Вербальные произведения магнусовых групп

А. В. СЫРЦОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: syrtsovs@rambler.ru

УДК 512.543.2+512.543.5+512.554.33

Ключевые слова: магнусовы группы, многообразия групп и алгебр Ли, вербальные произведения групп и алгебр Ли, формула Кемпбелла—Хаусдорфа.

Аннотация

Класс магнусовых групп, принадлежащих многообразию $\mathfrak{AN}_c$ всех групп с абелевым $c+1$ членом нижнего центрального ряда, где $c \geqslant 1$, замкнут относительно операции $\mathfrak{AN}_c$-произведения.

Abstract

A. V. Syrtsov, Relatively free products of Magnus groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 199—213.

The class of Magnus $\mathfrak{AN}_c$-groups is closed under the operation of the $\mathfrak{AN}_c$-product.

Введение

В работе изучаются $\mathfrak{AN}_c$-свободные произведения магнусовых групп. Напомним, что группа G называется *магнусовой группой*, если

1) $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i G = 1$;
2) $\gamma_i G/\gamma_{i+1} G$ при $i = 1, 2, \ldots$ — абелевы группы без кручения.

Иногда вместо свойства 2 рассматривают более сильное свойство

3) $\gamma_i G/\gamma_{i+1} G$ при $i = 1, 2, \ldots$ — свободные абелевы группы.

Будем говорить, что многообразие $\mathfrak{B}$ обладает свойством $(*)$, если класс магнусовых $\mathfrak{B}$-групп замкнут относительно операции $\mathfrak{B}$-произведения. Согласно результату А. Л. Шмелькина, многообразие $\mathfrak{N}_c$ всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше c обладает свойством $(*)$ (см. [4]). Д. И. Эйделькиндом в [6] доказано, что многообразие $\mathfrak{A}^2$ всех метабелевых групп также обладает свойством $(*)$. Известно, что многообразие $\mathfrak{N}_{c(1)}\mathfrak{N}_{c(2)} \ldots \mathfrak{N}_{c(n)}$ всех полинильпотентных групп, соответствующих последовательности $c(1), \ldots, c(n)$, где либо $n > 2$, либо $c(1) > 1$, не обладает свойством $(*)$ (см. [6]). В [6] сформулирован вопрос: верно ли, что многообразие $\mathfrak{AN}_c$ всех групп с абелевым $c+1$

членом нижнего центрального ряда обладает свойством $(*)$. В настоящей работе показывается, что ответ на этот вопрос положителен.

Основные методы, используемые в работе, разработаны в статьях [3—6].

Автор благодарен А. Л. Шмелькину за привлечения внимания к данной задаче и помощь в работе.

§ 1. Обозначения, предварительные замечания

В работе широко используется теория алгебр Ли (см. [1, 3—6]). Все рассматриваемые в работе алгебры Ли — алгебры Ли над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел.

Пусть W — произвольное множество, на котором задана функция Wt, принимающая значения $1, 2, \ldots$. Назовём эту функцию весовой функцией. Если $x \in W$ и $\mathrm{Wt}\, x = n$, то будем говорить, что вес x равен n. В дальнейшем используются следующие обозначения:

$$W_n = \{w \in W \mid \mathrm{Wt}\, w = n\}, \quad \bar{W} = \bigsqcup_{i=1}^{c} W_i, \quad \hat{W} = \bigsqcup_{i \geqslant c+1} W_i,$$

где $c > 1$ будет константой на протяжении всей статьи. Будем всегда считать, что на W задан некоторый порядок, согласованный с весом, т. е. задана такая упорядоченность, что элементы большего веса следуют за элементами меньшего веса.

Пусть X — произвольная нильпотентно аппроксимируемая группа (алгебра Ли). Определим вес Wt элемента $x \in X$, полагая $\mathrm{Wt}\, x = n$, если $x \in \gamma_n X \setminus \gamma_{n+1} X$ ($x \in X^n \setminus X^{n+1}$).

Пусть R — нильпотентно аппроксимируемая алгебра Ли, E — база R. Будем говорить, что база E согласована с нижним центральным рядом алгебры R, если E_n — база алгебры R^n по модулю R^{n+1} при любом натуральном числе n.

Пусть G — нильпотентно аппроксимируемая группа, W — подмножество G. Говорят, что W — база группы G, если W_n — максимальная линейно независимая подсистема группы $\gamma_n G$ по модулю $\gamma_{n+1} G$ при любом натуральном числе n (см. [4]).

Под словом мы будем подразумевать неассоциативное слово от некоторых символов. Равенство слов u и v будем обозначать $u \equiv v$. Если на множестве символов, входящих в слово, определён вес, то определим вес этого слова как сумму весов входящих в него символов.

Слово вида $(\ldots(a_1 a_2) \ldots a_n)$ будем записывать в сокращённой форме как $a_1 a_2 \ldots a_n$. Слово вида

$$x \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{s_1} \underbrace{y_2 \cdots y_2}_{s_2} \cdots \underbrace{y_k \cdots y_k}_{s_k},$$

где x, y_i — некоторые слова, будем обозначать через $x y_1^{[s_1]} \ldots y_k^{[s_k]}$.

Пусть W — произвольное множество слов от элементов группы (алгебры Ли) X. Обозначим через $(W)_{\mathrm{Gr}}$ ($(W)_{\mathrm{Lie}}$) образ естественного отображения $W \to X$ (каждое слово отображаем в соответствующий коммутатор). При этом образ элемента $w \in W$ обозначим через $(w)_{\mathrm{Gr}}$ ($(w)_{\mathrm{Lie}}$). В тех случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, мы будем отождествлять W с $(W)_{\mathrm{Gr}}$ ($(W)_{\mathrm{Lie}}$).

Отметим, что если множество X является и группой, и алгеброй Ли, W — некоторое множество слов от элементов X, то определено как множество $(W)_{\mathrm{Lie}} \subset X$, так и множество $(W)_{\mathrm{Gr}} \subset X$.

Пусть $\psi\colon X \to Z$ — гомоморфизм из группы (алгебры Ли) X в группу (алгебру Ли) Z, w — некоторое слово от элементов X. Определим $w\psi$ как слово, получаемое из w заменой каждого символа x, входящего в w, символом $x\psi$.

Будем обозначать через $\mathbf{Q}[M]$ $\mathbf{Q}$-линейную оболочку множества M.

§ 2. База $\mathfrak{AN}_c$-свободных произведений алгебр Ли

Пусть $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$ — $\mathfrak{AN}_c$-свободное произведение нильпотентно аппроксимируемых алгебр Ли A и B, принадлежащих многообразию $\mathfrak{AN}_c$, E (F) — база A (B), согласованная с нижним центральным рядом (н. ц. р.).

Главная задача этого параграфа состоит в построении из $E \sqcup F$ некоторой базы алгебры $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$, согласованной с н. ц. р.

Пусть $A * B$ — свободное произведение алгебр A и B, $[A,B]$ — декартова подалгебра алгебры $A * B$. Напомним (см. [6]), что множество $Y = Y(E,F)$ слов вида

$$e_1 f_1 f_2 \dots f_n e_2 \dots e_m$$
$$(e_i \in E,\ f_i \in F,\ n \geqslant 1,\ m \geqslant 1,\ e_1 \leqslant \dots \leqslant e_m,\ f_1 \leqslant \dots \leqslant f_n)$$

образует свободное порождающее множество свободной алгебры $[A,B]$.

