

Топологическая размерность Крулля

В. В. ТЕНЗИНА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: Viktoria@niircom.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: топологическая размерность Крулля, топологические кольца, топологические модули, критические подмодули, N -критические подмодули, лемма Ленагана, топологический радикал Бэра, PI-кольца.

Аннотация

В работе вводится топологический аналог размерности Крулля колец и модулей. Изучаются кольца и модули, имеющие топологическую размерность Крулля. В качестве проверки жизнеспособности предлагаемой теории рассматривается топологический радикал Бэра PI-кольца, обладающего модулем с топологической размерностью Крулля.

Abstract

V. V. Tenzina, Topological Krull dimension, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 215–230.

In this paper, we introduce a topological analog of Krull dimension. We are interested in particular properties of rings and modules having topological Krull dimension. The topological Baer radical of a PI-ring possessing a module with topological Krull dimension will be investigated.

1. Необходимые определения и обозначения из теории топологических колец и модулей

В данной работе будем придерживаться терминологии, приведённой в [1].

Определение. Абелева группа A называется топологической абелевой группой, если на A задана топология и отображение $(a, b) \mapsto a - b$ топологического пространства $A \times A$ на топологическое пространство A непрерывно.

Определение. Топологическое кольцо — это ассоциативное кольцо, являющееся хаусдорфовым пространством, в котором операции кольца непрерывны, то есть удовлетворяют следующим условиям (где R — кольцо):

- отображение $(a, b) \mapsto a - b$ топологического пространства $R \times R$ на топологическое пространство R непрерывно;
- отображение $(a, b) \mapsto ab$ топологического пространства $R \times R$ на топологическое пространство R непрерывно.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 215–230.

© 2004 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Идеалом топологического кольца будем считать двусторонний, не обязательно замкнутый, идеал.

Определение. Пусть R — топологическое кольцо. Левый R -модуль M называется топологическим левым R -модулем, если на множестве M задана топология, относительно которой M является топологической абелевой группой, и выполняется следующее условие: отображение $(r, m) \mapsto rm$ из топологического пространства $R \times M$ в топологическое пространство M непрерывно.

Далее везде под топологическим R -модулем будем подразумевать топологический левый R -модуль.

Через $\tau(X)$ будем обозначать множество всех окрестностей нуля топологической абелевой группы X .

2. Определение топологической размерности Крулля и некоторые её свойства

Гордон и Робсон в [8] определили размерность Крулля для модулей и колец следующим образом.

Определение. Размерность Крулля ($\text{Kdim } M$) R -модуля M определяется при помощи трансфинитной индукции:

- 1) если $M = 0$, то $\text{Kdim } M = -1$;
- 2) если $\text{Kdim } M \not\leq \alpha$, то $\text{Kdim } M = \alpha$ тогда и только тогда, когда не существует бесконечной убывающей цепочки подмодулей $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$, такой что $\text{Kdim}(M_{i-1}/M_i) \not\leq \alpha$ для каждого $i \in \mathbb{N}$;
- 3) если не существует такого порядкового числа α , что $\text{Kdim } M = \alpha$, то модуль M не имеет размерности Крулля.

Определение. Размерностью Крулля кольца R называется размерность Крулля правого R -модуля R .

Напомним определение девиации. Пусть L — частично упорядоченное множество. Если элементы a, b принадлежат L , введём обозначение

$$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}.$$

Определение. Девиация множества L , которая обозначается $\text{dev } L$, определяется по индукции следующим образом:

- 1) если $L = 0$, то $\text{dev } L = -1$;
- 2) $\text{dev } L = \alpha$, если $\text{dev } L \not\leq \alpha$ и для любой убывающей последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов из L найдётся такое натуральное число N , что для всех $n > N$ справедливо $\text{dev}[x_{n+1}, x_n] < \alpha$;
- 3) L не имеет девиации, если не существует порядкового α , для которого $\text{dev } L = \alpha$.

Нетрудно заметить, что если в качестве упорядоченного множества L рассмотреть множество всех подмодулей модуля M , включая и сам модуль, с упорядочением по включению, то $\text{Kdim } M = \text{dev } L$. Мы будем рассматривать аналог этого понятия.

Предлагается следующее определение топологической размерности Крулля. Под топологической размерностью Крулля модуля M мы будем понимать девиацию множества всех замкнутых подмодулей модуля M и будем обозначать её $\text{top Kdim } M$. Это определение можно переформулировать следующим образом.

Определение. Пусть M — топологический R -модуль. Топологическую размерность Крулля $\text{top Kdim } M$ определим при помощи трансфинитной индукции:

- 1) если $M = 0$, то $\text{top Kdim } M = -1$;
- 2) $\text{top Kdim } M = \alpha$, если $\text{top Kdim } M \not\leq \alpha$ и не существует бесконечной убывающей цепочки замкнутых подмодулей $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$, такой что $\text{top Kdim}(M_{i-1}/M_i) \not\leq \alpha$ для каждого $i \in \mathbb{N}$;
- 3) если не существует такого порядкового α , что $\text{top Kdim } M = \alpha$, то модуль M не имеет топологической размерности Крулля.

Определение. Определим для топологического кольца R левую (правую) топологическую размерность Крулля следующим образом: $\text{l top Kdim } R = \text{top Kdim } {}_R R$ ($\text{r top Kdim } R = \text{top Kdim } R_R$).

В дискретном случае понятия топологической размерности Крулля и просто размерности Крулля совпадают. Если модуль имеет обычную размерность Крулля, то он в любой топологии имеет топологическую размерность Крулля. Но в общем случае может быть так, что топологический модуль обладает топологической размерностью Крулля, но не имеет обычной размерности Крулля.

