Теорема Римана—Роха на поверхностях дель Пеццо с логтерминальными особенностями*

А. Б. ВЕРЁВКИН
Ульяновский государственный университет
e-mail: verevkinab@sv.uven.ru

Ю. Г. ПРОХОРОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: prokhoro@mech.math.msu.su

УДК 512.7

Ключевые слова: особенность, теорема Римана—Роха, поверхность дель Пеццо, дивизор.

Аннотация

Предложен метод построения антиканонических сечений на поверхностях дель Пеццо с особенностями, использующий особую теорему Римана—Роха.

Abstract

Yu. G. Prokhorov, A. B. Verëvkin, The Riemann—Roch theorem on surfaces with log terminal singularities, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 35—42.

Using the singular Riemann—Roch theorem, we propose a method to construct anticanonical sections on singular del Pezzo surfaces.

1. Введение

Основное поле всюду считается полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть X — нормальная проективная поверхность, имеющая лишь логтерминальные особенности. В нашем, двумерном, случае под *логтерминальными особенностями* можно понимать фактор-особенности, т. е. особенности, аналитически изоморфные факторам неособых точек по конечной группе G, действующей свободно в коразмерности 1. При этом *циклические фактор-особенности* — это факторы по циклической группе G. Говорят, что X — *логповерхность дель Пеццо* (*логповерхность Энриквеса*), если антиканонический дивизор $-K_X$ является обильным (соответственно численно тривиальным) дивизором. Наш интерес

*Работа первого автора выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 04-01-00739 и УР 04.01.054 № 214. Работа второго автора выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 02-01-00441, НШ-489.2003.1 и НШ-1910.2003.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 4, с. 35—42.

к изучению таких поверхностей обусловлен тем, что они естественно получаются при индуктивном исследовании трёхмерных особенностей и бирациональных перестроек (см. [3,9]). Логповерхности дель Пеццо интенсивно изучались с различных точек зрения (см., например, [1,6—8,11]). Для приложений к трёхмерной геометрии наиболее важными являются вопросы об ограниченности [2,4] и существовании дополнений [9,11]. Напомним, что канонический дивизор K_X на нормальном многообразии X называется *n-дополняемым*, если существует элемент $D \in |-nK_X|$ в кратной антиканонической линейной системе, такой что пара $(X, \frac{1}{n}D)$ имеет лишь логканонические особенности.

В настоящей заметке мы применим особую формулу Римана—Роха в форме Рида [10] к построению дополнений. В основном, результаты не являются новыми. По мнению авторов, интересным является метод, который должен иметь важные приложения в общем случае. Результат настоящей заметки — следующие две теоремы.

Теорема 1.1 (см. [6, § 10] для случая $\operatorname{Pic} X = \mathbb{Z}$). *Пусть X — логповерхность дель Пеццо. Предположим, что на X имеется ровно одна недювалевская точка и она является циклическим фактором. Тогда линейная система $|-K_X|$ непуста. В частности, поверхность X неисключительна и дивизор K_X имеет 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение.*

Теорема 1.2 (см. [5, 12]). *Пусть X — рациональная логповерхность Энриквеса. Предположим, что на X имеется ровно одна недювалевская точка и она является циклическим фактором. Тогда $2K_X \sim 0$.*

Отметим, что наиболее интересными для приложений логповерхностями дель Пеццо и Энриквеса являются поверхности с числом Пикара $\rho = 1$. В этой ситуации согласно [6, § 9] число особых точек не превосходит пяти.