Определим вес элемента из Y как сумму весов входящих в него элементов из E и F. Упорядочим Y так, чтобы из $\operatorname{Wt} y_1 > \operatorname{Wt} y_2$ следовало $y_1 > y_2$.

Построим такое семейство правильных слов $R = R(Y(E,F))$ (см. [2]) из элементов Y, что из $\operatorname{Wt} r_1 > \operatorname{Wt} r_2$ следует $r_1 > r_2$, где $r_1, r_2 \in R$, вес слова от Y определяется как сумма весов входящих в него элементов из Y.

Пусть I — идеал в $A * B$, являющийся линейной оболочкой тех элементов из R, вес которых не меньше $c+1$. Пусть $L = L(E,F)$ — подмножество R, состоящее из элементов, вес которых не больше c. Пусть $K = K(E,F)$ — множество тех элементов k из R, которые имеют вес не меньше $c+1$ и если $k \equiv uv$, где $u, v \in R$, то $\operatorname{Wt} v \leqslant c$. Из результатов [6] следует, что K — свободное порождающее множество идеала I. Значит, K — база I по модулю I^2. Таким образом, справедливы следующие утверждения:

а) $P(E,F) = E \sqcup F \sqcup L \sqcup K$ — база $A * B$ по модулю I^2;

б) если $A, B \in \mathfrak{N}_c$, то $P(E,F)$ — база $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$ (см. [6]).

Пусть $M = M(E, F)$ — множество слов вида

$$\hat{e} f_1 \dots f_n l_1 \dots l_m$$

$$(\hat{e} \in \hat{E},\ f_s \in \bar{F},\ l_t \in L,\ f_1 \leqslant \dots \leqslant f_n,\ l_1 \leqslant \dots \leqslant l_m,\ n \geqslant 0,\ m \geqslant 0).$$

Теорема 1. *Множество M образует базу алгебры $(A^{c+1})^{A *_{\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c} B}$.*

Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. *Если $B \in \mathfrak{N}_c$, то алгебра $A *_{\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c} B$ естественным образом изоморфна фактор-алгебре $A * B/([A^{c+1}, I] + I^2)$.*

Доказательство. Очевидно, что $A *_{\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c} B$ естественным образом изоморфна алгебре $A * B/((A * B)^{c+1})^2$. Также очевидно, что $(A * B)^{c+1} = A^{c+1} + I$, а значит, $((A * B)^{c+1})^2 = [A^{c+1}, I] + I^2$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $g = ul_1 \dots l_n \in A * B$, где $u \in I$, $l_i \in L$. Тогда элемент g представи́м по модулю I^2 в виде линейной комбинации элементов вида $u\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_k$, где $\tilde{l}_j \in L$, $\tilde{l}_1 \leqslant \dots \leqslant \tilde{l}_k$, $\tilde{l}_1 = \min\limits_j \mathrm{Wt}\, \tilde{l}_j \geqslant \min\limits_i \mathrm{Wt}\, l_i$.*

Доказательство. Пусть $l_i > l_{i+1}$ для некоторого i. В $A * B$ выполнено равенство

$$ul_1 \dots l_i l_{i+1} \dots l_n = ul_1 \dots l_{i+1} l_i \dots l_n + ul_1 \dots [l_i l_{i+1}] \dots l_n.$$

Первое слагаемое правой части равенства получено из g перестановкой l_i и l_{i+1}, второе по модулю I^2 представимо в виде линейной комбинации элементов вида $u\bar{l}_1 \dots \bar{l}_{n-1}$, где $\bar{l}_j \in L$, $\min\limits_j \mathrm{Wt}\, \bar{l}_j \geqslant \min\limits_i \mathrm{Wt}\, l_i$. Осталось применить индуктивные соображения. Лемма доказана.

Лемма 3. *Каждое слово $k \in K \sqcup L$ имеет вид*

$$k \equiv y l_1 \dots l_m,$$

где $y \in Y$, $l_i \in L$, $y > l_1 \leqslant \dots \leqslant l_m$, $yl_1 > l_2, \dots, yl_1 \dots l_{m-1} > l_m$. Каждое слово такого вида принадлежит $K \sqcup L$.

Доказательство следует из определения множеств K и L.

Лемма 4. *Если слово $y \in Y$ не содержит элементов из $\hat{E}$, $\hat{e} \in \hat{E}$, то слово $y\hat{e}$ принадлежит Y.*

Доказательство следует из определения множества Y.

Лемма 5. *Пусть $l_1, \dots, l_n$ — элементы L, $l_1 \leqslant \dots \leqslant l_n$, y — элемент Y, содержащий элементы из $\hat{E}$. Тогда слово $yl_1 \dots l_n$ принадлежит K.*

Доказательство. Слово $yl_1 \dots l_n$ удовлетворяет условиям леммы 3, при этом $\mathrm{Wt}\, yl_1 \dots l_n \geqslant c + 1$. Значит, $yl_1 \dots l_n \in K$. Лемма доказана.

Пусть V_1 — множество слов вида $k\hat{e}$, где $k \equiv yl_1 \dots l_m \in K$, в y не входят элементы из $\hat{E}$, $\hat{e} \in \hat{E}$.

Лемма 6. *Множество $M \sqcup V_1$ линейно независимо в $A * B$ по модулю I^2.*

Доказательство.

1. Пусть слово $k\hat{e}$ принадлежит V_1, где $k \equiv yl_1 \dots l_m \in K$. Тогда в $A * B$ выполняется равенство
$$k\hat{e} = (y\hat{e})l_1 \dots l_m + \sum_{r=1}^{m} yl_1 \dots (l_r\hat{e}) \dots l_m.$$
Покажем, что сумма $\sum\limits_{r=1}^{m} yl_1 \dots (l_r\hat{e}) \dots l_m$ принадлежит $\mathbf{Q}[M]$ по модулю I^2. Для этого заметим, что при $r = 1, \dots, m$
$$yl_1 \dots l_{r-1}(l_r\hat{e})l_{r+1} \dots l_m = (\hat{e}l_r)(yl_1 \dots l_{r-1})l_{r+1} \dots l_m,$$
причём $yl_1 \dots l_{r-1} \in L \sqcup K$, $yl_1 \dots l_{r-1} > l_r$, $l_s \geqslant l_r$ при $s = r+1, \dots, m$. Поэтому по лемме 2 $(\hat{e}l_r)(yl_1 \dots l_{r-1})l_{r+1} \dots l_m$ можно представить по модулю I^2 в виде линейной комбинации слов вида $(\hat{e}l_r)\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_t$, где $l_r \leqslant \tilde{l}_1 \leqslant \dots \leqslant \tilde{l}_t$, $\tilde{l}_i \in L$, $t \geqslant 0$. Остаётся отметить, что слова́ этого вида принадлежат M.

Пусть V_2 — множество слов вида $(y\hat{e})l_1 \dots l_m$, где слово $yl_1 \dots l_m\hat{e}$ принадлежит V_1. Из вышесказанного следует, что линейная независимость по модулю I^2 множества $M \sqcup V_1$ равносильна линейной независимости по модулю I^2 множества $M \sqcup V_2$. Заметим, что по леммам 4, 5 $V_2 \subset K$.

