_zR_x^2R_y)=0.
\end{aligned}$$

Учитывая лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}
&\gamma(1-\gamma)(1+\gamma)R_x^2R_zR_y+(\delta-1)(1-\gamma)(1+\gamma)R_yR_zR_x^2+\\
&\quad+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)(R_xR_zR_yR_x+\gamma R_xR_yR_xR_z-\gamma R_zR_xR_yR_x-\gamma^2R_yR_x^2R_z)=0.
\end{aligned}$$

В силу свойства 6 имеем

$$\begin{aligned}
&\gamma(1-\gamma)(1+\gamma)R_x^2R_zR_y+(\delta-1)(1-\gamma)(1+\gamma)R_yR_zR_x^2+\\
&\quad+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)(-R_x^2R_yR_z-R_zR_xR_yR_x-\gamma R_x^2R_yR_z-\\
&\quad-\gamma R_yR_x^2R_z-\gamma R_zR_xR_yR_x-\gamma^2R_yR_x^2R_z)=0,\\
&\gamma(1-\gamma)(1+\gamma)R_x^2R_zR_y+(\delta-1)(1-\gamma)(1+\gamma)R_yR_zR_x^2+\\
&\quad+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)(-(1+\gamma)R_x^2R_yR_z-\gamma(\gamma+1)R_yR_x^2R_z-(1+\gamma)R_zR_xR_yR_x)=0,\\
&\gamma(1-\gamma)(1+\gamma)R_x^2R_zR_y+(\delta-1)(1-\gamma)(1+\gamma)R_yR_zR_x^2+\\
&\quad+(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)(1+\gamma)(-R_x^2R_yR_z-\gamma R_yR_x^2R_z-R_zR_xR_yR_x)=0.
\end{aligned}$$

Так как $\gamma \neq -1$, то, сокращая на $(1+\gamma)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\gamma(1-\gamma)R_x^2R_zR_y + (\delta-1)(1-\gamma)R_yR_zR_x^2 + \\
&\quad + (-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)(-R_x^2R_yR_z - \gamma R_yR_x^2R_z - R_zR_xR_yR_x) = 0, \\
&(\gamma-\gamma^2)R_x^2R_zR_y + (\delta-1-\gamma\delta+\gamma)R_yR_zR_x^2 - \\
&\quad - (-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)R_x^2R_yR_z - \gamma(-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)R_yR_x^2R_z - \\
&\quad - (-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)R_zR_xR_yR_x = 0, \\
&(\gamma-\gamma^2-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)R_x^2R_zR_y + (\delta-1-\gamma\delta+\gamma)R_yR_zR_x^2 + \\
&\quad + (\gamma^2-\gamma^2\delta+\gamma^3)R_yR_x^2R_z - (-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)R_zR_xR_yR_x = 0.
\end{aligned}$$

Далее, в силу свойств 2 и 6 имеем

$$R_yR_zR_x^2 = -R_yR_x^2R_z - R_yR_xR_zR_x = -R_yR_x^2R_z + R_zR_xR_yR_x,$$

тогда

$$\begin{aligned}
&(\gamma\delta-2\gamma^2)R_x^2R_zR_y - (\delta-1-\gamma\delta+\gamma)R_yR_x^2R_z + (\delta-1-\gamma\delta+\gamma)R_zR_xR_yR_x + \\
&\quad + (\gamma^2-\gamma^2\delta+\gamma^3)R_yR_x^2R_z - (-\gamma+\gamma\delta-\gamma^2)R_zR_xR_yR_x = 0, \\
&(\gamma\delta-2\gamma^2)R_x^2R_zR_y + (\delta-1-2\gamma\delta+2\gamma+\gamma^2)R_zR_xR_yR_x + \\
&\quad + (\gamma^2-\gamma^2\delta+\gamma^3-\delta+1+\gamma\delta-\gamma)R_yR_x^2R_z = 0.
\end{aligned}$$

Наконец, в силу равенства (4) верно

$$\begin{aligned}
&(\gamma\delta-2\gamma^2)R_x^2R_zR_y + (\delta^2-2\gamma\delta+2\gamma)R_zR_xR_yR_x + \\
&\qquad + (\gamma^2-\gamma^2\delta+\gamma^3-\delta+1+\gamma\delta-\gamma)R_yR_x^2R_z = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку в силу (4) верно равенство $\gamma^3-\gamma\delta^2+\gamma\delta-\gamma = 0$, то последнее соотношение приводится к виду

$$(\gamma\delta-2\gamma^2)R_x^2R_zR_y+(\delta^2-2\gamma\delta+2\gamma)R_zR_xR_yR_x+(\gamma^2+\gamma\delta^2-\gamma^2\delta-\delta+1)R_yR_x^2R_z = 0.$$