Следствие 1.3. *Пусть X — логповерхность дель Пеццо с числом Пикара $\rho(X) = 1$. Предположим, что X имеет ровно пять особых точек, причём каждая недювалевская точка является циклическим фактором. Тогда линейная система $|-K_X|$ непуста. В частности, поверхность X неисключительна и дивизор K_X имеет 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение.*

Следствие 1.4. *Пусть X — рациональная логповерхность Энриквеса с $\rho(X) = 1$. Предположим, что X имеет ровно пять особых точек, причём каждая недювалевская точка является циклическим фактором. Тогда $2K_X \sim 0$.*

2. Теорема Римана—Роха

Пусть X — нормальная проективная поверхность с логтерминальными особенностями, и пусть D — дивизор Вейля на X. Предположим, что каждая особая точка, вблизи которой D не является дивизором Картье, — циклический фактор. Тогда имеет место теорема Римана—Роха в следующей форме (см. [10]):

$$\chi(X,D)=\frac{1}{2}D\cdot(D-K_X)+\chi(X,\mathcal{O}_X)+\sum_{P\in X}c_P(D). \tag{1}$$

Здесь добавочные члены $c_P(D)$ отличны от нуля в случае, когда D не является дивизором Картье в P, и вычисляются локально вблизи точки P следующим образом.

Каждая циклическая фактор-особенность $P\in X$ может быть (с точностью до аналитического изоморфизма) записана в виде $\mathbb{C}^2/\boldsymbol{\mu}_r$, где $\boldsymbol{\mu}_r$ действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу

$$(x,y)\to(\varepsilon^s x,\varepsilon^q y),\quad \text{НОД}\,(s,r)=\text{НОД}\,(q,r)=1,$$

где ε — первообразный корень степени r из единицы. В этом случае говорят, что $P\in X$ имеет тип $\frac{1}{r}(s,q)$. Заменой первообразного корня можно добиться того, что $s=1$, т. е. $P\in X$ будет иметь тип $\frac{1}{r}(1,q)$. Тогда $(X\ni P)\simeq\mathbb{C}^2/\boldsymbol{\mu}_r$. Пусть $\pi\colon\mathbb{C}^2\to X$ — соответствующий фактор-морфизм. Пучок $\mathcal{O}_X(D)$ локально вкладывается в $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$, и мы можем предполагать, что $\mathcal{O}_X(D)$ — пучок собственных сечений:

$$\mathcal{O}_X(D)=\{f\mid\varepsilon(f)=\varepsilon^j\cdot f\ \text{для всех}\ \varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r\}.$$

В этом случае будем говорить, что $\mathcal{O}_X(D)$ имеет тип j. Тогда

$$c_P(D)=\frac{1}{r}(\sigma_j-\sigma_0),\quad\text{где}\quad \sigma_j=\sum_{\varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r\setminus\{1\}}\frac{\varepsilon^j}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^q)}.$$

Если D — дивизор Картье в точке P, то $j=0$ и $c_P(D)=0$.

3. Вычисления c_P

Предложение 3.1. *В обозначениях выше имеем*

$$2rq\cdot c_P(D)=\sum_{l=0}^{r-1}\left\lceil\frac{ql+j}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{ql+j}{r}\right\rceil-1\right)-\\ -\sum_{l=0}^{r-1}\left\lceil\frac{ql}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{ql}{r}\right\rceil-1\right)-j(rq+r-q-2+j).$$

Доказательство. Определим функцию

$$\Phi(\varepsilon,t):=\frac{\varepsilon^j t^j}{(1-\varepsilon t)(1-\varepsilon^q t^q)}.$$

Затем овеществим её знаменатель:

$$\Phi(\varepsilon,t)=\frac{\varepsilon^j t^j}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\,\frac{1-t^r}{1-\varepsilon t}\,\frac{1-t^{qr}}{1-\varepsilon^q t^q}=\\ =\frac{\varepsilon^j t^j}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\sum_{0\leqslant k<r}\varepsilon^k t^k\sum_{0\leqslant l<r}\varepsilon^{ql}t^{ql}=\frac{1}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\sum_{0\leqslant k,l<r}(\varepsilon t)^{ql+k+j}.$$

В частности, получим

$$\Phi(1,t)=\frac{t^j}{(1-t)(1-t^q)}=\frac{1}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\sum_{0\leqslant k,l<r}t^{ql+k+j}.$$