2. Пусть M_2 — множество слов из M вида $\hat{e}l_1 \dots l_k$, где $\hat{e} \in \hat{E}$, $l_i \in L$, $k \geqslant 1$. Покажем, что линейная независимость по модулю I^2 множества $M \sqcup V_2$ равносильна линейной независимости по модулю I^2 множества $M_2 \sqcup V_2$.

Представим M в виде
$$M = (M_2 \sqcup \hat{E}) \sqcup (M \setminus (M_2 \sqcup \hat{E})).$$
Для определённости отметим, что $M \setminus (M_2 \sqcup \hat{E})$ — это множество слов из M вида $\hat{e}f_1 \dots f_n l_1 \dots l_k$, где $\hat{e} \in \hat{E}$, $f_j \in \bar{F}$, $l_i \in L$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 0$. Представим $M \sqcup V_2$ в виде
$$M \sqcup V_2 = (M_2 \sqcup V_2) \sqcup (M \setminus (M_2 \sqcup \hat{E})) \sqcup \hat{E}.$$
Заметим, что $(M_2 \sqcup V_2) \sqcup (M \setminus (M_2 \sqcup \hat{E})) \subset I \subset [A, B]$, $\hat{E} \subset A$. Поэтому линейная независимость по модулю I^2 множества $M \sqcup V_2$ равносильна линейной независимости по модулю I^2 множества $(M_2 \sqcup V_2) \sqcup (M \setminus (M_2 \sqcup \hat{E}))$. По лемме 5 элементы множества $M \setminus (M_2 \sqcup \hat{E})$ принадлежат K, причём в запись каждого слова из $M \setminus (M_2 \sqcup \hat{E})$ входит элемент $y \in Y$ вида $y = \hat{e}f_1 \dots f_n$ ($\hat{e} \in \hat{E}$, $f_i \in \bar{F}$, $n \geqslant 1$). Множество $M_2 \sqcup V_2$ принадлежит по модулю I^2 линейной оболочке тех элементов из K, в запись которых не входят $y \in Y$ подобного вида. Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать, что $M_2 \sqcup V_2$ — линейно независимое множество по модулю I^2.

3. Рассмотрим слово $\hat{e}l_1 \dots l_k \in M_2$, где $l_1 \equiv y\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_s$. По определению положим $\overline{\hat{e}l_1 \dots l_k} \equiv (y\hat{e})\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_s l_2 \dots l_k$. По леммам 4, 5 $\overline{\hat{e}l_1 \dots l_k} \in K$.

а) Пусть $u \equiv \hat{e}l_1 \dots l_k \in M_2$, где $l_1 \equiv y\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_s$. Покажем индукцией по числу $d(u)$ элементов $y \in Y$, входящих в слово l_1, что в $A * B$ выполняется равенство
$$u = -\bar{u} + \sum \alpha_i \bar{u}_i \bmod I^2,$$
где $u_i \in M_2$, $d(u_i) < d(u)$, $\alpha_i \in \mathbf{Q}$.

Если $d(u)=1$, то $l_1 \equiv y \in Y$,

$$u \equiv \hat{e}yl_2 \dots l_k = -y\hat{e}l_2 \dots l_k = -\bar{u}.$$

Пусть предложение доказано для всех таких $u' \in M_2$, что $d(u') < d(u)$. В $A*B$ выполняется равенство

$$u = -\bar{u} - \sum_{r=1}^{s} (\hat{e}\tilde{l}_r)(y\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{r-1})\tilde{l}_{r+1} \dots \tilde{l}_s l_2 \dots l_k.$$

По лемме 2 каждое слагаемое $(\hat{e}\tilde{l}_r)(y\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_{r-1})\tilde{l}_{r+1} \dots \tilde{l}_s l_2 \dots l_k$ можно представить по модулю I^2 в виде линейной комбинации элементов вида $(\hat{e}\tilde{l}_r)\bar{l}_1 \dots \bar{l}_t$, где $\tilde{l}_r \leqslant \bar{l}_1 \leqslant \dots \leqslant \bar{l}_t$, $t \geqslant 0$. Очевидно, что элементы $(\hat{e}\tilde{l}_r)\bar{l}_1 \dots \bar{l}_t$ принадлежат M_2, $d((\hat{e}\tilde{l}_r)\bar{l}_1 \dots \bar{l}_t) < d(u)$. Осталось применить предположение индукции к этим элементам.

б) Покажем, что если $u_1, u_2 \in M_2$, $u_1 \not\equiv u_2$, то $\bar{u}_1 \not\equiv \bar{u}_2$. Проведём доказательство от противного: пусть существуют такие $u_1 \equiv \hat{e}_1 l_{11} \dots l_{1k_1} \in M_2$, где $l_{11} \equiv y_1\tilde{l}_{11} \dots \tilde{l}_{1s_1}$, и $u_2 \equiv \hat{e}_2 l_{21} \dots l_{2k_2} \in M_2$, где $l_{21} \equiv y_2\tilde{l}_{21} \dots \tilde{l}_{2s_2}$, что $u_1 \not\equiv u_2$, но $\bar{u}_1 \equiv \bar{u}_2$, т. е. $y_1\hat{e}_1\tilde{l}_{11} \dots \tilde{l}_{1s_1} l_{12} \dots l_{1k_1} = y_2\hat{e}_2\tilde{l}_{21} \dots \tilde{l}_{2s_2} l_{22} \dots l_{2k_2}$. Пусть, например, $s_1 > s_2$. Тогда $y_1 = y_2$, $\tilde{l}_{11} = \tilde{l}_{21}, \dots, \tilde{l}_{1s_2} = \tilde{l}_{2s_2}$, $\tilde{l}_{1\,s_2+1} = l_{22}$. С одной стороны,

$$y_1\tilde{l}_{11} \dots \tilde{l}_{1s_2} > \tilde{l}_{1\,s_2+1}$$

(так как $l_{11} \equiv y_1\tilde{l}_{11} \dots \tilde{l}_{1s_2}\tilde{l}_{1\,s_2+1} \dots \tilde{l}_{1s_1} \in L$). С другой стороны,

$$y_1\tilde{l}_{11} \dots \tilde{l}_{1s_2} = y_2\tilde{l}_{21} \dots \tilde{l}_{2s_2} = l_{21} \leqslant l_{22}$$

(так как $u_2 \equiv \hat{e}_2 l_{21} \dots l_{2k_2} \in M_2$). Получили противоречие ($\tilde{l}_{1\,s_2+1} = l_{22}$, $\tilde{l}_{1\,s_2+1} < l_{22}$). Случаи, когда $s_1 < s_2$, $s_1 = s_2$, разбираются аналогично.

в) Покажем, что если $u \in M_2$, $v \in V_2$, то $\bar{u} \not\equiv v$. Проведём доказательство от противного: пусть существуют такие $u \equiv \hat{e}l_1 \dots l_k \in M_2$, где $l_1 \equiv y\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_s$, и $v \equiv y_2\hat{e}_2\bar{l}_1 \dots \bar{l}_t \in V_2$, что $\bar{u} \equiv v$, т. е. $y\hat{e}\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_s l_2 \dots l_k \equiv y_2\hat{e}_2\bar{l}_1 \dots \bar{l}_t$. Тогда $y \equiv y_2$, $\hat{e} \equiv \hat{e}_2$, $\tilde{l}_1 \equiv \bar{l}_1, \dots, \tilde{l}_s \equiv \bar{l}_s$, $l_2 \equiv \bar{l}_{s+1}, \dots, l_k \equiv \bar{l}_t$. С одной стороны,

$$y\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_s \equiv l_1 \leqslant l_2 \equiv \bar{l}_{s+1}$$

(неравенство следует из того, что $u \equiv \hat{e}l_1 \dots l_k \in M_2$). С другой стороны,

$$y\tilde{l}_1 \dots \tilde{l}_s \equiv y_2\bar{l}_1 \dots \bar{l}_s > \bar{l}_{s+1}$$

(неравенство следует из того, что $v \equiv y_2\hat{e}_2\bar{l}_1 \dots \bar{l}_t \in V_2$). Получили противоречие.

