

Теорема чередования для матриц, графом которых является фиксированное дерево*

К.-М. ДА-ФОНСЕКА

Университет г. Коимбра, Португалия
e-mail: cmf@mat.uc.pt

УДК 512.643

Ключевые слова: эрмитовы матрицы, собственные значения, взвешенные графы, деревья.

Аннотация

Пусть A и B — $(n \times n)$ -матрицы. Для множества индексов $S \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим через $A(S)$ главную подматрицу, лежащую в строках и столбцах, занумерованных элементами S . Обозначим через S' дополнение к S и определим $\eta(A, B) = \sum_S \det A(S) \det B(S')$, где суммирование ведётся по всем подмножествам $\{1, \dots, n\}$ и считается, что $\det A(\emptyset) = \det B(\emptyset) = 1$. К. Р. Джонсон предположил, что если A и B — эрмитовы матрицы и матрица A является неотрицательно определённой, то многочлен $\eta(\lambda A, -B)$ имеет только вещественные корни. Г. Рублейн и Р. Б. Бапат доказали, что это верно при $n \leq 3$. Бапат также доказал соответствующий результат для любых n при дополнительном предположении, что обе матрицы A и B являются трёхдиагональными. В этой работе некоторые мало известные результаты о характеристических многочленах и присоединённых матрицах деревьев обобщены на матрицы, графом которых является фиксированное дерево. Доказана гипотеза для любого n при дополнительном предположении, что обе матрицы A и B являются матрицами, граф которых — дерево.

Abstract

C. M. da Fonseca, *An interlacing theorem for matrices whose graph is a given tree*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 10 (2004), no. 3, pp. 245–254.

Let A and B be $(n \times n)$ -matrices. For an index set $S \subset \{1, \dots, n\}$, denote by $A(S)$ the principal submatrix that lies in the rows and columns indexed by S . Denote by S' the complement of S and define $\eta(A, B) = \sum_S \det A(S) \det B(S')$, where the summation is over all subsets of $\{1, \dots, n\}$ and, by convention, $\det A(\emptyset) = \det B(\emptyset) = 1$. C. R. Johnson conjectured that if A and B are Hermitian and A is positive semidefinite, then the polynomial $\eta(\lambda A, -B)$ has only real roots. G. Rublein and R. B. Bapat proved that this is true for $n \leq 3$. Bapat also proved this result for any n with the condition that both A and B are tridiagonal. In this paper, we generalize some little-known results concerning the characteristic polynomials and adjacency matrices of trees to matrices whose graph is a given tree and prove the conjecture for any n under the additional assumption that both A and B are matrices whose graph is a tree.

*Работа поддержана центром математики университета г. Коимбра.

1. Введение

Пусть всюду далее $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — квадратные матрицы порядка n . Для множества индексов $S \subset \{1, \dots, n\}$ обозначим через $A(S)$ главную подматрицу размера $|S| \times |S|$, лежащую в строках и столбцах, индексированных элементами S . Мы будем использовать обозначения A_S или $A[S]$ для $A(S')$, где $S' — дополнение к S .$

Определим

$$\eta(A, B) = \sum_S \det A(S) \det B(S'),$$

где суммирование ведётся по всем подмножествам множества $\{1, \dots, n\}$ и считается, что $\det A(\emptyset) = \det B(\emptyset) = 1$. Аналогично, рассматривая

$$\alpha_k(A, B) = \sum_{|S|=k} \det A(S) \det B(S'),$$

можно определить

$$\eta(A, B) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(A, B). \quad (1.1)$$

Заметим, что

$$\eta(\lambda I_n, -B) = \det(\lambda I_n - B), \quad (1.2)$$

т. е. $\eta(\lambda I_n, -B)$ — характеристический многочлен для матрицы B . Известно, что если матрица B является эрмитовой, то корни многочлена (1.2), собственные числа B , вещественны. Основываясь на этом результате, К. Р. Джонсон [7] рассмотрел многочлен

$$\eta(\lambda A, -B) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \alpha_k(A, B) \lambda^k \quad (1.3)$$

и сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза 1.1 (К. Р. Джонсон [7]). Если A и B — эрмитовы матрицы и матрица A является неотрицательно определённой, то многочлен $\eta(\lambda A, -B)$ имеет только вещественные корни.