Ненадолго обозначим

$$\delta(s,r):=\begin{cases}1, & \text{если } s\mid r,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{\varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r}\varepsilon^s=r\delta(s,r).$$

Это даёт нам равенства

$$\begin{aligned}\sum_{\varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r}\Phi(\varepsilon,t)&=\frac{1}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\sum_{\varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r}\sum_{0\leqslant k,l<r}\varepsilon^{ql+k+j}t^{ql+k+j}=\\&=\frac{1}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\sum_{0\leqslant k,l<r}t^{ql+k+j}\sum_{\varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r}\varepsilon^{ql+k+j}=\\&=\frac{1}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\sum_{0\leqslant k,l<r}t^{ql+k+j}r\delta(ql+k+j,r).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{1\neq\varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r}\Phi(\varepsilon,t)&=\frac{1}{(1-t^r)(1-t^{qr})}\left(r\sum_{\substack{0\leqslant k,l<r\\ r\mid ql+k+j}}t^{ql+k+j}-\sum_{0\leqslant k,l<r}t^{ql+k+j}\right)=\\&=\frac{1}{1+t+\ldots+t^{r-1}}\,\frac{1}{1+t+\ldots+t^{qr-1}}\,\frac{1}{(1-t)^2}\times\\&\times\left(r\sum_{\substack{0\leqslant k,l<r\\ r\mid ql+k+j}}t^{ql+k+j}-\sum_{0\leqslant k,l<r}t^{ql+k+j}\right).\end{aligned}$$

Окончательно, дважды применив правило Лопиталя, получим

$$\sigma_j=\sum_{1\neq\varepsilon\in\boldsymbol{\mu}_r}\Phi(\varepsilon,1)=\frac{1}{r\cdot qr\cdot 2}\left.\left(r\sum_{\substack{0\leqslant k,l<r\\ r\mid ql+k+j}}t^{ql+k+j}-\sum_{0\leqslant k,l<r}t^{ql+k+j}\right)''\right|_{t=1}=$$

$$=\frac{1}{2r^2q}\left(r\sum_{\substack{0\leqslant k,l<r\\ r\mid ql+k+j}}(ql+k+j)(ql+k+j-1)-\sum_{0\leqslant k,l<r}(ql+k+j)(ql+k+j-1)\right).$$

Таким образом, мы имеем

$$\sigma_j = \frac{1}{2rq}\mathrm{I}_j - \frac{1}{2r^2q}\mathrm{II}_j,$$

где выражения I_j и II_j задаются формулами

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_j &= \sum_{\substack{0\leqslant k,l<r\\ r\mid ql+k+j}} (ql+k+j)(ql+k+j-1),\\
\mathrm{II}_j &= \sum_{0\leqslant k,l<r} (ql+k+j)(ql+k+j-1) =\\
&= \frac{r^2(r-1)}{6}((q^2+1)(2r-1)+3q(r-2)-3)+r^2j((q+1)(r-1)+j-1).
\end{aligned}$$

Легко видеть, что I_j выражается через функцию верхняя целая часть:

$$\mathrm{I}_j = \sum_{l=0}^{r-1} r\left\lceil\frac{ql+j}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{ql+j}{r}\right\rceil-1\right).$$

Отсюда получаем

$$c_P(D) = \frac{1}{r}(\sigma_j-\sigma_0) = \frac{1}{2r^2q}(\mathrm{I}_j-\mathrm{I}_0) - \frac{1}{2r^3q}(\mathrm{II}_j-\mathrm{II}_0),$$

где разности в скобках выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_j-\mathrm{I}_0 &= r\sum_{l=0}^{r-1}\left\lceil\frac{ql+j}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{ql+j}{r}\right\rceil-1\right) - r\sum_{l=0}^{r-1}\left\lceil\frac{ql}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{ql}{r}\right\rceil-1\right),\\
\mathrm{II}_j-\mathrm{II}_0 &= \sum_{0\leqslant k,l<r}(2qjl+2jk+j^2-j) = r^2j((q+1)(r-1)+j-1).
\end{aligned}$$

Отсюда немедленно вытекает требуемое равенство. □

4. Доказательства теорем

Следствие 4.1. *Если* $q\not\equiv -1 \pmod r$, *то*

$$c_P(-K) = 1 - \frac{\bar q + q' + 2}{r} > -1,$$

где q' *и* $\bar q$ *— такие натуральные числа, что* $qq' \equiv 1 \pmod r$, $\bar q \equiv q \pmod r$ *и* $0 < q', \bar q < r$.

