

Перестановочность ранга и аддитивные операторы, сохраняющие некоторые условия на ранг произведения*

А. А. АЛИЕВА, А. Э. ГУТЕРМАН

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ali@isa.ru, guterman@mmascience.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: аддитивные отображения алгебры матриц, отношения на матрицах, функция ранга.

Аннотация

В работе характеризуются биективные аддитивные отображения, сохраняющие условия определённого вида на ранг произведения матриц. Также показано, что если аддитивное отображение строго сохраняет такое условие, то оно автоматически невырожденное.

Abstract

A. A. Alieva, A. E. Guterman, Rank permutability and additive operators preserving related rank product conditions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 3–14.

We characterize bijective additive operators preserving rank product conditions of a certain type. We also show that if an additive operator preserves the corresponding condition strongly, then it is automatically nonsingular.

1. Введение

Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, обозначим $M_n(\mathbf{F})$ множество всех $(n \times n)$ -матриц с элементами из $\mathbf{F}$. Теория линейных отображений $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$, сохраняющих различные матричные инварианты, восходит к работам Фробениуса [6], Шура [14] и Дьедонне [4] (см. также [12]). Начиная с известной работы Хуа [7] о геометрии матриц, написанной в 1951 г., стали появляться работы по обобщению этих результатов на случай аддитивных отображений. Исследования были продолжены в работах Омладича, Шемерла и других авторов. Оказалось, что теория аддитивных отображений существенно отличается от линейного случая как методами, используемыми для классификации аддитивных отображений, так и существованием «диких» аддитивных отображений, сохраняющих

* Работа частично поддержана грантами НШ-1910.2003.01 и INTAS YSF 03-55-1919.

матричные инварианты, которые не являются даже полулинейными. Подробное обсуждение аддитивной теории можно найти в работах [3, 5, 9, 11] и приведённой в них литературе. В 1970 г. Капланский поставил проблему описания отображений, сохраняющих обратимость, для различных алгебр (см. [8]). Проблема Капланского остаётся открытой даже для вырожденных линейных отображений алгебры матриц над произвольным полем (см. [2]). В то же время недавно в [3, 5] были получены некоторые частные результаты для аддитивного случая. Настоящая работа преследует две цели: во-первых, обобщить результат [1] о линейных отображениях, сохраняющих перестановочность ранга, на аддитивные отображения; во-вторых, показать, что для характеристики таких отображений вместо условия перестановочности ранга, включающего $k!$ равенств в $M_n(\mathbf{F})$, достаточно только одного равенства указанного типа.

Определение 1.1. Аддитивное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ сохраняет отношение $\sim$, если из условия $A \sim B$ следует, что $T(A) \sim T(B)$ для всех матриц $A, B \in M_n(\mathbf{F})$.

Определение 1.2. Аддитивное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ сохраняет множество M , если $T(M) \subseteq M$.

Определение 1.3. Отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ строго сохраняет отношение $\sim$, если

$$A \sim B \iff T(A) \sim T(B).$$

Определение 1.4. Отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ строго сохраняет множество $M \subseteq M_n(\mathbf{F}) \times \dots \times M_n(\mathbf{F})$, если

$$(A_1, \dots, A_k) \in M \iff (T(A_1), \dots, T(A_k)) \in M.$$

Определение 1.5. Отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ называется *стандартным*, если существуют автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ и такие невырожденные матрицы $P, Q \in M_n(\mathbf{F})$, что $T(X) = PX^\phi Q$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = P(X^\phi)^t Q$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$, где для $X = (x_{i,j})$ используются обозначения $X^\phi = (\phi(x_{i,j}))$, $X^t = (x_{j,i})$.

Определим некоторые условия на ранг произведения матриц. Такого рода отношения являются важными, например, в вопросах одновременной триангуляризуемости семейств матриц (см. [10, 13]).

Определение 1.6. Пусть $k \geq 2$ — некоторое фиксированное натуральное число. Матрицы $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbf{F})$ удовлетворяют отношению *перестановочности ранга*, если

$$\text{rk}(A_1 A_2 \dots A_k) = \text{rk}(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \dots A_{\sigma(k)}) \text{ для всех } \sigma \in S_k.$$

Если $k = 2$, то говорят, что пара матриц (A_1, A_2) удовлетворяет отношению *коммутативности ранга*.

