

Проективные резольвенты и алгебры Йонеды для алгебр диэдрального типа: серия $D(3\mathcal{Q})$

А. И. ГЕНЕРАЛОВ

Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: general@pdmi.ras.ru

Н. В. КОСМАТОВ

Университет Франш-Конте, Безансон, Франция
e-mail: kosmatov@lifc.univ-fcomte.fr

УДК 512.66

Ключевые слова: алгебры Йонеды, алгебры диэдрального типа, проективные резольвенты, диаграммы модулей.

Аннотация

В работе описан метод вычисления алгебр Йонеды для алгебр диэдрального типа. Найдены алгебры Йонеды для одной бесконечной серии алгебр диэдрального типа (серии $D(3\mathcal{Q})$ в обозначениях К. Эрдманн). Минимальные проективные резольвенты простых модулей вычислены с помощью оригинальной компьютерной программы, написанной одним из авторов на языке C++. Алгоритм программы использует диаграммный метод, представленный в работе и основанный на методе Д. Бенсона и Дж. Карлсона.

Abstract

A. I. Generalov, N. V. Kosmatov, Projective resolutions and Yoneda algebras for algebras of dihedral type: the family $D(3\mathcal{Q})$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 65–89.

This paper provides a method for the computation of Yoneda algebras for algebras of dihedral type. The Yoneda algebras for one infinite family of algebras of dihedral type (the family $D(3\mathcal{Q})$ in K. Erdmann's notation) are computed. The minimal projective resolutions of simple modules were calculated by an original computer program implemented by one of the authors in C++ language. The algorithm of the program is based on a diagrammatic method presented in this paper and inspired by that of D. Benson and J. Carlson.

1. Введение

Алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типа были определены и классифицированы Карин Эрдманн [12]. Они обобщают блоки с диэдральными, полудиэдральными и кватернионными дефектными группами соответственно. Классификация включает в себя десятки бесконечных серий алгебр. Каждая серия определена с помощью колчанов с соотношениями, содержащими параметры.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 4, с. 65–89.

© 2004 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Алгебры Йонеды для некоторых алгебр диэдрального и полудиэдрального типа были вычислены в работах первого автора и др. [1–8, 14]. Это вычисление состоит из двух этапов: нахождения проективных резольвент простых модулей и вычисления алгебр Йонеды. Для алгебр, являющихся главными блоками групповых алгебр, эти результаты позволили найти кольца когомологий соответствующих групп.

Оказалось, что минимальная проективная резольвента простого модуля для всех рассмотренных алгебр может быть представлена как тотализация некоторого бесконечного бикомплекса (кроме случаев, когда этот модуль Ω -периодичен). Фрагменты бикомплекса повторяются по некоторому правилу. Для того чтобы понять периодические свойства бикомплекса, часто бывает необходимо вычислить его первые 10–20 диагоналей. Поскольку эти вычисления достаточно сложно производить вручную, целью настоящей работы является не только нахождение алгебр Йонеды для других алгебр диэдрального типа, но также и развитие компьютерных технологий вычисления проективных резольвент.

Недавно [14] мы применили наш метод вычисления алгебр Йонеды для одной бесконечной серии диэдральных алгебр: для серии $D(3\mathcal{L})$ в обозначениях К. Эрдманн [12]. Проективные резольвенты для этой серии были вычислены благодаря оригинальной компьютерной программе *Resolut*, разработанной вторым автором на языке C++. В этой статье мы снова применим нашу технику и вычислим алгебры Йонеды для алгебр, составляющих серию $D(3\mathcal{Q})$.

Алгоритм программы основан на диаграммном методе Дэвида Бенсона и Джона Карлсона [11]. Хотя наше определение диаграммы отличается от определений из [9, 11, 13], многие идеи и диаграммные конструкции из [11] по-прежнему применимы в нашем случае. Важным преимуществом нашего подхода является возможность реализации значительной части вычислений алгебр Йонеды на компьютере.

Программа *Resolut* исследует алгебру, определённую данным колчаном с соотношениями (при фиксированных значениях параметров), и вычисляет минимальные проективные резольвенты простых модулей над этой алгеброй. Меньше секунды требуется для того, чтобы вычислить достаточно много модулей бикомплекса для угадывания его структуры. Запуск программы для различных значений параметров позволяет высказать гипотезу об общей форме бикомплекса для произвольных параметров. Гипотезу нетрудно доказать вручную, так как бикомплекс содержит лишь конечное число различных квадратов.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 мы определяем серию $D(3\mathcal{Q})$ диэдральных алгебр, формулируем наш основной результат и описываем метод вычисления алгебр Йонеды. Раздел 3 вводит понятие диаграммы модуля и описывает некоторые свойства диаграмм. В разделе 4 мы применяем диаграммный метод для вычисления минимальных проективных резольвент и сизигий простых модулей. Мы определяем образующие алгебры Йонеды в разделе 5 и заканчиваем доказательство основного результата в разделе 6.

2. Основной результат

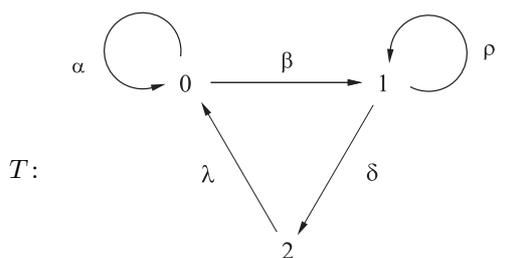
Пусть K — поле, Λ — ассоциативная K -алгебра с единицей, M — Λ -модуль (все рассматриваемые модули левые). K -модуль

$$\mathcal{E}xt(M) = \bigoplus_{m \geq 0} \text{Ext}_{\Lambda}^m(M, M)$$

можно снабдить структурой ассоциативной K -алгебры с помощью произведения Йонеды [10]. Алгебра $\mathcal{E}xt(M)$ называется *Ext-алгеброй* Λ -модуля M .

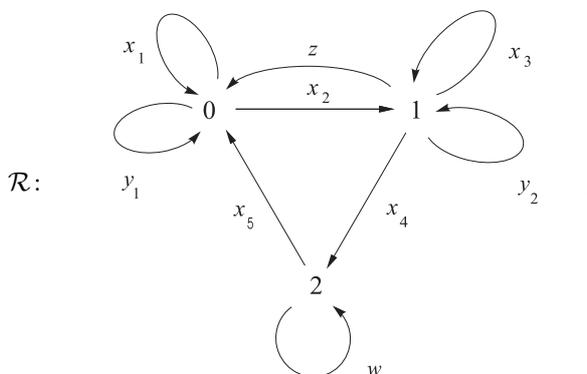
Для конечномерной базисной K -алгебры Λ определим $\bar{\Lambda} = \Lambda/J(\Lambda)$, где $J(\Lambda)$ — радикал Джекобсона алгебры Λ . Ext-алгебра $\mathcal{E}xt(\bar{\Lambda})$ называется *алгеброй Йонеды* алгебры Λ и обозначается $\mathcal{Y}(\Lambda)$.

Пусть k, s, t — целые числа, причём $k \geq 1$ и $s, t \geq 2$. Определим K -алгебру $R_{k,s,t}$ следующим колчаном с соотношениями (мы записываем композицию справа налево):



$$\begin{aligned} \beta\alpha = \alpha\lambda = \rho\beta = \delta\rho = 0, \\ (\lambda\delta\beta)^k = \alpha^s, \quad (\beta\lambda\delta)^k = \rho^t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Алгебры $R_{k,s,t}$ составляют бесконечную серию диэдральных алгебр, обозначаемую в [12] через $D(3\mathcal{Q})$. Каждая алгебра $R_{k,s,t}$ симметрична (и, следовательно, является QF-алгеброй). Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R_{k,s,t})$ рассмотрим колчан



Пусть $K[\mathcal{R}]$ — алгебра путей колчана \mathcal{R} . Определим на ней следующую градуировку:

$$\begin{aligned} \deg(x_i) &= 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5; \\ \deg(y_i) &= 2, \quad i = 1, 2; \quad \deg(z) = 3, \quad \deg w = 6. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующие соотношения на колчане \mathcal{R} :

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 &= \delta(s, 2)y_1, & x_3^2 &= \delta(t, 2)y_2, \\ x_4x_2 &= x_5x_4 = x_2x_5 = x_4y_2 = y_1x_5 = 0, \\ x_1y_1 &= y_1x_1, & y_2x_2 &= x_2y_1, & x_3y_2 &= y_2x_3, \\ zx_2 &= -\delta(k, 1)y_1^2, & x_2z &= -\delta(k, 1)y_2^2, \\ y_1z &= zy_2, & x_4x_3x_2x_1z &= -wx_4, & zx_3x_2x_1x_5 &= -x_5w. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь $\delta(i, j)$ обозначает δ -функцию Кронекера:

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{E}_{k,s,t}$ — K -алгебра, определённая колчаном \mathcal{R} с соотношениями (2.2). Поскольку эти соотношения однородны, алгебра $\mathcal{E}_{k,s,t}$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{R}]$. Сформулируем наш основной результат.