Пример 2.1. В качестве такого модуля M рассмотрим пространство всех действительных чисел $\mathbb{R}$ над кольцом целых чисел $R = \mathbb{Z}$. Модуль M действительно является топологическим над R . Пусть θ — трансцендентное число, тогда M содержит прямую сумму подмодулей вида $\mathbb{Z}\theta^n$, где n — натуральное число. По [8, 1.4] модуль M не имеет обычной размерности Крулля. Любой замкнутый подмодуль модуля M имеет вид $a\mathbb{Z}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$ [1, § 1.4]. Если $a_1\mathbb{Z} \supseteq a_2\mathbb{Z}$ для некоторых действительных a_1, a_2 , то $\frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{Z}$ и фактор-модуль $a_1\mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z}$ содержит конечное число элементов. Поэтому $\text{top Kdim } M = 1$.

Из определения топологической размерности Крулля очевидным образом получается следующее утверждение.

Предложение 2.1. Если в топологическом модуле M содержится убывающая цепочка замкнутых подмодулей $M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$, таких что фактор-модули M_{i-1}/M_i топологически изоморфны самому модулю M , тогда модуль M не имеет топологической размерности Крулля.

Пример 2.2. Пространство непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ не имеет топологической размерности Крулля. Достаточно рассмотреть убывающую цепочку из подпространств $V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$, где $V_n = \{f \in C[0, 1] : \forall x \in [\frac{1}{2^n}, 1] f(x) = 0\}$.

В дальнейшем нас обычно будет интересовать не само значение топологической размерности Крулля, а те свойства, которыми обладают топологические кольца и модули, имеющие топологическую размерностью Крулля.

Следующие свойства топологических модулей с топологической размерностью Крулля являются топологическими аналогами дискретного случая.

Предложение 2.2. Если M — топологический модуль, N является его замкнутым подмодулем и N и M/N имеют топологическую размерность Крулля, то

$$\text{top Kdim } M = \max\{\text{top Kdim } M/N, \text{top Kdim } N\}.$$

Доказательство. Из определения топологической размерности Крулля следует, что

$$\text{top Kdim } M \geq \max\{\text{top Kdim } M/N, \text{top Kdim } N\}.$$

Пусть множество Σ состоит из всевозможных пар (A, B) , где A является замкнутым подмодулем модуля N , а B является замкнутым подмодулем фактор-модуля M/N . Определим на множестве Σ порядок естественным образом: пусть $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \Sigma$, тогда считаем, что $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ тогда и только тогда, когда $A_1 \subseteq A_2$ и $B_1 \subseteq B_2$.

Поставим в соответствие каждому замкнутому подмодулю P модуля M пару $(P \cap N, (P + N)/N)$ из Σ . Заметим, что $P \cap N$ и $(P + N)/N$, топологически изоморфный замкнутому подмодулю фактор-модуля $P/(P \cap N)$, замкнуты в N и M/N соответственно. Очевидно, что если для двух подмодулей выполняется $P_1 \subseteq P_2$, то

$$(P_1 \cap N, (P_1 + N)/N) \leq (P_2 \cap N, (P_2 + N)/N).$$

Докажем теперь обратное. Пусть $P_1 \cap N \subseteq P_2 \cap N$ и $(P_1 + N)/N \subseteq (P_2 + N)/N$, то есть $P_1 \subseteq P_2 + N$. Докажем, что тогда $P_1 \subseteq P_2$. Имеем

$$P_1 \subseteq P_1 \cap P_1 \subseteq P_1 \cap (P_2 + N).$$

По свойству модулярной решётки

$$P_1 \cap (P_2 + N) \subseteq P_1 \cap P_2 + P_1 \cap N \subseteq P_2 + P_2 \cap N \subseteq P_2.$$

Итак, мы можем считать, что множество всех замкнутых подмодулей модуля M является подмножеством множества Σ с определённым выше отношением порядка. Тогда, используя свойство b) из [12], получаем

$$\text{top Kdim } M \leq \text{dev } \Sigma = \max\{\text{top Kdim } N, \text{top Kdim } M/N\}. \quad \square$$

Следствие 2.1. Пусть φ — непрерывный гомоморфизм из кольца R в кольцо R' . Тогда если $\text{top Kdim } R < \infty$, то $\text{top Kdim } \varphi(R) \leq \text{top Kdim } R$.

Доказательство. Так как φ — непрерывное отображение, то $\ker \varphi$ — замкнутый идеал кольца R . Тогда $R/\ker \varphi \cong \varphi(R)$. Применим предыдущее утверждение к $N = \ker \varphi$. $\square$

3. Топологическая N -размерность. Критические модули

В дискретном случае полезными являются такие понятия, как критический подмодуль и дуальная топологическая размерность Крулля, называемая также N -размерностью. Расширению этих понятий на топологический случай и посвящён этот раздел.

Определение. Пусть α — некоторое порядковое число. Будем называть топологический модуль M топологически α -критическим, если $\text{top Kdim } M = \alpha$, но для любого замкнутого ненулевого подмодуля N в M выполняется $\text{top Kdim } M/N < \alpha$.

Определение. Топологический модуль, являющийся топологически α -критическим для некоторого порядкового α , будем называть просто топологически критическим.

Так же, как в дискретном случае, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 3.1. Топологический модуль, обладающий топологической размерностью Крулля, имеет топологически критический замкнутый подмодуль.

