Геометрическая регулярность разложений в прямую сумму в некоторых классах модулей*

А. ФАККИНИ
Университет Падуи, Италия
e-mail: facchini@math.unipd.it

УДК 512.543

Ключевые слова: модули с полулокальными кольцами эндоморфизмов, моноиды Крулля, геометрическая регулярность.

Аннотация

В этой статье для модулей с полулокальными кольцами эндоморфизмов, которые имеют множество приложений, показывается, что их разложения в прямые суммы описываются так называемыми моноидами Крулля и что из этого следует геометрическая регулярность прямых разложений этих модулей. Их разложения в прямые суммы неразложимых модулей необязательно единственны в смысле теоремы Крулля—Шмидта. Применение теории моноидов Крулля к изучению прямых разложений модулей развивалось в течение последних пяти лет. Мы дадим краткий обзор результатов, полученных в этом направлении, и обратим главное внимание на примеры. В настоящее время эти примеры разбросаны по различным источникам, и мы постарались собрать и систематизировать их.

Abstract

A. Facchini, Geometric regularity of direct-sum decompositions in some classes of modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 231—244.

In this paper, we show that modules with semilocal endomorphism rings appear in abundance in applications, that their direct-sum decompositions are described by the so-called Krull monoids, and that this implies a geometric regularity of the direct-sum decompositions of these modules. Their direct-sum decompositions into indecomposables are not necessarily unique in the sense of the Krull–Schmidt theorem. The application of the theory of Krull monoids to the study of direct-sum decompositions of modules has been developed during the last five years. After a quick survey of the results obtained in this direction, we concentrate in particular on the abundance of examples. At present, these examples are scattered in the literature, and we try to collect them in a systematic way.

1. Моноиды $V(\mathcal{C})$ и $V(R)$

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, и пусть A_R — унитарный правый R-модуль. Нашей целью является описание разложений A_R в прямую сумму

*Работа частично поддержана Министерством образования, университетов и науки и Национальным институтом высшей математики (Национальная группа по алгебраическим и геометрическим структурам и их приложениям).

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 3, с. 231—244.

вида $A_R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ с конечным числом прямых слагаемых. Известно, что возможны различные варианты.

1. Разложение в прямую сумму неразложимых модулей может быть единственным. Это выполнено, например, для модулей конечной длины по теореме Крулля—Шмидта. Такие модули иногда называют *модулями со свойством Крулля—Шмидта*.
2. Существуют модули, которые раскладываются в прямую сумму неразложимых, для которых это разложение не единственно, как в теореме Крулля—Шмидта, но число разложений конечно с точностью до изоморфизма. Это происходит, например, с абелевыми группами без кручения конечного ранга, как было доказано Леди [L].
3. Для некоторых классов модулей разложение в прямую сумму неразложимых не единственно, но эти разложения являются в каком-либо смысле регулярными, например, они могут обладать некоторой геометрической регулярностью, как в случае модулей с полулокальными кольцами эндоморфизмов. Эта работа посвящена описанию геометрической регулярности, которая возникает для модулей с полулокальными кольцами эндоморфизмов, и иллюстрирует универсальность этих модулей.

Лучшим алгебраическим способом описания разложений в прямую сумму модулей является использование коммутативных моноидов (полугрупп с бинарной операцией, которая ассоциативна, коммутативна и обладает единичным элементом). В этой статье все моноиды M полагаются коммутативными и аддитивными. Классы R-модулей будут пониматься как полные подкатегории категории Mod-R.

Для моноида M через $U(M)$ будем обозначать подгруппу всех элементов $a \in M$, обладающих обратным по сложению $-a \in M$. Напомним, что M называется *приведённым*, если $U(M) = \{0\}$. Для всякого моноида M моноид $M_{\mathrm{red}} = M/U(M)$ является приведённым. Аддитивный моноид $\mathbb{N}_0$ всех неотрицательных целых чисел является приведённым.

Существует естественный инвариантный относительно сдвигов частичный порядок $\leqslant$ на моноиде M (называемый *алгебраическим частичным порядком*), который определяется следующим образом: $x \leqslant y$, если существует элемент $z \in M$, такой что $x + z = y$. Моноидный гомоморфизм $f\colon M \to M'$ называется *дивизориальным гомоморфизмом*, если для всех $x, y \in M$ из $f(x) \leqslant f(y)$ следует $x \leqslant y$. Коммутативный моноид M является *свободным*, если он изоморфен $\mathbb{N}_0^{(I)}$ для некоторого множества I, и является *моноидом Крулля*, если существует дивизориальный гомоморфизм из M в свободный моноид. Легко видеть [Ch], что моноид M является приведённым моноидом Крулля тогда и только тогда, когда существует множество I и *подгруппа* G свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^{(I)}$, такие что $M \cong G \cap \mathbb{N}_0^{(I)}$.

Интересующий нас моноид, который характеризует разложения в прямую сумму, определяется следующим образом. Для ассоциативного кольца R с единицей и унитарного правого R-модуля A_R обозначим $\langle A_R \rangle := \{B_R \mid B_R \cong A_R\}$

класс изоморфных образов модуля A_R. Зафиксируем класс $\mathcal{C} \subseteq \text{Mod-}R$, где $\text{Mod-}R$ — класс всех правых R-модулей. Допустим, что $\mathcal{C}$ замкнут относительно изоморфных образов (если $A_R \in \mathcal{C}$ и B_R — произвольный правый R-модуль, изоморфный A_R, то $B_R \in \mathcal{C}$), прямых слагаемых (если $A_R \in \mathcal{C}$ и B_R является прямым слагаемым A_R, то $B_R \in \mathcal{C}$) и конечных прямых сумм (нулевой модуль принадлежит $\mathcal{C}$, и если $A_R, B_R \in \mathcal{C}$, то $A_R \oplus B_R \in \mathcal{C}$).