Теорема 2.1. *Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R_{k,s,t})$ изоморфна как градуированная алгебра алгебре $\mathcal{E}_{k,s,t}$.*

Для упрощения обозначений положим

$$R = R_{k,s,t}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{k,s,t}, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}(R).$$

Обозначим через e_i идемпотенты алгебры R , соответствующие вершинам $i = 0, 1, 2$ колчана T . Существуют, с точностью до изоморфизма, три неразложимых проективных R -модуля и три простых R -модуля, определённые формулами $P_i = Re_i$ и $S_i = P_i/(J(R)P_i)$ соответственно.

Опишем наш метод вычисления алгебр Йонеды. Этот метод может быть также применён к другим сериям диэдральных алгебр из классификации К. Эрдемманн [12].

1. Мы исследуем данный колчан с соотношениями T и находим базисы и диаграммы неразложимых проективных модулей.
2. Используя диаграммный метод, мы вычисляем бикомплексы, тотализации которых совпадают с минимальными проективными резольвентами простых модулей. Мы также описываем сизигии в терминах диаграмм. Первые два этапа могут быть выполнены программой *Resolut* [15].

3. Мы выбираем образующие в группах $\text{Ext}_R^1(S_i, S_j)$ и проверяем, порождают ли они группы $\text{Ext}_R^2(S_i, S_j)$ в алгебре Йонеды. Если нет, мы выбираем дополнительные образующие в группах $\text{Ext}_R^2(S_i, S_j)$ и так далее, пока выбранные образующие не будут порождать всю алгебру Йонеды.
4. Вычисляя произведения образующих, мы находим соотношения и формулируем гипотезу о колчане с соотношениями, определяющими алгебру Йонеды. Далее эта гипотеза доказывается, как это показано ниже.

3. Диаграммы

Пусть Λ — алгебра, определённая колчаном с соотношениями W , и пусть L — множество рёбер колчана W . Пусть M — Λ -модуль и $D = (V, E, \varphi)$ — конечный ориентированный граф с вершинами V , рёбрами E и помечающей функцией $\varphi: E \rightarrow L$. Если $i, j \in V$ и $e \in E$ — ребро $i \rightarrow j$ с меткой $\varphi(e) = \gamma \in L$, мы пишем $e = e(i, j)$ или $e = e(i, j, \gamma)$.

Определение 3.1. Мы говорим, что Λ -модуль M имеет диаграмму D , если существует такой K -базис $\{v_i \mid i \in V\}$ модуля M , что

- 1) для любого ребра $e(i, j, \gamma)$ выполнено $\gamma v_i = v_j$ или $\gamma v_i = -v_j$,
- 2) для любых $i \in V$ и $\gamma \in L$, удовлетворяющих условию $\gamma v_i \neq 0$, существует единственная вершина $j \in V$, для которой $e(i, j, \gamma) \in E$,
- 3) для любого v_i R -модуль $\text{top}(Rv_i)$ прост, то есть Rv_i является локальным модулем.

Согласно этому определению один и тот же модуль M может иметь различные диаграммы. Поскольку мы рассматриваем диаграммы по отношению к некоторым фиксированным базисам, единственности диаграмм не требуется для наших результатов. Для упрощения обозначений мы условимся, что всякое неориентированное ребро в диаграмме направлено сверху вниз, и будем иногда писать $i \in D$ вместо $i \in V$. Нам также будет удобно писать простой модуль $\text{top}(Rv_i)$ в вершине i диаграммы.

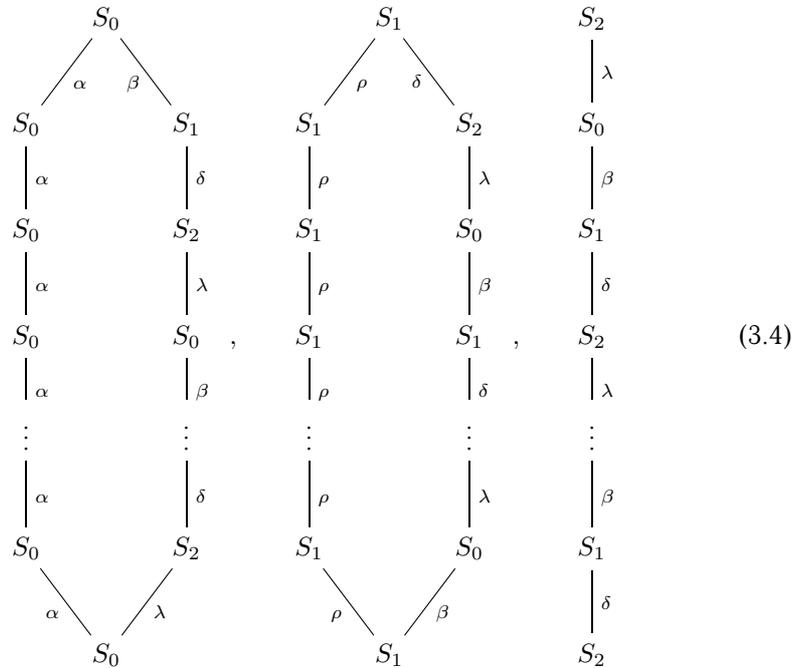
В качестве примера диаграмм приведём диаграммы R -модулей $P_i = Re_i$, $i = 0, 1, 2$. Из (2.1) следует, что модули P_i имеют следующие K -базисы:

$$P_0 = \langle e_0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{s-1}, \beta, \delta\beta, \lambda\delta\beta, \beta\delta\lambda\beta, \dots, \delta\beta(\lambda\delta\beta)^{k-1}, \alpha^s = (\lambda\delta\beta)^k \rangle; \quad (3.1)$$

$$P_1 = \langle e_1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{t-1}, \delta, \lambda\delta, \beta\lambda\delta, \delta\beta\lambda\delta, \dots, \lambda\delta(\beta\lambda\delta)^{k-1}, \rho^t = (\beta\lambda\delta)^k \rangle; \quad (3.2)$$

$$P_2 = \langle e_2, \lambda, \beta\lambda, \delta\beta\lambda, \lambda\delta\beta\lambda, \dots, \beta\lambda(\delta\beta\lambda)^{k-1}, (\delta\beta\lambda)^k \rangle. \quad (3.3)$$

С помощью (3.1)–(3.3) находим, что модули P_0 , P_1 и P_2 имеют диаграммы

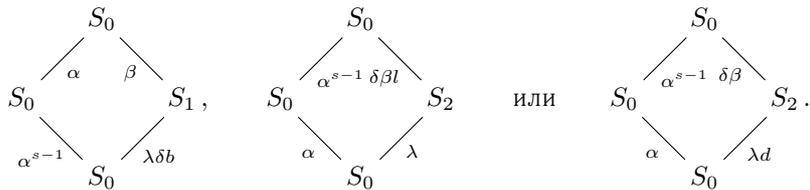


соответственно.

Обозначим

$$b = (\beta\lambda\delta)^{k-1}, \quad d = (\delta\beta\lambda)^{k-1}, \quad l = (\lambda\delta\beta)^{k-1}$$

(если $k = 1$, положим $b = e_1, d = e_2, l = e_0$). Мы будем использовать одни и те же обозначения для элементов алгебры путей $K[T]$ и их образов в R . Для краткости мы будем заменять последовательность рёбер в диаграмме одним ребром, которое мы будем помечать композицией исходных рёбер. Диаграмма модуля P_0 в этих обозначениях может быть записана, например, как



Хотя наше определение диаграммы отличается от определения из [11], многие понятия и диаграммные конструкции из [11] применимы и в нашем контексте. Мы коротко приведём здесь некоторые определения и свойства, которые будут полезны ниже. Пусть $D = (V, E, \varphi)$ — диаграмма модуля M , а $\{v_i \mid i \in V\}$ — соответствующий базис M . Если R -модуль M' имеет ту же самую диаграмму D , тогда $M \simeq M'$.