Заметим, что если A не является неотрицательно определённой, то сформулированная гипотеза неверна. Действительно, рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица с очевидностью не является неотрицательно определённой. Положим

$$B = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\eta(\lambda A, -B) = -2 - \lambda^2$$

и мы получаем чисто мнимые корни

$$\lambda_1 = i\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -i\sqrt{2}.$$

Если все корни $\lambda_\ell^A(B)$, $\ell = 1, \dots, n$, многочлена (1.3) являются вещественными, мы будем считать, что они упорядочены по возрастанию:

$$\lambda_1^A(B) \leq \dots \leq \lambda_n^A(B).$$

Рассматривая неравенства Коши о чередовании для собственных значений главных подматриц эрмитовых матриц (см. [3]), Р. Б. Бапат [1] и К. Р. Джонсон [8] сформулировали следующую гипотезу.

Гипотеза 1.2. Пусть A и B являются эрмитовыми матрицами и A — положительно определённая матрица, тогда элементы последовательности $\lambda_\ell^{A_1}(B_1)$, $\ell = 1, \dots, n-1$, чередуются с элементами последовательности $\lambda_\ell^A(B)$, $\ell = 1, \dots, n$, т. е.

$$\lambda_\ell^A(B) \leq \lambda_\ell^{A_1}(B_1) \leq \lambda_{\ell+1}^A(B), \quad \ell = 1, \dots, n-1. \quad (1.4)$$

Например, рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & 2 & 1-i \\ -i & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1+i & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+i & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1-i & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица A является положительно определённой и многочлен

$$\eta(\lambda A, -B) = 13 - 24\lambda - \lambda^2 - 21\lambda^3 + 44\lambda^4$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -1,49421, \quad \lambda_2 = -0,41081, \quad \lambda_3 = 0,22289, \quad \lambda_4 = 2,15941.$$

С другой стороны, многочлен

$$\eta(\lambda A_1, -B_1) = -3 - 5\lambda + 38\lambda^2 + 40\lambda^3$$

имеет корни

$$\mu_1 = -1,00000, \quad \mu_2 = -0,25000, \quad \mu_3 = 0,30000.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \leq \lambda_4.$$

Неравенства Коши о чередовании позволяют сформулировать также следующую более общую гипотезу.

Гипотеза 1.3. Пусть S — подмножество множества $\{1, \dots, n\}$, содержащее k элементов. Если A и B являются эрмитовыми матрицами и матрица A положительно определённая, то элементы последовательности $\lambda_\ell^{A_S}(B_S)$, $\ell = 1, \dots, n-k$, чередуются с элементами последовательности $\lambda_\ell^A(B)$, $\ell = 1, \dots, n$, следующим образом:

$$\lambda_\ell^A(B) \leq \lambda_\ell^{A_S}(B_S) \leq \lambda_{\ell+k}^A(B), \quad \ell = 1, \dots, n-k. \quad (1.5)$$

Если гипотеза 1.2 верна, то формула (1.5) может быть получена посредством кратного применения неравенств о чередовании (1.4), и, следовательно, гипотеза 1.3 также верна.

Гипотеза 1.1 подтверждена для $n = 3$ Рублейном [11]. Для получения результата им были рассмотрены три подслучая. В целом подход Рублейна достаточно сложен и вряд ли допускает обобщение на $n \geq 4$. С другой стороны, в [1] Бапат предложил решение для $n \leq 3$ элегантным и целостным методом. Более того, на сегодняшний день единственная попытка рассмотреть гипотезу 1.1 (и гипотезу 1.2) для произвольного n предпринята в [1], где рассмотрен случай, когда A и B являются трёхдиагональными матрицами.