4. Покажем, что $M_2 \sqcup V_2$ — линейно независимое множество по модулю I^2.

Согласно пунктам 3а) и 3в) множества M_2 и V_2 принадлежат по модулю I^2 линейным оболочкам непересекающихся подмножеств множества K, причём $V_2 \subset K$. Так как множество K — линейно независимое множество по модулю I^2, то достаточно доказать, что M_2 — линейно независимое множество по модулю I^2. Рассмотрим приведённую линейную комбинацию $C = \sum\limits_j \beta_j u_j$ элементов $u_j \in M_2$. Согласно 3а)

$$C = \sum_j \beta_j \Big[-\bar{u}_j + \sum_i \alpha_{ij}\bar{u}_{ij} \Big] \bmod I^2,$$

где $u_{ij} \in M_2$, $d(u_{ij}) < d(u_j)$, $\alpha_{ij} \in \mathbf{Q}$. Можно считать, что u_1 такой, что для любого j выполнено $d(u_1) \geqslant d(u_j)$. Тогда $d(u_1) > d(u_{ij})$ (при любых i, j), и, значит, по 3б) справедливо $\bar{u}_1 \not\equiv \bar{u}_{ij}$ (при любых i, j). Из 3б) также следует, что $\bar{u}_1 \not\equiv \bar{u}_j$ (при любом j). Таким образом, если привести подобные в выражении

$$\sum_j \beta_j \left[-\bar{u}_j + \sum_i \alpha_{ij} \bar{u}_{ij} \right],$$

то в полученное выражение будет входить $\bar{u}_1$ с коэффициентом $-\beta_1$. Так как K — линейно независимое множество по модулю I^2, то $C \notin I^2$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

1. Покажем, что каждый элемент из $(A^{c+1})^{A *_{\mathfrak{AN}_c} B}$ представи́м в виде линейной комбинации элементов из M.

Упорядочим множество $\bar{E} \sqcup \bar{F} \sqcup L$ следующим способом: упорядоченность на $\bar{E}$, $\bar{F}$, L оставляем прежней, элементы множества $\bar{E}$ будут меньше элементов множества $\bar{F}$, элементы множества $\bar{F}$ — меньше элементов множества L. Множество $\bar{E} \sqcup \bar{F} \sqcup L$ является базой $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$ по модулю $(A *_{\mathfrak{AN}_c} B)^{c+1}$ (см. [6]). Поэтому каждый элемент идеала $(A^{c+1})^{A *_{\mathfrak{AN}_c} B} \subset (A *_{\mathfrak{AN}_c} B)^{c+1}$ представи́м в виде линейной комбинации слов вида $u \equiv \hat{e} u_1 \ldots u_n$, где $\hat{e} \in \hat{E}$, $u_i \in \bar{E} \sqcup \bar{F} \sqcup L$.

Пусть $u_1 \in \bar{E}$. Тогда u лежит в линейной комбинации слов вида $\hat{e}' u_2 \ldots u_n$, где $\hat{e}' \in \hat{E}$. Пусть $u_1 \notin \bar{E}$ и $u_i > u_{i+1}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. В $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$ выполнено равенство

$$u = \hat{e} u_1 \ldots u_{i+1} u_i \ldots u_n + \hat{e} u_1 \ldots [u_i, u_{i+1}] \ldots u_n.$$

Первое слагаемое получено из u транспозицией u_i и u_{i+1}, второе представимо в виде линейной комбинации слов вида $\hat{e} w_1 \ldots w_{n-1}$ ($w_i \in \bar{E} \sqcup \bar{F} \sqcup L$). Утверждение пункта 1 следует теперь из индуктивных соображений.

2. Докажем линейную независимость множества M.

а) Рассмотрим случай, когда $B \in \mathfrak{N}_c$. Проведём доказательство от противного: пусть $\sum$ — приведённая линейная комбинация, с ненулевыми коэффициентами, элементов из M, равная 0 в $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$. По лемме 1 в $A * B$ выполняется равенство $\sum = \sum_2 \operatorname{mod} I^2$, где $\sum_2$ — линейная комбинация слов вида $k\hat{e}$ ($k \in K$, $\hat{e} \in \hat{E}$).

В каждый элемент из M входит ровно один элемент $\hat{e} \in \hat{E}$. Поэтому можно считать, что ни один такой элемент k, что $k\hat{e}$ с ненулевым коэффициентом является слагаемым в $\sum_2$, не содержит элементы из $\hat{E}$. Получаем противоречие с леммой 6.

б) Пусть B — произвольная алгебра из $\mathfrak{AN}_c$. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\beta \colon A *_{\mathfrak{AN}_c} B \to A *_{\mathfrak{AN}_c} B / B^{c+1}.$$

Согласно пункту а под действием β множество $M(E, F)$ перейдёт в линейно независимое множество. Отсюда следует линейная независимость $M(E, F)$. Теорема 1 доказана.

Пусть $W = W(E,F) = P(\bar{E},\bar{F}) \sqcup M(E,F) \sqcup M(F,E)$, где $P(\bar{E},\bar{F}) = \bar{E} \sqcup \bar{F} \sqcup L \sqcup K'$, K' — это множество слов из K, не содержащих элементов из $\hat{E} \sqcup \hat{F}$, $M(F,E)$ — соответствующая база алгебры $(B^{c+1})^{A *_{\mathfrak{AN}_c} B}$.

Теорема 2. *Множество W образует базу алгебры $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$, согласованную с н. ц. р. При этом W_k — база $(A *_{\mathfrak{AN}_c} B)^k$ по модулю $(A *_{\mathfrak{AN}_c} B)^{k+1}$.*

Доказательство. Покажем, что W — линейно независимое множество. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\alpha\colon A *_{\mathfrak{AN}_c} B \to A/A^{c+1} *_{\mathfrak{AN}_c} B/B^{c+1}.$$

Под действием α $P(\bar{E},\bar{F})$ перейдёт в базу образа (см. [6]), $M(E,F) \sqcup M(F,E)$ — в 0. Значит, $P(\bar{E},\bar{F})$ — линейно независимое множество, $\mathbf{Q}[P(\bar{E},\bar{F})] \cap \cap \mathbf{Q}[M(E,F) \sqcup M(F,E)] = 0$. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\beta\colon A *_{\mathfrak{AN}_c} B \to A *_{\mathfrak{AN}_c} B/B^{c+1}.$$

Под действием β $M(E,F)$ перейдёт в линейно независимое множество (см. теорему 1), $M(F,E)$ — в 0. Значит, $M(E,F)$ — линейно независимое множество, $\mathbf{Q}[M(E,F)] \cap \mathbf{Q}[M(F,E)] = 0$. Тем же способом доказывается, что $M(F,E)$ — линейно независимое множество. Таким образом, W — линейно независимое множество.