Мы говорим, что $D' = (V', E', \varphi')$ — *поддиаграмма* диаграммы D , если $V' \subset V$, $E' = \{e(i, j) \in E \mid i, j \in V'\}$ и $\varphi' = \varphi|_{E'}$. Отметим, что поддиаграмма D' диаграммы D содержит все рёбра, соединяющие вершины из D' , следовательно, D' полностью определена множеством своих вершин V' . R -подмодуль, порождённый элементами $\{v_j \mid j \in V'\}$, имеет диаграмму, которая является поддиаграммой D , содержащей все вершины (и, следовательно, все рёбра), лежащие на путях с началом в V' .

Мы называем поддиаграмму D' диаграммы D *открытой*, если для любой вершины $j \in D'$ поддиаграмма D' содержит все вершины, лежащие на путях в D с началом в j . В этом случае R -подмодуль $M' \subset M$, порождённый элементами $\{v_j \mid j \in D'\}$, совпадает с $\sum_{j \in D'} K v_j$ и имеет диаграмму D' .

Двойственно, мы называем поддиаграмму D' диаграммы D *замкнутой*, если для любой вершины $j \in D'$ поддиаграмма D' содержит все вершины, лежащие на путях в D с концом в j . Пусть M_0 — подмодуль модуля M , порождённый элементами $\{v_j \mid j \notin D'\}$. Фактор-модуль $\bar{M} = M/M_0$ имеет диаграмму D' . Если $\pi: M \rightarrow \bar{M}$ — каноническая проекция, мы будем обозначать $\pi(v_j) \in \bar{M}$ также через \bar{v}_j .

Поскольку поддиаграмма однозначно определена своим множеством вершин, мы можем определить теоретико-множественные операции на поддиаграммах данной диаграммы D с помощью соответствующих операций на их множествах вершин. Открытые поддиаграммы определяют топологию на (конечном) множестве поддиаграмм в D , причём открытые и замкнутые диаграммы взаимно дополнительные.

Модули $\text{Rad } M$ и $\text{top } M = M/\text{Rad}(M)$ также могут быть легко описаны в терминах поддиаграмм. Пусть D_{Rad} — открытая поддиаграмма диаграммы D с вершинами $V_{\text{Rad}} = \{j \in V \mid \text{существует ребро } e(i, j) \text{ в } D\}$, и пусть D_{top} — замкнутая поддиаграмма диаграммы D с вершинами $V_{\text{top}} = V \setminus V_{\text{Rad}}$ и без рёбер. Тогда легко заметить, что $\text{Rad } M$ имеет диаграмму D_{Rad} по отношению к базису $\{v_j \mid j \in V_{\text{Rad}}\}$, а $\text{top } M$ имеет диаграмму D_{top} по отношению к базису $\{\bar{v}_j \mid j \in V_{\text{top}}\}$.

Наконец, мы вводим понятие вырезания и приклеивания как в [11].

4. Проективные резольвенты

Пусть

$$\dots \xrightarrow{d_1^{(i)}} Q_1^{(i)} \xrightarrow{d_0^{(i)}} Q_0^{(i)} \xrightarrow{d_{-1}^{(i)}} S_i \rightarrow 0 -$$

минимальная проективная резольвента простого R -модуля S_i . Мы будем обозначать через $\Omega^n(S_i)$ её n -ю сизигию $\text{Im}(d_{n-1}^{(i)})$, $n \geq 0$. Умножение справа на элемент $x \in e_i R e_j$ определяет гомоморфизм из P_i в P_j , который мы будем обозначать также через x .

В этом разделе мы воспользуемся диаграммным методом для нахождения минимальных проективных резольвент и сизигий модулей S_i . Так как вершины диаграммы R -модуля M находятся в биективном соответствии с некоторым базисом M , а рёбра диаграммы описывают R -модульную структуру на M , то мы можем рассматривать диаграммы и диаграммные отображения вместо модулей и гомоморфизмов. Морфизмы диаграмм (очевидные в нашем контексте) могут быть формально определены как в [11, определение 2.6].

Мы отождествляем S_0 с $\langle \alpha^s \rangle \subset P_0$. Положим $Q_0^{(0)} = P_0$ и определим эпиморфизм $d_{-1}^{(0)}: Q_0^{(0)} \rightarrow S_0$ формулой $d_{-1}^{(0)}(e_0) = \alpha^s$. Тогда точна последовательность

$$\begin{array}{ccc} S_0 & & S_1 \\ & \searrow \alpha^{s-1} & \nearrow \lambda\delta b \\ & S_0 & \end{array} \hookrightarrow Q_0^{(0)} \xrightarrow{\alpha^s} S_0,$$

где открытая поддиаграмма слева представляет $\Omega^1(S_0) \subset P_0$. Поскольку $\ker d_{-1}^{(0)} \subset \text{Rad } P_0$, $d_{-1}^{(0)}$ определяет проективное накрытие модуля S_0 . Пусть $Q_1^{(0)} = P_0 \oplus P_1$, определим эпиморфизм $d_0^{(0)}: Q_1^{(0)} \rightarrow \Omega^1(S_0)$, положив $d_0^{(0)}(e_0, 0) = \alpha$ и $d_0^{(0)}(0, e_1) = \beta$. Тогда имеем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccc} S_1 & & S_0 & & S_1 \\ & \searrow \lambda\delta b & \nearrow \alpha & \searrow \beta & \nearrow \rho^{t-1} \\ & S_0 & & S_1 & \end{array} \hookrightarrow Q_1^{(0)} \xrightarrow{(\alpha, \beta)} \Omega^1(S_0),$$

в которой левая диаграмма представляет модуль

$$\Omega^2(S_0) = \ker d_0^{(0)} = \langle (\beta, 0), (\delta\beta, 0), \dots, ((\lambda\delta\beta)^k, 0), (-\alpha^{s-1}, \lambda\delta b), \\ (0, (\beta\lambda\delta)^k), (0, \rho^{t-1}), \dots, (0, \rho) \rangle \subset P_0 \oplus P_1.$$

Так как $\ker d_0^{(0)} \subset \text{Rad } Q_1^{(0)}$, $d_0^{(0)}$ также определяет проективное накрытие модуля $\Omega^1(S_0)$. Продолжая таким образом и применяя индукцию, читатель докажет следующие предложения.

Предложение 4.1.

- 1) Модули $\Omega^0(S_0)$ и $\Omega^1(S_0)$ имеют соответственно диаграммы

$$S_0 \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} S_0 & & S_1 \\ & \searrow \alpha^{s-1} & \nearrow \lambda\delta b \\ & S_0 & \end{array}.$$

- 2) Пусть $m \geq 2$ — целое число, $m \equiv r \pmod{6}$ и $0 \leq r \leq 5$. Пусть D — диаграмма модуля $\Omega^{m-2}(S_0)$. Тогда диаграмма модуля $\Omega^m(S_0)$ может быть получена из D добавлением или стиранием некоторых поддиаграмм (зависящих от r) с обеих сторон диаграммы D . В следующей таблице приводятся поддиаграммы, добавляемые (+) или стираемые (−) с левого и с правого конца диаграммы D :

$r = 0$	$\begin{array}{c} S_2 \\ \lambda \searrow \\ S_0 \end{array} - D + \begin{array}{c} S_2 \quad S_0 \\ \lambda \searrow \quad \nearrow \\ S_0 \quad \alpha^{s-1} \end{array}$
$r = 1$	$\begin{array}{c} S_0 \quad S_2 \\ \alpha^{s-1} \searrow \quad \nearrow \\ S_0 \quad \lambda \end{array} + D + \begin{array}{c} S_0 \quad S_1 \\ \alpha \searrow \quad \nearrow \\ S_0 \quad \lambda \delta b \end{array}$
$r = 2$	$\begin{array}{c} S_1 \quad S_0 \\ \lambda \delta b \searrow \quad \nearrow \\ S_0 \quad \alpha \end{array} + D + \begin{array}{c} S_0 \quad S_1 \\ \beta \searrow \quad \nearrow \\ S_1 \quad \rho^{t-1} \end{array}$
$r = 3$	$\begin{array}{c} S_1 \quad S_0 \\ \rho^{t-1} \searrow \quad \nearrow \\ S_1 \quad \beta \end{array} + D + \begin{array}{c} S_1 \quad S_2 \\ \rho \searrow \quad \nearrow \\ S_1 \quad \beta \lambda d \end{array}$
$r = 4$	$\begin{array}{c} S_2 \quad S_1 \\ \beta \lambda d \searrow \quad \nearrow \\ S_1 \quad \rho \end{array} + D + \begin{array}{c} S_1 \quad S_2 \\ \delta \searrow \\ S_2 \end{array}$
$r = 5$	$\begin{array}{c} S_1 \\ \delta \nearrow \\ S_2 \end{array} + D - \begin{array}{c} S_2 \\ \lambda \nearrow \\ S_0 \end{array}$

Предложение 4.2.