В [7, 8] Джонсоном были сформулированы некоторые другие гипотезы. После сложных и значительных вычислений Джонсон предположил, что корни многочлена (1.3) качественно ведут себя так же, как и собственные числа B . Например, число положительных, отрицательных и нулевых корней многочлена (1.3) определяется инерцией матрицы B . Кроме того, кажется, что корни $\eta(\lambda A, -B)$ являются собственными значениями некоторой эрмитовой матрицы, определяющейся матрицами A и B . Известно также, что если B невырождена, то все корни (1.3) ненулевые.

В данной работе мы обобщаем некоторые результаты о графах (например, [2, 4, 9]) и, используя некоторые важные идеи из [1], доказываем, что гипотеза справедлива в случае, когда A и B — матрицы, графом которых является дерево.

2. Деревья с весами

Граф G — это пара (V, E) , где $V = V(G) = \{1, \dots, n\}$ — множество вершин, а E — множество рёбер, которое является подмножеством прямого произведения $V \times V$. Назовём вершины i и j смежными (и будем в этом случае писать $i \sim j$), если (i, j) — ребро графа G и $i \neq j$. Символ $\simeq$ будет использоваться для обозначения смежных или совпадающих вершины.

Дерево — это связный граф без циклов, а лес — граф, каждая компонента связности которого является деревом. В этой работе мы рассматриваем конечные графы, возможно с петлями (т. е. (i, i) может быть ребром). Если каждому ребру (i, j) приписано некоторое комплексное число, то такой граф называется взвешенным.

Если $A = (a_{ij})$ — эрмитова матрица, то (взвешенный) граф $G = G(A)$ матрицы A полностью определяется внедиагональными элементами A : множество вершин $G(A)$ — это $\{1, \dots, n\}$, i и j — смежные вершины тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$. Матрица A является взвешенной матрицей смежности для $G(A)$. Если A является 01-матрицей с нулевой главной диагональю, то A — матрица смежности для G . В основном мы рассматриваем матрицы, графы которых подчинены некоторому дереву T , т. е. граф матрицы является подграфом T .

Если S — подмножество $V(G)$, то $G \setminus S$ — подграф G , индуцированный вершинами, не лежащими в S . (Взвешенная) матрица смежности для графа $G \setminus S$

обозначается A_S . Если $e = (i, j)$ — ребро G , то $G \setminus e$ получено удалением ребра e , а не вершин i или j . В этом случае матрица $G \setminus e$ — это матрица графа G , но с нулевыми (i, j) -м и, в силу симметрии, (j, i) -м элементами. Наконец, $\varphi(G, \lambda)$, или просто $\varphi(G)$, — характеристический многочлен $A(G)$, т. е.

$$\varphi(G, \lambda) = \varphi(G) = \det(\lambda I_n - A(G)).$$

Определим $w_{ij}(A) = -|a_{ij}|^2$, если $i \neq j$, и $w_{ii}(A) = a_{ii}$. Иногда сокращённо будем писать w_{ij} . Следующий результат даёт общие рекуррентные соотношения между различными характеристическими многочленами.

Лемма 2.1. Если $e = (i, j)$ — ребро (взвешенного) дерева T , то

$$\varphi(T) = \varphi(T \setminus e) + w_{ij}\varphi(T \setminus ij). \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть E_{ij} — матрица, (i, j) -й элемент которой равен 1, а все остальные элементы равны нулю. Пусть E обозначает сумму $a_{ij}E_{ij} + \bar{a}_{ij}E_{ji}$. Заметим, что

$$A(T) = A(T \setminus e) + E.$$

В силу полилинейности определителя как функции столбцов для дерева T мы получаем соотношение (2.1). $\square$

Лемма 2.2. Пусть T является (взвешенным) деревом и $k \in V(T)$, тогда

$$\varphi(T) = (\lambda - w_{kk})\varphi(T \setminus k) + \sum_{i \sim k} w_{ki}\varphi(T \setminus ki). \quad (2.2)$$

Доказательство. Равенство (2.2) получается кратным применением формулы (2.1). $\square$

Пользуясь леммой 2.2, можно получить следующее выражение для определителя матрицы дерева.