Кодевиацией частично упорядоченного множества $(L, \leq)$ ($\text{codev}(L, \leq)$) называется девиация частично упорядоченного множества $(L, \leq_{\text{op}})$, где

$$a \leq_{\text{op}} b \iff b \leq a.$$

По аналогии с дискретной N -размерностью (дуальной размерностью Крулля), рассмотренной, например, в [7], определим топологическую N -размерность.

Определение. Пусть M — топологический R -модуль. Определим топологическую N -размерность модуля M ($\text{top Ndim } M$) как кодевиацию множества замкнутых подмодулей по включению.

Определение. Назовём топологический модуль топологически нётеровым, если любая возрастающая цепочка из замкнутых подмодулей стабилизируется.

Из определения топологической N -размерности сразу же следует, что топологический модуль является топологически нётеровым тогда и только тогда, когда топологическая N -размерность этого модуля равна нулю.

Определение. Будем называть топологический модуль M топологически N -критическим, если для любого собственного замкнутого подмодуля M' в M выполняется $\text{top Ndim } M' < \text{top Ndim } M$.

Так же, как в дискретном случае, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 3.2. Если топологический модуль M имеет топологическую N -размерность, то существует такой замкнутый подмодуль K в M , что фактор-модуль M/K будет топологически N -критическим.

Предложение 3.3. Так как частично упорядоченное множество имеет девиацию тогда и только тогда, когда это множество имеет кодевиацию (см. [9]),

то топологический модуль имеет топологическую размерность Крулля тогда и только тогда, когда он имеет также и топологическую N -размерность.

Предложение 3.4. *Каждый топологически нётеров модуль M имеет топологическую размерность Крулля.*

4. Бесконечная прямая сумма замкнутых подмодулей

В дискретном топологии модуль, имеющий размерность Крулля, не содержит никакой бесконечной прямой суммы подмодулей. Рассмотрим аналоги этого утверждения для топологических модулей.

Во-первых, интересен ответ на вопрос: верно ли, что топологический модуль, имеющий топологическую размерность Крулля, не содержит никакой бесконечной прямой суммы замкнутых подмодулей? Такое предположение неверно.

Пример 4.1. В качестве топологического модуля M рассмотрим $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Z}$ с дискретной топологией. Ранее доказывалось, что M имеет топологическую размерность Крулля.

Пусть α — трансцендентное число. Тогда $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}(\alpha^i)$ является бесконечной прямой суммой замкнутых подмодулей.

Верно следующее похожее утверждение с дополнительным условием на бесконечную сумму.

Предложение 4.1. *Пусть топологический R -модуль M имеет топологическую размерность Крулля. Тогда не существует бесконечной прямой суммы замкнутых подмодулей $\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$ в M , таких что*

$$A_i \cap [A_1 + \dots + \hat{A}_i + \dots] = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Доказательство. Предположим противное. Выберем топологический R -модуль M с наименьшей топологической размерностью Крулля, равной α , для которого существует бесконечная прямая сумма $\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, для которой выполняется условие (1). Тогда $\text{topKdim}\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \alpha$.

Сумма $\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i / \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_{2i}\right]$ является прямой, так как иначе найдутся такие натуральное число k и $a_i \in A_{2i-1}$, где $i = \overline{1, k}$, что $a_1 + \dots + a_k \in \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_{2i}\right]$, но это противоречит условию (1).

Обозначим $M_n = \left[\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_{2^n i}\right]$. Аналогично случаю с M_1 можно показать, что M_i/M_{i+1} также содержит бесконечную прямую подсумму замкнутых подмодулей, удовлетворяющих (1). Поэтому $\text{topKdim } M_i/M_{i+1} = \alpha$ для каждого $i \in \mathbb{N}$,

но $\text{top Kdim } M = \alpha$. Мы получили противоречие с определением размерности Крулля. $\square$

5. Топологическое кольцо полиномов

Пусть R — топологическое кольцо. Определим на кольце полиномов $R[x]$ топологию произведения следующим образом. Если V — окрестность нуля в R , а n — натуральное число, то положим

$$U(V, n) = \left\{ f \in R[x] : f = \sum_{k=0}^{n-1} v_k x^k + g, \text{ где } v_k \in V, g \in x^n R[x] \right\}.$$

Зададим на кольце многочленов $R[x]$ топологию при помощи базы окрестностей нуля из множеств вида $U(V, n)$.

Определение. Топологическое кольцо R назовём топологически нётеровым справа (слева), если само кольцо R как правый (левый) модуль над R является топологически нётеровым справа (слева).

Теорема 5.1. Если кольцо $R[x]$ с топологией, построенной описанным выше способом, имеет правую (левую) топологическую размерность Крулля, то кольцо R топологически нётерово справа (слева).

Доказательство. Проведём доказательство от противного. Пусть в R существует цепочка из замкнутых правых (левых) идеалов $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$. Рассмотрим кольцо $R[x]$ как топологических правый (левый) модуль над собой, который имеет топологическую размерность Крулля, тогда множества $[I_0 + I_1 x + \dots + I_k x^k + \dots]$ и $[I_1 + I_2 x + \dots + I_{k+1} x^k + \dots]$ являются замкнутыми подмодулями этого модуля. Фактор-модуль

$$S = [I_1 + I_2 x + \dots + I_{k+1} x^k + \dots] / [I_0 + I_1 x + \dots + I_k x^k + \dots]$$

также имеет топологическую размерность Крулля.

Рассмотрим сумму $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$, где $S_k = I_{k+1} x^k / [I_0 + I_1 x + \dots]$. Докажем, что все S_k ненулевые. Предположим, что это не так, то есть существует такое натуральное k , что $S_k = 0$. Но тогда $I_{k+1} x^k \subseteq [I_0 + I_1 x + \dots]$. Используя определение топологии в $R[x]$, получаем, что для любой окрестности нуля $V \in \tau(R)$ справедливо $I_{k+1} \subseteq I_k + V$. Таким образом, $I_{k+1} = \bigcap_{V \in \tau(R)} (I_k + V) = I_k$, но это противоречит выбору I_k .