1) Модули $\Omega^0(S_1)$ и $\Omega^1(S_1)$ имеют соответственно диаграммы

$$S_1 \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} S_2 \quad S_1 \\ \beta \lambda d \searrow \quad \nearrow \\ S_1 \quad \rho^{t-1} \end{array} .$$

2) Пусть $m \geq 2$ — целое число, $m \equiv r \pmod{6}$ и $0 \leq r \leq 5$. Пусть D — диаграмма модуля $\Omega^{m-2}(S_1)$. Тогда диаграмма модуля $\Omega^m(S_1)$ может быть получена из D добавлением или стиранием некоторых поддиаграмм (зависящих от r) с обеих сторон диаграммы D . В следующей таблице приводятся поддиаграммы, добавляемые (+) или стираемые (-) с левого и с правого конца диаграммы D :

$r = 0$	$\begin{array}{c} S_1 \quad S_0 \\ \rho^{t-1} \backslash \quad / \beta \\ S_1 \end{array} + D + \begin{array}{c} S_0 \quad S_1 \\ \alpha \backslash \quad / \lambda \delta b \\ S_0 \end{array}$
$r = 1$	$\begin{array}{c} S_2 \quad S_1 \\ \beta \lambda d \backslash \quad / \rho \\ S_1 \end{array} + D + \begin{array}{c} S_0 \quad S_1 \\ \beta \backslash \quad / \rho^{t-1} \\ S_1 \end{array}$
$r = 2$	$\begin{array}{c} S_1 \\ \delta / \\ S_2 \end{array} + D + \begin{array}{c} S_1 \quad S_2 \\ \rho \backslash \quad / \beta \lambda d \\ S_1 \end{array}$
$r = 3$	$\begin{array}{c} S_2 \\ \lambda \backslash \\ S_0 \end{array} - D + \begin{array}{c} S_1 \\ \delta \backslash \\ S_2 \end{array}$
$r = 4$	$\begin{array}{c} S_0 \quad S_2 \\ \alpha^{s-1} \backslash \quad / \lambda \\ S_0 \end{array} + D - \begin{array}{c} S_2 \\ \lambda / \\ S_0 \end{array}$
$r = 5$	$\begin{array}{c} S_1 \quad S_0 \\ \lambda \delta b \backslash \quad / \alpha \\ S_0 \end{array} + D + \begin{array}{c} S_2 \quad S_0 \\ \lambda \backslash \quad / \alpha^{s-1} \\ S_0 \end{array}$

Например, диаграмма модуля $\Omega^3(S_1)$ получается из диаграммы модуля $\Omega^1(S_1)$ стиранием ребра λ с левого конца и добавлением ребра δ к правому концу:

$$\overbrace{\begin{array}{c} S_2 \quad S_1 \\ b\beta\lambda \backslash \quad / \rho^{t-1} \\ S_1 \end{array}}^{\Omega^1(S_1)} \quad \mapsto \quad \overbrace{\begin{array}{c} S_0 \quad S_1 \\ b\beta \backslash \quad / \rho^{t-1} \quad \delta \\ S_1 \quad S_2 \end{array}}^{\Omega^3(S_1)}.$$

Рассмотрим бикомплекс (4.1)

$$B_{\bullet\bullet}^{(0)} = \{B_{ij}, \Delta_{ij}^{(h)} : B_{ij} \rightarrow B_{i-1,j}, \Delta_{ij}^{(v)} : B_{ij} \rightarrow B_{i,j-1}\},$$

лежащий в первом квадранте плоскости (то есть $B_{ij} = 0$ при $i < 0$ или $j < 0$), где i обозначает индекс колонки, а j — индекс строки. Бикомплекс $B_{\bullet\bullet}^{(0)}$ инвариантен по отношению к сдвигам на вектор $(5, 1)$ всюду под главной диагональю

и на вектор $(1, 5)$ всюду над главной диагональю (с точностью до минусов, добавленных ко всем $\Delta_{ij}^{(h)}$ с нечётным j). В частности, эти правила определяют отображения на границе бикомплекса следующим образом ($i, j \geq 0$):

$$\begin{aligned} \Delta_{5j+r,j}^{(h)} &= -\Delta_{5(j+1)+r,j+1}^{(h)}, & \text{если } r = 1, 2, 3, \\ \Delta_{5j+3,j+1}^{(v)} &= \Delta_{5(j+1)+3,j+2}^{(v)}, \\ \Delta_{5j+r,j+1}^{(h)} &= -\Delta_{5(j+1)+r,j+2}^{(h)}, & \text{если } r = 4, 5; \\ \Delta_{i,5i+r}^{(v)} &= \Delta_{i+1,5(i+1)+r}^{(v)}, & \text{если } r = 1, 2, 3, 4, \\ \Delta_{i+1,5i+4}^{(h)} &= -\Delta_{i+2,5(i+1)+4}^{(h)}, \\ \Delta_{i+1,5i+5}^{(v)} &= \Delta_{i+2,5(i+1)+5}^{(v)}. \end{aligned}$$

Бикомплекс $B_{\bullet\bullet}^{(0)}$ также инвариантен (снова с точностью до знаков) по отношению к параллельным переносам на вектор $(1, 1)$, производимым строго внутри ненулевой части бикомплекса.

$$\begin{array}{cccccccc} & \vdots & & \vdots \\ & \alpha \downarrow & & \lambda\delta \downarrow & & \rho \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & & & & \\ & P_0 & \xleftarrow{-\beta l} & P_1 & \xleftarrow{-\rho^{t-1}} & P_1 & \xleftarrow{-\lambda\delta b} & P_0 & \xleftarrow{-\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{-\beta} & \dots & & & \\ & \lambda\delta \downarrow & & \rho \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \lambda\delta b \downarrow & & & & & \\ P_2 & \xleftarrow{\beta\lambda d} & P_1 & \xleftarrow{\rho^{t-1}} & P_1 & \xleftarrow{\lambda\delta b} & P_0 & \xleftarrow{\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{\beta} & P_1 & \xleftarrow{\rho} & \dots & & \\ \delta \downarrow & & \rho \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \lambda\delta b \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & & & \\ P_1 & \xleftarrow{-\rho^{t-1}} & P_1 & \xleftarrow{-\lambda\delta b} & P_0 & \xleftarrow{-\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{-\beta} & P_1 & \xleftarrow{-\rho} & P_1 & \xleftarrow{-\lambda\delta} & \dots & (4.1) & \\ \rho \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \lambda\delta b \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \beta l \downarrow & & & & \\ P_1 & \xleftarrow{\lambda\delta b} & P_0 & \xleftarrow{\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{\beta} & P_1 & \xleftarrow{\rho} & P_1 & \xleftarrow{\lambda\delta} & P_0 & \xleftarrow{\alpha} & \dots & & \\ \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \lambda\delta b \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \beta l \downarrow & & \alpha^{s-1} \downarrow & & & & \\ P_0 & \xleftarrow{-\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{-\beta} & P_1 & \xleftarrow{-\rho} & P_1 & \xleftarrow{-\lambda\delta} & P_0 & \xleftarrow{-\alpha} & P_0 & \xleftarrow{-\beta} & \dots & & \\ \alpha \downarrow & & \lambda\delta b \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \beta\lambda d \downarrow & & & & & & & & \\ P_0 & \xleftarrow{\beta} & P_1 & \xleftarrow{\rho} & P_1 & \xleftarrow{\delta} & P_2 & & & & & & & & \end{array}$$

Предложение 4.3. Минимальная проективная резольвента R -модуля S_0 совпадает с тотализацией бикомплекса $B_{\bullet\bullet}^{(0)}$.

Для описания минимальной проективной резольвенты модуля S_1 рассмотрим бикомплекс $B_{\bullet\bullet}^{(1)}$ из (4.2), свойства которого аналогичны свойствам бикомплекса (4.1).