Следствие 2.3. Пусть T является (взвешенным) деревом и $k \in V(T)$, тогда

$$\det(T) = \sum_{i \simeq k} w_{ki} \det(T \setminus ki). \quad (2.3)$$

Доказательство. Достаточно положить $\lambda = 0$ в (2.2). $\square$

3. Теорема чередования для деревьев

Будем обозначать положительную определённую квадратной матрицы A как $A > 0$.

В случае $n = 2$ Бапат доказал справедливость гипотез 1.1 и 1.2.

Лемма 3.1 (Р. Б. Бапат [1]). Пусть A и B — эрмитовы матрицы порядка 2 и $A > 0$. Тогда $\eta(\lambda A, -B)$ имеет два вещественных корня, скажем $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Более того, $\alpha_1 \leq b_{22}/a_{22} \leq \alpha_2$ и неравенства являются строгими, если $b_{12} \neq 0$.

Заметим, что если $b_{12} = 0$, то $G(B)$ является лесом с двумя вершинами.

Доказательство основного результата опирается на следующую важную лемму.

Лемма 3.2. Пусть A и B — эрмитовы матрицы, граф которых — фиксированное дерево. Тогда

$$\eta(A, B) = \sum_{i \simeq 1} (w_{1i}(A) + w_{1i}(B)) \eta(A_{1i}, B_{1i}). \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть $C = \{i \mid i \sim 1\}$. Для произвольного подмножества P в C рассмотрим

$$\mathcal{A}_P = \{S \mid 1 \in S, P \subset S, P' \cap S = \emptyset\}$$

и

$$\mathcal{C}_P = \{S \mid 1 \notin S, P \subset S, P' \cap S = \emptyset\},$$

где P' является дополнением к P относительно C . Тогда мы получим разбиение множества $\{1, \dots, n\}$. Для $S \in \mathcal{A}_P$ мы имеем

$$\det A(S) = \sum_{i \simeq k} w_{ki} \det A(S \setminus ki),$$

и для $S \in \mathcal{C}_P$ мы получаем

$$\det B(S') = \sum_{i \simeq k} w_{ki} \det B(S' \setminus ki).$$

Подстановка указанных выражений в (1.1) даёт требуемый результат. $\square$

Замечание 3.1. Формула (3.1) допускает следующее обобщение для произвольной вершины k :

$$\eta(A, B) = \sum_{i \simeq k} (w_{ki}(A) + w_{ki}(B)) \eta(A_{ki}, B_{ki}). \quad (3.2)$$

Используя индукцию по n и следуя доказательству теоремы 3 из [1], мы получаем основной результат. Приведём это доказательство для полноты рассуждений.

Теорема 3.3. Пусть A и B — эрмитовы матрицы, графом которых является фиксированное дерево, и $A > 0$. Тогда $\eta(\lambda A, -B)$ имеет вещественные корни, скажем

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Более того, если

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} -$$

корни $\eta(\lambda A_1, -B_1)$, то

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n. \quad (3.3)$$

Доказательство. Для $n = 1$ и $n = 2$ результат справедлив. Предположим, что результат верен для матриц размера $n - 1$. Докажем его справедливость для матриц размера n .

Согласно формуле (3.1) имеем

$$\eta(\lambda A, -B) = (\lambda a_{11} - b_{11})\eta(\lambda A_1, -B_1) - \sum_{i \sim 1} (\lambda^2 |a_{1i}|^2 + |b_{1i}|^2) \eta(\lambda A_{1i}, -B_{1i}). \quad (3.4)$$

По предположению корни $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ многочлена $\eta(\lambda A_1, -B_1)$ и корни $\nu_1^i, \nu_2^i, \dots, \nu_{n-2}^i$ многочленов $\eta(\lambda A_{1i}, -B_{1i})$ для $i \sim 1$ являются вещественными и

$$\mu_1 \leq \nu_1^i \leq \mu_2 \leq \dots \leq \nu_{n-2}^i \leq \mu_{n-1} \quad \text{для } i \sim 1.$$

Так как $\eta(\lambda A_{1i}, -B_{1i}) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для $i \sim 1$, то

$$\text{sign } \eta(\mu_\ell \lambda A_{1i}, -B_{1i}) = (-)^{n-\ell-1} \quad \text{для } i \sim 1 \text{ и для } \ell = 1, \dots, n-1.$$