Определение 1.7. Пусть $k \geq 3$ — некоторое фиксированное натуральное число, $\sigma \in S_{k-2}$ — некоторая перестановка. Говорят, что матрицы $B_1, A_1, \dots, A_{k-2}, B_2$ удовлетворяют условию $\mathcal{R}(\sigma)$, если

$$\text{rk}(B_1 A_1 \dots A_{k-2} B_2) = \text{rk}(B_2 A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(k-2)} B_1).$$

Во втором разделе найдена характеристика аддитивных биективных отображений, сохраняющих коммутативность ранга и некоторые более общие условия. В третьем разделе доказано, что аддитивные биективные отображения, сохраняющие условие $\mathcal{R}(\sigma)$ над полем нулевой характеристики, являются стандартными, причём $Q = \alpha P^{-1}$ для некоторого ненулевого $\alpha \in \mathbf{F}$. В четвёртом разделе показано, что отображения, строго сохраняющие коммутативность ранга и условие $\mathcal{R}(\sigma)$, автоматически являются инъективными, и получена характеристика сюръективных отображений, сохраняющих эти условия.

2. Биективные отображения, сохраняющие коммутативность ранга

Лемма 2.1. Пусть $M, N \in M_n(\mathbf{F})$ — невырожденные матрицы, $0 \neq Y \in M_n(\mathbf{F})$ — некоторая фиксированная матрица. Если $\text{rk}(ZMNY) = \text{rk}(YMZ)$ для любой матрицы $Z \in M_n(\mathbf{F})$, то Y является невырожденной.

Доказательство. Предположим, что матрица Y вырождена. Тогда YM также является вырожденной. Следовательно, существует обратимая матрица P , такая что

$$YM = P \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

где $H = (h_{i,j})$ — $(k \times n)$ -матрица, $k = \text{rk}(YM) < n$ в силу предположения о вырожденности матрицы Y , $H \neq 0$, так как $Y \neq 0$. Выберем индексы i, j следующим образом: $k < j \leq n$ и i -й столбец матрицы H ненулевой. Тогда, положив $Z = PE_{i,j}P^{-1}N^{-1}M^{-1}$, мы получим, что

$$\begin{aligned} YMZ &= P \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} P^{-1} PE_{i,j} P^{-1} N^{-1} M^{-1} = \\ &= P \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & h_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & h_{k,i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} P^{-1} N^{-1} M^{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

в силу выбора i . С другой стороны,

$$\begin{aligned} ZMNY &= ZMNYMM^{-1} = \\ &= PE_{i,j}P^{-1}N^{-1}M^{-1}MNP \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} P^{-1}M^{-1} = PE_{i,j} \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} P^{-1}M^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\text{rk}(YMZ) = 1 \neq 0 = \text{rk}(ZMNY)$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ — биективное аддитивное отображение, $M \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ — произвольная матрица. Предположим также, что если $\text{rk}(AB) = \text{rk}(BA)$, то $\text{rk}(T(A)MT(B)) = \text{rk}(T(B)MT(A))$ для любой пары матриц $(A, B) \in M_n(\mathbf{F}) \times M_n(\mathbf{F})$. Тогда $T(\text{GL}_n(\mathbf{F})) \subseteq \text{GL}_n(\mathbf{F})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную матрицу $A \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Для любой $B \in M_n(\mathbf{F})$ справедливо $\text{rk}(AB) = \text{rk} B = \text{rk}(BA)$, и, следовательно, $\text{rk}(T(A)MT(B)) = \text{rk}(T(B)MT(A))$. Так как отображение T биективно и аддитивно, то $T(A) \neq 0$ и $T(B)$ пробегает все множество матриц $M_n(\mathbf{F})$. Применяя лемму 2.1, получаем, что матрица $T(A)$ невырождена. $\square$

Следующая теорема показывает, что рассматриваемые отображения являются стандартными.

Теорема 2.3 ([5, следствие 1.3]). Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $\text{char } \mathbf{F} = 0$, отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ аддитивно и сюръективно и $T(\text{GL}_n(\mathbf{F})) \subseteq \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Тогда существуют матрицы $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что $T(X) = PX^\phi Q$ для любой матрицы $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = P(X^\phi)^t Q$ для любой матрицы $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Однако не все стандартные отображения сохраняют рассматриваемое отношение.

Лемма 2.4. Пусть отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ задано формулой $T(X) = PX^\phi Q$, где $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ — некоторые матрицы, $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ — автоморфизм. Предположим также, что если $\text{rk}(AB) = \text{rk}(BA)$, то $\text{rk}(T(A)MT(B)) = \text{rk}(T(B)MT(A))$ для любой пары матриц $(A, B) \in M_n(\mathbf{F}) \times M_n(\mathbf{F})$ и некоторой фиксированной матрицы $M \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Тогда матрица QMP является скалярной.

