Проблемы алгебры, инспирированные универсальной алгебраической геометрией

Б. И. ПЛОТКИН
Еврейский университет, Иерусалим, Израиль
e-mail: plotkin@macs.biu.ac.il

УДК 512.7

Ключевые слова: универсальная алгебраическая геометрия, многообразия алгебр, геометрическая эквивалентность, геометрически нётеровы алгебры, логически нётеровы алгебры.

Аннотация

Пусть Θ — многообразие алгебр. Для каждого многообразия Θ и каждой алгебры H из Θ можно рассмотреть алгебраическую геометрию многообразия Θ над алгеброй H. Мы также рассматриваем специальный категорный инвариант $K_\Theta(H)$ этой геометрии. Классическая алгебраическая геометрия имеет дело с многообразием $\Theta = \mathrm{Com}\text{-}P$ всех ассоциативных и коммутативных алгебр над некоторым полем констант P. Алгебра H в этих обозначениях является расширением базисного поля P. Геометрия в группах связана с многообразиями Grp и $\mathrm{Grp}\text{-}G$, где G — группа констант. Случай $\mathrm{Grp}\text{-}F$, где F — свободная группа, связан с проблемами Тарского, посвящённым логике свободной группы. Описываемое общее понимание алгебраической геометрии в различных многообразиях алгебр инспирирует некоторые новые проблемы в алгебре и алгебраической геометрии. Задачи такого типа в большой степени определяют содержание универсальной алгебраической геометрии.

Например, общей и естественной задачей является следующая: когда алгебры H_1 и H_2 имеют одну и ту же геометрию? Или, более точно, каковы условия на алгебры из данного многообразия Θ для того, чтобы алгебраические геометрии над ними совпадали? Мы рассматриваем два варианта совпадения: 1) $K_\Theta(H_1)$ и $K_\Theta(H_2)$ изоморфны; 2) данные категории эквивалентны.

Эта проблема напрямую связана со следующей общей алгебраической проблемой. Пусть Θ^0 — категория всех свободных в многообразии Θ алгебр $W = W(X)$, где X конечно. Рассматриваются группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$, а также группы автоэквивалентностей категории Θ^0. Проблемой является описание этих групп для разных Θ.

Abstract

B. I. Plotkin, Problems in algebra inspired by universal algebraic geometry, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 181—197.

Let Θ be a variety of algebras. In every variety Θ and every algebra H from Θ one can consider algebraic geometry in Θ over H. We also consider a special categorical invariant $K_\Theta(H)$ of this geometry. The classical algebraic geometry deals with the variety $\Theta = \mathrm{Com}\text{-}P$ of all associative and commutative algebras over the ground field of constants P. An algebra H in this setting is an extension of the ground field P. Geometry in groups is related to the varieties Grp and $\mathrm{Grp}\text{-}G$, where G is a group of constants. The case $\mathrm{Grp}\text{-}F$, where F is a free group, is related to Tarski's problems devoted to logic

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 181—197.

of a free group. The described general insight on algebraic geometry in different varieties of algebras inspires some new problems in algebra and algebraic geometry. The problems of such kind determine, to a great extent, the content of universal algebraic geometry. For example, a general and natural problem is: When do algebras H_1 and H_2 have the same geometry? Or more specifically, what are the conditions on algebras from a given variety Θ that provide the coincidence of their algebraic geometries? We consider two variants of coincidence: 1) $K_\Theta(H_1)$ and $K_\Theta(H_2)$ are isomorphic; 2) these categories are equivalent. This problem is closely connected with the following general algebraic problem. Let Θ^0 be the category of all algebras $W = W(X)$ free in Θ, where X is finite. Consider the groups of automorphisms $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$ for different varieties Θ and also the groups of autoequivalences of Θ^0. The problem is to describe these groups for different Θ.

Мы начнём с небольшого обзора основных определений и результатов и затем рассмотрим некоторый список нерешённых проблем. Результаты без ссылок можно найти в [23].

1. Определения

1.1. Фиксируем многообразие Θ. Возьмём алгебру $H \in \Theta$ и (свободную в Θ) алгебру $W = W(X)$ с конечным множеством X. Множество гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(W, H)$ мы будем рассматривать как аффинное пространство точек над H. Точками этого пространства являются гомоморфизмы $\mu\colon W \to H$. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то имеется биекция

$$\alpha_X\colon \mathrm{Hom}(W, H) \to H^{(n)},$$

определённая формулой $\alpha_X(\mu) = (\mu(x_1), \ldots, \mu(x_n))$. Точка μ является корнем пары (w, w'), $w, w' \in W$, если $w^\mu = w'^\mu$, что означает также, что $(w, w') \in \mathrm{Ker}\,\mu$. Здесь $\mathrm{Ker}\,\mu$ является конгруэнцией алгебры W. В то же время μ является решением уравнения $w = w'$. Мы можем отождествить пару (w, w') и уравнение $w = w'$.

Пусть теперь T — система уравнений в W, а A — множество точек в $\mathrm{Hom}(W, H)$. Имеем следующее соответствие Галуа:

$$\begin{cases} T'_H = \{\mu\colon W \to H \mid T \subset \mathrm{Ker}\,\mu\}, \\ A'_W = \bigcap\limits_{\mu \in A} \mathrm{Ker}\,\mu. \end{cases}$$

Определение 1. Множество A вида $A = T'$ для некоторой системы T назовём (замкнутым) алгебраическим множеством. Конгруэнция T вида $T = A'$ для некоторого A — это H-замкнутая конгруэнция.

Легко видеть, что конгруэнция T H-замкнута тогда и только тогда, когда $W/T \in SC(H)$, где S и C — операторы взятия подалгебр и декартовых произведений на классах алгебр.

Можно рассмотреть замыкания $A'' = (A')'$ и $T''_H = (T'_H)'$.

Предложение 1. *Пара* (w_0, w_0') *принадлежит* T_H'' *тогда и только тогда, когда формула*

$$\Bigl(\bigwedge_{(w,w')\in T}(w\equiv w')\Bigr) \implies w_0 \equiv w_0'$$

(бесконечное квазитождество) *выполнена в* H.