Положим $V(\mathcal{C}) := \{\langle A_R \rangle \mid A_R \in \mathcal{C}\}$. Будем считать, что $V(\mathcal{C})$ является множеством. Определим

$$\langle A_R \rangle + \langle B_R \rangle := \langle A_R \oplus B_R \rangle$$

для всех $A_R, B_R \in \mathcal{C}$. Тогда $V(\mathcal{C})$ можно рассматривать как аддитивный моноид, который всегда будет приведённым коммутативным моноидом.

Очевидно, что моноид $V(\mathcal{C})$ точно описывает разложения в прямые суммы модулей в $\mathcal{C}$: модуль раскладывается в прямую сумму n ненулевых подмодулей тогда и только и тогда, когда соответствующий элемент моноида $V(\mathcal{C})$ является суммой n ненулевых элементов.

Например, имеет место теорема Крулля—Шмидта.

Теорема 1. *Если A_R — модуль конечной длины, то любые два разложения A_R в прямую сумму $A_R = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_t = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$ с неразложимыми слагаемыми A_i и B_j изоморфны* (*т. е.* $t = s$ *и найдётся перестановка* σ *чисел* $\{1, 2, \ldots, t\}$, *такая что* $A_i \cong B_{\sigma(i)}$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, t$).

Эту теорему можно переформулировать в наших терминах следующим образом: если $\mathcal{C}$ — класс всех правых R-модулей конечной длины, то $V(\mathcal{C})$ является свободным коммутативным моноидом, т. е. $V(\mathcal{C}) \cong \mathbb{N}_0^{(X)}$. Здесь X — это множество всех классов изоморфных неразложимых модулей в $\mathcal{C}$.

Если мы хотим изучить разложения в прямую сумму одного конкретного R-модуля A_R, достаточно взять в качестве $\mathcal{C}$ класс $\operatorname{add}(A_R) = \{B_R \in \text{Mod-}R \mid B_R$ изоморфен прямому слагаемому модуля A_R^n для некоторого $n\}$. Это наименьший подкласс в $\text{Mod-}R$, содержащий A_R и замкнутый относительно изоморфных образов, прямых слагаемых и конечных прямых сумм, и класс $V(\operatorname{add}(A_R))$ оказывается множеством. Например, $\operatorname{proj} R := \{P_R \mid P_R$ — конечно порождённый проективный R-модуль$\}$ совпадает с $\operatorname{add}(R_R)$.

Заметим, что для модуля A_R с кольцом эндоморфизмов $E := \operatorname{End}(A_R)$ имеется эквивалентность категорий $\operatorname{Hom}_R(A_R, \text{-})\colon \operatorname{add}(A_R) \to \operatorname{proj} E$. Она индуцирует изоморфизм моноидов $V(\operatorname{add}(M_R)) \cong V(\operatorname{proj} E)$. Таким образом, для изучения разложений в прямые суммы произвольного фиксированного модуля A_R мы всегда можем считать, что он есть кольцо, рассматриваемое как правый модуль над собой: $A_R = R_R$.

Для кольца R обозначим через $V(R)$ моноид $V(\operatorname{proj} R)$. Моноиды $V(R)$ — предмет исследования в так называемой *нестабильной* K-теории. Очевидно, что *группа Гротендика* $K_0(R)$ кольца R — это группа частных моноида $V(R)$ (абелева группа с тем же множеством образующих и тем же множеством соотношений, что и моноид $V(R)$). Это означает, что существует канонический гомоморфизм моноидов $\psi_R\colon V(R) \to K_0(R)$. Точнее, V и K_0 являются функторами из категории ассоциативных колец в категорию коммутативных моноидов, и ψ оказывается естественным преобразованием функтора V в функтор K_0.

Имеется естественный частичный предпорядок (= рефлексивное и транзитивное отношение) в абелевой группе $K_0(R)$. Соответствующий положительный конус является образом гомоморфизма моноидов $\psi_R(V(R))$. Частично упорядоченная абелева группа $(K_0(R), \leqslant)$ — объект исследования так называемой *упорядоченной* К-теории.

Очевидно, что структуры кольца R и моноида $V(R)$ зависят друг от друга. Например, как мы скоро увидим, имеется взаимно-однозначное соответствие между идеалами следа кольца R и простыми идеалами коммутативного моноида $V(R)$. Напомним, что *простой идеал* в коммутативном моноиде M — это такое собственное подмножество P моноида M, что для всех $x, y \in M$ справедливо $x + y \in P$ тогда и только тогда, когда $x \in P$ или $y \in P$. Можно локализовать коммутативные моноиды относительно их простых идеалов точно так же, как можно это делать в случае коммутативных колец: если P — простой идеал в коммутативном моноиде M, то *локализация* M *относительно* P есть моноид $M_P = \{x - s \mid x \in M,\ s \in M \setminus P\}$, где $x - s = x' - s'$, если и только если существует элемент $t \in M \setminus P$, такой что $x + s' + t = x' + s + t$. Например, группа Гротендика $G(M)$ моноида M — это локализация $M_\varnothing$ моноида M относительно простого идеала $\varnothing$, подобно тому как поле дробей коммутативной области целостности — это локализация области относительно простого идеала 0. Если P — простой идеал в M, то моноид $(M_P)_{\mathrm{red}}$ называется *приведённой локализацией* M в P (приведённая локализация не имеет аналога в коммутативных кольцах).