Доказательство. Обозначим $D = QMP \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ и проверим, что матрица $D = (d_{i,j})$ скалярна.

Для произвольных $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, рассмотрим матрицы $A = E_{i,i} + \phi^{-1}(c)E_{i,j}$ и $B = E_{j,i}$, где $c \in \mathbf{F}$, $c \neq 0$. Обозначим $c_1 = \phi^{-1}(c)$. Имеем

$$\begin{aligned} (E_{i,i} + c_1 E_{i,j})E_{j,i} &= c_1 E_{i,i}, \\ E_{j,i}(E_{i,i} + c_1 E_{i,j}) &= E_{j,i} + c_1 E_{j,j}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\text{rk}((E_{i,i} + c_1 E_{i,j})E_{j,i}) = \text{rk}(E_{j,i}(E_{i,i} + c_1 E_{i,j}))$$

при $c \neq 0$. Следовательно,

$$\text{rk}(P(E_{i,i} + cE_{i,j})DE_{j,i}Q) = \text{rk}(PE_{j,i}D(E_{i,i} + cE_{i,j})Q).$$

Так как матрицы P и Q невырожденные, то

$$\text{rk}((E_{i,i} + cE_{i,j})DE_{j,i}) = \text{rk}(E_{j,i}D(E_{i,i} + cE_{i,j})).$$

Далее,

$$\begin{aligned}(E_{i,i} + cE_{i,j})DE_{j,i} &= (d_{i,j} + cd_{j,j})E_{i,i}, \\ E_{j,i}D(E_{i,i} + cE_{i,j}) &= d_{i,i}(E_{j,i} + cE_{j,j}).\end{aligned}$$

Предположим, что существует такое i , что $d_{i,i} = 0$. Докажем, что в этом случае $d_{i,j} = 0$ для всех j , $j = 1, \dots, n$. Действительно, пусть $d_{i,j} \neq 0$ для некоторого j . Тогда из равенства

$$\text{rk}(d_{i,i}(E_{j,i} + cE_{j,j})) = \text{rk}(d_{i,j} + cd_{j,j})E_{i,i}$$

следует, что $d_{i,j} + cd_{j,j} = 0$. Так как $d_{i,j} \neq 0$, отсюда следует, что $d_{j,j} \neq 0$, следовательно, $c = -d_{i,j}d_{j,j}^{-1}$, что противоречит произвольности c . Таким образом, у матрицы D строка с номером i оказывается нулевой, что противоречит обратимости D .

Следовательно, $d_{i,i} \neq 0$ для всех i , $i = 1, \dots, n$. Так как

$$\text{rk}((E_{i,i} + cE_{i,j})DE_{j,i}) = \text{rk}(E_{j,i}D(E_{i,i} + cE_{i,j})) = 1,$$

то $d_{i,j} + cd_{j,j} \neq 0$ для любого $c \neq 0$. Отсюда следует, что $d_{i,j} = 0$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Таким образом, D диагональна.

Предположим, что матрица D не является скалярной, т. е. $d_{i,i} \neq d_{i+1,i+1}$ для некоторого i , $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} I_{i-1} & O & O \\ O & A_1 & O \\ O & O & I_{n-i-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} I_{i-1} & O & O \\ O & B_1 & O \\ O & O & I_{n-i-1} \end{pmatrix},$$

где I_k — единичная $(k \times k)$ -матрица,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$AB = BA = \begin{pmatrix} I_{i-1} & O & O \\ O & O & O \\ O & O & I_{n-i-1} \end{pmatrix},$$

где O обозначает матрицу из нулей, и, таким образом, $\text{rk}(AB) = \text{rk}(BA)$. Однако

$$ADB = \begin{pmatrix} d_{1,1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & d_{i-1,i-1} & & & & \\ & & & 0 & d_{i+1,i+1} - d_{i,i} & & \\ & & & 0 & 0 & & \\ & & & & & d_{i+2,i+2} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & d_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$BDA = \begin{pmatrix} d_{1,1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{i-1,i-1} & & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & d_{i+2,i+2} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & d_{n,n} \end{pmatrix},$$

т. е. $\text{rk}(PBDAQ) = n - 2 \neq n - 1 = \text{rk}(PADBQ)$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 2.5. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $\text{char } \mathbf{F} = 0$, $M \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ — произвольная фиксированная матрица. Биективное аддитивное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ таково, что соотношение

$$\text{rk}(T(A)MT(B)) = \text{rk}(T(B)MT(A))$$

справедливо для всякой пары матриц $(A, B) \in M_n(\mathbf{F}) \times M_n(\mathbf{F})$, удовлетворяющей условию $\text{rk}(AB) = \text{rk}(BA)$, тогда и только тогда, когда существуют $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что матрица QMP скалярна и $T(X) = PX^\phi Q$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = P(X^\phi)^t Q$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Доказательство. Легко проверить, что рассматриваемые отображения удовлетворяют условиям теоремы.