Покажем, что $\mathbf{Q}[W] = A *_{\mathfrak{AN}_c} B$. Пусть x — произвольный элемент из $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$. Предста́вим x в виде линейной комбинации неассоциативных слов от $E \sqcup F$. Путём применения законов дистрибутивности и антикоммутативности, тождества Якоби, законов умножения в E и F x можно привести к виду $x = \sum \alpha_i p_i$, где $\alpha_i \in \mathbf{Q}$, $p_i \in P(E,F)$ (см. [6]).

Если p_i не содержит элементов из $\hat{E} \sqcup \hat{F}$, то $p_i \in P(\bar{E},\bar{F})$.

Пусть p_i содержит элемент из $\hat{E}$. Тогда $p_i \in (A^{c+1})^{A *_{\mathfrak{AN}_c} B}$. Согласно теореме 1 путём применения законов дистрибутивности и антикоммутативности, тождества Якоби, законов умножения в E и F x можно представить в виде линейной комбинации элементов из $M(E,F)$.

Случай, когда p_i содержит элемент из $\hat{F}$, рассматривается аналогично.

Итак, мы доказали, что $\mathbf{Q}[W] = A *_{\mathfrak{AN}_c} B$, причём каждый элемент из $A *_{\mathfrak{AN}_c} B$ может быть представлен в виде линейной комбинации элементов из W путём применения законов дистрибутивности и антикоммутативности, тождества Якоби, законов умножения в E и F. Отсюда нетрудно вывести, что для любого k

$$(A *_{\mathfrak{AN}_c} B)^k = \mathbf{Q}\Big[\bigsqcup_{i \geqslant k} W_i\Big].$$

Из этих равенств и из независимости множества W следует, что для любого k W_k — база $(A *_{\mathfrak{AN}_c} B)^k$ по модулю $(A *_{\mathfrak{AN}_c} B)^{k+1}$. Теорема доказана.

Замечание. В дальнейшем мы будем рассматривать множества слов $L(E,F)$, $W(E,F)$ как функции от произвольных множеств E, F, на которых заданы некоторые весовые функции Wt.

§ 3. $\mathfrak{AN}_c$-свободные произведения магнусовых групп

Пусть $G = G_1 *_{\mathfrak{AN}_c} G_2$ — $\mathfrak{AN}_c$-свободное произведение магнусовых групп G_1 и G_2, принадлежащих многообразию $\mathfrak{AN}_c$ и удовлетворяющих условию 3 из введения.

Теорема 3. *Группа G — магнусова группа, причём для G выполнено условие* 3.

Пусть R — нильпотентная алгебра Ли над $\mathbf{Q}$. На алгебре R можно с помощью формулы Кемпбелла—Хаусдорфа ввести групповую операцию $\circ$ (см. [1]). Через R° будем обозначать группу R с групповой операцией $\circ$. Полученная группа будет $\mathbf{Q}$-группой, т. е. на этой группе естественным образом определена операция возведения в рациональную степень. При этом если $r \in R$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, то $r^\alpha = \alpha r$. Напомним, что единицей относительно операции $\circ$ будет нуль относительно операции $+$.

Если $x, y \in R$, то x^y означает $y^{-1} \circ x \circ y$, где y^{-1} — обратный к y элемент относительно $\circ$. Справедлива формула

$$x^y = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(xy^{[s]})_{\mathrm{Lie}}}{s!} \quad (x, y \in R)$$

(см. [1]).

Непосредственное применение последней формулы приводит к следующей лемме.

Лемма 7. *Пусть R — нильпотентная алгебра Ли над $\mathbf{Q}$, x, y, z — элементы R, $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. Тогда $(\alpha x + \beta y)^z = \alpha x^z + \beta y^z$.*

Лемма 8. *Пусть R — нильпотентная алгебра Ли над $\mathbf{Q}$, $x, y_1, \ldots, y_k$ — элементы R, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{Q}$. Тогда*

$$x^{y_1^{\alpha_1} \circ \ldots \circ y_k^{\alpha_k}} = \sum_{s_1=0}^{+\infty} \ldots \sum_{s_k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_1^{s_1}}{s_1!} \ldots \frac{\alpha_k^{s_k}}{s_k!} \big(xy_1^{[s_1]} \ldots y_k^{[s_k]}\big)_{\mathrm{Lie}}.$$

Доказательство. Пользуясь формулой $y^\alpha = \alpha y$, где $y \in R$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, получаем

$$x^{y^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x\big((y^\alpha)^{[k]}\big)_{\mathrm{Lie}}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big(x(\alpha y)^{[k]}\big)_{\mathrm{Lie}}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \big(xy^{[k]}\big)_{\mathrm{Lie}}.$$

Пусть с помощью индукции уже доказано, что

$$x^{y_1^{\alpha_1} \circ \ldots \circ y_{k-1}^{\alpha_{k-1}}} = \sum_{s_1=0}^{+\infty} \ldots \sum_{s_{k-1}=0}^{+\infty} \frac{\alpha_1^{s_1}}{s_1!} \ldots \frac{\alpha_{k-1}^{s_{k-1}}}{s_{k-1}!} \big(xy_1^{[s_1]} \ldots y_{k-1}^{[s_{k-1}]}\big)_{\mathrm{Lie}}.$$

Тогда, пользуясь леммой 7, получаем

$$x^{y_1^{\alpha_1}\circ\ldots\circ y_k^{\alpha_k}}=(x^{y_1^{\alpha_1}\circ\ldots\circ y_{k1}^{\alpha_{k-1}}})^{y_k^{\alpha_k}}=$$
$$=\sum_{s_1=0}^{+\infty}\ldots\sum_{s_{k1}=0}^{+\infty}\frac{\alpha_1^{s_1}}{s_1!}\ldots\frac{\alpha_{k-1}^{s_{k-1}}}{s_{k-1}!}\big((xy_1^{[s_1]}\ldots y_{k-1}^{[s_{k-1}]})_{\mathrm{Lie}}\big)^{y_k^{\alpha_k}}=$$
$$=\sum_{s_1=0}^{+\infty}\ldots\sum_{s_{k-1}=0}^{+\infty}\frac{\alpha_1^{s_1}}{s_1!}\ldots\frac{\alpha_{k-1}^{s_{k-1}}}{s_{k-1}!}\left(\sum_{s_k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_k^{s_k}}{s_k!}(xy_1^{[s_1]}\ldots y_k^{[s_k]})_{\mathrm{Lie}}\right)=$$
$$=\sum_{s_1=0}^{+\infty}\ldots\sum_{s_k=0}^{+\infty}\frac{\alpha_1^{s_1}}{s_1!}\ldots\frac{\alpha_k^{s_k}}{s_k!}(xy_1^{[s_1]}\ldots y_k^{[s_k]})_{\mathrm{Lie}}.$$

Лемма 8 доказана.

В дальнейшем мы будем использовать широко известные тождества Холла, а именно:

1) тождество антикоммутативности $[a,b]=[b,a]^{-1}$;
2) тождество дистрибутивности $[ab,cd]=[a,d]^b[a,c]^{db}[b,d][b,c]^d$;
3) тождество Якоби $[[a,b],c^a][[c,a],b^c][[b,c],a^b]=1$,

где a, b, c, d — элементы некоторой группы H (см. [1]).