Идеалы следа кольца R — это идеалы в R вида

$$\sum_{\substack{\langle A_R\rangle \in \mathcal{U} \\ f \in \mathrm{Hom}_R(A_R, R_R)}} f(A_R)$$

для некоторого подмножества $\mathcal{U}$ моноида $V(R)$.

Теорема 2 ([FHK, теорема 2.1(c)]). *Решётка $\mathcal{T}(R)$ всех идеалов следа кольца R антиизоморфна решётке $\mathrm{Spec}(V(R))$ всех простых идеалов коммутативного моноида $V(R)$.*

Идеалу следа I кольца R соответствует простой идеал $P_I = \{\langle A_R\rangle \in V(R) \mid A_R I \neq A_R\}$ коммутативного моноида $V(R)$.

Теорема 3 ([FHK, теорема 2.1(d)]). *Пусть R — кольцо, I — идеал следа в R и $\pi\colon R \to R/I$ — канонический эпиморфизм. Пусть P_I — простой идеал в $V(R)$, соответствующий идеалу I. Тогда образ гомоморфизма моноидов $V(\pi)\colon V(R) \to V(R/I)$ канонически изоморфен приведённой локализации $V(R)$ относительно P_I.*

Моноиды, которые реализуются как $V(R)$, могут быть почти произвольными, как показывает следующий результат Бергмана и Дикса. Напомним, что элемент u коммутативного моноида M называется *порядковой единицей*, если для любого $x \in M$ найдётся такое целое число $n \geqslant 0$, что $x \leqslant nu$. Например, элемент $\langle R_R \rangle$ коммутативного приведённого моноида $V(R)$ является порядковой единицей. Категория коммутативных моноидов с порядковой единицей определяется следующим образом. Её объекты — это пары (M, u), где M — коммутативный моноид и $u \in M$ — порядковая единица, а её морфизмы $f\colon (M, u) \to (M', u')$ — такие гомоморфизмы моноидов $f\colon M \to M'$, что $f(u) = u'$. Коммутативный моноид $V(\mathcal{C})$ — это алгебраический объект, описывающий прямые разложения модулей в классе $\mathcal{C}$, а коммутативный моноид с порядковой единицей $(V(\mathrm{add} A_R), \langle A_R \rangle)$ — это алгебраический объект, описывающий прямые разложения одного модуля A_R.

Теорема 4 (Бергман и Дикс [B, BD]). *Пусть k — поле и M — коммутативный приведённый моноид с порядковой единицей u. Тогда существует такая наследственная слева и справа k-алгебра R, что (M, u) и $(V(R), \langle R_R \rangle)$ изоморфны как моноиды с порядковой единицей.*

Теорема 4 была впервые доказана Бергманом для конечно порождённых моноидов с порядковой единицей [B, теоремы 6.2 и 6.4], а затем Бергман и Дикс распространили её на произвольные моноиды с порядковой единицей [BD, с. 315].

Следствие 5. *Пусть k — поле и M — коммутативный приведённый моноид. Тогда существует класс $\mathcal{C}$ конечно порождённых проективных правых модулей над наследственной справа и слева k-алгеброй R, такой что $M \cong V(\mathcal{C})$.*

Для доказательства следствия 5 рассмотрим коммутативный приведённый моноид M и применим теорему 4 к моноиду с порядковой единицей $(M \cup \{\infty\}, \infty)$. Получим такую наследственную алгебру R, что $(M \cup \{\infty\}, \infty) \cong$ $\cong (V(R), \langle R \rangle)$. В качестве $\mathcal{C}$ можно взять класс конечно порождённых проективных правых R-модулей, не изоморфных R_R.

Как уже было сказано, моноиды $V(R)$ и $V(\mathcal{C})$ могут быть произвольными по теореме 4 и следствию 5. Кроме очевидного ограничения, что моноид должен быть приведённым, других ограничений нет. С другой стороны, мы хотим подчеркнуть геометрическую регулярность, которая появляется, когда $V(R)$ и $V(\mathcal{C})$ — моноиды Крулля. Как мы уже сказали, моноид является приведённым моноидом Крулля тогда и только тогда, когда он изоморфен моноиду $\mathbb{N}_0^{(I)} \cap G$, где I — множество, $\mathbb{N}_0^{(I)}$ — положительный конус свободной абелевой группы $\mathbb{Z}^{(I)}$ с покомпонентным порядком, а G — подгруппа в $\mathbb{Z}^{(I)}$ [Ch]. Если моноид конечно порождён, как, например, моноид $V(R)$, являющийся моноидом Крулля, мы можем даже считать множество I конечным. На языке геометрии Минковского для чисел подгруппа G группы $\mathbb{Z}^{(I)}$ представлена решёткой, то есть очень регулярной геометрической структурой. Если $V(R)$ — моноид Крулля, то $V(R) \cong \mathbb{N}_0^t \cap G$ — пересечение решётки $G \subseteq \mathbb{Z}^t$ с положительным конусом $\mathbb{N}_0^t$. Таким образом, отклонение от теоремы Крулля—Шмидта в этом случае минимально и обусловлено только присутствием границы множества $\mathbb{N}_0^t \cap G$.