1.2. Мы определили категорию Θ^0. Добавим к определению условие, что все конечные X в объектах из Θ^0 являются подмножествами бесконечного универсума X^0. Тогда Θ^0 является малой категорией.

Далее, определим *категорию аффинных пространств* $K_\Theta^0(H)$. Объектами этой категории являются аффинные пространства

$$\mathrm{Hom}(W, H), \quad W \in \mathrm{Ob}\,\Theta^0.$$

Морфизмы

$$\tilde{s}\colon \mathrm{Hom}(W(X), H) \to \mathrm{Hom}(W(Y), H)$$

категории $K_\Theta^0(H)$ определяются гомоморфизмами $s\colon W(Y) \to W(X)$ по правилу $\tilde{s}(\nu) = \nu s$ для каждого $\nu\colon W(X) \to H$. Получаем контравариантный функтор

$$\varphi\colon \Theta^0 \to K_\Theta^0(H).$$

Предложение 2. *Функтор* $\varphi\colon \Theta^0 \to K_\Theta^0(H)$ *задаёт дуальность категорий тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Var}(H) = \Theta$.

Определим теперь *категорию алгебраических множеств* $K_\Theta(H)$. Её объекты имеют вид (X, A), где A — алгебраическое множество в пространстве $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Морфизмы $[s]\colon (X, A) \to (Y, B)$ определяются теми гомоморфизмами $s\colon W(Y) \to W(X)$, для которых $\tilde{s}(\nu) \in B$, если $\nu \in A$. Одновременно мы имеем отображения $[s]\colon A \to B$.

Определим категорию $C_\Theta(H)$. Её объекты имеют вид W/T, где $W \in \mathrm{Ob}\,\Theta^0$, а T является H-замкнутой конгруэнцией в W. Морфизмами категории $C_\Theta(H)$ являются гомоморфизмы алгебр.

Доказано, что если $\mathrm{Var}(H) = \Theta$, то переходы $(X, A) \to W(X)/A'$ и $W/T \to (X, T_H')$ определяют дуальность категорий $K_\Theta(H)$ и $C_\Theta(H)$. В этом случае категория Θ^0 является подкатегорией в $C_\Theta(H)$. Скелет категории $K_\Theta(H)$ обозначается через $\tilde{K}_\Theta(H)$. Эта категория есть категория *алгебраических многообразий* над H. Аналогично определяется категория $\tilde{C}_\Theta(H)$.

Категория $K_\Theta^0(H)$ всегда является подкатегорией в $K_\Theta(H)$ [23].

Мы рассматриваем также категории K_Θ и C_Θ, где алгебра H не фиксирована. Соответственно, мы имеем категории $\tilde{K}_\Theta$ и $\tilde{C}_\Theta$.

1.3. Рассмотрим функтор $\mathrm{Cl}_H\colon \Theta^0 \to \mathbf{poSet}$, где $\mathbf{poSet}$ обозначает категорию частично упорядоченных множеств.

Этот функтор соответствует каждой алгебре H в Θ. По определению для каждого $W \in \mathrm{Ob}\,\Theta^0$ частично упорядоченное множество $\mathrm{Cl}_H(W)$ — это множество всех H-замкнутых конгруэнций T в W с естественным упорядочением. Следовательно, имеем решётку $\mathrm{Cl}_H(W)$.

Пусть теперь дан морфизм

$$s\colon W(Y) \to W(X)$$

из Θ^0. Ему соответствует отображение

$$\mathrm{Cl}_H(s)\colon \mathrm{Cl}_H(W(X)) \to \mathrm{Cl}_H(W(Y)),$$

определённое правилом $\mathrm{Cl}_H(s)(T) = s^{-1}T$. Здесь $T \in \mathrm{Cl}_H(W(X))$, $s^{-1}T$ — конгруэнция в $W(Y)$, определённая правилом $w\ (s^{-1}T)\ w'$ тогда и только тогда, когда $w^s\ T\ w'^s$, $w, w' \in W(Y)$. Конгруэнция $s^{-1}T$ также H-замкнута, а отображение $\mathrm{Cl}_H(s)$ является морфизмом категории $\mathbf{poSet}$.

Это определяет контравариантный функтор Cl_H, который в дальнейшем будет играть важную роль.

Похожим образом можно рассмотреть ковариантный функтор

$$\mathrm{Als}_H\colon \Theta^0 \to \mathbf{poSet},$$

где $\mathrm{Als}_H(W)$ — это частично упорядоченное множество алгебраических множеств аффинного пространства $\mathrm{Hom}(W, H)$.

2. Общий взгляд на теорию

Основными задачами теории являются следующие:

1) геометрические свойства алгебр H в Θ. В алгебре H рассматриваются её геометрия и уравнения над H;
2) геометрические отношения между алгебрами в Θ;
3) структура алгебраических множеств для каждой данной алгебры H для каждого W. Решётка алгебраических множеств в данном аффинном пространстве.

Мы сосредоточим наше внимание на проблемах, относящихся к пунктам 1 и 2. Пункт 3 является отдельной темой, требующей дополнительной ясности.

Приведём теперь несколько понятий, задействованных в данной теории.

Прежде всего это геометрические инварианты алгебры H: *специальные категории и функторы*. Категории представляются *категориями алгебраических множеств и алгебраических многообразий* $K_\Theta(H)$ и $\tilde{K}_\Theta(H)$. Они связаны с *категориями* $C_\Theta(H)$ *и* $\tilde{C}_\Theta(H)$. Другим инвариантом алгебр является контравариантный функтор $\mathrm{Cl}_H\colon \mathrm{Var}(H)^0 \to poSet$. Категории K_Θ и C_Θ являются инвариантами всего многообразия Θ.