Доказательство теоремы 3.

1. Пусть N — произвольное натуральное число. Пусть E и F — базы групп G_1 и G_2. Обозначим через ${}_NE$ (${}_NF$) образ E (F) при естественном гомоморфизме $G_1\to G_1/\gamma_{N+1}G_1$ ($G_2\to G_2/\gamma_{N+1}G_2$). Пусть X_{Ni}, $i=1,2,$ — такие нильпотентные алгебры Ли над $\mathbf{Q}$, что $X_{Ni}^\circ\supset G_i/\gamma_{N+1}G_i$, X_{Ni}° — пополнение группы $G_i/\gamma_{N+1}G_i$, $i=1,2$.

Из [3] следует, что $X_{Ni}\in\mathfrak{AN}_c\cap\mathfrak{N}_N$, ${}_NE$ (${}_NF$) — база алгебры X_{N1} (X_{N2}), согласованная с н. ц. р. При этом при каждом k ${}_NE_k$ (${}_NF_k$) — база алгебры X_{N1}^k по модулю X_{N1}^{k+1} (X_{N2}^k по модулю X_{N2}^{k+1}).

Положим $X_N=X_{N1}*_{\mathfrak{AN}_c\cap\mathfrak{N}_N}X_{N2}$. Нетрудно вывести, что $X_N^\circ\in\mathfrak{AN}_c\cap\mathfrak{N}_N$ (см. [1]). Пусть $\psi_N\colon G\to X_N^\circ$ — гомоморфизм, индуцированный естественными гомоморфизмами $G_i\to G_i/\gamma_{N+1}G_i$, $i=1,2$.

Согласно теореме 2 (см. также обозначения в § 1) $(W({}_NE,{}_NF))_{\mathrm{Lie}}$ — база алгебры X_N, $(W_k({}_NE,{}_NF))_{\mathrm{Lie}}$ — база алгебры X_N^k по модулю X_N^{k+1}, $k=1,\ldots,N$. Пусть $\widetilde{M}_N$ — множество элементов из X_N вида

$$\big({}_N\hat{e}\,{}_Nf_1^{[s_1]}\ldots{}_Nf_k^{[s_k]}({}_Nl_1)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+1}]}\ldots({}_Nl_n)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+n}]}\big)_{\mathrm{Lie}},$$
$$({}_N\hat{e}\in\widehat{{}_NE},\ {}_Nf_i\in\overline{{}_NF},\ {}_Nl_i\in L({}_NE,{}_NF),$$
$${}_Nf_1<\ldots<{}_Nf_k,\ {}_Nl_1<\ldots<{}_Nl_n,\ k\geqslant0,\ n\geqslant0,$$
$$\mathrm{Wt}\big({}_N\hat{e}\,{}_Nf_1^{[s_1]}\ldots{}_Nf_k^{[s_k]}({}_Nl_1)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+1}]}\ldots({}_Nl_n)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+n}]}\big)_{\mathrm{Lie}}\leqslant N).$$

Непосредственное применение формулы Кемпбелла—Хаусдорфа показывает, что в X_N выполняется равенство

$$\big({}_N\hat{e}_N f_1^{[s_1]} \dots {}_N f_k^{[s_k]} ({}_N l_1)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+1}]} \dots ({}_N l_n)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+n}]}\big)_{\mathrm{Lie}} = \\ = \big({}_N\hat{e}_N f_1^{[s_1]} \dots {}_N f_k^{[s_k]} ({}_N l_1)_{\mathrm{Lie}}^{[s_{k+1}]} \dots ({}_N l_n)_{\mathrm{Lie}}^{[s_{k+n}]}\big)_{\mathrm{Lie}} + v,$$

где v принадлежит линейной оболочке тех элементов из $M({}_N E, {}_N F)$, вес которых больше чем $\mathrm{Wt}\big({}_N\hat{e}_N f_1^{[s_1]} \dots {}_N f_k^{[s_k]} ({}_N l_1)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+1}]} \dots ({}_N l_n)_{\mathrm{Gr}}^{[s_{k+n}]}\big)_{\mathrm{Lie}}$.

Первое слагаемое правой части последнего равенства является элементом множества $M({}_N E, {}_N F)$, причём различным левым частям равенства соответствуют различные первые слагаемые правой части. Отсюда нетрудно вывести, что $\tilde{M}_N$ — линейно независимое множество в алгебре X_N.

2. С помощью замечания из предыдущего параграфа можно естественным образом определить подмножества $L(E,F)$ и $W(E,F)$ группы G.

Пусть x — произвольный элемент из $\gamma_N G$. Используя тождества Холла и алгоритм, указанный в теореме 2, можно по модулю $\gamma_{N+1}G$ представить x в виде линейной комбинации элементов из $W_N(E,F)$ (см. также [4]). Таким образом, $\gamma_N G$ — линейная оболочка $W_N(E,F)$ по модулю $\gamma_{N+1}G$.

Покажем, что $W_N(E,F)$ — линейно независимое множество по модулю $\gamma_{N+1}G$. Пусть $w_1, \dots, w_s$ — различные элементы множества $W_N(E,F)$, $p_1, \dots, p_s$ — ненулевые целые числа. Тогда

$$(w_1^{p_1} \dots w_s^{p_s})\psi_N = p_1(w_1\psi_N)_{\mathrm{Lie}} + \dots + p_s(w_s\psi_N)_{\mathrm{Lie}}.$$

Правая часть равенства не равна 0, так как $(w_i\psi_N)_{\mathrm{Lie}}$ — различные элементы множества $(W_N({}_N E, {}_N F))_{\mathrm{Lie}}$. Значит, $w_1^{p_1} \dots w_s^{p_s} \neq 1$. Таким образом, $\gamma_N G/\gamma_{N+1}G$ — свободная абелева группа, $W_N(E,F)$ — база $\gamma_N G$ по модулю $\gamma_{N+1}G$.

3. Покажем, что группа G аппроксимируется нильпотентными группами.

а) Пусть x — неединичный элемент группы $(\gamma_{c+1}G_1)^G$. Элемент x может быть представлен в виде

$$x = \prod_{i=1}^{N_1} a_i^{b_i d_i},$$

где $a_i \in \gamma_{c+1}G_1$, $a_i \neq 1$, $b_i \in G_2$, $d_i \in [G_1, G_2]$, при $i \neq j$ выполнено $b_i d_i \neq b_j d_j \bmod \gamma_{c+1}G$. Действительно, по определению x представи́м в виде

$$x = \prod_{j=1}^{N_2} (a_j')^{g_j},$$

где $a_j' \in \gamma_{c+1}G_1$, $g_j \in G$. Предста́вим каждый g_j в виде $g_j = a_j'' b_j'' d_j''$, где $a_j'' \in G_1$, $b_j'' \in G_2$, $d_j'' \in [G_1, G_2]$. Тогда

$$x = \prod_{j=1}^{N_2} (\bar{a}_j)^{b_j'' d_j''},$$

где $\bar{a}_j = (a_j')^{a_j''}$. Если заменить какой-нибудь $b_j'' d_j''$ на равный ему по модулю $\gamma_{c+1}G$ элемент, то значение правой части последнего равенства не изменится.