Из леммы 2.2 следует, что $T(\text{GL}_n(\mathbf{F})) \subseteq \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Значит, по теореме 2.3 мы получаем, что отображение T стандартно. Следовательно, T имеет требуемый вид по лемме 2.4. $\square$

Полагая $M = I$, мы в качестве следствия получаем следующее обобщение [1, теорема 2.4].

Теорема 2.6. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $\text{char } \mathbf{F} = 0$. Биективное аддитивное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ сохраняет отношение коммутативности ранга тогда и только тогда, когда существуют $P \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, $\alpha \in \mathbf{F}$, $\alpha \neq 0$, и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что $T(X) = \alpha PX^\phi P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = \alpha P(X^\phi)^t P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

3. Биективные аддитивные отображения, сохраняющие условие $\mathcal{R}(\sigma)$

Для произвольного множества матриц M обозначим через $\mathcal{A}(M)$ множество всех сумм элементов из множества M .

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $N_n(\mathbf{F})$ — множество всех нильпотентных $(n \times n)$ -матриц с коэффициентами из $\mathbf{F}$. Тогда $\mathcal{A}(N_n(\mathbf{F}))$ — множество матриц с нулевым следом $\text{sl}_n(\mathbf{F})$.

Доказательство. Пусть матрица $C \in N_n(\mathbf{F})$ и $\bar{\mathbf{F}}$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbf{F}$. Тогда $C \in N_n(\bar{\mathbf{F}})$. Рассмотрим жорданову форму C^J матрицы C . Так как все собственные значения нильпотентной матрицы равны нулю, то имеем $\text{tr}(C) = \text{tr}(C^J) = 0$, и, следовательно, $\mathcal{A}(N_n(\mathbf{F})) \subseteq \text{sl}_n(\mathbf{F})$.

Докажем обратное включение. Матрицы $\alpha E_{i,j}$ и $\alpha E_{i,i} + \alpha E_{i,j} - (\alpha E_{j,i} + \alpha E_{j,j})$ нильпотентны для любых $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, и для всех $\alpha \in \mathbf{F}$. Следовательно, $\alpha E_{i,i} - \alpha E_{j,j} \in \mathcal{A}(N_n(\mathbf{F}))$. Легко видеть, что

$$\mathcal{A}(\{\alpha E_{i,j}, \beta E_{i,i} - \beta E_{j,j} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j, \alpha, \beta \in \mathbf{F}\}) = \text{sl}_n(\mathbf{F}).$$

Следовательно, $\text{sl}_n(\mathbf{F}) \subseteq \mathcal{A}(N_n(\mathbf{F}))$. $\square$

Следующая лемма была доказана в [1, лемма 3.1].

Лемма 3.2. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $X \in M_n(\mathbf{F})$ — произвольная матрица. Тогда существует такая матрица $A \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, что $A + X \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$.

Следствие 3.3. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле. Тогда $\mathcal{A}(\text{GL}_n(\mathbf{F})) = M_n(\mathbf{F})$.

Теорема 3.4. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное алгебраически замкнутое поле, $\text{char } \mathbf{F} = 0$, $k \geq 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, $\sigma \in S_{k-2}$ — произвольная подстановка. Биективное аддитивное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ сохраняет отношение $\mathcal{R}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда существуют $P \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, $\alpha \in \mathbf{F}$, $\alpha \neq 0$, и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что $T(X) = \alpha P X^\phi P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = \alpha P (X^\phi)^t P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Доказательство. Легко видеть, что отображения $T(X) = \alpha P X^\phi P^{-1}$ и $T(X) = \alpha P (X^\phi)^t P^{-1}$ сохраняют $\mathcal{R}(\sigma)$.

Пусть теперь T сохраняет отношение $\mathcal{R}(\sigma)$. Так как отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ биективно и аддитивно, то существует матрица $A \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, такая что матрица $T(A)$ не является нильпотентной. Действительно, предположим противное, т. е. $T(\text{GL}_n(\mathbf{F})) \subseteq N_n(\mathbf{F})$. Применяя сперва следствие 3.3, а затем лемму 3.1, мы имеем

$$T(M_n(\mathbf{F})) = T(\mathcal{A}(\text{GL}_n(\mathbf{F}))) \subseteq \mathcal{A}(N_n(\mathbf{F})) = \text{sl}_n(\mathbf{F}),$$

что противоречит биективности T .