Свойство 10. $R_zR_xR_yR_x + R_xR_zR_xR_y = 0.$

Доказательство. Рассмотрим соотношение (24):

$$\gamma R_x^2R_zR_y + (\delta-\gamma^2+\gamma\delta)R_zR_x^2R_y + \delta R_zR_xR_yR_x = 0.$$

В силу леммы 3

$$\gamma R_x^2R_zR_y + (-\delta+\gamma^2-\gamma\delta)R_yR_x^2R_z + \delta R_zR_xR_yR_x = 0.$$

Умножим последнее равенство на $(2\gamma-\delta)$:

$$\begin{aligned}
&\gamma(2\gamma-\delta)R_x^2R_zR_y + (2\gamma-\delta)(-\delta+\gamma^2-\gamma\delta)R_yR_x^2R_z + \delta(2\gamma-\delta)R_zR_xR_yR_x = 0, \\
&(2\gamma^2-\gamma\delta)R_x^2R_zR_y + \\
&\quad + (-2\gamma\delta+2\gamma^3-3\gamma^2\delta+\delta^2+\gamma\delta^2)R_yR_x^2R_z + (2\gamma\delta-\delta^2)R_zR_xR_yR_x = 0.
\end{aligned}$$

Сложим последнее равенство и равенство из свойства 9:

$$(-2\gamma\delta + 2\gamma^3 - 4\gamma^2\delta + \delta^2 + 2\gamma\delta^2 + \gamma^2 - \delta + 1)R_yR_x^2R_z + 2\gamma R_zR_xR_yR_x = 0.$$

Принимая во внимание (4), получаем

$$(-2\gamma\delta + 2\gamma^3 - 4\gamma^2\delta + 2\gamma\delta^2 + 2\gamma^2)R_yR_x^2R_z + 2\gamma R_zR_xR_yR_x = 0.$$

Так как $2\gamma \neq 0$, то

$$(-\delta + \gamma^2 - 2\gamma\delta + \delta^2 + \gamma)R_yR_x^2R_z + R_zR_xR_yR_x = 0.$$

Отсюда ввиду (4)

$$(2\gamma^2 - 2\gamma\delta - 1 + \gamma)R_yR_x^2R_z + R_zR_xR_yR_x = 0,$$

т. е.

$$R_zR_xR_yR_x = (2\gamma\delta - 2\gamma^2 - \gamma + 1)R_yR_x^2R_z. \tag{25}$$

Учитывая соотношение (24), получаем

$$\gamma R_x^2R_zR_y + (\delta - \gamma^2 + \gamma\delta)R_zR_x^2R_y + \delta(2\gamma\delta - 2\gamma^2 - \gamma + 1)R_yR_x^2R_z = 0,$$
$$\gamma R_x^2R_zR_y + (\delta - \gamma^2 + \gamma\delta)R_zR_x^2R_y + (2\gamma\delta^2 - 2\gamma^2\delta - \gamma\delta + \delta)R_yR_x^2R_z = 0.$$

В силу леммы 3

$$\gamma R_x^2R_zR_y + (\delta - \gamma^2 + \gamma\delta)R_zR_x^2R_y - (2\gamma\delta^2 - 2\gamma^2\delta - \gamma\delta + \delta)R_zR_x^2R_y = 0,$$
$$\gamma R_x^2R_zR_y + (\delta - \gamma^2 + \gamma\delta - 2\gamma\delta^2 + 2\gamma^2\delta + \gamma\delta - \delta)R_zR_x^2R_y = 0,$$
$$\gamma R_x^2R_zR_y + \gamma(-\gamma + 2\delta - 2\delta^2 + 2\gamma\delta)R_zR_x^2R_y = 0.$$

Так как $\gamma \neq 0$, то

$$R_x^2R_zR_y + (-\gamma + 2\delta - 2\delta^2 + 2\gamma\delta)R_zR_x^2R_y = 0$$

и

$$R_x^2R_zR_y = (\gamma - 2\delta + 2\delta^2 - 2\gamma\delta)R_zR_x^2R_y.$$

Далее, в силу свойства 2

$$R_xR_zR_xR_y = -R_zR_x^2R_y - R_x^2R_zR_y = -(1 + \gamma - 2\delta + 2\delta^2 - 2\gamma\delta)R_zR_x^2R_y.$$

Сложим последнее соотношение и соотношение (25):

$$\begin{aligned} &R_zR_xR_yR_x + R_xR_zR_xR_y = \\ &\qquad = (2\gamma\delta - 2\gamma^2 + 1 - \gamma)R_yR_x^2R_z - (1 - 2\delta + \gamma + 2\delta^2 - 2\gamma\delta)R_zR_x^2R_y. \end{aligned}$$