Докажем, что не только сумма S_k является прямой, но и для любого k выполняется $S_k \cap [S_0 + S_1 + \dots + S_{k-1} + S_{k+1} + \dots] = 0$. Пусть для некоторого k это не так. Рассмотрим $I_{k+1} x^k \cap [I_1 + \dots + I_k x^{k-1} + I_{k+2} x^{k+1} + \dots]$. По предположению существует ненулевое r из идеала I_{k+1} , такое что для любой окрестности нуля V из R и натурального n справедливо $r x^k \in I_1 + \dots + I_k x^{k-1} + I_{k+2} x^{k+1} + \dots + U(V, n)$. Поэтому для любой окрестности нуля $V \in \tau(V)$ имеем $r \in V$.

Итак, мы нашли бесконечную прямую сумму в S с условием (1). Поэтому S не должно иметь топологической размерности Крулля. Тем самым мы получили противоречие. Поэтому кольцо R является топологически нётеровым. $\square$

6. Топологический аналог леммы Ленагана

При изучении модулей с размерностью Крулля в дискретном случае большую роль играет лемма Ленагана.

Лемма 6.1. Пусть $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ и $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ — цепочки подмодулей модуля M , имеющего размерность Крулля, и $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = M$. Тогда найдутся такие натуральные числа i, j , что

$$M_i \subseteq M_{i+1} + B_j.$$

Доказательство этой леммы можно найти, например, в [11].

Прежде чем доказать топологический аналог леммы Ленагана, рассмотрим одно свойство замкнутых подмодулей.

Пусть A, B, C — замкнутые подмодули топологического модуля и $A \supseteq B$. По свойству модулярной решётки $A \cap (B + C) = B + A \cap C$, но не обязательно $A \cap [B + C] = [B + A \cap C]$.

Пример 6.1. Рассмотрим в качестве модуля множество действительных чисел с интервальной топологией над дискретным кольцом целых чисел. Тогда подмодули $A = \sqrt{2}\mathbb{Z}$, $B = 2\sqrt{2}\mathbb{Z}$ и $C = \sqrt{3}\mathbb{Z}$ являются замкнутыми, $A \cap [B + C] = A \cap \mathbb{R} = \sqrt{2}\mathbb{Z}$, но $[B + A \cap C] = B = 2\sqrt{2}\mathbb{Z}$.

Предложение 6.1. В топологическом векторном пространстве равносильны следующие условия:

- 1) сумма замкнутых подпространств замкнута;
- 2) для любых трёх замкнутых подмодулей A, B, C , таких что $A \supseteq B$, верно $A \cap [B + C] = [B + A \cap C]$.

Доказательство. Очевидно, что из условия 1) и модулярности решётки подмодулей следует условие 2). Докажем обратное от противного.

Пусть в топологическом векторном пространстве X выполняется условие 2), и пусть в X существуют такие замкнутые подпространства X_1 и X_2 , что $[X_1 + X_2] \neq X_1 + X_2$.

Мы можем считать, что $X_1 \cap X_2 = 0$. В противном случае рассмотрим фактор-пространство $X' = X/(X_1 \cap X_2)$ с естественной топологией фактор-пространства, в котором будет справедливо условие 2), подпространства $X'_1 = X_1/(X_1 \cap X_2)$ и $X'_2 = X_2/(X_1 \cap X_2)$ будут замкнуты, $X'_1 \cap X'_2 = 0$ и $[X'_1 + X'_2] \neq X'_1 + X'_2$.

В $[X_1 + X_2]$ существует элемент x , не принадлежащий $X_1 + X_2$. Пусть L — одномерное подпространство, порождённое x . Тогда, используя утверждение [5, 1.21] о том, что конечномерное подпространство замкнуто, имеем, что

$(L + X_1)/L$, топологически изоморфное X_1 , также замкнуто. Поэтому, учитывая замкнутость X_1 , получаем, что подпространство $L + X_1$ будет замкнутым.

Подпространства $A = X_1 + L$, $B = X_1$, $C = X_2$ замкнуты, $A \cap [B + C]$ содержит x , а $[B + A \cap C] = B = X_2$ не содержит x . Следовательно, наше предположение о невыполнении 1) неверно. $\square$

Следующая лемма является топологическим аналогом леммы Ленагана [10].

Лемма 6.2. Пусть $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ и $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$ — цепочки замкнутых подмодулей топологического модуля M , имеющего топологическую размерность Крулля, и $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = M$, причём для любых трёх замкнутых подмодулей A, B, C , таких что $A \supseteq B$, справедливо $A \cap [B + C] = [B + A \cap C]$. Тогда найдутся такие натуральные числа i, j , что

$$M_i \subseteq [M_{i+1} + B_j].$$

Доказательство. Предположим, что

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \quad M_i \not\subseteq [M_{i+1} + B_j]. \quad (*)$$

Сперва докажем, что можно считать, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad B_i \not\subseteq [B_{i-1} + M_i]. \quad (**)$$

Предположим противное, то есть будем считать, что $\exists i \in \mathbb{N} \quad B_i \subseteq [B_{i-1} + M_i]$.

Но в таком случае $\exists i \in \mathbb{N} \quad B_i \subseteq [B_2 + M_3]$. Поэтому $M_1 \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq [B_2 + M_3]$. Но это противоречит (*).