Доказательство. В данном случае $j = -\bar q - 1$, и мы получаем

$$
\begin{aligned}
2r\bar{q}\cdot c_P(-K) = {} & \sum_{l=0}^{r-1}\left\lceil\frac{\bar{q}l-\bar{q}-1}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{\bar{q}l-\bar{q}-1}{r}\right\rceil-1\right)-\\
& -\sum_{l=0}^{r-1}\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil-1\right)-(-\bar{q}-1)(r\bar{q}+r-\bar{q}-2-\bar{q}-1)=\\
& =\sum_{l=-1}^{r-2}\left\lceil\frac{\bar{q}l-1}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{\bar{q}l-1}{r}\right\rceil-1\right)-\sum_{l=0}^{r-1}\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil-1\right)+\\
& +(\bar{q}+1)(r\bar{q}+r-2\bar{q}-3).
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
\left\lceil\frac{\bar{q}l-1}{r}\right\rceil<\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil
$$

только в случае $\bar{q}l\equiv 1 \pmod r$, т. е. $l=q'$. Пусть $k:=(\bar{q}q'-1)/r$, тогда

$$
\left\lceil\frac{\bar{q}q'-1}{r}\right\rceil=k,\qquad \left\lceil\frac{\bar{q}q'}{r}\right\rceil=k+1.
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
2r\bar{q}\cdot c_P(-K) = {} & \left\lceil\frac{-\bar{q}-1}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{-\bar{q}-1}{r}\right\rceil-1\right)+\\
& +k(rk-1)-(k+1)(rk+r-1)+\\
& +\sum_{l=0,\ l\neq q'}^{r-2}\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil-1\right)-\sum_{l=0,\ l\neq q'}^{r-2}\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{\bar{q}l}{r}\right\rceil-1\right)-\\
& -\left\lceil\frac{\bar{q}(r-1)}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{\bar{q}(r-1)}{r}\right\rceil-1\right)+(\bar{q}+1)(r\bar{q}+r-2\bar{q}-3)=\\
& =\left\lceil\frac{-\bar{q}-1}{r}\right\rceil\left(r\left\lceil\frac{-\bar{q}-1}{r}\right\rceil-1\right)-\bar{q}(r\bar{q}-1)-\\
& -2rk-2+r\bar{q}^2+2r\bar{q}-2\bar{q}^2-5\bar{q}=-4\bar{q}-2rk-2+2r\bar{q}-2\bar{q}^2.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем искомое неравенство. □

Доказательство теорем 1.1 и 1.2. Первая часть теоремы 1.1 — немедленное следствие теоремы Римана—Роха (1), теоремы Каваматы—Фивега об обращении в нуль и следствия 4.1. Для доказательства второго утверждения рассмотрим элемент $D\in|-K_X|$. Если пара (X,D) логканоническая, то D является 1-дополнением. В противном случае пара $(X,\alpha D)$ является логканонической, но не логтерминальной для некоторого $0<\alpha<1$. Тогда утверждение немедленно выводится из [11, Theorem 2.3] (см. также [6, Lemma 22.2; 9, Proposition 5.3.1]).