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \lambda\delta \downarrow & & \rho \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow \\
 P_2 & \xleftarrow{\beta\lambda d} & P_1 & \xleftarrow{\rho^{t-1}} & P_1 & \xleftarrow{\lambda\delta b} & P_0 & \xleftarrow{\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{\beta l} & \dots \\
 \delta \downarrow & & \rho \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \lambda\delta \downarrow & & \\
 P_1 & \xleftarrow{-\rho^{t-1}} & P_1 & \xleftarrow{-\lambda\delta b} & P_0 & \xleftarrow{-\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{-\beta l} & P_0 & \xleftarrow{-\rho} & \dots \\
 \rho \downarrow & & \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \lambda\delta \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \\
 P_1 & \xleftarrow{\lambda\delta b} & P_0 & \xleftarrow{\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{\beta l} & P_1 & \xleftarrow{\rho} & P_1 & \xleftarrow{\lambda\delta} & \dots \\
 \beta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \lambda\delta \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \beta l \downarrow & & \\
 P_0 & \xleftarrow{-\alpha^{s-1}} & P_0 & \xleftarrow{-\beta l} & P_1 & \xleftarrow{-\rho} & P_1 & \xleftarrow{-\lambda\delta} & P_0 & \xleftarrow{-\alpha} & \dots \\
 \alpha \downarrow & & \lambda\delta \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \beta l \downarrow & & \alpha^{s-1} \downarrow & & \\
 P_0 & \xleftarrow{\beta l} & P_1 & \xleftarrow{\rho} & P_1 & \xleftarrow{\lambda\delta} & P_0 & \xleftarrow{\alpha} & P_0 & \xleftarrow{\beta} & \dots \\
 \lambda\delta \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \beta l \downarrow & & \alpha^{s-1} \downarrow & & \lambda\delta b \downarrow & & \\
 P_2 & \xleftarrow{-\beta\lambda d} & P_1 & \xleftarrow{-\rho} & P_1 & \xleftarrow{-\lambda\delta} & P_0 & \xleftarrow{-\alpha} & P_0 & \xleftarrow{-\beta} & P_1 & \xleftarrow{-\rho} & \dots \\
 \delta \downarrow & & \rho^{t-1} \downarrow & & \beta l \downarrow & & & & & & & & \\
 P_1 & \xleftarrow{\rho} & P_1 & \xleftarrow{\delta} & P_2 & & & & & & & &
 \end{array} \tag{4.2}$$

Предложение 4.4. Минимальная проективная резольвента R -модуля S_1 совпадает с тотализацией бикомплекса $B_{\bullet\bullet}^{(1)}$.

Подчеркнём, что главной трудностью этого этапа нашего метода является не доказательство, а поиск бикомплекса, периодические свойства которого могут быть достаточно нетривиальны. Хотя предложения 4.3 и 4.4 могут быть доказаны также непосредственной проверкой точности или применением спектральных последовательностей, как в [5], наша версия диаграммного метода кажется наиболее удобным средством для *поиска* бикомплекса.

Следующее предложение может быть проверено непосредственно, без помощи диаграмм.

Предложение 4.5. Модуль S_2 Ω -периодичен с периодом 6 и имеет следующую минимальную проективную резольвенту:

$$\dots \xrightarrow{\lambda} P_2 \xrightarrow{(\delta\beta\lambda)^k} P_2 \xrightarrow{\delta} P_1 \xrightarrow{\rho} P_1 \xrightarrow{\beta} P_0 \xrightarrow{\alpha} P_0 \xrightarrow{\lambda} P_2 \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0.$$

Следствие 4.6. Пусть $m \geq 0$ — целое число. Предположим, что $m = 6q + r$, причём $q, r \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq r \leq 5$. Тогда

1) $Q_m^{(0)} \simeq P_0^n \oplus P_1^{n'} \oplus P_2^{n''}$, где

$$(n, n', n'') = \begin{cases} (2q + 1, 2q, 0), & \text{если } r = 0, \\ (2q + 1, 2q + 1, 0), & \text{если } r = 1, \\ (2q + 1, 2q + 2, 0), & \text{если } r = 2, \\ (2q + 1, 2q + 2, 1), & \text{если } r = 3 \text{ или } r = 4, \\ (2q + 2, 2q + 2, 0), & \text{если } r = 5; \end{cases}$$

2) $Q_m^{(1)} \simeq P_0^n \oplus P_1^{n'} \oplus P_2^{n''}$, где

$$(n, n', n'') = \begin{cases} (2q, 2q + 1, 0), & \text{если } r = 0, \\ (2q, 2q + 1, 1), & \text{если } r = 1 \text{ или } r = 2, \\ (2q + 1, 2q + 1, 0), & \text{если } r = 3, \\ (2q + 2, 2q + 1, 0), & \text{если } r = 4, \\ (2q + 2, 2q + 2, 0), & \text{если } r = 5. \end{cases}$$

В следующем утверждении описываются размерности групп $\text{Ext}_R^m(S_i, S_j)$.

Следствие 4.7. Пусть $m \geq 0$ — целое число, и пусть $m = 6q + r$, где $q, r \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq r \leq 5$. Тогда

- 1) $\dim_K \text{Ext}_R^m(S_0, S_0) = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_1, S_1) = \begin{cases} 2q + 1, & \text{если } r = 0, 1, 2, 3, 4, \\ 2q + 2, & \text{если } r = 5; \end{cases}$
- 2) $\dim_K \text{Ext}_R^m(S_0, S_1) = \begin{cases} 2q, & \text{если } r = 0, \\ 2q + 1, & \text{если } r = 1, \\ 2q + 2, & \text{если } r = 2, 3, 4, 5; \end{cases}$
- 3) $\dim_K \text{Ext}_R^m(S_1, S_0) = \begin{cases} 2q, & \text{если } r = 0, 1, 2, \\ 2q + 1, & \text{если } r = 3, \\ 2q + 2, & \text{если } r = 4, 5; \end{cases}$
- 4) $\dim_K \text{Ext}_R^m(S_2, S_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 0, 5, \\ 0, & \text{если } r = 1, 2, 3, 4; \end{cases}$
- 5) $\dim_K \text{Ext}_R^m(S_0, S_2) = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_2, S_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 3, 4, \\ 0, & \text{если } r = 0, 1, 2, 5; \end{cases}$
- 6) $\dim_K \text{Ext}_R^m(S_2, S_0) = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_1, S_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } r = 1, 2, \\ 0, & \text{если } r = 0, 3, 4, 5. \end{cases}$

Замечание 4.8. Ввиду предложения 4.3 $Q_m^{(0)} = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$. Мы всегда упорядочиваем модули в такой прямой сумме по отношению к первому индексу;

например, мы пишем

$$Q_3^{(0)} = B_{03} \oplus B_{12} \oplus B_{21} \oplus B_{30} = P_1 \oplus P_0 \oplus P_1 \oplus P_2.$$

Мы будем использовать аналогичные обозначения для модулей $Q_m^{(1)}$. Так же будут упорядочиваться простые прямые слагаемые модуля $\text{top } \Omega^m(S_i) \simeq \text{top } Q_m^{(i)}$; например,

$$\text{top } Q_3^{(0)} = S_1 \oplus S_0 \oplus S_1 \oplus S_2.$$

Назовём такие разложения модулей $Q_m^{(i)}$ и $\text{top } Q_m^{(i)}$ *каноническими*.

5. Образующие

В этом разделе мы укажем конечное множество образующих для алгебры Йонеды:

$$\mathcal{Y}(R) = \text{Ext}(R/J(R)) = \bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{i,j=0}^2 \text{Ext}_R^m(S_i, S_j).$$

Напомним некоторые факты и обозначения, связанные с понятием алгебры Йонеды (см. также [10, глава 2]). Так как S_j — простой R -модуль, то $\text{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \text{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$. Пусть ψ — некоторый элемент из $\text{Ext}_R^m(S_i, S_j)$. Его образ индуцирует морфизм проективных резольвент $\{f_l: Q_{m+l-1}^{(i)} \rightarrow Q_{l-1}^{(j)} \mid l \geq 1\}$, а также гомоморфизм $f_0: Q_{m-1}^{(i)} \rightarrow P_j$. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} Q_m^{(i)} & \xrightarrow{d_{m-1}^{(i)}} & \Omega^m(S_i) \subset & Q_{m-1}^{(i)} & \\ \downarrow f_1 & & \downarrow \hat{\psi} & \downarrow f_0 & \\ Q_0^{(j)} & \xrightarrow{d_{-1}^{(j)}} & S_j \subset & P_j & \end{array}, \quad (5.1)$$