Основными понятиями для алгебр H, с которыми мы будем иметь дело, являются *геометрическая нётеровость, логическая нётеровость* и *геометрическая дистрибутивность*. Отношения между алгебрами представляются понятиями *геометрической эквивалентности, геометрического подобия, геометрической совместности, совпадения геометрий* и *совпадения решёток*. Здесь совпадение решёток (в самом общем случае) определяется как изоморфизм функторов типа $\mathrm{Cl}_{H_1} \to \mathrm{Cl}_{H_2}\varphi$, где φ — изоморфизм категорий $\varphi\colon \mathrm{Var}(H_1)^0 \to \mathrm{Var}(H_2)^0$.

Далее мы даём все необходимые определения.

Примеры геометрических свойств и отношений

2.1. Геометрическая эквивалентность.

Определение 2. Алгебры H_1 и H_2 из Θ называются *геометрически эквивалентными*, если для каждого $W = W(X) \in \mathrm{Ob}\,\Theta^0$ и каждого T в W имеет место
$$T''_{H_1} = T''_{H_2}.$$
Это означает также, что $\mathrm{Cl}_{H_1} = \mathrm{Cl}_{H_2}$.

Очевидно, что если алгебры H_1 и H_2 геометрически эквивалентны, то категории $C_\Theta(H_1)$ и $C_\Theta(H_2)$ совпадают. Соответственно, категории $K_\Theta(H_1)$ и $K_\Theta(H_2)$ изоморфны.

Теорема 1. *Алгебры H_1 и H_2 геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда*
$$LSC(H_1) = LSC(H_2).$$

Здесь оператор L на классах алгебр определён в обычном локальном смысле, т. е. для каждого класса $\mathfrak{X}$ алгебра G принадлежит $L\mathfrak{X}$, если каждая конечно порождённая подалгебра H из G принадлежит $\mathfrak{X}$. Можно доказать, что $LSC(\mathfrak{X}) = \tilde{q}\,\mathrm{Var}(\mathfrak{X})$, где $\tilde{q}\,\mathrm{Var}(\mathfrak{X})$ — класс алгебр, определённый бесконечными квазитождествами класса $\mathfrak{X}$. Соответственно, $q\,\mathrm{Var}(\mathfrak{X})$ является квазимногообразием, порождённым классом $\mathfrak{X}$. Следовательно, геометрическая эквивалентность алгебр означает также, что
$$\tilde{q}\,\mathrm{Var}(H_1) = \tilde{q}\,\mathrm{Var}(H_2),$$
т. е. H_1 и H_2 *имеют одни и те же бесконечные квазитождества*.

2.2. Геометрически и логически нётеровы алгебры.

Определение 3. Алгебра $H \in \Theta$ называется *геометрически нётеровой*, если для произвольных W и T в W существует конечное $T_0 \subset T$, такое что
$$T''_H = (T_0)''_H.$$

Алгебра H геометрически нётерова тогда и только тогда, когда для любых W и T в W существует конечное подмножество $T_0 \subset T$, такое что
$$\Bigl(\bigwedge_{(w,w')\in T} (w \equiv w')\Bigr) \implies w_0 \equiv w'_0$$
выполняется в H тогда и только тогда, когда квазитождество
$$\Bigl(\bigwedge_{(w,w')\in T_0} (w \equiv w')\Bigr) \implies w_0 \equiv w'_0$$
выполняется в H. Здесь T_0 не зависит от (w_0, w'_0).

Определение 4. В случае, когда T_0 зависит от (w_0, w_0'), мы называем H *логически нётеровым*.

Понятие логической нётеровости означает также, что T'' совпадает с $\bigcup T''_\alpha$, где объединение взято по всем конечным подмножествам T_α в T.

Очевидно, если алгебра H геометрически нётерова, то H логически нётерова.

Алгебра H геометрически нётерова тогда и только тогда, когда в каждом $W = W(X)$ выполняется условие обрыва возрастающей цепи для H-замкнутых конгруэнций. Дуально, условие обрыва убывающих цепей для алгебраических множеств в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$ выполняется в геометрически нётеровых алгебрах. Алгебра H логически нётерова, если объединение направленного множества H-замкнутых конгруэнций также H-замкнуто.

Теорема 2 ([20]). *Пусть H_1 и H_2 — логически нётеровы алгебры. Они геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда $q\,\mathrm{Var}(H_1) = q\,\mathrm{Var}(H_2)$.*

Теорема 3 ([20]). *Если алгебра $H \in \Theta$ не является логически нётеровой, то существует ультрастепень H' алгебры H, такая что алгебры H и H' не являются геометрически эквивалентными. Однако эти алгебры имеют одинаковые элементарные теории и, в частности, одни и те же квазитождества.*

Эта теорема подводит нас к следующей общей проблеме.

> Для каких многообразий Θ существуют алгебры в Θ, не являющиеся логически нётеровыми? Как часто такие алгебры могут появляться?

Существование такого явления для групп доказано в работе К. Гобеля, С. Шелаха [9]. Идея их доказательства основана на существовании континуума различных 2-порождённых простых групп [13]. Для представлений групп результат доказан А. Цурковым [26]. Данный результат имеет место и для ассоциативных алгебр над полем [24]. В недавней работе Лихтмана и Пассмана [12] доказано существование континуума 3-порождённых простых ассоциативных алгебр.

Результаты и понятия, описанные выше, носят универсальный характер. В частности, они могут быть применены к многосортным алгебрам. Далее мы будем рассматривать конкретные многообразия Θ и будем формулировать проблемы в основном для них.

3. Геометрические свойства алгебр. Проблемы

Проблема 1. Пусть $G = A \,\mathrm{wr}\, B$ — сплетение некоторых групп A и B.

1. Когда G геометрически нётерово?
2. Когда G логические нётерово, но не геометрически нётерово?
3. Существуют ли группы $G = A \,\mathrm{wr}\, B$, не являющиеся логически нётеровыми для некоторых подходящих A и B?

Известно, что любая свободная группа $W(X)$ является геометрически нётеровой (Губа [10]). Более того, любая группа или алгебра, допускающая точное конечномерное представление, является геометрически нётеровой (Мясников, Ремесленников [20], Канель-Белов). Каждое конечномерное представление группы геометрически нётерово (Цурков [26]).

Проблема 2. Верно ли, что свободная алгебра Ли $W(X)$ геометрически нётерова?