Поэтому можно считать, что при $i \neq j$ либо $b''_i d''_i = b''_j d''_j$, либо $b''_i d''_i \neq b''_j d''_j$ по модулю $\gamma_{c+1}G$. Так как $\gamma_{c+1}G$ — абелева группа, то в последнем представлении элемента x можно переставлять сомножители. Поэтому можно считать, что для некоторых натуральных чисел $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_t = N_2$ выполнено $b''_1 d''_1 = \ldots = b''_{k_1} d''_{k_1}, \ldots, b''_{k_{t-1}+1} d''_{k_{t-1}+1} = \ldots = b''_{k_t} d''_{k_t}$, при $i \neq j$ $b''_{k_i} d''_{k_i} \neq b''_{k_j} d''_{k_j} \bmod \gamma_{c+1}G$. Тогда

$$x = \prod_{i=1}^{t} \Bigl(\prod_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} \bar{a}_j \Bigr)^{b''_{k_{i-1}+1} d''_{k_{i-1}+1}},$$

где $k_0 = 0$. Осталось сделать очевидные переобозначения.

Предста́вим каждый a_i в виде

$$a_i = e_{i1}^{p_{i1}} \ldots e_{ir_i}^{p_{ir_i}} \bmod \gamma_{T_i+1}G_1,$$

где T_i такое, что $a_i \in \gamma_{T_i}G_1 \setminus \gamma_{T_i+1}G_1$, $e_{ij} \in E_{T_i}$, $e_{i1} < \ldots < e_{ir_i}$, $p_{ij} \in \mathbf{Z}$, $p_{ij} \neq 0$. При этом, конечно, $T_i \geqslant c+1$, $r_i \geqslant 1$. Можно считать, что для некоторого $S \geqslant 1$ выполнено $e_{11} = \ldots = e_{S1} < e_{S+1\,1} \leqslant \ldots \leqslant e_{N_1 1}$.

Каждый $b_i d_i$ может быть представлен в виде

$$b_i d_i = f_1^{\alpha_{i1}} \ldots f_k^{\alpha_{ik}} l_1^{\alpha_{i\,k+1}} \ldots l_n^{\alpha_{i\,k+n}} \bmod \gamma_{c+1}G, \tag{1}$$

где $f_1, \ldots, f_k$ — некоторые элементы из $\bar{F}$, $l_1, \ldots l_n$ — некоторые элементы из $L(E,F)$, $f_1 < \ldots < f_k$, $l_1 < \ldots < l_n$, $\alpha_{ij} \in \mathbf{Z}$ (возможно, некоторые α_{ij} равны 0).

Действительно, с помощью результатов из п. 2 предста́вим каждый d_i в виде

$$d_i = l_1^{\alpha_{i\,k+1}} \ldots l_n^{\alpha_{i\,k+n}} \bmod \gamma_{c+1}G,$$

где $l_j \in \bigsqcup_{k=1}^{c} W_k(E,F) = \bar{E} \sqcup \bar{F} \sqcup L(E,F)$, $l_1 < \ldots < l_n$. Так как $d_i \in [G_1, G_2]$, то каждый элемент l_j принадлежит $L(E,F)$. Представим каждый b_i в виде

$$b_i = f_1^{\alpha_{i1}} \ldots f_k^{\alpha_{ik}} \bmod \gamma_{c+1}G.$$

Получаем, что

$$b_i d_i = f_1^{\alpha_{i1}} \ldots f_k^{\alpha_{ik}} l_1^{\alpha_{i\,k+1}} \ldots l_n^{\alpha_{i\,k+n}} \bmod \gamma_{c+1}G \quad (i = 1, \ldots, N_1).$$

Так как при $i \neq j$ выполнено $b_i d_i \neq b_j d_j \bmod \gamma_{c+1}G$, то при $i \neq j$ строка $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i\,k+n})$ не равна строке $(\alpha_{j1}, \ldots, \alpha_{j\,k+n})$.

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\sum_{i=1}^{S} p_{i1} \sum_{s_1=0,\ldots,s_{n+k}=0}^{\infty} \frac{(\alpha_{i1})^{s_1}}{s_1!} \ldots \frac{(\alpha_{i\,n+k})^{s_{n+k}}}{s_{n+k}!} x_1^{s_1} \ldots x_{n+k}^{s_{n+k}} =$$
$$= \sum_{s_1=0,\ldots,s_{n+k}=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{i=1}^{S} p_{i1} \frac{(\alpha_{i1})^{s_1}}{s_1!} \ldots \frac{(\alpha_{i\,n+k})^{s_{n+k}}}{s_{n+k}!} \Bigr) x_1^{s_1} \ldots x_{n+k}^{s_{n+k}}$$

от переменных $x_1, \ldots, x_{n+k}$. Этот ряд является рядом Тейлора функции

$$h(x_1, \ldots, x_{n+k}) = \sum_{i=1}^{S} p_{i1} \exp(\alpha_{i1} x_1 + \ldots + \alpha_{i\, n+k} x_{n+k})$$

$n+k$ действительных переменных $x_1, \ldots, x_{n+k}$. Из стандартных соображений следует, что $h(x_1, \ldots, x_{n+k})$ не равна тождественно 0. Значит, для некоторых $s_1^*, \ldots, s_{n+k}^*$

$$\sum_{i=1}^{S} p_{i1} \frac{(\alpha_{i1})^{s_1^*}}{s_1^*!} \cdots \frac{(\alpha_{i\, n+k})^{s_{n+k}^*}}{s_{n+k}^*!} \neq 0.$$

Пусть $N = \operatorname{Wt} e_{11} + s_1^* \operatorname{Wt} f_1 + \ldots + s_k^* \operatorname{Wt} f_k + s_{k+1}^* \operatorname{Wt} l_1 + \ldots + s_{n+k}^* \operatorname{Wt} l_n$. Покажем, что $x\psi_N \neq 0$. Так как X_N^{c+1} — абелева алгебра, $(a_i^{b_i d_i})\psi_N \in X_N^{c+1}$, то

$$x\psi_N = \prod_{i=1}^{N_1} (a_i^{b_i d_i})\psi_N = \sum_{i=1}^{N_1} (a_i \psi_N)^{(b_i d_i)\psi_N}.$$

Предста́вим каждый $a_i \psi_N = a_i \gamma_{N+1} G_1$ в виде линейной комбинации элементов из ${}_N E$:

$$a_i \gamma_{N+1} G_1 = \prod_{j=1}^{t_i} ({}_N e_{ij})^{p_{ij}} = \sum_{j=1}^{t_i} p_{ij}\, {}_N e_{ij}, \tag{2}$$

где $t_i \geqslant r_i$, ${}_N e_{ij} = e_{ij} \gamma_{N+1}$ при $j = 1, \ldots, r_i$, ${}_N e_{ij} \in \bigsqcup\limits_{k \geqslant T_i+1}^{N} {}_N E_k$ при $j = r_i + 1, \ldots, t_i$, $p_{ij} \in \mathbf{Z}$.