Покажем, что для найденной матрицы A матрица $T(A)$ является невырожденной. Для этого рассмотрим следующие матрицы: $B_1 \in M_n(\mathbf{F})$ — произвольная матрица, $B_2 = A_1 = \dots = A_{k-2} = A$. Тогда

$$\text{rk}(B_1 A_1 \dots A_{k-2} B_2) = \text{rk}(B_1 A^k) = \text{rk}(A^k B_1) = \text{rk}(B_2 A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(k-2)} B_1),$$

так как A и, следовательно, A^k обратимы. Поэтому матрицы $T(B_1), T(A_1), \dots, T(A_{k-2}), T(B_2)$ удовлетворяют $\mathcal{R}(\sigma)$, т. е.

$$\text{rk}(T(B_1) T(A)^{k-1} T(B_1)) = \text{rk}(T(A)^{k-1} T(B_1)).$$

Предположим, что матрица $U = T(A)$ является вырожденной. Тогда в силу выбора A матрица U^{k-1} тоже вырожденная ненулевая матрица. Пусть $0 < \text{rk}(U^{k-1}) = m < n$. Существует невырожденная матрица $Q \in M_n(\mathbf{F})$, такая что $U^{k-1} = QRQ^{-1}$,

$$R = \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix},$$

где H — $(m \times n)$ -матрица. Выберем такие i, j , что $m < j \leq n$ и i -й столбец матрицы ненулевой (такое i существует, так как $U^{k-1} \neq 0$). Рассмотрим теперь $B_1 = T^{-1}(QE_{i,j}Q^{-1})$. Имеем

$$T(B_1)T(A_1) \dots T(A_{k-2})T(B_2) = QE_{i,j}Q^{-1}QRQ^{-1} = QE_{i,j}RQ^{-1} = 0,$$

$$T(B_2)T(A_{\sigma(1)}) \dots T(A_{\sigma(k-2)})T(B_1) = QRE_{i,j}Q^{-1} \neq 0,$$

т. е. матрицы $T(B_1), T(A_1), \dots, T(A_{k-2}), T(B_2)$ не удовлетворяют $\mathcal{R}(\sigma)$.

Покажем теперь, что матрица $T(I)$ невырожденная. Рассмотрим следующие матрицы: B_1 — произвольная матрица, $B_2 = I$, $A_1 = \dots = A_{k-2} = A$. Тогда $\text{rk}(B_1A^{k-2}I) = \text{rk}(IA^{k-2}B_1)$, и, полагая $Z = T(B_1)$, $M = T(A_1) \dots T(A_{k-2})$, $N = I$, $Y = T(B_2)$, по лемме 2.1 мы получаем, что матрица Y , т. е. $T(I)$, невырожденная.

Рассмотрим теперь $M = (T(I))^{k-2}$ и матрицы $(B_1, \underbrace{I, \dots, I}_{k-2 \text{ раза}}, B_2)$ для любой

пары матриц B_1, B_2 , удовлетворяющих отношению коммутативности ранга. Из теоремы 2.5 мы получаем, что существуют $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$ и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что матрица QMP скалярна и $T(X) = PX^\phi Q$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = P(X^\phi)^t Q$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Осталось доказать, что матрица QP является скалярной.

Из полученной формы T имеем $T(I) = PQ$. Так как $M = (T(I))^{k-2}$ и матрица QMP является скалярной, то матрица $Q(PQ)^{k-2}P = (QP)^{k-1}$ также скалярная. Таким образом, многочлен $x^{k-1} - \lambda$ для некоторого $\lambda \in \mathbf{F}$ аннулирует QP . Так как поле алгебраически замкнуто и у этого многочлена нет кратных корней, то матрица QP является диагонализируемой, т. е. существуют $C, D \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, такие что $QP = CDC^{-1}$. Осталось доказать, что матрица D скалярна. Действительно, предположим противное: $d_i \neq d_{i+1}$ для некоторого i , $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим матрицы из леммы 2.4, а именно

$$L = \begin{pmatrix} I_{i-1} & O & O \\ O & 1 & 1 & O \\ O & 0 & 0 & O \\ O & O & I_{n-i-1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} I_{i-1} & O & O \\ O & 0 & 1 & O \\ O & 0 & -1 & O \\ O & O & I_{n-i-1} \end{pmatrix},$$