Скорее всего, ответ отрицательный. Таким образом, возникает следующая проблема.

Проблема 3. Верно ли, что каждая свободная алгебра Ли $W(X)$ логически нётерова?

Проблема 4. Верно ли, что каждая свободная ассоциативная алгебра $W(X)$ геометрически нётерова?

Здесь, скорее всего, также ожидается отрицательный ответ.

Проблема 5. Верно ли, что любая свободная ассоциативная алгебра $W(X)$ логически нётерова?

Любые две свободные группы имеют одни и те же квазитождества. Аналогичный факт верен для свободных ассоциативных алгебр и для свободных алгебр Ли. Свободные группы также являются геометрически нётеровыми. Из геометрической нётеровости вместе с совпадением квазитождеств следует, что любые две свободные группы геометрически эквивалентны. Таким образом, свободные группы имеют одну и ту же логику квазитождеств и одну и ту же геометрию. Положительное решение проблем 3 и 5 значило бы, что тот же самый факт выполнен для свободных алгебр Ли и свободных ассоциативных алгебр.

Проблема 6. Верно ли, что существует континуум разных k-порождённых простых алгебр Ли? Здесь k фиксировано.

Проблема 7. Верно ли, что существует алгебра Ли, не являющаяся логически нётеровой?

Следующие проблемы посвящены решёткам алгебраических множеств.

Определение 5. Алгебра H называется *геометрически дистрибутивной*, если для каждого W решётка алгебраических множеств $\mathrm{Als}_H(W)$ (и, соответственно, решётка $\mathrm{Cl}_H(W)$) дистрибутивна.

Геометрически модулярные алгебры определяются аналогичным образом.

Проблема 8. Какие алгебры H геометрически дистрибутивны?

Эта проблема имеет смысл для групп, групп с фиксированной группой констант и для других многообразий Θ.

Проблема 9. Какие алгебры H геометрически модулярны?

Мы ввели выше категорию K_Θ алгебраических множеств без фиксированного множества H.

Проблема 10. Когда категории K_{Θ_1} и K_{Θ_2} изоморфны, а когда они эквивалентны? Рассмотрим отдельно случай, когда Θ_1 и Θ_2 являются подмногообразиями одного большего многообразия Θ.

Эта проблема должна быть связана с известными результатами Мак-Кензи [19] о категорной эквивалентности двух многообразий алгебр.

4. Другие геометрические отношения между алгебрами

Мы определили понятие геометрической эквивалентности алгебр H_1 и H_2. Теперь определим ещё два более общих понятия.

4.1. Для начала напомним определение изоморфизма функторов.

Пусть даны два функтора $\varphi_1, \varphi_2 \colon C_1 \to C_2$ категорий C_1, C_2. *Гомоморфизм* (*естественное преобразование*) *функторов* $s \colon \varphi_1 \to \varphi_2$ — это функция, связывающая морфизм в C_2, обозначенный через $s_A \colon \varphi_1(A) \to \varphi_2(A)$, с каждым объектом A категории C_1. Для каждого $\nu \colon A \to B$ в C_1 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(A) & \xrightarrow{s_A} & \varphi_2(A) \\ {\scriptstyle \varphi_1(\nu)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2(\nu)} \\ \varphi_1(B) & \xrightarrow{s_B} & \varphi_2(B) \end{array}$$

в случае ковариантных φ_1 и φ_2. Для контравариантных φ_1 и φ_2 соответствующая диаграмма имеет вид

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1(B) & \xrightarrow{s_B} & \varphi_2(B) \\ {\scriptstyle \varphi_1(\nu)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2(\nu)} \\ \varphi_1(A) & \xrightarrow{s_A} & \varphi_2(A) \end{array}$$

Обратимый гомоморфизм $s \colon \varphi_1 \to \varphi_2$ называется *изоморфизмом* (*естественным изоморфизмом*) *функторов*. Свойство быть изоморфизмом выполняется, если $s_A \colon \varphi_1(A) \to \varphi_2(A)$ является изоморфизмом в C_2 для любого A.

Определение 6. Алгебры H_1 и H_2 называются *геометрически подобными*, если существует такой автоморфизм $\varphi \colon \Theta^0 \to \Theta^0$, что имеется *корректный изоморфизм* функторов $\alpha(\varphi) \colon \mathrm{Cl}_{H_1} \to \mathrm{Cl}_{H_2}\varphi$.

Здесь корректность означает совместность с автоморфизмом φ. Именно, пусть даны $s_1, s_2 \colon W_1 \to W_2$ и T H_1-замкнуто в W_2. Обозначим $T^* = \alpha(\varphi)_{W_1}(T)$. Имеются канонические гомоморфизмы $\mu_T \colon W_2 \to W_2/T$ и $\mu_{T^*} \colon \varphi(W_2) \to \varphi(W_2)/T^*$. Корректность означает, что $\mu_T s_1 = \mu_T s_2$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mu_{T^*}\varphi(s_1) = \mu_{T^*}\varphi(s_2)$.

Определение 7. Алгебры H_1 и H_2 называются *геометрически совместными*, если существует автоэквивалентность $\Theta^0 \;{}_{\psi}\!\leftrightarrows^{\varphi}\; \Theta^0$, такая что имеются естественные преобразования функторов

$$\alpha(\varphi)\colon \mathrm{Cl}_{H_1} \to \mathrm{Cl}_{H_2}\varphi, \quad \alpha(\psi)\colon \mathrm{Cl}_{H_2} \to \mathrm{Cl}_{H_1}\psi,$$

совместные (в том же смысле, что и раньше) с φ и ψ.

4.2. Рассмотрим также *корректные изоморфизмы* категорий

$$C_\Theta(H_1) \to C_\Theta(H_2).$$

Это изоморфизмы, индуцирующие автоморфизм категории Θ^0. Корректные изоморфизмы категорий $K_\Theta(H_1) \to K_\Theta(H_2)$ определяются аналогичным образом.