Наконец, в силу леммы 3 и равенства (4)

$$\begin{aligned} &R_zR_xR_yR_x + R_xR_zR_xR_y = \\ &\quad = (2\gamma\delta - 2\gamma^2 + 1 - \gamma + 1 - 2\delta + \gamma + 2\delta^2 - 2\gamma\delta)R_yR_x^2R_z, \\ &R_zR_xR_yR_x + R_xR_zR_xR_y = \\ &\quad = (-2\gamma^2 + 2 - 2\delta + 2\delta^2)R_yR_x^2R_z = -2(\gamma^2 - \delta^2 + \delta - 1)R_yR_x^2R_z = 0. \end{aligned}$$

Лемма 4. *В алгебре A операторные слова вида $R_xR_yR_zR_t$ и $L_xR_yR_zR_t$ кососимметричны по всем переменным.*

Доказательство. В силу свойств 10 и 5д)

$$\frac{\delta^2-\delta-\gamma-\gamma\delta}{(1-\delta)(\gamma-\delta)}R_zR_xR_yR_x+\frac{\delta^2-\delta-\gamma-\gamma\delta}{(1-\delta)(\gamma-\delta)}R_xR_zR_xR_y=0,$$
$$R_zR_yR_x^2+R_zR_x^2R_y=0.$$

Отсюда в силу свойства 2

$$R_zR_xR_yR_x=0. \tag{26}$$

Тогда из свойства 10 следует, что

$$R_xR_zR_xR_y=0. \tag{27}$$

Учитывая свойства 5г) и 5д), получаем $R_zR_x^2R_y=R_zR_yR_x^2=0$, откуда на основании равенства (2) имеем $R_x^2R_zR_y=0$. В силу свойства 6а) $R_xR_yR_zR_x=0$. Значит, операторные слова $R_xR_yR_zR_t$ кососимметричны по всем переменным.

Учитывая свойства 5а), 5б), 5в) и кососимметричность операторных слов вида $R_xR_yR_zR_t$, получаем, что

$$L_xR_xR_yR_z=L_xR_yR_xR_z=L_yR_x^2R_z=0. \tag{28}$$

Далее, умножая равенство из свойства 5б) на R_t слева, имеем

$$R_tL_xR_yR_x=0$$

ввиду кососимметричности операторных слов вида $R_xR_yR_zR_t$. Аналогично, ввиду равенства (8) имеем

$$L_xR_tR_yR_x=0. \tag{29}$$

Умножим соотношение из свойства 5г) слева на L_z:

$$L_zR_x^2R_y=\alpha L_zR_xR_yR_x.$$

Так как $2\delta-2\delta^2+2\gamma\delta\neq 0$, то, учитывая соотношение (28), получаем

$$L_zR_xR_yR_x=0. \tag{30}$$

Тем самым доказано, что операторные слова вида $L_xR_yR_zR_t$ кососимметричны по всем переменным, кроме, может быть, переменных z и t. Наконец, в силу свойства 2

$$L_yR_zR_x^2=-L_yR_x^2R_z-L_yR_xR_zR_x=0.$$

Из лемм 1 и 4 вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *В алгебре A операторные слова длины $\geqslant 4$ кососимметричны по всем переменным.*

4. Базис свободной метабелевой алгебры типа (γ, δ)

Пусть M — произвольное многообразие метабелевых алгебр типа (γ, δ), A — свободная метабелева алгебра многообразия M с множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Для элементов $x, y \in A^2$ будем писать $x \equiv y\ (n)$, если для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ справедливо равенство $(x-y)T(a_1)T(a_2)\ldots T(a_n) = 0$.

Лемма 6. *В алгебре A выполняются следующие соотношения*:

а) $(ax)R_xR_y + (\gamma+\delta)(xa)R_xR_y + (xa)L_xR_y + (1-\gamma-\delta)(ax)L_xR_y \equiv 0\ (2)$;

б) $(1+\gamma)(ax)R_xR_y + (\gamma\delta - 2\gamma - \delta^2)(ax)L_xR_y + (1+\gamma)(xa)L_xR_y +$
$+ (\delta + \gamma\delta - \gamma^2 - \gamma)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2)$.

Доказательство. Известно [6], что в любой алгебре типа (γ, δ) выполняются соотношения

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0, \tag{31}$$

$$[x, (y, x, x)] = [x, (x, y, x)] = 0, \tag{32}$$

$$[x, (y, z, x)] + [x, (z, y, x)] = 0. \tag{33}$$

а) Из равенств (31) и (32) следует, что

$$[x, (x, x, y)] = 0, \quad [x, x^2y - x(xy)] = 0, \quad x(x^2y) - x(x(xy)) - (x^2y)x + (x(xy))x = 0.$$

Так как ввиду леммы 5 операторные слова длины $\geqslant 4$ кососимметричны по всем переменным, то $x(x^2y) - (x^2y)x \equiv 0\ (2)$, $x^2(R_yL_x - R_yR_x) \equiv 0\ (2)$. В силу (8) и леммы 5 имеем

$$x^2\left(L_xR_y + \frac{\gamma}{1-\delta}R_xR_y - \frac{\delta}{1-\delta}R_yR_x - R_yR_x\right) \equiv 0\ (2),$$