Таким образом, когда $V(R)$ — моноид Крулля, единственность Крулля—Шмидта не выполняется в общем случае, но прямые разложения имеют такой же геометрически регулярный вид.

2. Моноиды Крулля для модулей с полулокальными кольцами эндоморфизмов

Через $J(R)$ мы будем обозначать радикал Джекобсона кольца R. Кольцо R называется *полулокальным*, если фактор-кольцо $R/J(R)$ полупростое артиново, т. е. изоморфно конечному прямому произведению $\prod_{i=1}^{t} M_{n_i}(D_i)$, где $n_1, \dots, n_t$ — положительные целые числа, $D_1, \dots, D_t$ — тела и $M_{n_i}(D_i)$ обозначает кольцо всех $(n_i \times n_i)$-матриц с элементами из D_i.

Если R полупростое артиново, то коммутативный моноид $V(R)$ является свободным. Если R только полулокально и $\pi\colon R \to R/J(R)$ — канонический эпиморфизм, то, применяя функтор V, получаем дивизориальный гомоморфизм $V(\pi)$ приведённого моноида $V(R)$ в свободный моноид $V(R/J(R))$. Так как гомоморфизм $V(\pi)$ является дивизориальным [FH1, лемма 2.2], то $V(R)$ — моноид Крулля для любого полулокального кольца R.

Можно доказать, что модули $M_R \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ с полулокальным кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}(M_R)$ сокращаются в прямых суммах (для каждых $A_R, B_R \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ из $M_R \oplus A_R \cong M_R \oplus B_R$ следует $A_R \cong B_R$) и обладают свойством извлечения корня степени n (для каждого $A_R \in \mathrm{Mod}\text{-}R$ и положительного целого числа n из $M_R^n \cong A_R^n$ следует $M_R \cong A_R$) [F2, следствие 4.6 и предложение 4.8]. Поэтому если $\mathcal{C}$ — класс модулей, замкнутый относительно изоморфных образов, прямых слагаемых и конечных прямых сумм, причём $V(\mathcal{C})$ — множество и все $A_R \in \mathcal{C}$ имеют полулокальные кольца эндоморфизмов, то $V(\mathcal{C})$ — моноид с сокращением и группа частных моноида $V(\mathcal{C})$ — абелева группа без кручения. Верно и следующее более общее утверждение.

Теорема 6 ([F3, теорема 3.4]). *Пусть $\mathcal{C}$ — класс модулей, замкнутый относительно изоморфных образов, прямых слагаемых и конечных прямых сумм, причём $V(\mathcal{C})$ — множество. Предположим, что кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}(A_R)$ любого $A_R \in \mathcal{C}$ полулокально. Тогда $V(\mathcal{C})$ является приведённым моноидом Крулля.*

Прямая сумма двух модулей имеет полулокальное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда оба слагаемых имеют полулокальные кольца эндоморфизмов. Доказательство этого факта можно найти в первом абзаце введения из [FH2].

Теперь, когда мы знаем, что если модули в классе $\mathcal{C}$ имеют полулокальные кольца эндоморфизмов, то $V(\mathcal{C})$ оказывается приведённым моноидом Крулля, и что из этого следует сильная геометрическая регулярность прямых разложений модулей этого класса, настало время показать, что существует много классов $\mathcal{C}$ модулей с этими свойствами.

В примерах 1—15 мы укажем классы $\mathcal{C}$ R-модулей, 1) которые замкнуты относительно изоморфных образов, 2) которые замкнуты относительно прямых слагаемых, 3) которые замкнуты относительно конечных прямых сумм, 4) для которых $V(\mathcal{C})$ — множество и 5) таких что кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}(A_R)$ полулокально для каждого $A_R \in \mathcal{C}$. Когда мы говорим, что «$\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям», мы имеем в виду, что $\mathcal{C}$ обладает этими пятью свойствами.

Пример 1. Пусть R — полулокальное кольцо и $\mathcal{C}$ — класс всех конечно представимых правых R-модулей. Модули в $\mathcal{C}$ имеют полулокальные кольца эндоморфизмов [FH3]. Немедленным следствием этого факта является то, что если R — полулокальное кольцо, то класс $\mathrm{proj}\, R$ конечно порождённых проективных правых R-модулей также удовлетворяет необходимым условиям, так что $V(R) := V(\mathrm{proj}\, R)$ — приведённый моноид Крулля, необходимо конечно порождённый. И наоборот, Д. Эрбера и автор [FH1, теорема 6.1] доказали, что для каждого конечно порождённого приведённого моноида Крулля M и любого поля k существует полулокальная наследственная справа и слева k-алгебра R, такая что $V(R) \cong M$.

Пример 2. Определение и основные свойства дуальной размерности Голди можно найти в [F2, § 2.8]. Пусть R — произвольное кольцо. Пусть $\mathcal{D}$ — класс всех R-модулей M_R конечной дуальной размерности Голди, таких что каждый сюръективный эндоморфизм M_R — биекция. Каждый модуль в $\mathcal{D}$ имеет полулокальное кольцо эндоморфизмов [HS, теорема 3(2)]. Пусть $\mathcal{C} = \mathrm{add}(\mathcal{D})$ — класс всех R-модулей, изоморфных прямым слагаемым в конечных прямых суммах модулей из $\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям.