Теорема 4. *Предположим, что* $\operatorname{Var} H_1 = \operatorname{Var} H_2 = \Theta$. *Категории* $K_\Theta(H_1)$ *и* $K_\Theta(H_2)$ *корректно изоморфны тогда и только тогда, когда* H_1 *и* H_2 *геометрически подобны.*

Теорема 5. *Предположим, что* $\operatorname{Var} H_1 = \operatorname{Var} H_2 = \Theta$. *Категории* $K_\Theta(H_1)$ *и* $K_\Theta(H_2)$ *корректно эквивалентны тогда и только тогда, когда* H_1 *и* H_2 *геометрически совместны.*

Корректность здесь означает также, что решётки алгебраических множеств для H_1 и H_2 совпадают.

Эти теоремы носят универсальный характер. Каждая из них может быть сужена для некоторых частных многообразий Θ. Это сужение очень сильно зависит от описания группы $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$.

Проблема 11. Рассмотреть аналогичные проблемы без предположения о корректности изоморфизмов и эквивалентностей категорий.

5. $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$

Все автоморфизмы категории Θ^0 известны в следующих случаях (см. [5, 11, 14—16, 18, 24]):

1) группы;
2) группы со свободной группой констант Grp-F;
3) ассоциативные и коммутативные алгебры Com-P;
4) ассоциативные алгебры;
5) алгебры Ли;
6) K-модули, K — произвольное кольцо;
7) полугруппы.

В ситуации алгебр Ли описание всех автоморфизмов использует описание группы $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(W(x,y))$. Это наблюдение мотивирует следующую задачу.

Проблема 12. Изучить группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(W(X))$, где $W(X)$ — свободная алгебра Ли над конечным множеством X.

Проблема 13. Изучить группу $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$ для различных интересных подмногообразий многообразия всех групп. Например, для многообразий $\mathfrak{N}_c$, $\mathfrak{A}^2$ и т. д.

Проблема 14. Изучить группу $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$ для различных интересных подмногообразий многообразия всех алгебр Ли.

Проблема 15. Изучить группу $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$ для различных интересных подмногообразий многообразия всех ассоциативных алгебр.

6. Алгебры с одинаковой алгебраической геометрией

Напомним, что мы рассматриваем понятие совпадения геометрий в следующих двух вариантах:

1) категории $K_\Theta(H_1)$ и $K_\Theta(H_2)$ изоморфны;
2) категории $K_\Theta(H_1)$ и $K_\Theta(H_2)$ эквивалентны.

В действительности второй случай означает, что категории алгебраических многообразий $\tilde{K}_\Theta(H_1)$ и $\tilde{K}_\Theta(H_2)$ изоморфны.

Рассмотрим специальные многообразия Θ. Проблема совпадения геометрий решена для следующих случаев:

1) для классической алгебраической геометрии [5];
2) для некоммутативной алгебраической геометрии, связанной с многообразием всех ассоциативных алгебр [16];
3) для алгебраической геометрии в многообразии всех алгебр Ли [24];
4) для геометрии в многообразии всех групп [24];
5) для многообразия Grp-F [6].

Проблема 16. Исследовать совпадение геометрий для некоторых подмногообразий многообразия всех групп.

Проблема 17. Исследовать совпадение геометрий для некоторых подмногообразий многообразия всех алгебр Ли.

Проблема 18. Исследовать совпадение геометрий для некоторых подмногообразий многообразия всех ассоциативных алгебр. Например, для подмногообразия Θ, заданного единственным полиномиальным тождеством.

Решение этих проблем напрямую зависит от решения проблемы описания группы $\mathrm{Aut}(\Theta^0)$.

7. Совпадение решёток алгебраических множеств

Рассмотрим следующие варианты определения совпадения решёток:

1) совпадение функторов Cl_{H_1} и Cl_{H_2};
2) изоморфизм функторов Cl_{H_1} и Cl_{H_2};

3) функтор Cl_{H_1} изоморфен функтору $\mathrm{Cl}_{H_2}\varphi$, где φ — автоморфизм категории Θ^0.

В первом случае алгебры H_1 и H_2 геометрически эквивалентны, а решётки в W, соответствующие H_1 и H_2, совпадают.

Во втором случае изоморфизм функторов $\alpha\colon \mathrm{Cl}_{H_1} \to \mathrm{Cl}_{H_2}$ обеспечивает изоморфизм соответствующих решёток для каждого W. Кроме того, имеется совместность с морфизмами.

В третьем случае для каждого W существует изоморфизм решёток $\mathrm{Cl}_{H_1}(W)$ и $\mathrm{Cl}_{H_2}(\varphi(W))$.

Проблема 19. Для каких алгебр H_1 и H_2 существует изоморфизм функторов Cl_{H_1} и Cl_{H_2}?

Проблема 20. Для каких алгебр H_1 и H_2 существует изоморфизм между Cl_{H_1} и $\mathrm{Cl}_{H_2}\varphi$ для некоторого $\varphi\colon \Theta^0 \to \Theta^0$?

Если алгебры H_1 и H_2 геометрически подобны, то такой изоморфизм существует. Таким образом, если H_1 и H_2 имеют одинаковую геометрию, то соответствующие решётки совпадают. Обратное утверждение неверно, и это делает проблему более интересной.

Проблемы, описанные выше, кажутся новыми также и для классической ситуации $\mathrm{Com}\text{-}P$, где L_1 и L_2 — два расширения базисного поля P.

В частности, что можно сказать о L_1 и L_2, если для каждого W решётки $\mathrm{Cl}_{L_1}(W)$ и $\mathrm{Cl}_{L_2}(W)$ изоморфны?

Совпадение этих решёток означает, что L_1 и L_2 геометрически эквивалентны. Следовательно, в этом случае логика квазитождеств для L_1 и L_2 одинакова. Однако нам интересны условия, обеспечивающие изоморфизм решёток.

8. Представления

8.1. Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Рассмотрим категорию-многообразие $\Theta = \mathrm{Rep}\text{-}K$. Основными источниками по данной теме являются [2, 21, 27, 28].

Объекты этой категории — представления (V, G), где V — K-модуль, а G — группа, действующая на V. Такие (V, G) являются двусортными алгебрами.