значит,

$$x^2\left(L_xR_y + \frac{\gamma+1}{1-\delta}R_xR_y\right) \equiv 0\ (2).$$

В силу равенства (1)

$$x^2\left(R_xR_y + \frac{\gamma+1}{1-\delta}R_xR_y\right) \equiv 0\ (2),$$

$$\frac{\gamma+2-\delta}{1-\delta}\ x^2R_xR_y \equiv 0\ (2).$$

Если $\gamma + 2 - \delta = 0$, то $\gamma = \delta - 2$. Из равенства (4) следует, что $(\delta-2)^2 - \delta^2 + \delta - 1 = 0$, т. е. $\delta = 1$. Так как этот случай мы отбросили, то $\gamma + 2 - \delta \neq 0$. Тогда $x^2R_xR_y \equiv 0\ (2)$. Линеаризуем это тождество по x: $(ax)R_xR_y + (xa)R_xR_y + x^2R_aR_y \equiv 0\ (2)$. В силу тождества (3) $(x, x, a) + (1-\gamma-\delta)(x, a, x) = 0$, значит,

$x^2a - x(xa) + (1-\gamma-\delta)((xa)x - x(ax)) = 0$, т. е.

$$(ax)R_xR_y + (xa)R_xR_y + (xa)L_xR_y + \gamma(xa)R_xR_y - \gamma(ax)L_xR_y - \\ -(1-\delta)(xa)R_xR_y + (1-\delta)(ax)L_xR_y \equiv 0\ (2),$$
$$(ax)R_xR_y + (\delta+\gamma)(xa)R_xR_y + (xa)L_xR_y + (1-\delta-\gamma)(ax)L_xR_y \equiv 0\ (2).$$

б) В силу (33) $[x,(ya)x - y(ax)] + [x,(ay)x - a(yx)] = 0$. Тогда по лемме 5 $[x,y(ax)] + [x,a(yx)] \equiv 0\ (2)$, $x(y(ax)) - (y(ax))x + x(a(yx) - (a(yx))x) \equiv 0\ (2)$,

$$(ax)L_yL_x - (ax)L_yR_x + (yx)L_aL_x - (yx)L_aR_x \equiv 0\ (2).$$

Далее, в силу равенства (5) и леммы 5 имеем

$$\frac{1}{1-\delta}(ax)R_xR_y - \frac{\gamma}{1-\delta}(ax)R_yR_x - (ax)L_yR_x + \\ + \frac{1}{1-\delta}(yx)R_xR_a - \frac{\gamma}{1-\delta}(yx)R_aR_x - (yx)L_aR_x \equiv 0\ (2),$$

откуда

$$-\frac{1+\gamma}{1-\delta}(ax)R_yR_x - (ax)L_yR_x - \frac{1+\gamma}{1-\delta}(yx)R_aR_x - (yx)L_aR_x \equiv 0\ (2).$$

Учитывая определяющие соотношения (3) и (2), получаем

$$\frac{1+\gamma}{1-\delta}(ax)R_yR_x + (ax)L_yR_x + \frac{1+\gamma}{1-\delta}((xa)L_yR_x + \gamma(ya)R_x^2 - \\ - \gamma(ax)L_yR_x - (1-\delta)(xa)R_yR_x + (1-\delta)(ay)L_xR_x) + \\ + (ay)R_x^2 + \gamma(ya)R_x^2 - \gamma(ax)L_yR_x + \delta(xa)R_yR_x - \delta(ay)R_x^2 \equiv 0\ (2).$$

Отсюда на основании леммы 5 имеем

$$\frac{1+\gamma}{1-\delta}(ax)R_yR_x + (ax)L_yR_x + \frac{1+\gamma}{1-\delta}((xa)L_yR_x - \gamma(ax)L_yR_x - (1-\delta)(xa)R_yR_x) - \\ - \gamma(ax)L_yR_x + \delta(xa)R_yR_x \equiv 0\ (2),$$

значит,

$$\frac{1+\gamma}{1-\delta}(ax)R_yR_x + \left(1-\gamma-\frac{\gamma+\gamma^2}{1-\delta}\right)(ax)L_yR_x + \\ + \frac{1+\gamma}{1-\delta}(xa)L_yR_x + (\delta-1-\gamma)(xa)R_yR_x \equiv 0\ (2),$$

т. е.

$$\frac{1+\gamma}{1-\delta}(ax)R_yR_x + \frac{1-\delta-2\gamma+\gamma\delta-\gamma^2}{1-\delta}(ax)L_yR_x + \\ + \frac{1+\gamma}{1-\delta}(xa)L_yR_x + (\delta-1-\gamma)(xa)R_yR_x \equiv 0\ (2).$$