Пример 3. Пусть R — коммутативное полулокальное кольцо и $\mathcal{C}$ — класс всех конечно порождённых R-модулей. Для доказательства того, что $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям, достаточно заметить, что это частный случай примера 2 (см. [V, предложение 1.2]). Класс $\mathcal{C}$ был исследован в [Wie] Р. Вигандом. Он доказал, что для любого конечно порождённого приведённого моноида Крулля M найдётся конечно порождённый модуль A над подходящей коммутативной нётеровой локальной областью с однозначным разложением на множители R, такой что $M \cong V(\mathrm{add}(A))$ [Wie, теорема 3.1].

Пример 4. Пусть k — коммутативное полулокальное кольцо, R — k-алгебра, конечно порождённая как k-модуль, и $\mathcal{C}$ — класс всех конечно порождённых R-модулей. Класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям. Чтобы это проверить, достаточно заметить, что это частный случай примера 2 (см. [V, предложение 1.2]). В качестве следствия получаем, что если k — полулокальное коммутативное кольцо, G — конечная группа и $k[G]$ — групповая алгебра, то класс $\mathrm{proj}\, k[G]$ удовлетворяет необходимым условиям.

Пример 5. Пусть R — произвольное кольцо. Класс всех нётеровых правых R-модулей конечной дуальной размерности Голди удовлетворяет необходимым условиям (см. пример 2).

Пример 6. Пусть R — полулокальное нётерово справа кольцо и $\mathcal{C}$ — класс всех конечно порождённых правых R-модулей. Тогда $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям (см. пример 5). Аналогично, если S — полулокальное кольцо и $\mathcal{C}'$ — класс всех нётеровых правых S-модулей, то $\mathcal{C}'$ удовлетворяет необходимым условиям.

Пример 7. Для любого кольца R класс всех правых R-модулей конечной размерности Голди и конечной дуальной размерности Голди удовлетворяет необходимым условиям [HS, теорема 3(3)].

Пример 8. Пусть R — произвольное кольцо. Модуль называется *биоднородным*, если его размерность Голди и дуальная размерность Голди равны единице. Если $\mathcal{C}$ — класс всех модулей, изоморфных прямым слагаемым конечных прямых сумм биоднородных правых R-модулей, то класс $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям (пример 7). Нас в особенности интересует подкласс $\mathcal{C}'$ класса $\mathcal{C}$, состоящий из всех полуцепных модулей конечной размерности Голди. Напомним, что правый R-модуль называется *цепным*, если его решётка подмодулей является линейно упорядоченной по включению. Не равные нулю цепные модули биоднородны. R-модуль называется *полуцепным*, если он разлагается в прямую сумму цепных подмодулей. Таким образом, модуль является полуцепным модулем конечной размерности Голди тогда и только тогда, когда этот модуль — прямая сумма конечного числа цепных модулей. Пусть $\mathcal{C}'$ — класс всех полуцепных модулей конечной размерности Голди. Класс $\mathcal{C}'$ замкнут относительно прямых слагаемых [P, теорема 7], так что $\mathcal{C}'$ удовлетворяет необходимым условиям.

Мы говорим [F1], что два модуля A и B *принадлежат одному и тому же классу моногенности*, если существуют мономорфизмы $A \to B$ и $B \to A$. В этом случае мы пишем $[A]_{\mathrm{m}} = [B]_{\mathrm{m}}$. Аналогично, A и B *принадлежит одному и тому же классу эпигенности*, если существуют эпиморфизмы $A \to B$ и $B \to A$, и в этом случае мы пишем $[A]_{\mathrm{e}} = [B]_{\mathrm{e}}$.

Теорема 7 (слабая теорема Крулля—Шмидта [F2, теорема 9.13]). *Пусть $A_1, \ldots, A_t, B_1, \ldots, B_s$ — биоднородные модули над кольцом R. Тогда*

$$A_1 \oplus \ldots \oplus A_t \cong B_1 \oplus \ldots \oplus B_s,$$

если и только если $t = s$ и существуют две перестановки σ, τ на множестве $\{1, 2, \ldots, t\}$, такие что $[A_i]_{\mathrm{m}} = [B_{\sigma(i)}]_{\mathrm{m}}$ и $[A_i]_{\mathrm{e}} = [B_{\tau(i)}]_{\mathrm{e}}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Из теоремы 7 следует, что $V(\mathcal{C}')$ оказывается подпрямым произведением двух свободных коммутативных моноидов:

$$V(\mathcal{C}) \to \mathbb{N}_0^{(M)} \times \mathbb{N}_0^{(E)},$$

где M — множество всех классов моногенности цепных модулей и E — множество всех классов эпигенности цепных модулей [F3, следствие 5.4].

Наилучшим приложением этого результата является случай, когда кольцо R *полуцепное*, то есть модули R_R и ${}_RR$ полуцепные. Полуцепные кольца полулокальны, и над полуцепным кольцом каждый конечно представимый модуль полуцепной [Wa1]. Таким образом, слабая теорема Крулля—Шмидта (теорема 7) выполняется для конечно представимых модулей над полуцепными кольцами, но единственность прямых разложений в смысле Крулля—Шмидта не сохраняется для конечно представимых модулей над полуцепными кольцами в общем случае [F1, пример 2.1].