Для доказательства второй теоремы мы также применим (1), следствие 4.1 и двойственность Серра:

$$
h^0(X,-K_X)+h^0(X,2K_X)\geqslant\chi(X,\mathcal{O}_X)+\sum_{P\in X}c_P(-K)>0.
$$

Отсюда получаем, что или $|-K_X| \neq \varnothing$, или $|2K_X| \neq \varnothing$. Учитывая, что $K_X \equiv 0$, получаем $-K_X \sim 0$ или $2K_X \sim 0$. □

Доказательство следствий 1.3 и 1.4. Как и выше, достаточно доказать, что $\sum c_P(-K) \geqslant 0$. Пусть $r_1, \ldots, r_5$ — порядки локальных фундаментальных групп особых точек $P_1, \ldots, P_5$. Тогда согласно [6, § 9] имеется неравенство $\sum(1-1/r_i) \leqslant 3$. Поэтому мы можем считать, что $r_1 = r_2 = 2$, т. е. P_1 и P_2 — дювалевские точки типа A_1. Если все точки, кроме одной, дювалевские, то утверждение следует из теоремы 1.1. Таким образом, мы можем считать, что $r_4, r_5 \geqslant 3$. Легко видеть, что, с точностью до перестановок, для $(r_1, \ldots, r_5)$ имеются лишь следующие возможности:

$$\begin{gathered}(2,2,2,3,3), \quad (2,2,2,3,4), \quad (2,2,2,3,5),\\ (2,2,2,3,6), \quad (2,2,2,4,4), \quad (2,2,3,3,3).\end{gathered} \tag{2}$$

Отсюда любая недювалевская точка на X имеет тип $\frac{1}{3}(1,1)$, $\frac{1}{4}(1,1)$, $\frac{1}{5}(1,1)$, $\frac{1}{6}(1,1)$ или $\frac{1}{5}(1,2)$, а добавочный член $c_P(-K)$ этих случаях будет $-1/3$, 0, $1/5$, $1/3$ или $-2/5$ соответственно. Во всех случаях списка (2) непосредственно убеждаемся, что $\sum c_{P_i}(-K) \geqslant 0$. □

Литература

[1] Алексеев В. А., Никулин В. В. Классификация поверхностей дель Пеццо с лог-терминальными особенностями индекса 2, инволюции на поверхностях K3 и группы отражений в пространствах Лобачевского // Доклады по математике и её приложениям. — 1988. — Т. 2, № 2. — С. 51—150.

[2] Никулин В. В. Поверхности дель Пеццо с лог-терминальными особенностями. III // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1989. — Т. 53, № 6. — С. 1316—1334.

[3] Прохоров Ю. Г., Шокуров В. В. Первая основная теорема о дополнениях: от локального к глобальному // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — Т. 65, № 6. — С. 99—128.

[4] Alexeev V. Boundedness and K^2 for log surfaces // Internat. J. Math. — 1994. — Vol. 5, no. 6. — P. 779—810.

[5] Blache R. The structure of l.c. surfaces of Kodaira dimension zero. I // J. Algebraic Geom. — 1995. — Vol. 4, no. 1. — P. 137—179.

[6] Keel S., McKernan J. Rational Curves on Quasi-Projective Surfaces. — 1999. — Memoirs AMS. Vol. 140.

[7] Kojima H. Logarithmic del Pezzo surfaces of rank one with unique singular points // Japan. J. Math. (N.S.). — 1999. — Vol. 25, no. 2. — P. 343—375.

[8] Miyanishi M., Tsunoda S. Logarithmic del Pezzo surfaces of rank one with contractible boundaries it infinity // Japan. J. Math. — 1984. — Vol. 10. — P. 271—319.

[9] Prokhorov Yu. G. Lectures on Complements on Surfaces. — 2001. — Memoirs Math. Soc. Japan. Vol. 10.

[10] Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Symp. Pure Math. — 1987. — Vol. 46. — P. 343—416.

[11] Shokurov V. V. Complements on surfaces // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 2. — P. 3876—3932.

[12] Zhang De-Qi. Logarithmic Enriques surfaces. I // J. Math. Kyoto Univ. — 1991. — Vol. 31, no. 2. — P. 419—466.