Учитывая равенство (4), получаем

$$\frac{1+\gamma}{1-\delta}(ax)R_yR_x + \frac{-2\gamma+\gamma\delta-\delta^2}{1-\delta}(ax)L_yR_x + \\ + \frac{1+\gamma}{1-\delta}(xa)L_yR_x + (\delta-1-\gamma)(xa)R_yR_x \equiv 0\ (2).$$

После умножения на общий знаменатель имеем

$$(1+\gamma)(ax)R_yR_x + (-2\gamma+\gamma\delta-\delta^2)(ax)L_yR_x + \\ + (1+\gamma)(xa)L_yR_x + (\delta-1-\gamma)(1-\delta)(xa)R_yR_x \equiv 0\ (2).$$

Раскроем скобки в последнем слагаемом:

$$(1+\gamma)(ax)R_yR_x + (-2\gamma+\gamma\delta-\delta^2)(ax)L_yR_x + \\ + (1+\gamma)(xa)L_yR_x + (2\delta-\delta^2+\gamma\delta-1-\gamma)(xa)R_yR_x \equiv 0\ (2).$$

Учитывая равенство (4), имеем

$$(1+\gamma)(ax)R_yR_x + (-2\gamma+\gamma\delta-\delta^2)(ax)L_yR_x + \\ + (1+\gamma)(xa)L_yR_x + (\delta-\gamma^2+\gamma\delta-\gamma)(xa)R_yR_x \equiv 0\ (2).$$

Наконец, на основании леммы 5 получаем требуемое соотношение:

$$(1+\gamma)(ax)R_xR_y + (-2\gamma+\gamma\delta-\delta^2)(ax)L_xR_y + \\ + (1+\gamma)(xa)L_xR_y + (\delta-\gamma^2+\gamma\delta-\gamma)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2).$$

Лемма 7. *В алгебре A справедливы следующие соотношения*:

а) $(xa)R_xR_y \equiv \dfrac{\delta-1}{\gamma+1}(ax)L_xR_y\ (2)$;

б) $(xa)L_xR_y \equiv \dfrac{\gamma+\delta}{\gamma+1}(ax)L_xR_y - (ax)R_xR_y\ (2)$.

Доказательство. Из леммы 6а) вытекает

$$(ax)R_xR_y + (\gamma+\delta)(xa)R_xR_y + (xa)L_xR_y + (1-\gamma-\delta)(ax)L_xR_y \equiv 0\ (2).$$

Тогда в силу леммы 6б) имеем

$$(1+\gamma)(-(\gamma+\delta)(xa)R_xR_y - (xa)L_xR_y - (1-\gamma-\delta)(ax)L_xR_y) + \\ + (\gamma\delta-2\gamma-\delta^2)(ax)L_xR_y + (1+\gamma)(xa)L_xR_y + (\delta+\gamma\delta-\gamma^2-\gamma)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2),$$

откуда

$$-(\gamma+\delta+\gamma^2+\gamma\delta)(xa)R_xR_y - (1+\gamma)(xa)L_xR_y - \\ - (1-\gamma^2-\delta-\gamma\delta)(ax)L_xR_y + (\gamma\delta-2\gamma-\delta^2)(ax)L_xR_y + \\ + (1+\gamma)(xa)L_xR_y + (\delta+\gamma\delta-\gamma^2-\gamma)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2),$$

т. е.

$$(2\gamma\delta - 2\gamma - \delta^2 - 1 + \gamma^2 + \delta)(ax)L_xR_y + (-2\gamma^2 - 2\gamma)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2).$$

Ввиду (4)

$$(2\gamma\delta - 2\gamma)(ax)L_xR_y + (-2\gamma^2 - 2\gamma)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2),$$
$$2\gamma(\delta - 1)(ax)L_xR_y - 2\gamma(\gamma + 1)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2).$$

Так как $\gamma \neq 0, \pm 1$, то $(\delta - 1)(ax)L_xR_y - (\gamma + 1)(xa)R_xR_y \equiv 0\ (2)$, т. е.

$$(xa)R_xR_y \equiv \frac{\delta - 1}{\gamma + 1}(ax)L_xR_y\ (2).$$

б) Из последнего соотношения и леммы 6а) следует, что

$$(ax)R_xR_y + \frac{(\gamma + \delta)(\delta - 1)}{\gamma + 1}(ax)L_xR_y + (xa)L_xR_y + (1 - \gamma - \delta)(ax)L_xR_y \equiv 0\ (2),$$
$$(ax)R_xR_y + \frac{\delta^2 - 2\delta + 1 - \gamma - \gamma^2}{\gamma + 1}(ax)L_xR_y + (xa)L_xR_y \equiv 0\ (2).$$

В силу (4) верно равенство

$$(ax)R_xR_y - \frac{\delta + \gamma}{\gamma + 1}(ax)L_xR_y + (xa)L_xR_y \equiv 0\ (2),$$

т. е.

$$(xa)L_xR_y \equiv \frac{\gamma + \delta}{\gamma + 1}(ax)L_xR_y - (ax)R_xR_y\ (2).$$

Лемма 8. $[[a, x], c] \equiv 0\ (3)$.