Пусть $N = [B_1 \cap M_1 + B_2 \cap M_2 + \dots]$. Докажем, что в $\bar{M} = M/N$ выполняются (*), (**) для B_i/N и M_i/N . Если (*) в $\bar{M}$ не выполняется, то найдётся такое натуральное i , что

$$M_i \subseteq [M_{i+1} + B_j] + N \subseteq [M_{i+1} + B_j] + [M_{i+1} + B_i] \subseteq [M_{i+1} + B_{\max(i,j)}],$$

а это противоречит (*) для M . Если (**) в $\bar{M}$ не выполняется, то найдётся такое натуральное i , что $B_i \subseteq [B_{i-1} + M_i] + N \subseteq [B_{i-1} + M_i]$, но это противоречит (**) для M . Заметим, что $\bar{M}$ обладает топологической размерностью Крулля.

Итак, мы можем считать, что у нас есть две цепочки замкнутых подмодулей $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ и $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$, таких что $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = M$, $M_n \cap B_n = 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и все M_n ненулевые.

Построим возрастающую последовательность натуральных чисел $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом. Положим $i_0 = 1$. Пусть для натурального k мы уже выбрали все $i_0 < i_1 < \dots < i_k$. В качестве i_{k+1} возьмём такое натуральное число, чтобы $M_{i_k} \cap B_{i_{k+1}} \neq 0$. Такое i_{k+1} существует, поскольку $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Сумма $\sum_{k=0}^{\infty} M_{i_k} \cap B_{i_{k+1}}$ будет прямой, так как

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} M_{i_k} \cap B_{i_{k+1}} \right) \cap M_{i_n} \cap B_{i_{n+1}} \subseteq M_{i_n} \cap B_{i_n} = 0.$$

Выкидывая лишние M_i и B_i , мы можем считать, что M содержит прямую сумму замкнутых подмодулей $A_i = M_i \cap B_{i+1}$.

Воспользуемся дополнительным ограничением на модуль M :

$$\begin{aligned} A_i \cap [A_1 + \dots + \hat{A}_i + \dots] &\subseteq M_i \cap B_{i+1} \cap [M_1 \cap B_2 + \dots + M_{i+1} \cap B_{i+2} + \dots] \subseteq \\ &\subseteq M_i \cap B_{i+1} \cap [B_i + M_{i+1}] \subseteq M_i \cap [B_i + B_{i+1} \cap M_{i+1}] \subseteq M_i \cap B_i = 0. \end{aligned}$$

Но существование такой суммы противоречит утверждению 4.1, так как наш модуль имеет размерность Крулля. $\square$

7. Топологические PI-кольца, обладающие модулями с топологической размерностью Крулля

В. Т. Марков в [4] доказал, что топологический радикал Бэра PI-кольца, обладающего точным модулем с размерностью Крулля, является нильпотентным идеалом. Предлагается аналог этого результата для топологического случая.

Назовём идеал P топологического кольца R Σ -нильпотентным относительно R -модуля M , если для каждой окрестности нуля W в M найдётся такое натуральное число n , что $P^n M \subseteq W$.

Теорема 7.1. Пусть R — топологическое PI-кольцо, обладающее топологическим R -модулем M с конечной топологической N -размерностью. Пусть на топологию модуля M наложено дополнительное условие: для любых трёх замкнутых подмодулей A, B, C , таких что $A \supseteq B$, верно $A \cap [B + C] = [B + A \cap C]$. Тогда замыкание суммы всех Σ -нильпотентных относительно модуля M идеалов кольца R является также Σ -нильпотентным идеалом относительно этого модуля.

Прежде чем доказывать эту теорему, докажем несколько предварительных утверждений.

Лемма 7.1. Пусть M — R -модуль, имеющий топологическую размерность Крулля, а идеалы N и P таковы, что $[NM]_M = [PM]_M$. Пусть также существует полилинейный полином f с целыми коэффициентами, один из которых равен единице, такой что для любых элементов $a_1, \dots, a_d$ из идеала N выполняется $f(a_1, \dots, a_d)M = 0$. Тогда если идеал P является Σ -нильпотентным относительно M , то и N — Σ -нильпотентный идеал относительно M .

Доказательство. Будем доказывать утверждение леммы индукцией по d . При $d = 1$ $NM = 0$, то есть подходит $m = 1$.

Считаем, что f имеет вид

$$f(x_1, \dots, x_d) = g(x_1, \dots, x_{d-1})x_d + \varphi(x_1, \dots, x_d),$$

где $g = g(x_1, \dots, x_{d-1})$ — полилинейный полином с целыми коэффициентами, один из которых равен единице, а $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_d)$ — сумма мономов, ни один из которых не оканчивается на x_d .

Докажем, что для любого натурального k найдутся окрестность нуля W_1 в M и натуральное число m , такие что

$$N^m M \subseteq P^k M + W_1. \quad (*)$$

Покажем, что для доказательства леммы достаточно доказать (*). Для любой окрестности нуля W в M существует окрестность нуля W_1 в M , такая что $W_1 + W_1 \subset W$. По условию леммы найдётся такое $k = k(W_1) \in \mathbb{N}$, что $P^k M \subset W_1$. Поэтому найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$N^m M \subset P^k M + W_1 \subset W_1 + W_1 \subset W.$$

Докажем (*). Пусть W_1 — некоторая окрестность нуля в M . Заметим, что $NM \subset W_1 + PM$, то есть при $k = 1$ подходит $m = 1$.