Используя (1), (2) и лемму 7, получаем

$$x\psi_N = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{t_i} p_{ij}\, {}_N e_{ij}^{f_1^{\alpha_{i1}} \psi_N \circ \ldots \circ f_k^{\alpha_{ik}} \psi_N \circ l_1^{\alpha_{i\,k+1}} \psi_N \circ \ldots \circ l_n^{\alpha_{i\,k+n}} \psi_N}.$$

Перегруппируем слагаемые:

$$x\psi_N = \left(\sum_{i=1}^{S} p_{i1}\, {}_N e_{i1}^{f_1^{\alpha_{i1}} \psi_N \circ \ldots \circ l_n^{\alpha_{i\,n+k}} \psi_N} \right) + \\
+ \left(\sum_{i=S+1}^{N_1} p_{i1}\, {}_N e_{i1}^{f_1^{\alpha_{i1}} \psi_N \circ \ldots \circ l_n^{\alpha_{i\,n+k}} \psi_N} + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=2}^{t_i} p_{ij}\, {}_N e_{ij}^{f_1^{\alpha_{i1}} \psi_N \circ \ldots \circ l_n^{\alpha_{i\,n+k}} \psi_N} \right). \tag{3}$$

Каждое слагаемое ${}_N e_{ij}^{f_1^{\alpha_{i1}} \psi_N \circ \ldots \circ l_n^{\alpha_{i\,n+k}} \psi_N}$ в (3) будем считать расписанным по формуле из леммы 8:

$${}_N e_{ij}^{f_1^{\alpha_{i1}} \psi_N \circ \ldots \circ l_n^{\alpha_{i\,n+k}} \psi_N} = {}_N e_{ij}^{(f_1 \psi_N)^{\alpha_{i1}} \circ \ldots \circ (l_n \psi_N)^{\alpha_{i\,n+k}}} = \\
= \sum_{s_1=0}^{+\infty} \ldots \sum_{s_{n+k}=0}^{+\infty} \frac{(\alpha_{i1})^{s_1}}{s_1!} \cdots \frac{(\alpha_{i\,n+k})^{s_{n+k}}}{s_{n+k}!} \left({}_N e_{ij} (f_1 \psi_N)^{[s_1]} \ldots (l_n \psi_N)^{[s_{n+k}]}_{\mathrm{Gr}} \right)_{\mathrm{Lie}}.$$

Отметим, что каждое слагаемое $\big({}_N e_{ij}(f_1\psi_N)^{[s_1]}\dots(l_n\psi_N)^{[s_{n+k}]}_{\mathrm{Gr}}\big)_{\mathrm{Lie}}$ либо принадлежит $\tilde{M}_N$ (если его вес не больше N), либо равно 0 (если его вес больше N).

Так как при $i=1,\dots,S$ выполнено ${}_N e_{i1} = {}_N e_{11}$, а при $i \geqslant S+1$ либо при $j \geqslant 2$ справедливо ${}_N e_{ij} \neq {}_N e_{11}$, то первое и второе слагаемые правой части равенства (3) принадлежат линейным оболочкам непересекающихся подмножеств множества $\tilde{M}_N$. Напомним, что $\tilde{M}_N$ — линейно независимое множество. Поэтому если первое слагаемое не равно 0, то $x\psi_N \neq 0$. Перепишем первое слагаемое, пользуясь леммой 8 и равенствами $e_{11} = \ldots = e_{S1}$:

$$\sum_{i=1}^{S} p_{i1}\,{}_N e_{i1}^{f_1^{\alpha_{i1}}\psi_N\circ\ldots\circ l_n^{\alpha_{i\,n+k}}\psi_N} =$$

$$= \sum_{\substack{s_1=0,\dots,\\ s_{n+k}=0}}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{S} p_{i1}\frac{(\alpha_{i1})^{s_1}}{s_1!}\dots\frac{(\alpha_{i\,n+k})^{s_{n+k}}}{s_{n+k}!}\right)\big({}_N e_{11}(f_1\psi_N)^{[s_1]}\dots(l_n\psi_N)^{[s_{n+k}]}_{\mathrm{Gr}}\big)_{\mathrm{Lie}}. \tag{4}$$

По построению

$$\mathrm{Wt}\big({}_N e_{11}(f_1\psi_N)^{[s_1^*]}\dots(l_n\psi_N)^{[s_{n+k}^*]}_{\mathrm{Gr}}\big)_{\mathrm{Lie}} = N.$$

Значит,

$$\big({}_N e_{11}(f_1\psi_N)^{[s_1^*]}\dots(l_n\psi_N)^{[s_{n+k}^*]}_{\mathrm{Gr}}\big)_{\mathrm{Lie}} \in \tilde{M}_N.$$

Коэффициент при этом слагаемом в (4) — это $\sum\limits_{i=1}^{S} p_{i1}\frac{(\alpha_{i1})^{s_1^*}}{s_1^*!}\dots\frac{(\alpha_{i\,n+k})^{s_{n+k}^*}}{s_{n+k}^*!}$. Этот коэффициент не равен 0 по построению. Значит, первое слагаемое правой части равенства (3) не равно 0. Следовательно, $x\psi_N \neq 0$. Мы построили гомоморфизм $\psi_N\colon G \to X_N^0$, переводящий x в неединичный элемент.

б) Пусть x — произвольный неединичный элемент группы G. Покажем, что существует гомоморфизм $\phi_x\colon G \to G_x$ на нильпотентную группу G_x, такой что $x\phi_x \neq 1$.

Если $x \in (\gamma_{c+1}G_1)^G$, то существование такого гомоморфизма следует из пункта а. Пусть $x \notin (\gamma_{c+1}G_1)^G$. Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\xi_1\colon G \to G_1/\gamma_{c+1}G_1 *_{\mathfrak{AN}_c} G_2.$$

Используя универсальные соображения, можно вывести, что $\operatorname{Ker}\xi_1 = (\gamma_{c+1}G_1)^G$. Значит, $x\xi_1 \neq 1$. Таким образом, можно считать, что $G_1 \in \mathfrak{N}_c$. Аналогичным образом можно свести задачу к случаю, когда и $G_2 \in \mathfrak{N}_c$. Теперь существование гомоморфизма ϕ_x следует из [5].

Теорема 3 доказана.

Небольшая модификация доказательства теоремы 3 приводит к теореме 4 (см. [4, 6]).

Теорема 4. *Пусть $G = G_1 *_{\mathfrak{AN}_c} G_2$ — $\mathfrak{AN}_c$-свободное произведение магнусовых групп G_1 и G_2, принадлежащих многообразию $\mathfrak{AN}_c$. Тогда группа G — магнусова группа.*

Из теорем 3, 4 нетрудно вывести окончательный результат.

Теорема 5. *Пусть* $G = \mathfrak{A}\mathfrak{N}_c \prod\limits_{i \in I} G_i$ — $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$*-свободное произведение магнусовых групп* G_i, $i \in I$, *принадлежащих многообразию* $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$. *Тогда группа* G — *магнусова группа. Если при этом для каждой группы* G_i *выполнено условие* 3 *из введения, то это условие выполнено и для* G.

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Ширшов А. И. О базах свободных алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1, № 1. — С. 14—19.

[3] Шмелькин А. Л. Нильпотентные произведения и нильпотентные группы без кручения // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 4. — С. 625—640.

[4] Шмелькин А. Л. О нижнем центральном ряде свободного произведения групп // Алгебра и логика. — 1969. — Т. 8, № 1. — С. 129—137.

[5] Шмелькин А. Л. Сплетения алгебр Ли и их применения в теории групп // Тр. ММО. — 1973. — Т. 29. — С. 247—260.

[6] Эйдelькинд Д. И. Вербальные произведения групп Магнуса // Мат. сб. — 1971. — Т. 85 (127). — С. 504—526.