Заменяя в формуле (3.4) λ на μ_ℓ , мы получаем

$$\text{sign } \eta(\mu_\ell A, -B) = - \sum_{i \sim 1} \text{sign } \eta(\mu_\ell A_{1i}, -B_{1i}) = (-)^{n-\ell} \quad \text{для } \ell = 1, \dots, n-1.$$

Кроме того, $\eta(\lambda A, -B) \rightarrow (\pm)^n \infty$, если $\lambda \rightarrow \pm \infty$, откуда следует, что $\eta(\lambda A, -B)$ имеет корень в каждом из интервалов

$$(-\infty, \mu_1), (\mu_2, \mu_3), \dots, (\mu_{n-2}, \mu_{n-1}), (\mu_{n-1}, \infty),$$

поэтому $\eta(\lambda A, -B)$ имеет n вещественных корней, которые чередуются с элементами последовательности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$. $\square$

В [1] Бапат рассмотрел трёхдиагональные эрмитовы матрицы, т. е. эрмитовы матрицы, графом которых является фиксированный путь, представляющий частный случай дерева.

Граф матриц A и B из второго примера введения является звездой с четырьмя вершинами:

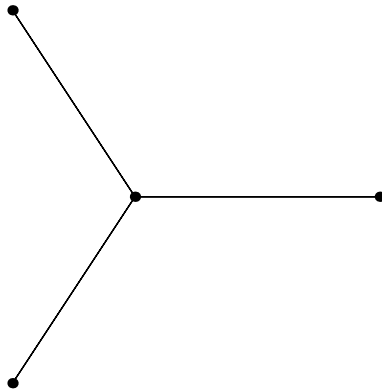


Рис. 1. Звезда с четырьмя вершинами

Заметим, что теорема 3.3 также справедлива для корней $\eta(\lambda A_\ell, -B_\ell)$, т. е. корни $\eta(\lambda A_\ell, -B_\ell)$ чередуются с корнями $\eta(\lambda A, -B)$ (см. [8, (3)]).

4. Обобщения и выводы

Если удалить часть вершин графов, соответствующих матрицам A и B , то получится некоторое обобщение приведённых выше результатов.

Теорема 4.1. Пусть A и B — эрмитовы матрицы, граф которых — фиксированное дерево. Предположим, что $A > 0$, и пусть S — подмножество в $V(G)$ мощности $|S| = k \geq 1$. Тогда n вещественных корней многочлена $\eta(\lambda A, -B)$, скажем $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, и $n - k$ вещественных корней многочлена $\eta(\lambda A_S, -B_S)$, скажем $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-k}$, чередуются следующим образом:

$$\lambda_\ell \leq \mu_\ell \leq \lambda_{\ell+k}, \quad \ell = 1, \dots, n - k. \quad (4.1)$$

Доказательство. Неравенства (4.1) могут быть получены путём кратного применения неравенств (3.3) из теоремы 3.3. $\square$

Рассмотрим следующее дерево с 5 вершинами.

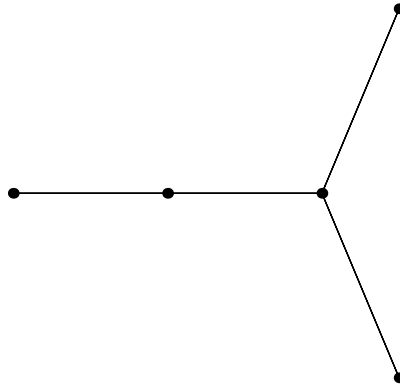


Рис. 2. Дерево с пятью вершинами

Будем изучать эрмитову положительно определённую матрицу, графом которой является это дерево:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -1+i \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1-i & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Графом матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

является то же дерево. Получаем

$$\eta(\lambda A, -B) = 50\lambda - 54\lambda^2 - 181\lambda^3 + \frac{345}{4}\lambda^4 + \frac{85}{2}\lambda^5$$

с корнями

$$\lambda_1 = -3,20024, \quad \lambda_2 = -0,61837, \quad \lambda_3 = 0,00000, \quad \lambda_4 = 0,44093, \quad \lambda_5 = 1,34827.$$