Пусть теперь $k > 1$, и пусть $a_1, \dots, a_{d-1} \in N$, а $p \in P^k$. Тогда

$$0 = f(a_1, \dots, a_{d-1}, p)M = \left(g(a_1, \dots, a_{d-1})p + \sum_{i=1}^q n_{1,i} p n_{2,i} \right) M,$$

где $n_{1,i}, n_{2,i} \in N$. Следовательно,

$$g(a_1, \dots, a_{d-1})P^{k-1} \subseteq P^{k-1}NM.$$

Пусть $\bar{M} = P^{k-1}M/[P^k M]_M$.

Если A — замкнутый подмодуль, то на M/A можно задать топологию естественным образом: база окрестностей нуля в M/A — это все множества вида $\bar{W} = W + A$, где W — окрестность нуля в M (см. [1]). В нашем случае топологический модуль $\bar{M}$ над R также будет иметь топологическую размерность Крулля.

К модулю $\bar{M}$ применима индукционная гипотеза, то есть найдётся натуральное число l , такое что $N^l \bar{M} \subset \bar{W}_2$, где W_2 — окрестность нуля в M и $W_2 + W_2 + W_2 \subset W_1$. Тогда

$$N^l P^{k-1} M \subset W_2 + W_2 + [P^k M]_M \subset W_1 + P^k M.$$

Положим $m = l + k - 1$. Следовательно, (*) доказано. $\square$

Лемма 7.2. Если линейно упорядоченное множество L имеет конечную кодевиацию, то в L существует кофинальная последовательность $\{a_i\}_{i=1}^\infty$, то есть для любого $x \in L$ найдётся $i \in \mathbb{N}$, такое что $q_i > x$.

Доказательство. Сначала докажем, что существует такой элемент $a \in L$, что

$$\text{codev}[a, b] < \text{codev}[a, \infty) \quad \forall b > a. \quad (*)$$

Предположим противное. Пусть $\alpha = \min\{\text{codev}[x, \infty) : x \in L\}$. Найдётся такой элемент x из L , что $\text{codev}[x, \infty) = \alpha$. Но в таком случае существует

возрастающая последовательность $x = x_1 < x_2 < \dots$ элементов из L , такая что $\text{codev}[x_i, x_{i+1}] \geq \alpha$ для каждого $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, $\text{codev}[x, \infty) > \alpha$. Получили противоречие.

Пусть для элемента $a \in L$ выполнено (*). Пусть $n = \text{codev}[a, \infty)$. Докажем следующее:

$$\forall b > a \exists c > b \text{ codev}[b, c] = n - 1.$$

Предположим противное. Но тогда для любой возрастающей последовательности $b = b_0 < b_1 < \dots$ справедливо $\text{codev}[b_{i-1}, b_i] \leq \text{codev}[b, b_i] < n - 1$, где $i \in \mathbb{N}$, и поэтому $\text{codev}[a, \infty) \leq n - 1$. Следовательно,

$$\text{codev}[a, \infty) = \max\{\text{codev}[a, b], \text{codev}[b, \infty)\} < n,$$

но это противоречит определению n .

Из доказанного выше следует, что существует возрастающая последовательность $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, такая что $\text{codev}[a_{i-1}, a_i] = n - 1$. Если существует $b > a_i$ для каждого $i \in \mathbb{N}$, то $\text{codev}[a, b] = n$, но это противоречит выбору a . Поэтому последовательность $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ кофинальна. $\square$

Доказательство теоремы 7.1. Так как R является PI-кольцом, то существует полилинейный полином $f(x_1, \dots, x_d)$ с целыми коэффициентами, такой что для любых $a_1, \dots, a_d \in R$ справедливо $f(a_1, \dots, a_d) = 0$ и хотя бы при одном одноклене коэффициент равен единице.

Будем доказывать теорему индукцией по d . Если $d = 1$, то $R = 0$.

Индукция по $\text{top Ndim } M$. Пусть $\text{top Ndim } M = \alpha \in \mathbb{Z}_+$ и для любого топологического модуля M' , для которого $\text{top Ndim } M' < \alpha$, теорема верна.

Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное по включению множество, элементами которого являются все Σ -нильпотентные относительно M идеалы P , такие что множество $\{r \in R: rM \subset [PM]\}$ совпадает с P . По лемме 7.1 для любого Σ -нильпотентного относительно M идеала I существует идеал $P \in \mathcal{P}$, содержащий I . Заметим, что $\mathcal{P}$ можно монотонно биективно отобразить на некоторое множество замкнутых подмодулей модуля M , поставив в соответствие каждому $P \in \mathcal{P}$ замкнутый подмодуль $[PM]$. Так как $\text{top Ndim } M = \alpha$, то $\text{codev } \mathcal{P} \leq \alpha$.

Пусть $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ — возрастающая последовательность Σ -нильпотентных идеалов относительно M . Докажем, что тогда идеал $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$ также будет Σ -нильпотентным относительно M . Проведём доказательство от противного.

Предположим, что идеал A не является Σ -нильпотентным относительно M . Введём обозначения $M_i = [A^i M]_M$, $B_j = [A_j M]_M$. Из леммы 6.2 получаем, что найдутся такие натуральные числа i и j , что $M_i \subseteq [M_{i+1} + B_j]$, то есть $M_i \subseteq [AM_i + B_j] \cap M_i \subseteq [AM_i] + M_i \cap B_j$.

Рассмотрим топологический фактор-модуль $\bar{M} = M_i / (M_i \cap B_j)$. Но в таком случае $[A\bar{M}]_{\bar{M}} = \bar{M}$. Предположим, что $\text{top Ndim } \bar{M} < \alpha$, тогда

$$\forall W \in \tau(\bar{M}) \exists n \in \mathbb{N} \mathcal{R}(R)^n \bar{M} \subset W.$$

Но тогда $\bar{M} \subset [W]$. Учитывая, что $\bar{M}$ — хаусдорфово пространство, получаем, что наше предположение о том, что $\text{top Ndim } \bar{M} < \alpha$, неверно.