и мы видим, что $\hat{\psi}$ можно представить объемлющим квадратом диаграммы (5.1), поскольку этот квадрат определяет отображение $\hat{\psi}$. Кроме того, $\hat{\psi}$ однозначно определяется с помощью задания лишь гомоморфизма $f_1: Q_m^{(i)} \rightarrow Q_0^{(j)}$, такого что $d_{-1}^{(j)} f_1$ аннулирует $\text{Ker } d_{m-1}^{(i)}$. В этом случае мы будем писать

$$\hat{\psi} = \text{sq}(Q_m^{(i)} \xrightarrow{f_1} Q_0^{(j)}).$$

Гомоморфизмы

$$\Omega^l(\hat{\psi}): \Omega^{m+l}(S_i) \rightarrow \Omega^l(S_j), \quad \Omega^l(\hat{\psi}) = f_l|_{\Omega^{m+l}(S_i)},$$

называются Ω -сдвигами отображения $\hat{\psi}$. Ясно, что

$$\Omega^l(\hat{\psi}) = \text{sq}(Q_{m+l}^{(i)} \xrightarrow{f_{l+1}} Q_l^{(j)}).$$

Если $\varphi \in \text{Ext}_R^n(S_j, S_e) \simeq \text{Hom}_R(\Omega^n(S_j), S_e)$, то произведение Йонеды $\varphi\psi \in \text{Ext}_R^{m+n}(S_i, S_e)$ имеет в качестве образа в $\text{Hom}_R(\Omega^{m+n}(S_i), S_e)$ отображение $\widehat{\varphi\psi} = \widehat{\varphi} \cdot \Omega^n(\widehat{\psi})$. Кроме того, если

$$\widehat{\varphi} = \text{sq}(Q_n^{(j)} \xrightarrow{g} Q_0^{(e)}),$$

то

$$\widehat{\varphi\psi} = \text{sq}(Q_{m+n}^{(i)} \xrightarrow{gf_{n+1}} Q_0^{(e)}).$$

Хотя отображения f_l и Ω -сдвиги не определены однозначно отображением $\widehat{\psi}$, легко видеть, что результирующее отображение $\widehat{\varphi\psi}$ не зависит от их выбора. Так как R — QF-алгебра, то мы можем сдвигать отображения вдоль резольвент также и слева направо: любое отображение $\rho: \Omega^{m+l}(S_i) \rightarrow \Omega^l(S_j)$ индуцирует отображение $\tilde{\rho}: \Omega^m(S_i) \rightarrow S_j$, такое что $\rho = \Omega^l(\tilde{\rho})$.

Рассмотрим однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 &\in \text{Ext}_R^1(S_0, S_0), & x_2 &\in \text{Ext}_R^1(S_0, S_1), & x_3 &\in \text{Ext}_R^1(S_1, S_1), \\ x_4 &\in \text{Ext}_R^1(S_1, S_2), & x_5 &\in \text{Ext}_R^1(S_2, S_0), \\ y_1 &\in \text{Ext}_R^2(S_0, S_0), & y_2 &\in \text{Ext}_R^2(S_1, S_1), \\ z &\in \text{Ext}_R^3(S_1, S_0), & w &\in \text{Ext}_R^6(S_2, S_2); \\ \hat{x}_1 &= \text{sq}(Q_1^{(0)} \xrightarrow{(1,0)} Q_0^{(0)}), & \hat{x}_2 &= \text{sq}(Q_1^{(0)} \xrightarrow{(0,1)} Q_0^{(1)}), & \hat{x}_3 &= \text{sq}(Q_1^{(1)} \xrightarrow{(0,1)} Q_0^{(1)}), \\ \hat{x}_4 &= \text{sq}(Q_1^{(1)} \xrightarrow{(1,0)} Q_0^{(2)}), & \hat{x}_5 &= \text{sq}(Q_1^{(2)} \xrightarrow{\text{id}} Q_0^{(0)}), \\ \hat{y}_1 &= \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{(0,-1,0)} Q_0^{(0)}), & \hat{y}_2 &= \text{sq}(Q_2^{(1)} \xrightarrow{(1,0)} Q_0^{(1)}), \\ \hat{z} &= \text{sq}(Q_3^{(1)} \xrightarrow{(1,0)} Q_0^{(0)}), & \hat{w} &= \text{sq}(Q_6^{(2)} \xrightarrow{\text{id}} Q_0^{(2)}). \end{aligned}$$

Мы используем, не боясь двусмысленности, те же самые буквы для обозначения элементов из \mathcal{E} ($x_i, y_i, z, w \in \mathcal{Y}$ встречаются только в этом разделе, а $x_i, y_i, z, w \in \mathcal{E}$ — только в доказательстве предложения 6.1). Для иллюстрации вычисления Ω -сдвигов найдём $\Omega^1(\hat{x}_1)$. Отображение \hat{x}_1 задаётся правым квадратом в диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} Q_2^{(0)} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta & -\alpha^{s-1} & 0 \\ 0 & \lambda\delta b & \rho \end{pmatrix}} & Q_1^{(0)} & \xrightarrow{(\alpha, \beta)} & Q_0^{(0)} \\ U \downarrow ? & & (1,0) \downarrow & & \alpha^{s-1} \downarrow \\ Q_1^{(0)} & \xrightarrow{(\alpha, \beta)} & Q_0^{(0)} & \xrightarrow{\alpha^s} & P_0 \end{array} .$$

Нам нужно найти отображение $U: P_1 \oplus P_0 \oplus P_1 \rightarrow P_0 \oplus P_1$, такое что эта диаграмма коммутативна, и тогда

$$\Omega^1(\hat{x}_1) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{U} Q_1^{(0)}).$$

Из соответствующего матричного уравнения видно, что можно взять, например,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^{s-2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Предложение 5.1. Приведённые ниже группы расширений имеют следующие K -базисы:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_R^1(S_0, S_0) &= \langle x_1 \rangle, & \text{Ext}_R^1(S_0, S_1) &= \langle x_2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^1(S_1, S_1) &= \langle x_3 \rangle, & \text{Ext}_R^1(S_1, S_2) &= \langle x_4 \rangle, \\ \text{Ext}_R^1(S_2, S_0) &= \langle x_5 \rangle, & \text{Ext}_R^2(S_0, S_0) &= \langle y_1 \rangle, \\ \text{Ext}_R^2(S_1, S_1) &= \langle y_2 \rangle, & \text{Ext}_R^2(S_0, S_1) &= \langle x_2x_1, x_3x_2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^2(S_1, S_2) &= \langle x_4x_3 \rangle, & \text{Ext}_R^2(S_2, S_0) &= \langle x_1x_5 \rangle, \\ \text{Ext}_R^3(S_0, S_0) &= \langle x_1y_1 \rangle, & \text{Ext}_R^3(S_0, S_1) &= \langle x_3x_2x_1, x_2y_1 \rangle, \\ \text{Ext}_R^3(S_0, S_2) &= \langle x_4x_3x_2 \rangle, & \text{Ext}_R^3(S_1, S_1) &= \langle x_3y_2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^3(S_1, S_0) &= \langle z \rangle, & \text{Ext}_R^3(S_2, S_1) &= \langle x_2x_1x_5 \rangle, \\ \text{Ext}_R^4(S_0, S_0) &= \langle y_1^2 \rangle, & \text{Ext}_R^4(S_0, S_1) &= \langle y_2x_2x_1, x_3x_2y_1 \rangle, \\ \text{Ext}_R^4(S_0, S_2) &= \langle x_4x_3x_2x_1 \rangle, & \text{Ext}_R^4(S_1, S_1) &= \langle y_2^2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^4(S_1, S_0) &= \langle zx_3, x_1z \rangle, & \text{Ext}_R^4(S_2, S_1) &= \langle x_3x_2x_1x_5 \rangle, \\ \text{Ext}_R^5(S_0, S_0) &= \langle x_1y_1^2, zx_3x_2 \rangle, & \text{Ext}_R^5(S_0, S_1) &= \langle x_3y_2x_2x_1, x_2y_1^2 \rangle, \\ \text{Ext}_R^5(S_1, S_0) &= \langle x_1zx_3, y_1z \rangle, & \text{Ext}_R^5(S_1, S_1) &= \langle x_3y_2^2, x_2x_1z \rangle, \\ & & \text{Ext}_R^5(S_2, S_2) &= \langle x_4x_3x_2x_1x_5 \rangle. \end{aligned}$$

Доказательство. Мы проверим только, что $\text{Ext}_R^2(S_0, S_1) = \langle x_2x_1, x_3x_2 \rangle$. Остальные группы рассматриваются аналогично, и мы предоставляем это сделать читателю.