Полагая $S = \{2, 4\}$, имеем

$$\eta(\lambda A_S, -B_S) = -2\lambda - 10\lambda^2 + 36\lambda^3$$

с корнями

$$\mu_1 = -0,13469, \quad \mu_2 = 0,00000, \quad \mu_3 = 0,41246.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_3, \quad \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \lambda_4, \quad \lambda_3 \leq \mu_3 \leq \lambda_5.$$

Так как для эрмитовой матрицы A , графом которой является фиксированный лес, при предположении $A > 0$ многочлен $\eta(\lambda A, -A)$ имеет только вещественные нули, то термы Фишера

$$\beta_k = \frac{\alpha_k(A, A)}{\binom{n}{k}}$$

для $k = 1, \dots, n$ образуют логарифмически вогнутую последовательность (см. [5, лемма 3.2]), т. е. $\beta_k^2 \geq \beta_{k-1}\beta_{k+1}$ для $k \geq 1$. Следовательно,

$$\frac{\beta_1}{\beta_0} \geq \frac{\beta_2}{\beta_1} \geq \dots \geq \frac{\beta_n}{\beta_{n-1}}.$$

Указанное неравенство также обобщает результат Бапата на более широкий класс матриц.

Кроме того, можно получить аналог теоремы Шура, утверждающей, что если B является эрмитовой матрицей, то собственные числа B мажорируют диагональные элементы.

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ будем говорить, что x слабо мажорируется y (и писать $x \prec_w y$), если

$$x'_1 + \dots + x'_k \leq y'_1 + \dots + y'_k, \quad \text{для всех } k \in \{1, \dots, n\},$$

здесь $z'_1, \dots, z'_k$ обозначают невозрастающие переупорядочивания $z \in \mathbb{R}^n$ (см. [10]).

Бапат рассматривал также трёхдиагональные матрицы.

Теорема 4.2 ([1]). Пусть A и B — положительно определённые трёхдиагональные матрицы. Тогда

$$\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}, \dots, \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \right) \prec_w (\lambda_1^A(B), \dots, \lambda_n^A(B)).$$

Используя рассуждения из доказательства теоремы 3.3, можно утверждать следующее.

Теорема 4.3. Пусть A и B — эрмитовы матрицы, граф которых — фиксированное дерево, и $A > 0$. Тогда последовательность

$$\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}, \dots, \frac{b_{nn}}{a_{nn}} \right)$$

слабо мажорируется последовательностью

$$(\lambda_1^A(B), \dots, \lambda_n^A(B)).$$

Литература

- [1] Bapat R. B. An interlacing theorem for tridiagonal matrices // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 150. — P. 331—340.
- [2] Cvetković D. M., Doob M., Sachs H. Spectra of Graphs. — New York: Academic Press, 1980.
- [3] Ky Fan, Pall G. Imbedding conditions for Hermitian and normal matrices // Canad. J. Math. — 1957. — Vol. 9. — P. 298—304.
- [4] Godsil G. Spectra of trees // Ann. Discrete Math. — 1984. — Vol. 20. — P. 151—159.
- [5] Godsil G. Algebraic Combinatorics. — New York: Chapman and Hall, 1993.
- [6] Horn R. A., Johnson C. R. Matrix Analysis. — Cambridge University Press, 1985.
- [7] Johnson C. R. The permanent-on-top conjecture: a status report // Current Trends in Matrix Theory / F. Uhlig, R. Grone, eds. — Elsevier Science, 1987. — P. 167—174.
- [8] Johnson C. R. A characteristic polynomial for matrix pairs // Linear and Multilinear Algebra. — 1989. — Vol. 25. — P. 289—290.
- [9] Lovász L. Combinatorial Problems and Exercises. — Amsterdam: North-Holland, 1979.
- [10] Marshall A. W., Olkin I. Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. — New York: Academic Press, 1976.
- [11] Rublein G. On a conjecture of C. Johnson // Linear and Multilinear Algebra. — 1989. — Vol. 25. — P. 257—267.