Действие G на V обозначается через $\circ$, и для каждых $a \in V$ и $g \in G$ мы имеем $a \circ g \in V$. Действие $\circ$ удовлетворяет естественным тождествам.

Морфизмы в $\Theta = \mathrm{Rep}\text{-}K$ имеют вид

$$\mu = (\alpha, \beta)\colon (V_1, G_1) \to (V_2, G_2),$$

где $\alpha \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$, $\beta \in \mathrm{Hom}(G_1, G_2)$ и $(a \circ g)^\alpha = a^\alpha \circ g^\beta$.

Заметим, что $\mathrm{Ker}\,\mu = (\mathrm{Ker}\,\alpha, \mathrm{Ker}\,\beta) = (V_0, H)$ является отношением конгруэнтности в (V_1, G_1) в следующем смысле: V_0 является G_1-инвариантным подмодулем в V_1 и H действует тривиально в V_1/V_0. Имеем фактор-представление

$(V_1, G_1)/(V_0, H) = (V_1/V_0, G/H)$ с естественной теоремой о гомоморфизмах. Для данного множества $\mu_i = (\alpha_i, \beta_i)\colon (V_1, G_1) \to (V_2, G_2)$, $i \in l$, имеем

$$\bigcap \operatorname{Ker} \mu_i = \Big(\bigcap \operatorname{Ker} \alpha_i, \bigcap \operatorname{Ker} \beta_i\Big).$$

Свободные объекты W в категории Θ обозначаются через $W = W(X, Y)$, где X и Y — пары множеств. Здесь

$$W(X, Y) = (XKF(Y), F(Y)),$$

где $F = F(Y)$ — свободная группа над Y, KF — групповая алгебра, XKF — свободный KF-модуль над множеством X.

Для каждого $w \in XKF$, $w = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$, $u_i \in KF$ и $f \in F$, имеем

$$w \circ f = x_1(u_1 f) + \ldots + x_n(u_n f).$$

Это есть свободное представление (в категорном смысле) над двусортным множеством (X, Y). Двусортное равенство $w \equiv 0$ рассматривается как *равенство действия*, в то время как $f \equiv 1$ — это групповое равенство.

В [2] были рассмотрены многообразия представлений, определяемые тождествами действия. Эти многообразия лежат в Rep-K и могут определяться тождествами типа $x \circ u \equiv 0$.

8.2. В Rep-K можно рассматривать различные операции: прямое и декартово произведения, свободные произведения и копроизведения, подпредставления, факторы и т. д. Рассмотрим следующие две специальные конструкции.

Треугольные произведения. Для данных представлений (V_1, G_1) и (V_2, G_2) рассмотрим их треугольное произведение $(V_1, G_1) \triangledown (V_2, G_2)$. Это представление $(V_1 + V_2, G)$, где $g \in G$ имеет вид

$$g = \begin{bmatrix} g_2 & \varphi g_1 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_1 \end{bmatrix},$$

$g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, $\varphi \in \mathrm{Hom}(V_2, V_1)$.

Для $a \in V_1$, $b \in V_2$ имеем $a \circ g = a \circ g_1$, $b \circ g = b \circ g_2 + (b\varphi) \circ g_1$. Здесь (V_1, G) связано с (V_1, G_1), а $(V_1 + V_2/V_1, G)$ — с (V_2, G_2).

Рассмотрим также сплетение $(V, H) \operatorname{wr} G = (V^G, H \operatorname{wr} G)$.

8.3. В Rep-K мы рассматриваем общие многообразия и многообразия, определяемые тождествами действия. Для последних рассмотрим полугруппу $\mathfrak{M}$ таких многообразий $\mathfrak{X}$. Умножение в $\mathfrak{M}$ задаётся правилом $(V, G) \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, если для некоторого G-инвариантного подмодуля $V_0 \subset V$ имеет место $(V_0, G) \in \mathfrak{X}_1$, $(V/V_0, G) \in \mathfrak{X}_2$.

Если K — поле, то полугруппа $\mathfrak{M}$ является свободной полугруппой, и мы имеем

$$\mathrm{Var}((V_1, G_1) \triangledown (V_2, G_2)) = \mathrm{Var}(V_1, G_1)\,\mathrm{Var}(V_2, G_2).$$

Пусть теперь $\mathfrak{N}$ — полугруппа групповых многообразий. Для $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}$ и $\Theta \in \mathfrak{N}$ рассмотрим произведение $\mathfrak{X} \times \Theta \in \mathfrak{M}$, определённое следующим образом: $(V, G) \in \mathfrak{X} \times \Theta$, если для некоторой инвариантной подгруппы H в G

справедливо $(V,H) \in \mathfrak{X}$, $G/H \in \Theta$. Теперь $\mathfrak{N}$ действует в $\mathfrak{M}$ как полугруппа эндоморфизмов из $\mathfrak{M}$.

Основная теорема этой теории утверждает, что действие $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$ свободно. Это означает также, что каждое многообразие $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{M}$ может быть однозначно представлено в виде

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1 \times \Theta_1)\ldots(\mathfrak{X}_n \times \Theta_n),$$

где все $\mathfrak{X}_i$ неприводимы.

Треугольные произведения и сплетения играют важнейшую роль в доказательстве приведённой выше теоремы.

9. Алгебраическая геометрия представлений

9.1. Рассмотрим $\mathrm{Hom}(W,(V,G))$ как *аффинное пространство* над данным представлением (V,G). Здесь $W = W(X,Y)$ является свободным представлением над конечными множествами X и Y. *Точками* являются гомоморфизмы $\mu\colon W \to (V,G)$. Возьмём $T = (T_1,T_2)$, где T_1 — множество равенств действия в W, а T_2 — множество групповых равенств.