где I_k — единичная $(k \times k)$ -матрица, и положим $B_1 = A_1 = \dots = A_{k-2} = (CLC^{-1})^{\phi^{-1}}$, $B_2 = (CSC^{-1})^{\phi^{-1}}$. Легко проверить, что эти матрицы удовлетворяют условию $\mathcal{R}(\sigma)$. Имеем

$$\begin{aligned}
& \text{rk}(T(B_1)T(A_1) \dots T(A_{k-2})T(B_2)) = \\
& = \text{rk}(PCLC^{-1}QPCLC^{-1}Q \dots PCLC^{-1}QPCSC^{-1}Q) = \\
& = \text{rk}(LD \dots LDS) = \text{rk}((LD)^{k-1}S) = \\
& = \text{rk}(d_1^{k-1}E_{1,1} + \dots + d_{i-1}^{k-1}E_{i-1,i-1} + \\
& + (d_i^{k-1} - d_i^{k-2}d_{i+1})E_{i,i+1} + d_{i+2}^{k-1}E_{i+2,i+2} + \dots + d_n^{k-1}E_{n,n}) = \\
& = n - 1 \neq n - 2 = \\
& = \text{rk}(d_1^{k-1}E_{1,1} + \dots + d_{i-1}^{k-1}E_{i-1,i-1} + d_{i+2}^{k-1}E_{i+2,i+2} + \dots + d_n^{k-1}E_{n,n}) = \\
& = \text{rk}(S(DL)^{k-1}) = \text{rk}(T(B_2)T(A_{\sigma(1)}) \dots T(A_{\sigma(k-2)})T(B_1)).
\end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 3.5. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $\text{char } \mathbf{F} = 0$, $k \geq 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, $\sigma \in S_{k-2}$ — произвольная подстановка. Биективное аддитивное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ сохраняет отношение перестановочности ранга тогда и только тогда, когда существуют $P \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, $\alpha \in \mathbf{F}$, $\alpha \neq 0$, и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что $T(X) = \alpha P X^\phi P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = \alpha P(X^\phi)^t P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Доказательство. Аналогично [1, теорема 3.4] можно показать, что если T сохраняет наборы k матриц, удовлетворяющие условию перестановочности ранга, то T сохраняет коммутативность ранга и, следовательно, имеет требуемый вид без предположения алгебраической замкнутости поля $\mathbf{F}$. $\square$

4. Аддитивные отображения, строго сохраняющие условие $\mathcal{R}(\sigma)$

В [1] были представлены примеры линейных отображений, не являющихся инъективными, но сохраняющих перестановочность ранга (см. [1, примеры 4.1, 4.3, 4.4]).

Для получения условия, гарантирующего биективность аддитивных отображений, сохраняющих условие $\mathcal{R}(\sigma)$ и другие похожие условия на ранг произведения матриц, нам понадобится ввести понятие *радикала* отношения, заданного на матричной алгебре.

Определение 4.1. Радикалом множества $M \subseteq M_n(\mathbf{F}) \times \dots \times M_n(\mathbf{F})$ называется подмножество

$$\text{Rad}(M) = \{(X_1, \dots, X_k) \mid \forall (A_1, \dots, A_k) \in M \ (A_1 + X_1, \dots, A_k + X_k) \in M\}.$$

Определение 4.2. Радикалом отношения $\sim$, заданного на матричной алгебре, называется радикал множества всех строк из k матриц, находящихся в отношении $\sim$.

Лемма 4.3. Пусть существует неинъективное аддитивное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$, строго сохраняющее непустое множество

$$M \subseteq M_n(\mathbf{F}) \times \dots \times M_n(\mathbf{F}).$$

Тогда существует матрица $X \neq 0$, такая что $(X, \dots, X) \in \text{Rad}(M)$.

Доказательство. Пусть $(A_1, \dots, A_k) \in M$. Так как T не является инъективным, то существует такая матрица $X \in M_n(\mathbf{F})$, что $T(X) = 0$. Вследствие аддитивности T имеем $T(A_i) = T(A_i + X)$ для всех $1 \leq i \leq k$. Так как $(A_1, \dots, A_k) \in M$, то $(T(A_1), \dots, T(A_k)) \in M$. Следовательно, $(T(A_1 + X), \dots, T(A_k + X)) \in M$. Отсюда $(A_1 + X, \dots, A_k + X) \in M$, так как T строго сохраняет множество M . Таким образом, $(X, \dots, X) \in \text{Rad}(M)$ по определению радикала. $\square$

Определение 4.4. Пусть $\sigma \in S_k$, $\sigma \neq \text{id}$, — произвольная фиксированная перестановка. Определим следующее множество $\mathcal{S}_{k,\sigma} \subset M_n(\mathbf{F}) \times \dots \times M_n(\mathbf{F})$:

$$\mathcal{S}_{k,\sigma} = \{(A_1, \dots, A_k) \mid A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbf{F}), \text{rk}(A_1 \dots A_k) = \text{rk}(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(k)})\}.$$

Лемма 4.5. Предположим, что существует матрица $X \in M_n(\mathbf{F})$, такая что $(X, \dots, X) \in \text{Rad}(\mathcal{S}_{k,\sigma})$. Тогда $X = 0$.