Доказательство. В силу леммы 7

$$[[a, x]x]R_y = ((ax)R_x - (xa)R_x - (ax)L_x + (xa)L_x)R_y \equiv$$
$$\equiv \left((ax)R_x + \frac{1 - \delta}{1 + \gamma}(ax)L_x - (ax)L_x - (ax)R_x + \frac{\gamma + \delta}{1 + \gamma}(ax)L_x\right)R_y\ (2).$$

Таким образом, $[[a, x], x]R_y \equiv 0\ (2)$. Тогда

$$[[a, x], x]R_yR_zR_t = 0, \qquad (34)$$
$$[[a, x], x]R_zL_yR_t = 0.$$

В силу (8)

$$[[a, x], x]\left(L_yR_zR_t + \frac{\gamma}{1 - \delta}R_yR_zR_t - \frac{\delta}{1 - \delta}R_zR_yR_t\right) = 0.$$

Учитывая (34), получим, что $[[a, x], x]L_yR_zR_t = 0$. Из этого соотношения, равенства (34) и леммы 1 следует, что $[[a, x], x] \equiv 0\ (3)$. Линеаризуем последнее тождество: $[[a, b], c] + [[a, c], b] \equiv 0\ (3)$, откуда $[[c, a], b] \equiv [[a, b], c]\ (3)$. Поскольку $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ (см. [6]), то $3[[a, b], c] \equiv 0\ (3)$. Так как характеристика поля отлична от 3, то $[[a, b], c] \equiv 0\ (3)$.

Определение. Правильными словами алгебры A от переменных из множества $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \geqslant 6)$ называются полилинейные одночлены

а) $(x_1x_j)R(k_1)R(k_2)\ldots R(k_{n-2})$,

б) $[x_1, x_j]R(k_1)R(k_2)\ldots R(k_{n-2})$,

в) $(x_2x_1)L(3)R(4)\ldots R(n)$,

где $T(k) := T(x_k)$ и $k_1 < k_2 < \ldots < k_{n-2}$.

Теорема 1. *Пространство $P_n(A)$ полилинейных одночленов над X_n $(n \geqslant 6)$ линейно порождается правильными словами алгебры A.*

Доказательство. Так как алгебры типа (γ, δ) являются почти альтернативными, то пространство $P_n(A)$ линейно порождается словами вида $(x_1x_j)T(a)T(b)\ldots T(c)$ и $(x_jx_1)T(a)T(b)\ldots T(c)$. Тогда по лемме 1 пространство $P_n(A)$ линейно порождается словами вида $(x_1x_j)T(a)R(b)\ldots R(c)$ и $(x_jx_1)T(a)R(b)\ldots R(c)$. В силу леммы 5 пространство $P_n(A)$ линейно порождается словами вида $(x_1x_j)T(k_1)\rho$, $(x_jx_1)T(k_1)\rho$, где $\rho = R(k_2)\ldots R(k_{n-2})$. Будем писать $a \equiv b$, если $(a-b)\rho = 0$. В силу леммы 7б) имеем

$$(x_2x_1)L(j) + (x_jx_1)L(2) \equiv$$
$$\equiv \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}((x_1x_2)L(j) + (x_1x_j)L(2)) - ((x_1x_j)R(2) + (x_1x_2)R(j)),$$

значит,

$$\begin{aligned}(x_jx_1)L(2) \equiv &-(x_2x_1)L(j) + \\ &+ \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}([x_1, x_2]L(j) + [x_1, x_j]L(2) + (x_2x_1)L(j) + (x_jx_1)L(2)) - \\ &- (x_1x_2)R(j) - (x_1x_j)R(2).\end{aligned}$$

Таким образом, учитывая лемму 8, получаем

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}\right)(x_jx_1)L(2) \equiv \\ &\quad \equiv \left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma+1} - 1\right)(x_2x_1)L(j) + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}[x_1, x_2]L(j) + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}[x_1, x_j]L(2) - \\ &\quad - (x_1x_2)R(j) - (x_1x_j)R(2), \\ &\frac{1-\delta}{\gamma+1}(x_jx_1)L(2) \equiv \frac{\delta-1}{\gamma+1}(x_2x_1)L(j) + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}[x_1, x_2]L(j) + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}[x_1, x_j]L(2) - \\ &\quad - (x_1x_2)R(j) - (x_1x_j)R(2) \equiv \\ &\quad \equiv \frac{\delta-1}{\gamma+1}(x_2x_1)L(j) + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}[x_1, x_2]R(j) + \frac{\gamma+\delta}{\gamma+1}[x_1, x_j]R(2) - \\ &\quad - (x_1x_2)R(j) - (x_1x_j)R(2).\end{aligned}$$

Так как $1 - \delta \neq 0$, то в силу леммы 5 слова вида $(x_jx_1)L(k_1)R(k_2)\ldots R(k_{n-2})$ являются линейными комбинациями правильных слов.