В $\bar{M}$ существует такой замкнутый подмодуль K , что $\bar{M}/K$ топологически N -критический. Пусть $C = \bar{M}/K$. Следовательно, $[AC]_C = C$.

Фиксируем Σ -нильпотентный относительно M идеал I . Так как для R -модуля C выполняется свойство (1), то $[IC] \neq C$. Поэтому

$$\text{top Ndim}[IC] < \alpha,$$

следовательно,

$$\forall W \in \tau(C) \exists k A^k IC \subset W.$$

Наш полином f мы можем представить в виде

$$f(x_1, \dots, x_d) = x_1 g(x_2, \dots, x_d) + \psi(x_1, \dots, x_d) + \varphi(x_2, \dots, x_d),$$

где g, ψ, φ — полилинейные полиномы с целыми коэффициентами, g имеет хотя бы один единичный коэффициент, все одночлены ψ содержат x_1 , но на x_1 не начинаются, а в φ нет одночленов, содержащих x_1 . Возьмём $x_1 = 0$, тогда $\varphi(x_2, \dots, x_d) \equiv 0$. Итак, мы можем считать, что

$$f(x_1, \dots, x_d)C = x_1 g(x_2, \dots, x_d)C + \psi(x_1, \dots, x_d)C.$$

Фиксируем натуральное k и $a_2, \dots, a_d \in A^k$, $a_1 \in I$. Тогда $Ig(a_2, \dots, a_d)C \subseteq \subseteq A^k IC$. Для каждого натурального k определим замкнутый подмодуль $L(k) = \{c \in C : Ic \subseteq [A^k IC]\}$. Заметим, что $L(1) \supseteq L(2) \supseteq \dots$

Итак,

$$\forall b_1, \dots, b_{d-1} \in A^k g(b_1, \dots, b_{d-1})(C/L(k)) = 0.$$

По предположению индукции, так как $M/L(k)$ обладает всеми необходимыми свойствами, мы имеем, что

$$\forall W \in \tau(C) \exists m A^{mk} C \subseteq L(k) + W,$$

следовательно,

$$C = [A^{mk} C] \subseteq [L(k) + W].$$

Итак,

$$C \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{W \in \tau(C)} [L(k) + W] \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [L(k)],$$

следовательно,

$$L(k) = C$$

и

$$IC \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A^k IC \subseteq \bigcap_{W \in \tau(C)} W = 0.$$

Поэтому

$$\bar{M} = M_i / (M_i \cap B_j) = 0.$$

Но из этого очевидным образом следует

$$[A^i M] \subseteq [A_j M].$$

Воспользовавшись леммой 7.1, мы получаем, что A^i является Σ -нильпотентным относительно M идеалом, то есть мы получили противоречие.

Итак, каждая возрастающая последовательность элементов из $\mathcal{P}$ ограничена некоторым элементом. Из леммы 7.2 следует, что каждая цепь в $\mathcal{P}$ имеет кофинальную последовательность. Заметим, что для любых двух идеалов P_1, P_2 , Σ -нильпотентных относительно M , идеал $P_1 + P_2$ является также Σ -нильпотентным относительно M . Но тогда для любых $x, y \in \mathcal{P}$ найдётся $z \in \mathcal{P}$, такой что $z > x, z > y$, поэтому каждый максимальный элемент этого множества является наибольшим. Применяя лемму Цорна, получим, что $\mathcal{P}$ имеет наибольший элемент. Другими словами, сумма всех Σ -нильпотентных относительно M идеалов является также Σ -нильпотентным относительно M идеалом. $\square$

В качестве следствия этой теоремы можно получить теорему из [3].

Теорема 7.2. *Радикал Бэра PI -кольца, обладающего точным нётеровым модулем, нильпотентен.*

Доказательство. Пусть R и M соответственно кольцо и модуль. Так как дуальная размерность Крулля нётерова модуля равна нулю, то условия предыдущей теоремы выполняются для дискретных R и M . Заметим, что каждый Σ -нильпотентный относительно M идеал является просто нильпотентным идеалом. Поэтому, воспользовавшись предыдущей теоремой, получаем, что сумма всех нильпотентных идеалов также нильпотентна. Но тогда и сам радикал Бэра нильпотентен. $\square$

Прежде чем сформулировать похожую теорему для Σ -нильпотентных идеалов, введём понятие топологической точности.

Для каждой окрестности нуля W топологического R -модуля M введём следующее обозначение:

$$\text{Ann}(M, W) = \{x \in R: xM \subset W\}.$$

Определение. Назовём топологический R -модуль M топологически точным, если для любой окрестности нуля $V \in \tau(R)$ найдётся такая окрестность нуля $W \in \tau(M)$, что $V \supset \text{Ann}(M, W)$.

Предложение 7.1. *Топологически точный модуль является точным.*

Доказательство. Пусть M — топологически точный R -модуль. Обозначим $A = \{r \in R: rM = 0\}$. Из топологической точности модуля M следует, что любая окрестность нуля из R содержит множество A . Поэтому $A = \{0\}$, что доказывает точность M . $\square$

Можно легко доказать следующее предложение.

Предложение 7.2. *Для дискретных модулей над дискретными кольцами понятия точности и топологической точности совпадают.*

Следующая лемма, демонстрирующая свойство топологически точных модулей, будет нам полезна в дальнейшем.