Доказательство. Очевидно, $(0, \dots, 0) \in \text{Rad}(\mathcal{S}_{k,\sigma})$.

Далее, существуют $1 \leq s < t \leq n$, такие что $\sigma^{-1}(s) > \sigma^{-1}(t)$.

Рассмотрим сначала случай вырожденной матрицы X , $\text{rk } X = m < n$. Положим $A_s = 0$, тогда $(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{S}_{k,\sigma}$ для любых $A_i \in M_n(\mathbf{F})$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq s$. Следовательно, $(A_1 + X, \dots, X, \dots, A_k + X) \in \mathcal{S}_{k,\sigma}$. Существует невырожденная матрица $P \in M_n(\mathbf{F})$, такая что $X = PDP^{-1}$,

$$D = \begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix},$$

где H — $(m \times n)$ -матрица. Выберем i, j , такие что $m < j \leq n$ и i -й столбец матрицы H ненулевой, и возьмём $A_t = PE_{i,j}P^{-1} - X$, $A_l = I - X$, $1 \leq l \leq n$, $l \neq s, t$. В силу выбора i, j имеем $X(A_t + X) = PDE_{i,j}P^{-1} \neq 0$, $(A_t + X)X = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{rk}((A_1 + X) \dots (A_k + X)) &= \text{rk}(X(A_t + X)) \neq 0 = \text{rk}((A_t + X)X) = \\ &= \text{rk}((A_{\sigma(\sigma^{-1}(t))} + X)I(A_{\sigma(\sigma^{-1}(s))} + X)) = \text{rk}((A_{\sigma(1)} + X) \dots (A_{\sigma(k)} + X)). \end{aligned}$$

Таким образом, $(A_1 + X, \dots, A_k + X) \notin \mathcal{S}_{k,\sigma}$. Противоречие.

Предположим теперь, что X обратима. Для произвольных невырожденных матриц $A_l \in M_n(\mathbf{F})$, $l \neq t$, и любой матрицы $A_t \in M_n(\mathbf{F})$ имеем $(A_1, \dots, A_k) \in \mathcal{S}_{k,\sigma}$. Следовательно, $(A_1 + X, \dots, A_k + X) \in \mathcal{S}_{k,\sigma}$ по определению радикала. Возьмём $A_s = X(E_{1,2} - I)$. Так как $\det X \neq 0$, то и $\det A_s \neq 0$, при этом матрица $A_s + X = XE_{1,2}$ является вырожденной. Согласно следствию 3.3 существует матрица $A \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, такая что $A + X \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$. Положим $A_l = A$

для всех $1 \leq l \leq n$, $l \neq s, t$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rk}((A_1 + X) \dots (A_k + X)) &= \\ &= \operatorname{rk}((A + X)^{s-1} X E_{1,2} (A + X)^{t-s-1} A_t (A + X)^{n-t}) = \\ &= \operatorname{rk}(X E_{1,2} (A + X)^{t-s-1} A_t) = \\ &= \operatorname{rk}(A_t (A + X)^{\sigma(s)-\sigma(t)-1} X E_{1,2}) = \operatorname{rk}((A_{\sigma(1)} + X) \dots (A_{\sigma(k)} + X)). \end{aligned}$$

Так как матрица $A + X$ невырожденная, а A_t любая, то из леммы 2.1 следует, что матрица $X E_{1,2}$ невырожденная. Противоречие.

Следовательно, $X = 0$, и лемма доказана. $\square$

Теорема 4.6. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $k \geq 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, $\sigma \in S_k$, $\sigma \neq \operatorname{id}$ — произвольная подстановка. Пусть также аддитивное сюръективное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ строго сохраняет $S_{k,\sigma}$. Тогда T биективно.

Доказательство. Предположив противное, из леммы 4.3 мы получаем, что существует такая матрица $X \neq 0$, что $(X, \dots, X) \in \operatorname{Rad}(S_{k,\sigma})$, а это противоречит лемме 4.5. Следовательно, T биективно. $\square$

С помощью последовательного применения теорем 4.6, 3.4 и [3, теорема 2] получаем следствие.