Далее, $(x_jx_1)R(k_1) \equiv -[x_1, x_j]R(k_1) + (x_1x_j)R(k_1)$. Следовательно, слова вида $(x_jx_1)R(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2})$ являются линейными комбинациями правильных слов. Наконец, по лемме 8 $(x_1x_j)L(k_1) \equiv [x_1, x_j]R(k_1) + (x_jx_1)L(k_1)$. Значит, слова вида $(x_1x_j)L(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2})$ являются линейными комбинациями правильных слов.

Лемма 9. *Если в алгебре A верно соотношение $[A^2, A] \equiv 0\ (n)$ при некотором $n \geqslant 2$, то алгебра A нильпотентна.*

Доказательство. Известно [6], что в произвольной алгебре (γ, δ) выполняется тождество $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y - (y, z, x) - (x, z, y)$, следовательно, $(y, z, xt) + (xt, z, y) = [xt, z] - [(xt)y, z]$. Если $[A^2, A] \equiv 0\ (n)$, то $(y, z, xt) + (xt, z, y) \equiv 0\ (n)$. В операторной форме последнее равенство имеет вид $(xt)(R_zR_y - L_zL_y) \equiv 0\ (n)$. В силу соотношения (5) и леммы 5 получаем

$$(xt)L_zL_y \equiv -\frac{1+\gamma}{1-\delta}(xt)R_zR_y,$$

следовательно,

$$\left(1 + \frac{1+\gamma}{1-\delta}\right)(xt)R_zR_y \equiv \frac{2-\delta+\gamma}{1-\delta}(xt)R_zR_y \equiv 0\ (n).$$

Из доказательства леммы 6 следует, что $2 - \delta + \gamma \neq 0$, тогда $(xt)R_zR_y \equiv 0\ (n)$. Учитывая лемму 1, получим, что алгебра A нильпотентна индекса не выше $n + 5$.

Теорема 2. *В ненильпотентной алгебре A множество правильных слов линейно независимо.*

Доказательство. Допустим, что некоторая линейная комбинация правильных слов алгебры A равна нулю:

$$\sum_{i=2}^{n} \alpha_i(x_1x_i)R(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2}) + \sum_{i=2}^{n} \beta_i[x_1, x_i]R(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2}) + \\ + \varepsilon(x_2x_1)L(3)R(4)\dots R(n) = 0.$$

Пусть $v \in [A, A]$, $w \in A^2$, $j_0 \geqslant 3$. Положим $x_{j_0} = v$, тогда в силу леммы 8

$$\alpha_{j_0}(x_1v)R(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2}) = 0, \quad \alpha_{j_0}vL(x_1)R(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2}) = 0.$$

Так как алгебра A ненильпотентна, то из леммы 9 следует, что $\alpha_{j_0} = 0$. Таким образом, рассматриваемая сумма принимает вид

$$\alpha_2(x_1x_i)R(3)\dots R(n) + \sum_{i=2}^{n} \beta_i[x_1, x_i]R(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2}) + \\ + \varepsilon(x_2x_1)L(3)R(4)\dots R(n) = 0.$$

Положим $x_{j_0} = w$, тогда $\beta_{j_0}[x_1, x_{j_0}]R(k_1)R(k_2)\dots R(k_{n-2}) = 0$. Так как алгебра A ненильпотентна, то $\beta_{j_0} = 0$. Следовательно, сумма принимает вид

$$(\alpha_2(x_1x_i)R(3) + \beta_2[x_1, x_2]R(3) + \varepsilon(x_2x_1)L(3))R(4)\dots R(n) = 0.$$

Положим $x_2 = v$, тогда $(\alpha_2(x_1v)R(3) + \varepsilon(vx_1)L(3))R(4)\dots R(n) = 0$, т. е.

$$v(\alpha_2 L(1)R(3) + \varepsilon R(1)L(3))R(4)\dots R(n) = 0.$$

Отсюда в силу (8) и леммы 5 имеем

$$v\left(\alpha_2 L(1)R(3)+\varepsilon\left(L(3)R(1)+\frac{\gamma}{1-\delta}R(3)R(1)-\frac{\delta}{1-\delta}R(1)R(3)\right)\right)R(4)\dots R(n) = 0,$$

$$v\left(\alpha_2 L(1)R(3) - \varepsilon L(1)R(3) - \frac{\varepsilon\gamma}{1-\delta}R(1)R(3) - \frac{\varepsilon\delta}{1-\delta}R(1)R(3)\right)R(4)\dots R(n) = 0,$$

$$v\left((\alpha_2 - \varepsilon)L(1)R(3) - \frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}R(1)R(3)\right)R(4)\dots R(n) = 0.$$