Лемма 7.3. Пусть топологический R -модуль M является топологически точным. Тогда всякий Σ -нильпотентный относительно M идеал кольца R является Σ -нильпотентным.

Доказательство. Пусть V — некоторая окрестность нуля кольца R . Тогда найдётся такая окрестность нуля W в M , что $V \supseteq \text{Ann}(M, W)$. По условию найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $I^n M \subset W$. Тогда $I^n \subseteq \text{Ann}(M, W)$, следовательно, $I^n \subset V$. $\square$

Теорема 7.3. Пусть топологическое PI -кольцо R обладает модулем M с конечной топологической N -размерностью и для этого модуля выполняются следующие два условия:

- 1) если P — Σ -нильпотентный идеал кольца R , то для всякой окрестности нуля W в M найдётся натуральное число m , такое что $P^m M \subset W$;
- 2) для любых трёх замкнутых подмодулей A, B, C , таких что $A \supseteq B$, верно $A \cap [B + C] = [B + A \cap C]$.

Тогда замыкание суммы всех Σ -нильпотентных идеалов кольца R является также Σ -нильпотентным идеалом.

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы каждый Σ -нильпотентный идеал является Σ -нильпотентным относительно M идеалом. Применяя теорему 7.1, получаем требуемое. $\square$

Обсудим условие 1) сформулированной теоремы. Можно показать, что это условие справедливо для всех топологически нётеровых модулей. Следующий пример показывает, что это неверно для произвольного топологического модуля с топологической размерностью Крулля.

Пример 7.1. Мы приведём пример топологического кольца R и точного топологического R -модуля M с топологической N -размерностью, равной единице, таких что существует Σ -нильпотентный идеал I , для которого справедливо $IM = M$. Пусть d — p -адическая метрика на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [2]). Для каждого положительного действительного a определим множество $P_a = \{x \in \mathbb{Q} : d(x, 0) \leq a\}$. Можно легко показать, что P_a — кольцо. Пусть кольцо R — это P_1 с топологией, индуцированной метрикой d . Множество M всех рациональных чисел с p -адической топологией можно рассматривать как топологический R -модуль. Можно доказать, что любой собственный подмодуль L в M имеет вид P_{p^s} для некоторого целого числа s . Поэтому $\text{top Ndim } M = 1$. Для всех положительных $r < 1$ идеал P_r является Σ -нильпотентным, но $P_r M = M$.

Следующий пример предъявляет топологическое PI -кольцо с топологической размерностью Крулля, удовлетворяющее условиям 1), 2) предыдущей теоремы, для которого не только его топологический радикал Бэра не является Σ -нильпотентным, но и пересечение всех степеней этого радикала не равно нулю, хотя замыкание суммы всех Σ -нильпотентных идеалов этого кольца — Σ -нильпотентный идеал.

Пример 7.2. Пусть d — p -адическая метрика на $\mathbb{Q}$. Для любого положительного действительного числа a существует множество $P_a = \{x \in \mathbb{Q} : d(x, 0) \leq a\}$. В качестве топологического кольца рассмотрим $R = \begin{pmatrix} P_1 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$, в котором множества

$$U_{nmk} = \begin{pmatrix} P_{\frac{1}{p^n}} & P_{\frac{1}{p^m}} \\ 0 & p^k \mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

задают базу окрестностей нуля для некоторой топологии. Заметим, что $\text{top Ndim } R = 1$ и $\text{top Kdim } R = 1$. Замыкание суммы всех Σ -нильпотентных идеалов

$$\mathcal{R}_1(R) = \begin{pmatrix} P_{\frac{1}{p}} & 0 \\ 0 & p\mathbb{Z} \end{pmatrix} -$$

Σ -нильпотентный идеал, а топологический радикал Бэра

$$\mathcal{L}(R) = \mathcal{R}_2(R) = \begin{pmatrix} P_{\frac{1}{p}} & \mathbb{Q} \\ 0 & p\mathbb{Z} \end{pmatrix}$$

не является Σ -нильпотентным идеалом.

Литература

- [1] Арнаут В. И., Водичар М. И., Михалёв А. В. Введение в теорию топологических колец и модулей // Докл. АН Молдавской ССР. — 1981. — 174 с.
- [2] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.
- [3] Марков В. Т. Точные нётеровы модули над PI-кольцами // Абелевы группы и модули. Вып. 8. — 1989. — С. 103—112.
- [4] Марков В. Т. О PI-кольцах, имеющих точный модуль с размерностью Крулля // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, № 2. — С. 557—559.
- [5] Рудин У. Функциональный анализ / Под ред. Е. А. Горина. — М.: Мир, 1975.
- [6] Тензина В. В. Свойства топологических колец и модулей с топологической размерностью Крулля // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры, 2004, тезисы докладов. — С. 123—125.
- [7] Chambless L. N -dimension and N -critical modules. Application to Artinian modules // Comm. Algebra. — 1980. — Vol. 8, no. 16. — P. 1561—1592.
- [8] Gordon R., Robson J. C. Krull dimension // Mem. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 133. — P. 1—78.
- [9] Lemonnier B. Déviation des ensembles et groupes abeliens totalement ordonnés // Bull. Sci. Math., II Ser. — 1972. — Vol. 96. — P. 289—303.
- [10] Lenagan T. H. The nil radical of a ring with Krull dimension // Bull. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 5, no. 3. — P. 307—311.
- [11] Lenagan T. H. Reduced rank in rings with Krull dimension. — Ring theory, Proc. 1978 Antwerp Conf. — 1979. — P. 123—131. — Lect. Notes Pure Appl. Math. Vol. 51.
- [12] Rentschler R., Gabriel P. Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1967. — Vol. 265. — P. 712—715.