Так как

$$\hat{x}_2 = \text{sq}(Q_1^{(0)} \xrightarrow{(0,1)} Q_0^{(1)})$$

и

$$\Omega^1(\hat{x}_1) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{U} Q_1^{(0)}),$$

где U определено в (5.2), то

$$\widehat{x_2x_1} = \hat{x}_2 \cdot \Omega^1(\hat{x}_1) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{(0,1)U} Q_0^{(1)}) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{(1,0,0)} Q_0^{(1)}).$$

Аналогично получаем, что

$$\widehat{x_3x_2} = \hat{x}_3 \cdot \Omega^1(\hat{x}_2) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{(0,0,1)} Q_0^{(1)}).$$

Отсюда следует, что x_2x_1 и x_3x_2 линейно независимы. Остаётся заметить, что ввиду следствия 4.7b) $\dim_K \text{Ext}_R^2(S_0, S_1) = 2$. \square

Лемма 5.2. Пусть S — простой R -модуль, M_1 и M_2 — два R -модуля с диаграммами D_1 и D_2 относительно базисов $\{v_{1p}\}_p \subset M_1$ и $\{v_{2q}\}_q \subset M_2$ соответственно. Предположим, что D' — замкнутая поддиаграмма в D_1 , являющаяся одновременно открытой поддиаграммой в D_2 . Пусть c — общая вершина поддиаграмм D'_{top} и $(D_2)_{\text{top}}$. Предположим, что $f: M_1 \rightarrow S$ — такой R -гомоморфизм, что $f(v_{1j}) = 0$ для любой вершины $j \in (D_1)_{\text{top}}$, $j \neq c$. Тогда существуют такие R -гомоморфизмы $g: M_1 \rightarrow M_2$ и $f': M_2 \rightarrow S$, что $f = f'g$.

Доказательство. Пусть M' — подмодуль в M_2 , определяемый поддиаграммой D' в D_2 ; мы отождествляем его с фактор-модулем модуля M_1 , соответствующим поддиаграмме D' в D_1 . Пусть $\pi: M_1 \rightarrow M'$ и $i: M' \rightarrow M_2$ — канонические эпиморфизм и мономорфизм соответственно. Положим $g = i\pi$. Тогда $g(v_{1c}) = i(\pi(v_{1c})) = i(v_{2c}) = v_{2c}$ и $c \in (D_1)_{\text{top}}$, поскольку $D'_{\text{top}} \subset (D_1)_{\text{top}}$.

Так как S — простой R -модуль, то для любого $h \in \text{Hom}_R(M_i, S)$ имеем $h(\text{Rad } M_i) = 0$ и потому $\text{Hom}_R(M_i, S) \simeq \text{Hom}_R(\text{top } M_i, S)$. Обозначим через $\bar{h} \in \text{Hom}_R(\text{top } M_i, S)$ образ h относительно этого изоморфизма. Так как $\text{top } M_2 = \bigoplus_{j \in (D_2)_{\text{top}}} K\bar{v}_{2j}$, то можно определить гомоморфизм $f': \text{top } M_2 \rightarrow S$, полагая $\bar{f}'(\bar{v}_{2c}) = f(v_{1c})$ и $\bar{f}'(\bar{v}_{2j}) = 0$ для любого $j \in (D_2)_{\text{top}}$, $j \neq c$. Легко видеть, что для соответствующего гомоморфизма $f' \in \text{Hom}_R(M_2, S)$ выполняется соотношение $f = f'g$. \square

Предложение 5.3. Множество $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, z, w\}$ порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K -алгебру.

Доказательство. Индукцией по m мы докажем, что группы $\text{Ext}_R^m(S_i, S_j)$ порождаются некоторыми произведениями элементов из \mathcal{X} . Для $m \leq 5$ это следует непосредственно из предложения 5.1 и следствия 4.7. Пусть теперь $m \geq 6$. Предположим, что наше утверждение справедливо для всех групп $\text{Ext}_R^{m'}(S_i, S_j)$ с $m' < m$, и докажем его справедливость для m .

Если $j = 2$, то заметим, что ввиду предложения 4.5 умножение слева на w индуцирует изоморфизм

$$\text{Ext}_R^{m-6}(S_i, S_2) \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_R^m(S_i, S_2),$$

и наше утверждение следует из индуктивного предположения. Аналогичное рассуждение применимо в случае $i = 2$. Осталось доказать наше утверждение для $i, j \in \{0, 1\}$.

Используя изоморфизм $\text{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \text{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$, мы представляем любой элемент группы $\text{Ext}_R^m(S_i, S_j)$ соответствующим отображением $f: \Omega^m(S_i) \rightarrow S_j$. Так как

$$\text{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j) \simeq \text{Hom}_R(\text{top}(\Omega^m(S_i)), S_j)$$

и $\text{top}(\Omega^m(S_i))$ — прямая сумма простых модулей, то без потери общности мы можем предположить, что f индуцирует ненулевое отображение не более чем на одном простом прямом слагаемом из канонического разложения модуля $\text{top } \Omega^m(S_i)$ (см. замечание 4.8).

Рассмотрим сначала случай $i = 0$.

Случай 1: $m \equiv 1 \pmod{6}$. а) Предположим, что $f: \Omega^m(S_0) \rightarrow S_j$ индуцирует нулевые отображения на крайних (слева и справа) простых прямых слагаемых модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$. Из предложения 4.1 следует, что диаграмма сизигии $\Omega^{m-2}(S_0)$ является замкнутой поддиаграммой диаграммы сизигии $\Omega^m(S_0)$, и, следовательно, $\Omega^{m-2}(S_0)$ — фактор-модуль модуля $\Omega^m(S_0)$. Применяя лемму 5.2 к модулям $M_1 = \Omega^m(S_0)$ и $M_2 = M' = \Omega^{m-2}(S_0)$, видим, что для некоторых $g \in \text{Hom}_R(\Omega^m(S_0), \Omega^{m-2}(S_0))$ и $f' \in \text{Hom}_R(\Omega^{m-2}(S_0), S_j)$ имеем $f = f'g$. Так как $g = \Omega^{m-2}(\tilde{g})$ для некоторого гомоморфизма $\tilde{g}: \Omega^2(S_0) \rightarrow S_0$, то требуемое утверждение следует из того, что $f = f' \cdot \Omega^{m-2}(\tilde{g})$, и индуктивного предположения, применяемого к $f' \in \text{Hom}_R(\Omega^{m-2}(S_0), S_j) \simeq \text{Ext}_R^{m-2}(\Omega^2(S_0), S_j)$ и $\tilde{g} \in \text{Hom}_R(\Omega^2(S_0), S_0) \simeq \text{Ext}_R^2(S_0, S_0)$.

б) Предположим теперь, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (и тогда $j = 0$). Ввиду предложения 4.1 диаграмма сизигии $\Omega^m(S_0)$ содержит слева замкнутую поддиаграмму

$$D': \begin{array}{ccc} S_0 & & S_1 \\ & \searrow & / \\ & \alpha^{s-1} & \lambda \delta \\ & & S_0 \end{array} \quad (5.3)$$

(заметим, что ребро δ добавляется при построении сизигии $\Omega^{m-2}(S_0)$ из сизигии $\Omega^{m-4}(S_0)$). Пусть D_1 — диаграмма модуля $M_1 = \Omega^m(S_0)$, а D_2 — диаграмма модуля $M_2 = \Omega^1(S_0)$. Так как диаграмма D' из (5.3) является открытой поддиаграммой в D_2 , то мы можем применить лемму 5.2. Следовательно, $f = f'\Omega^1(\tilde{g})$ для некоторых $f' \in \text{Hom}_R(\Omega^1(S_0), S_0)$ и $\tilde{g}: \Omega^{m-1}(S_0) \rightarrow S_0$. Теперь наше утверждение вытекает из индуктивного предположения, применяемого к $f' \in \text{Hom}_R(\Omega^1(S_0), S_0) \simeq \text{Ext}_R^1(\Omega^1(S_0), S_0)$ и $\tilde{g} \in \text{Hom}_R(\Omega^{m-1}(S_0), S_0) \simeq \text{Ext}_R^{m-1}(\Omega^1(S_0), S_0)$.

с) Предположим, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем справа прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (сейчас $j = 1$). В этом случае возьмём в качестве D_1 и D_2 диаграммы сизигий $\Omega^m(S_0)$ и $\Omega^1(S_0)$ соответственно и зададим D' следующим образом:

$$D': \begin{array}{ccc} S_0 & & S_1 \\ & \searrow & / \\ & \alpha & \lambda \delta b \\ & & S_0 \end{array} \quad (5.4)$$

Так как D' — открытая поддиаграмма в D_2 и одновременно замкнутая поддиаграмма в D_1 , то из леммы 5.2 выводим, что вновь $f = f' \cdot \Omega^1(\tilde{g})$ для некоторых $f' \in \text{Hom}_R(\Omega^1(S_0), S_1)$ и $\tilde{g} \in \text{Hom}_R(\Omega^{m-1}(S_0), S_0)$. Теперь требуемое утверждение получаем аналогично предыдущему.