Пример 9. Пусть R — произвольное кольцо. Каждый R-модуль конечной размерности Голди, такой что каждый инъективный эндоморфизм биективен, имеет полулокальное кольцо эндоморфизмов [HS, теорема 3(1)]. Пусть $\mathcal{D}$ — класс всех таких модулей и $\mathcal{C} = \mathrm{add}(\mathcal{D})$ — класс всех модулей, которые изоморфны прямым слагаемым конечных прямых сумм модулей из $\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям. В частности, класс $\mathcal{A}$ артиновых правых R-модулей удовлетворяет необходимым условиям [CD], так что $V(\mathcal{A})$ — приведённый моноид Крулля и для каждого артинова модуля A_R моноид $V(\mathrm{add}(A))$ — конечно порождённый приведённый моноид Крулля. И наоборот, для каждого конечно порождённого приведённого моноида Крулля M существует циклический артинов модуль A_R над подходящим кольцом R, такой что $M \cong V(\mathrm{add}(A))$ [Wie, следствие 4.2].

Пример 10. Пусть R — произвольное кольцо и $\mathcal{C}$ — класс всех правых R-модулей, линейно компактных в дискретной топологии. Тогда $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям [HS, следствие 5].

Пример 11. Пусть R — коммутативная нётерова полулокальная область размерности Крулля 1 и $\mathcal{C}$ — класс всех R-модулей конечного ранга без кручения. Тогда $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям. Это доказано в [FH3] как обобщение предшествующего результата Уорфилда [Wa2]. В качестве следствия получаем, что если k — полулокальная коммутативная нётерова область размерности Крулля 1 и S — k-алгебра, которая является k-модулем конечного ранга без кручения, то $\mathrm{End}_k(S_k)$ — полулокальное кольцо и вложение $S \to \mathrm{End}_k(S_k)$ — локальный гомоморфизм, так что S — полулокальное кольцо [CD]. Из этого следует, что $\mathrm{proj}\, S$ — класс модулей, удовлетворяющий необходимым условиям (пример 1).

Пример 12. Пусть R — кольцо нормирования, то есть коммутативная область целостности, такая что R_R — цепной модуль, и $\mathcal{C}$ — класс всех R-модулей конечного ранга без кручения. Тогда $\mathcal{C}$ удовлетворяет необходимым условиям [Wa2]. Как в предшествующем примере 11, в качестве следствия получаем, что если k — кольцо нормирования и k-алгебра S имеет конечный ранг как k-модуль, то класс модулей $\mathrm{proj}\, S$ удовлетворяет необходимым условиям.

Пример 13. Для абелевых групп без кручения размерность Голди совпадает с обычным рангом. Абелевы группы с полулокальными кольцами эндоморфизмов исследовались в [Ca], где получены следующие результаты. Кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}(G)$ абелевой группы G полулокально тогда и только тогда, когда G разлагается в прямую сумму $G = T \oplus D \oplus F$, где T — конечная группа, D — делимая группа без кручения конечного ранга и F — редуцированная группа без кручения с полулокальным кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}(F)$. Кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}(F)$ редуцированной абелевой группы F без кручения конечного ранга полулокально тогда и только тогда, когда $pF = F$ для почти всех простых p.

Пример 14. Дальнейшие примеры, включая повторные справа кольца, квазипроективные модули конечной дуальной размерности Голди и $AB5^*$ модули, содержатся в [HS, с. 3595—3597].

Пример 15. Пусть R — произвольное кольцо и $\mathcal{C}_R$ — класс всех правых R-модулей $A_R \in \mathrm{proj}\, R$ с полулокальными кольцами эндоморфизмов. Тогда $\mathcal{C}_R$ удовлетворяет необходимым условиям, так что $V(\mathcal{C}_R)$ оказывается приведённым моноидом Крулля. Обратно, если k — поле и M — приведённый моноид Крулля, то существует такая k-алгебра R, что $M \cong V(\mathcal{C}_R)$ [FW, теорема 2.1].

3. Вычисления в конкретном случае

В этом разделе мы явно вычислим моноид $V(\mathcal{C})$ для класса $\mathcal{C}$ всех конечно представимых модулей над определённым полуцепным кольцом R. Это кольцо R позволило нам в [F1, пример 2.1] дать ответ на вопрос, поставленный Уорфилдом [Wa1, с. 189]. На языке данной статьи вопрос Уорфилда формулируется так: является ли моноид $V(\mathcal{C})$ свободным для любого полуцепного кольца R. С помощью следующего примера мы покажем, что существует такое полуцепное кольцо R, что моноид $V(\mathcal{C})$ не свободен.

Пусть $p \neq q$ — простые числа, $n \geqslant 2$ — целое число, $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_q$ — локализации $\mathbb{Z}$ относительно простых идеалов (p) и (q) соответственно. Пусть $\mathbf{M}_n(\mathbb{Q})$ — кольцо всех $(n \times n)$-матриц над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Пусть Λ_p обозначает подкольцо кольца $\mathbf{M}_n(\mathbb{Q})$, состоящее из всех $(n{\times}n)$-матриц с элементами из $\mathbb{Z}_p$ на главной диагонали и выше неё и из $p\mathbb{Z}_p$ ниже диагонали, т. е.

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \dots & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \dots & \mathbb{Z}_p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p & \dots & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \subseteq \mathbf{M}_n(\mathbb{Q}).$$

Аналогично положим

$$\Lambda_q = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_q & \mathbb{Z}_q & \dots & \mathbb{Z}_q \\ q\mathbb{Z}_q & \mathbb{Z}_q & \dots & \mathbb{Z}_q \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q\mathbb{Z}_q & q\mathbb{Z}_q & \dots & \mathbb{Z}_q \end{pmatrix} \subseteq \mathbf{M}_n(\mathbb{Q}).$$

Если

$$R = \begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ \mathbf{M}_n(\mathbb{Q}) & \Lambda_q \end{pmatrix},$$

то R — подкольцо кольца $\mathbf{M}_{2n}(\mathbb{Q})$ всех $(2n \times 2n)$-матриц с рациональными элементами.