Обозначим

$$\begin{cases} T'_{(V,G)} = A = \{\mu = (\alpha,\beta)\colon W \to (V,G) \mid T_1 \subset \operatorname{Ker}\alpha,\ T_2 \subset \operatorname{Ker}\beta\}, \\ A'_W = T = \bigcap\limits_{\mu\in A} \operatorname{Ker}\mu = \left(\bigcap\limits_{\alpha}\operatorname{Ker}\alpha, \bigcap\limits_{\beta}\operatorname{Ker}\beta\right), \\ T_1 = \bigcap \operatorname{Ker}\alpha, \quad T_2 = \bigcap \operatorname{Ker}\beta. \end{cases}$$

Пусть $\mathrm{Id}_G(F)$ — вербальная подгруппа всех тождеств группы G в $F = F(Y)$. В каждом случае имеем $\mathrm{Id}_G(F) \subset T_2$.

Множество A вида $A = T'$ является *алгебраическим множеством*, а $T = A'$ является $(V,G))$-замкнутой конгруэнцией в W. Определения, введённые выше, уточняют общие определения из универсальной алгебраической геометрии для случая многообразия-категории групповых представлений. Некоторые результаты универсальной алгебраической геометрии для многосортных алгебр Θ применимы и в данном случае.

9.2. Теперь рассмотрим алгебраическую геометрию в представлениях, связанную с уравнениями действия.

Для данных $W = W(X,Y) = (XKF,F)$, где $F = F(Y)$, возьмём множество $T \subset XKF$. Мы рассматриваем T как множество равенств действия.

Введём обозначения

$$\begin{cases} T^v = A = \{\mu = (\alpha,\beta)\colon W \to (V,G) \mid T \subset \operatorname{Ker}\alpha\}, \\ A^v = T = \bigcap\limits_{\alpha} \operatorname{Ker}\alpha. \end{cases}$$

Здесь $A = T^v$ — *алгебраическое множество, определяемое равенствами действия*, и $T = A^v$ — *(V,G)-замкнутый F-инвариантный подмодуль в XKF, определяемый равенствами действия*.

Легко видеть, что алгебраическое множество A определяется уравнениями действия тогда и только тогда, когда оно содержит все точки типа $(0,\beta)$. Отсюда следует, что если A определяется уравнениями действия, то

$$A' = (A^v, \mathrm{Id}_G(F)).$$

Как и выше, можно определить понятие геометрически эквивалентных представлений, а также понятия геометрически и логически нётеровых представлений. Эти определения относятся как к общему случаю, так и к случаю действия.

Мы можем рассмотреть также категории $K_\Theta(V,G)$ и $C_\Theta(V,G)$ для общего случая и категории $K_\Theta^{\mathrm{at}}(V,G)$ и $C_\Theta^{\mathrm{at}}(V,G)$ для случая действия. Здесь либо $\Theta = \mathrm{Rep}\text{-}K$, либо Θ есть подмногообразие в $\mathrm{Rep}\text{-}K$.

10.3. Снова приведём открытые проблемы.

Проблема 21. Когда представления (V_1,G_1) и (V_2,G_2) имеют одну и ту же геометрию?

Этот вопрос относится к общей ситуацией и к случаю действия.

С этой проблемой связаны проблемы понятий геометрически подобных и геометрически совместных представлений. Более того, эти последние понятия связаны с автоморфизмами и автоэквивалентностями категории $\Theta^0 = (\mathrm{Rep}\text{-}K)^0$.

Таким образом, имеем следующую проблему.

Проблема 22. Изучить группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{Rep}\text{-}K)^0$.

Напомним, что автоморфизм категории C называется *внутренним*, если он изоморфен единичному автоморфизму 1_C. Внутренние автоморфизмы составляют подгруппу в группе $\mathrm{Aut}(\mathrm{Rep}\text{-}K)^0$.

Можно говорить также о полувнутренних автоморфизмах. В их определении присутствуют автоморфизмы σ кольца K. Эти автоморфизмы образуют подгруппу в группе $\mathrm{Aut}(\mathrm{Rep}\text{-}K)^0$. Кроме того, рассматриваем ещё особый зеркальный автоморфизм δ, основанный на переходе к противоположной группе и противоположному представлению.

Задача состоит в том, чтобы показать, что группа $\mathrm{Aut}(\mathrm{Rep}\text{-}K)^0$ порождается названными автоморфизмами.

Повторяя рассуждения из [24], можно доказать, что если подобие двух представлений (V_1,G_1) и (V_2,G_2) связано с внутренним автоморфизмом φ категории $(\mathrm{Rep}\text{-}K)^0$, то представления геометрически эквивалентны в общем смысле. Отсюда следует, что они также эквивалентны по действию.

Проблема 23. Какова связь между представлениями (V_1,G_1) и (V_2,G_2), если они геометрически подобны и подобие основано на полувнутреннем автоморфизме φ категории $(\mathrm{Rep}\text{-}K)^0$?

Эта проблема связана со следующей.

Проблема 24. Исследовать группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(KF,F))$.

Обсудим эту проблему более детально. Для каждого представления (V, G) мы имеем группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(V, G))$. Пусть $\xi = (s, \tau)$ — обратимый элемент полугруппы $\mathrm{End}(V, G)$. Тогда ξ также является автоморфизмом представления (V, G). Ему соответствует внутренний автоморфизм $\hat{\xi}$ полугруппы $\mathrm{End}(V, G)$.

Для каждого $\mu = (\alpha, \beta) \in \mathrm{End}(V, G)$ имеем

$$\hat{\xi}(\mu) = \xi\mu\xi^{-1} = (s\alpha s^{-1}, \tau\beta\tau^{-1}).$$

Все такие $\hat{\xi}$ образуют нормальную подгруппу в группе $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(V, G))$.

Рассмотрим пары $\xi = (s, \tau)$, где s — полуавтоморфизм K-модуля V, а $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$. Существует такой автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$, что для любых $\lambda \in K$ и $a \in V$ мы имеем

$$s(\lambda a) = \lambda^\tau s(a).$$

Кроме того, $(a \circ g)^s = a^s \circ g^\tau$ для любых a и g. Здесь ξ — полуавтоморфизм представления (V, G), он не принадлежит полугруппе $\mathrm{End}(V, G)$. Тем не менее ξ индуцирует автоморфизм $\hat{\xi}$ этой полугруппы. Здесь $\hat{\xi}$ — полувнутренний автоморфизм полугруппы $\mathrm{End}(V, G)$ и все такие автоморфизмы образуют подгруппу в $\mathrm{Aut}(V, G)$.