Отсюда на основании леммы 8 получаем

$$\left(\alpha_2 - \varepsilon - \frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}\right)vR(1)R(3)\dots R(n) = 0,$$

и в силу леммы 9

$$\alpha_2 - \varepsilon - \frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta} = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\varepsilon(\gamma+1)}{1-\delta}.$$

Тогда сумма принимает вид

$$\left(\frac{\varepsilon(\gamma+1)}{1-\delta}(x_1x_2)R(3) + \beta_2[x_1, x_2]R(3) + \varepsilon(x_2x_1)L(3)\right)R(4)\dots R(n) = 0.$$

Положим $x_2 = w$, тогда

$$\left(\frac{\varepsilon(\gamma+1)}{1-\delta}(x_1w)R(3) + \beta_2[x_1, w]R(3) + \varepsilon(wx_1)L(3)\right)R(4)\dots R(n) = 0,$$

$$w\left(\frac{\varepsilon(\gamma+1)}{1-\delta}L(1)R(3) + \beta_2 L(1)R(3) - \beta_2 R(1)R(3) + \varepsilon R(1)L(3)\right)R(4)\dots R(n) = 0.$$

В силу равенства (8) и леммы 5 имеем

$$w\left(\left(\frac{\varepsilon(\gamma+1)}{1-\delta} + \beta_2\right)L(1)R(3) - \beta_2 R(1)R(3) - \right.$$
$$\left. - \varepsilon L(1)R(3) - \frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}R(1)R(3)\right)R(4)\dots R(n) = 0,$$

$$w\left(\left(\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta} + \beta_2\right)L(1) - \left(\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta} + \beta_2\right)R(1)\right)R(3)R(4)\dots R(n) = 0,$$

$$\left(\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta} + \beta_2\right)[x_1, w]R(3)R(4)\dots R(n) = 0.$$

Тогда в силу леммы 9

$$\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta} + \beta_2 = 0, \quad \beta_2 = -\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta},$$

и сумма принимает вид

$$\left(\frac{\varepsilon(1+\gamma)}{1-\delta}(x_1x_2)R(3)-\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}[x_1,x_2]R(3)+\varepsilon(x_2x_1)L(3)\right)\rho=0,$$

где $\rho=R(4)\dots R(n)$. Полагая $x_1=w$, получаем

$$w\left(\frac{\varepsilon(1+\gamma)}{1-\delta}R(2)R(3)-\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}R(2)R(3)+\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}L(2)R(3)+\varepsilon L(2)L(3)\right)\rho=0.$$

В силу равенства (5) и леммы 5 имеем

$$w\left(\frac{\varepsilon(1+\gamma)}{1-\delta}R(2)R(3)-\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}R(2)R(3)+\right.$$
$$\left.+\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}L(2)R(3)-\frac{\varepsilon(1+\gamma)}{1-\delta}R(2)R(3)\right)\rho=0,$$
$$w\left(-\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}R(2)R(3)+\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}L(2)R(3)\right)\rho=0,$$
$$\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}[x_2,w]R(3)\dots R(n)=0.$$

В силу леммы 9

$$\frac{\varepsilon(\gamma+\delta)}{1-\delta}=0.$$

Так как $\gamma+\delta\neq 0$, то $\varepsilon=0$, тогда $\alpha_2=\beta_2=0$.

Из теоремы 2 очевидным образом вытекает основная теорема.

Литература

[1] Белкин В. П. О многообразиях правоальтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 491—508.

[2] Дорофеев Г. В. Пример разрешимого, но не нильпотентного альтернативного кольца // УМН. — 1960. — Т. 15, № 3. — С. 147—150.

[3] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[4] Ильтяков А. В. Решётка подмногообразий многообразия двухступенчато разрешимых альтернативных алгебр // Алгебра и логика. — 1982. — Т. 21, № 2. — С. 170—177.

[5] Медведев Ю. А. Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством // Алгебра и логика. — 1978. — Т. 17, № 6. — С. 705—726.

[6] Никитин А. А. Почти альтернативные алгебры // Алгебры и логика. — 1974. — Т. 13, № 5. — С. 501—533.

[7] Пчелинцев С. В. Разрешимые индекса 2 многообразия алгебр // Мат. сб. — 1981. — Т. 115, № 2. — С. 179—203.

[8] Пчелинцев С. В. Многообразия разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 4. — С. 556—566.

[9] Albert A. A. Almost alternative algebras // Portugal. Math. — 1949. — Vol. 8. — P. 23—36.