Для любого $i = 1, 2, \ldots, 2n$ пусть e_i обозначает $(2n \times 2n)$-матрицу с 1 на месте (i, i) и 0 на остальных местах. Тогда $2n$ правых идеалов e_iR и $2n$ левых идеалов Re_i являются цепными, следовательно, R — полуцепное кольцо. Ниже мы явно вычислим все подмодули правых идеалов e_iR.

Легко видеть, что

$$J(\Lambda_p) = \begin{pmatrix} p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \ldots & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p & \ldots & \mathbb{Z}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p & \ldots & p\mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$$

и

$$J(R) = \begin{pmatrix} J(\Lambda_p) & 0 \\ \mathbf{M}_n(\mathbb{Q}) & J(\Lambda_q) \end{pmatrix}.$$

Кольцо R имеет $2n$ простых правых модулей $e_iR/e_iJ(R)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ с точностью до изоморфизма. Каждый конечно представимый модуль разлагается в прямую сумму цепных конечно представимых модулей [Wa1]. Каждый ненулевой цепной конечно представимый модуль является гомоморфным образом ровно одного из e_iR.

Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ положим

$$V_i = (\underbrace{\mathbb{Q}, \ldots, \mathbb{Q}}_{n}, \underbrace{q\mathbb{Z}_q, \ldots, q\mathbb{Z}_q}_{i-1}, \underbrace{\mathbb{Z}_q, \ldots, \mathbb{Z}_q}_{n-i+1})$$

и

$$X_i = (\underbrace{p\mathbb{Z}_p, \ldots, p\mathbb{Z}_p}_{i-1}, \underbrace{\mathbb{Z}_p, \ldots, \mathbb{Z}_p}_{n-i+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n}).$$

Эти абелевы группы V_i и X_i становятся R-модулями относительно умножения их элементов, рассматриваемых как (1×4)-матрицы, на элементы кольца R, которые являются (4×4)-матрицами. Эти модули образуют цепь подмодулей

$$V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n.$$

К примеру,

$$e_1R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_q & \dots & \mathbb{Z}_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cong (\underbrace{\mathbb{Z}_q, \dots, \mathbb{Z}_q}_{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n}) = X_1.$$

Вообще $e_iR \cong X_i$ и $e_{n+i}R \cong V_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, каждый конечно представимый цепной правый R-модуль изоморфен подфактору (т. е. гомоморфному образу подмодуля) модуля V_1.

Найдём подмодули модуля

$$V_1 = (\underbrace{\mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}}_{n}, \underbrace{\mathbb{Z}_q, \dots, \mathbb{Z}_q}_{n}).$$

Имеем

$$V_1J(R) = (\underbrace{\mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}}_{n}, q\mathbb{Z}_q, \underbrace{\mathbb{Z}_q, \dots, \mathbb{Z}_q}_{n-1}) = V_2$$

и вообще $V_1J(R)^i = V_{i+1}$ для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$. Также

$$V_nJ(R) = (\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, \dots, q\mathbb{Z}_q, q\mathbb{Z}_q) = qV_1.$$

Следовательно, цепь подмодулей цепного модуля V_1 начинается с подмодулей

$$V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset qV_1 \supset qV_2 \supset \dots \supset qV_n \supset q^2V_1 \supset q^2V_2 \supset \dots \supset q^2V_n \supset \dots.$$

(Заметим, что композиционные факторы в этой цепи имеют мощность q и, следовательно, являются простыми R-модулями.) Пересечение этих подмодулей q^tV_i ($t \geqslant 0$, $i = 1, 2, \dots, n$) имеет вид $(\mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}, 0, \dots, 0)$, и ненулевые собственные подмодули этого модуля равны p^tX_i ($t \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, \dots, n$). Таким образом, решётка всех подмодулей модуля V_1 может быть описана, начиная сверху, как непересекающееся объединения цепей $\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$, затем точка, соответствующая модулю $(\mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}, 0, \dots, 0)$, затем цепь $\mathbb{Z}$, затем точка, соответствующая нулевому модулю. Поскольку каждый конечно порождённый модуль содержит максимальный подмодуль, модуль $(\mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}, 0, \dots, 0)$ не является конечно порождённым. Следовательно, конечно представимые неразложимые R-модули, с точностью до изоморфизма, следующие:

1) $2n$ проективных модулей V_i и X_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Они попарно неизоморфны;
2) модули конечной длины V_i/q^tV_j и X_i/p^tX_j. Они попарно неизоморфны, поскольку имеют либо неизоморфные верхние факторы, либо разную длину;

3) модули бесконечной длины V_j/p^tX_i ($i, j = 1, 2, \ldots, n$, $t \in \mathbb{Z}$). Умножение на p^t является автоморфизмом модуля V_j, который отображает подмодуль X_i на p^tX_i. Следовательно, конечно представимые неразложимые непроективные правые R-модули бесконечной длины, с точностью до изоморфизма, — это n^2 модулей $U_{i,j} =: V_j/X_i$. Они попарно неизоморфны, поскольку они имеют либо неизоморфные верхние факторы, либо неизоморфные цоколи.