Следствие 4.7. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char} \mathbf{F} \neq 2$, $k \geq 3$ — произвольное фиксированное натуральное число, $\sigma \in S_{k-2}$ — произвольная подстановка. Аддитивное сюръективное отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ сохраняет условие $\mathcal{R}(\sigma)$ тогда и только тогда, когда существуют $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{F})$, $\alpha \in \mathbf{F}$, $\alpha \neq 0$, и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что $T(X) = \alpha P X^\phi P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = \alpha P (X^\phi)^t P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Доказательство. По теореме 4.6 отображение T биективно. В [3, теорема 2] получена классификация аддитивных отображений, сохраняющих одновременно вырожденность и невырожденность матриц над полем характеристики, отличной от двух. Поскольку отображение T биективно и строго сохраняет рассматриваемое отношение, то и T и T^{-1} сохраняют это отношение. Следовательно, аналогично доказательству теоремы 3.4 можно показать, что оба отображения, T и T^{-1} , сохраняют $\operatorname{GL}_n(\mathbf{F})$. Следовательно, отображение T сохраняет и вырожденность, и невырожденность. Аналогично доказательству теоремы 3.4 можно показать, что T имеет требуемый вид. $\square$

Следствие 4.8. Пусть $\mathbf{F}$ — произвольное поле, $\operatorname{char} \mathbf{F} = 0$, и отображение $T: M_n(\mathbf{F}) \rightarrow M_n(\mathbf{F})$ аддитивно и сюръективно. Тогда следующие условия являются эквивалентными:

- 1) T строго сохраняет перестановочность ранга для любого k ;
- 2) T является биективным отображением, сохраняющим перестановочность ранга для любого k ;

- 3) существуют $P \in \text{GL}_n(\mathbf{F})$, $\alpha \in \mathbf{F}$, $\alpha \neq 0$, и автоморфизм $\phi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, такие что $T(X) = \alpha P X^\phi P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$ или $T(X) = \alpha P (X^\phi)^t P^{-1}$ для всех $X \in M_n(\mathbf{F})$.

Заметим, что в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbf{F}$ аналог следствия 4.8 справедлив также и для условия $\mathcal{R}(\sigma)$.

Авторы благодарны Е. Буниной, А. Фоснер, Б. Кузме и П. Шемрлу за интересные обсуждения во время работы над статьей.

Литература

- [1] Alieva A., Guterman A. Linear preservers of rank permutability // Linear Algebra Appl. — 2004. — Vol. 384. — P. 97–108.
- [2] Botta P. Linear maps that preserve singular and nonsingular matrices // Linear Algebra Appl. — 1978. — Vol. 20. — P. 45–49.
- [3] Cao C.-G., Zhang X. Additive surjections preserving rank one and applications // Georgian Math. J. — 2004. — Vol. 11, no. 2. — P. 209–217.
- [4] Dieudonné J. Sur une généralisation du groupe orthogonal à quatre variables // Arch. Math. — 1949. — Vol. 1. — P. 282–287.
- [5] Fošner A., Šemrl P. Additive maps on matrix algebras preserving invertibility or singularity. — Preprint.
- [6] Frobenius G. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. — Berlin: Preuss. Akad. Wiss., 1897. — P. 994–1015.
- [7] Hua L. K. A theorem on matrices over field and its applications // J. Chinese Math. Soc. — 1951. — Vol. 1. — P. 110–163.
- [8] Kaplansky I. Algebraic and analytic aspects of operator algebras. — Providence: American Mathematical Society, 1970.
- [9] Kuzma B. Additive mappings decreasing rank one // Linear Algebra Appl. — 2002. — Vol. 348. — P. 175–187.
- [10] Livshits L., MacDonald G., Mathes B., Okniński J., Radjavi H. Matrix semigroups with commutable rank // Semigroup Forum. — 2003. — Vol. 67, no. 2. — P. 288–316.
- [11] Omladič M., Šemrl P. Additive mappings preserving operators of rank one // Linear Algebra Appl. — 1993. — Vol. 182. — P. 239–256.
- [12] Pierce S. et al. A survey of linear preserver problems // Linear and Multilinear Algebra. — 1992. — Vol. 33. — P. 1–119.
- [13] Radjavi H., Rosenthal P. Simultaneous Triangularization. — New York: Springer, 2000.
- [14] Schur I. Einige Bemerkungen zur Determinantentheorie // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. — Berlin: Preuss. Akad. Wiss., 1925. — P. 454–463.