Пусть, далее, φ — произвольный автоморфизм полугруппы $\mathrm{End}(V, G)$. Для каждого $\mu = (\alpha, \beta) \in \mathrm{End}(V, G)$ имеем

$$\varphi(\mu) = (\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu)).$$

Здесь $\varphi_1\colon \mathrm{End}(V, G) \to \mathrm{End}\, V$, $\varphi_2\colon \mathrm{End}(V, G) \to \mathrm{End}\, V$ — гомоморфизмы полугрупп.

Можно найти условия на гомоморфизмы φ_1 и φ_2, обеспечивающие гомоморфизм φ полугруппы $\mathrm{End}(V, G)$. Тем не менее непонятно, как вывести из этих условий «реальные конструкции».

Всё вышесказанное может быть применено к представлениям типа (KG, G) и, в частности, к (KF, F). В этом важном случае можно учитывать теорему Форманека [8], утверждающую, что все автоморфизмы полугруппы $\mathrm{End}(F)$ внутренние. Можно ли установить, что все автоморфизмы полугруппы $\mathrm{End}(KF, F)$ полувнутренние или вида $\varphi\delta$, где φ полувнутренний? Или же можно построить контрпример?

Теперь рассмотрим проблемы другого типа. Все эти проблемы должны быть рассмотрены независимо для общего случая и для случая действия.

Проблема 25. Рассмотреть представления (V_1, G_1) и (V_2, G_2) с точки зрения совпадения соответствующих решёток алгебраических многообразий.

Проблема 26. Верно ли, что представление (XKF, F) геометрически нётерово или логически нётерово?

Напомним, что группа F геометрически нётерова.

Проблема 27. Рассмотреть понятия геометрической и логической нётеровости по отношению к треугольным произведениям представлений и сплетениям представлений и групп.

Проблема 28. Пусть группа G не является логически нётеровой. Верно ли то же самое для групповой алгебры PG или для регулярного представления (PG, G) в ситуации геометрии действия?

Литература

[1] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[2] Плоткин Б. И., Вовси С. М. Многообразия представлений групп: Общая теория, связи и приложения. — Рига: Зинатне, 1983.

[3] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups // J. Algebra. — 1999. — Vol. 219. — P. 16—79.

[4] Baumslag G., Myasnikov A., Roman'kov V. Two theorems about equationally Noetherian groups // J. Algebra. — 1997. — Vol. 194. — P. 654—664.

[5] Berzins A. Geometrical equivalence of algebras // Internat. J. Algebra Comput. — 2001. — Vol. 11, no. 4. — P. 447—456.

[6] Berzins A., Plotkin B., Plotkin E. Algebraic geometry in varieties of algebras with the given algebra of constants // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 3. — P. 4039—4070.

[7] Dyer J., Formanek E. The automorphism group of a free group is complete // J. London Math. Soc. (2). — 1975. — Vol. 11, no. 2. — P. 181—190.

[8] Formanek E. A question of B. Plotkin about semigroup of endomorphisms of a free group // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130. — P. 935—937.

[9] Gobel R., Shelah S. Radicals and Plotkin's problem concerning geometrically equivalent groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130. — P. 673—674.

[10] Guba V. Equivalence of infinite systems of equations in free groups and semigroups to finite systems // Mat. Zametki. — 1986. — Vol. 40, no. 3. — P. 321—324.

[11] Katsov E., Lipyansky R., Plotkin B. Automorphisms of categories of free modules, free semimodules, and free Lie modules. — To appear.

[12] Lichtman A., Passman D. Finitely generated simple algebras: A question of B. I. Plotkin // Israel J. Math. — 2004. — Vol. 143. — P. 341—359.

[13] Lyndon R. C., Shupp P. E. Combinatorial Group Theory. — Springer, 1977.

[14] Mashevitzky G. The group of automorphisms of the category of free associative algebras. — To appear.

[15] Mashevitzky G., Plotkin B., Plotkin E. Automorphisms of categories of free algebras of varieties // Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 8. — P. 1—10.

[16] Mashevitzky G., Plotkin B., Plotkin E. Automorphisms of categories of free Lie algebras // J. Algebra. — 2004. — Vol. 282, no. 2. — P. 490—512.

[17] Mashevitzky G., Plotkin B., Plotkin E. Associative Algebras with the Same Algebraic Geometry. — Preprint.

[18] Mashevitzky G., Shein B. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131. — P. 1655—1660.

[19] McKenzie R. An algebraic version of categorical equivalence for varieties and more general algebraic categories // Logic and Algebra (Pontignano, 1994). — New York: Marcel Dekker, 1996. — P. 211—243. — Lectures Notes in Pure and Appl. Math. Vol. 180.

[20] Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. I // J. Algebra. — 1999. — Vol. 219, no. 1. — P. 16—79.

[21] Plotkin B. I. Varieties of group representations // Usp. Mat. Nauk. — 1977. — Vol. 32, no. 5. — P. 3—68.

[22] Plotkin B. Some notions of algebraic geometry in universal algebra // Algebra and Analysis. — 1997. — Vol. 9, no. 4. — P. 224—248.

[23] Plotkin B. Seven Lectures on the Universal Algebraic Geometry. — Preprint. — 2002. — Arxiv:math, GM/0204245.

[24] Plotkin B. Algebras with the same (algebraic) geometry // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2003. — Т. 242. — С. 176—207.

[25] Plotkin B. Action-type axiomatized classes of group representations. — To appear.

[26] Plotkin B., Tsurkov A. Action-type algebraic geometry in group representations. — To appear.

[27] Vovsi S. M. Triangular Products of Group Representations and Their Applications. — Birkhäuser, 1981. — Progress in Mathematics. Vol. 17.

[28] Vovsi S. M. Topics in Varieties of Group Representations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. — London Math. Soc. Lecture Notes. Vol. 163.