Но класс модулей, изоморфных цепному модулю, определяется классом моногенности и классом эпигенности этого модуля ([F1, предложение 1.6] и [F3, следствие 5.4]).

Начнём с определения классов эпигенности цепных конечно представимых правых R-модулей. Два цепных модуля конечной длины изоморфны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному классу моногенности, или, что равносильно, одному классу эпигенности. Также каждый эпиморфизм цепного модуля на ненулевой проективный модуль является изоморфизмом. Следовательно, классы эпигенности цепных ненулевых проективных модулей и цепных ненулевых модулей конечной длины содержат единственный класс изоморфных модулей. Поэтому достаточно найти классы эпигенности n^2 модулей $U_{i,j}$. Несложное вычисление [F1, пример 2.1] показывает, что $U_{i,j}$ и $U_{k,l}$ принадлежат одному классу моногенности (эпигенности) тогда и только тогда, когда $i = k$ (соответственно $j = l$). Следовательно, все классы эпигенности конечно представимых цепных правых R-модулей содержат по одному классу изоморфных модулей, за исключением n классов эпигенности (классов эпигенности модулей $U_{1,1}, \ldots, U_{1,n}$ соответственно).

Хотя это и не является необходимым для определения моноида $V(\mathcal{C})$ для класса $\mathcal{C}$ всех конечно представимых R-модулей, интересно отметить, что все классы моногенности конечно представимых цепных правых R-модулей содержат по одному классу изоморфных модулей, кроме $n+2$ классов моногенности $\{V_1, \ldots, V_n\}$, $\{X_1, \ldots, X_n\}$, $\{U_{1,1}, \ldots, U_{1,n}\}, \ldots, \{U_{n,1}, \ldots, U_{n,n}\}$. Каждый из этих $n+2$ классов моногенности содержит в точности n классов изоморфных модулей. Таким образом, имеем $V(\mathcal{C}) \cong \mathbb{N}_0^{(\aleph_0)} \oplus M$, где M — подмоноид моноида $\mathbb{N}_0^{2n}$, порождённый n^2 элементами

$$(\underbrace{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0}_{n}) \in \mathbb{N}_0^{2n}$$

(одна из первых n координат равна 1, одна из последних n координат равна 1, все остальные координаты равны 0). Эквивалентно,

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{N}_0^{2n} \mid x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n\}.$$

Таким образом, M совпадает с пересечением положительного конуса $\mathbb{N}_0^{2n}$ с гиперплоскостью, заданной уравнением $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$. Геометрическая регулярность класса $V(\mathcal{C})$ теперь очевидна.

Литература

[B] Bergman G. M. Coproducts and some universal ring constructions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 200. — P. 33—88.

[BD] Bergman G. M., Dicks W. Universal derivations and universal ring constructions // Pacific J. Math. — 1978. — Vol. 79. — P. 293—337.

[Ca] Calugareanu G. Abelian groups with semi-local endomorphism ring // Comm. Algebra — 2002. — Vol. 30, no. 9. — P. 4105—4111.

[CD] Camps R., Dicks W. On semi-local rings // Israel J. Math. — 1993. — Vol. 81. — P. 203—211.

[Ch] Chouinard L. G., II. Krull semigroups and divisor class groups // Canad. J. Math. — 1981. — Vol. 33. — P. 1459—1468.

[F1] Facchini A. Krull—Schmidt fails for serial modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348. — P. 4561—4575.

[F2] Facchini A. Module Theory. Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules. — Birkhäuser, 1998. — Progress in Math. Vol. 167.

[F3] Facchini A. Direct sum decompositions of modules, semilocal endomorphism rings, and Krull monoids // J. Algebra. — 2002. — Vol. 256. — P. 280—307.

[FHK] Facchini A., Halter-Koch F. Projective modules and divisor homomorphisms // J. Algebra Appl. — 2003. — Vol. 2, no. 4. — P. 435—449.

[FH1] Facchini A., Herbera D. K_0 of a semilocal ring // J. Algebra — 2000. — Vol. 225. — P. 47—69.

[FH2] Facchini A., Herbera D. Two results on modules whose endomorphism ring is semilocal // Algebras Represent. Theory. — 2004. — To appear.

[FH3] Facchini A., Herbera D. Local morphisms and modules with a semilocal endomorphism ring. — 2004. — To appear.

[FW] Facchini A., Wiegand R. Direct-sum decompositions of modules with semilocal endomorphism ring // J. Algebra — 2004. — Vol. 274. — P. 689—707.

[HS] Herbera D., Shamsuddin A. Modules with semi-local endomorphism ring // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123. — P. 3593—3600.

[L] Lady E. L. Summands of finite rank torsion-free Abelian groups // J. Algebra — 1974. — Vol. 32. — P. 51—52.

[P] Prihoda P. Weak Krull—Schmidt theorem and direct sum decompositions of serial modules of finite Goldie dimension // J. Algebra. — 2004. — To appear.

[V] Vasconcelos W. On finitely generated flat modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 138. — P. 505—512.

[Wa1] Warfield R. B., Jr. Serial rings and finitely presented modules // J. Algebra — 1975. — Vol. 37. — P. 187—222.

[Wa2] Warfield R. B., Jr. Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings // Pacific J. Math. — 1980. — Vol. 91. — P. 457—485.

[Wie] Wiegand R. Direct-sum decompositions over local rings // J. Algebra — 2001. — Vol. 240. — P. 83—97.