Случай 2: $m \equiv 2 \pmod{6}$. а) Диаграмма сизигии $\Omega^{m-2}(S_0)$ в этом случае является замкнутой поддиаграммой диаграммы сизигии $\Omega^m(S_0)$ (см. предложение 4.1). Если $f: \Omega^m(S_0) \rightarrow S_j$ индуцирует нулевые отображения на крайних простых прямых слагаемых модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$, то рассуждаем аналогично случаю 1а).

б) Ввиду предложения 4.1 слева к диаграмме $\Omega^{m-2}(S_0)$ присоединяется перевёрнутая диаграмма D' из (5.4). Следовательно, если f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$, то можно применить рассуждения случая 1с).

с) Предположим, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем справа прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (сейчас $j = 1$). Если мы возьмём в качестве D_1 и D_2 диаграммы сизигий $\Omega^m(S_0)$ и $\Omega^1(S_1)$ соответственно и зададим D' путём

$$D': \begin{array}{ccc} S_0 & & S_1 \\ & \searrow \beta & \nearrow \rho^{t-1} \\ & S_1 & \end{array},$$

то из леммы 5.2 следует, что для некоторых $f' \in \text{Hom}_R(\Omega^1(S_1), S_1)$ и $\tilde{\rho} \in \text{Hom}_R(\Omega^{m-1}(S_0), S_1)$ имеем $f = f' \cdot \Omega^1(\tilde{\rho})$.

Случай 3: $m \equiv 3 \pmod{6}$. Ясно, что отображение $f: \Omega^m(S_0) \rightarrow S_j$, $j = 0, 1$, индуцирует нулевое отображение на крайнем справа простом прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (см. предложение 4.1). Если f индуцирует нулевое отображение и на крайнем слева простом прямом слагаемом, то можно рассуждать аналогично случаю 1а), поскольку диаграмма сизигии $\Omega^{m-2}(S_0)$ является замкнутой поддиаграммой в диаграмме сизигии $\Omega^m(S_0)$. Если же это индуцированное отображение ненулевое, то можно применить рассуждения случая 2с).

Случай 4: $m \equiv 4 \pmod{6}$. По предложению 4.1 каноническое разложение модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ содержит одно дополнительное слагаемое (на левом конце) по сравнению с модулем $\text{top } \Omega^{m-2}(S_0)$, а именно S_2 . Так как отображение $f: \Omega^m(S_0) \rightarrow S_j$, $j = 0, 1$, индуцирует нулевое отображение на этом дополнительном слагаемом, то можно рассуждать аналогично случаю 1а).

Случай 5: $m \equiv 5 \pmod{6}$. а) Пусть D — диаграмма сизигии $\Omega^{m-4}(S_0)$. По предложению 4.1 диаграмма сизигии $\Omega^m(S_0)$ содержит D в качестве замкнутой поддиаграммы и может быть построена следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ & \delta \nearrow \quad \searrow \rho^{t-1} & \\ S_2 & & S_1 \end{array} \begin{array}{ccc} & S_0 & \\ & \nearrow \beta & \\ & S_1 & \end{array} + D + \begin{array}{ccc} & S_1 & \\ & \searrow \rho & \nearrow \beta l \\ & S_1 & \\ & & S_0 \end{array}. \quad (5.5)$$

Если $f: \Omega^m(S_0) \rightarrow S_j$ индуцирует нулевые отображения на крайних простых прямых слагаемых модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$, то полагаем $M_1 = \Omega^m(S_0)$, $M_2 = M' = \Omega^{m-4}(S_0)$ и далее продолжаем аналогично случаю 1а).

б) Предположим, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (и тогда $j = 1$). Из предложения 4.2 следует, что диаграмма

$$D': \begin{array}{ccc} & S_1 & \\ & \delta \nearrow \quad \searrow \rho^{t-1} & \\ S_2 & & S_1 \end{array} \begin{array}{ccc} & S_0 & \\ & \nearrow \beta & \\ & S_1 & \end{array}$$

является открытой поддиаграммой диаграммы сизигии $\Omega^3(S_1)$. Следовательно, мы можем применить лемму 5.2, полагая $M_1 = \Omega^m(S_0)$ и $M_2 = \Omega^3(S_1)$, и затем рассуждаем аналогично случаю 1b).

с) Если f индуцирует ненулевое отображение на крайнем справа прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (и тогда $j = 0$), то вновь по предложению 4.2 диаграмма

$$D': \begin{array}{ccc} S_1 & & S_0 \\ & \searrow \rho & \nearrow \beta l \\ & S_1 & \end{array}$$

является открытой поддиаграммой диаграммы сизигии $\Omega^1(S_1)$. Мы можем применить лемму 5.2, полагая $M_1 = \Omega^m(S_0)$ и $M_2 = \Omega^1(S_1)$, и рассуждать далее аналогично предыдущему.

Случай 6: $m \equiv 0 \pmod{6}$. Пусть D — диаграмма сизигии $\Omega^{m-4}(S_0)$. По предложению 4.1 диаграмма сизигии $\Omega^m(S_0)$ содержит D в качестве замкнутой поддиаграммы и может быть построена следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} S_0 & & S_1 \\ & \searrow \beta l & \nearrow \rho \\ & S_1 & \end{array} + D + \begin{array}{ccc} S_1 & & S_0 \\ & \searrow \lambda \delta & \nearrow \alpha^{s-1} \\ & S_0 & \end{array}. \quad (5.6)$$

Если $f: \Omega^m(S_0) \rightarrow S_j$ индуцирует нулевые отображения на крайних простых прямых слагаемых модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$, то мы рассуждаем далее, как в случае 5a). Если f индуцирует ненулевое отображение на крайнем слева прямом слагаемом в $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (и тогда $j = 0$), то можно применить рассуждения случая 5с), поскольку диаграмма модуля $\Omega^m(S_0)$ содержит слева такую же поддиаграмму (но перевёрнутую), какую содержит справа диаграмма, рассмотренная в случае 5 (ср. (5.5)). Наконец, предположим, что f индуцирует ненулевое отображение на крайнем справа прямом слагаемом модуля $\text{top } \Omega^m(S_0)$ (снова $j = 0$). Применим лемму 5.2, полагая $M_1 = \Omega^m(S_0)$, $M_2 = \Omega^1(S_0)$ и задавая D' следующим образом (ср. (5.6)):

$$\begin{array}{ccc} S_1 & & S_0 \\ & \searrow \lambda \delta & \nearrow \alpha^{s-1} \\ & S_0 & \end{array}.$$

После этого завершаем рассуждение аналогично предыдущему, используя индуктивное предположение.

Если $i = 1$, то требуемое утверждение доказывается аналогично случаю, когда $i = 0$. Детально это рассуждение предоставляется провести читателю. \square

Предложение 5.4. *Элементы множества $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}(R)$ удовлетворяют соотношениям (2.2).*

Доказательство. Мы докажем только, что $x_1^2 = \delta(s, 2)y_1$. Проверка остальных соотношений аналогична и оставляется читателю.

Так как

$$\hat{x}_1 = \text{sq}(Q_1^{(0)} \xrightarrow{(1,0)} Q_0^{(0)})$$

и

$$\Omega^1(\hat{x}_1) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{U} Q_1^{(0)}),$$

где U из (5.2), то получаем

$$\widehat{(x_1^2)} = \hat{x}_1 \cdot \Omega^1(\hat{x}_1) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{(1,0)U} Q_0^{(1)}) = \text{sq}(Q_2^{(0)} \xrightarrow{(0, -\alpha^{s-2}, 0)} Q_0^{(0)}).$$

Если $s > 2$, то очевидно, что это отображение индуцирует нулевое отображение $\Omega^2(S_0) \rightarrow S_0$, откуда следует, что $x_1^2 = 0$. Если же $s = 2$, то $\widehat{(x_1^2)}$ совпадает с \hat{y}_1 , и, таким образом, $x_1^2 = y_1$. \square

6. Доказательство теоремы 2.1

Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{E}^m$ и $\mathcal{Y} = \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{Y}^m$ — разложения \mathcal{E} и \mathcal{Y} на однородные прямые слагаемые. Через ε_i обозначаем идемпотенты алгебры $K[\mathcal{R}]$, соответствующие вершинам $i = 0, 1, 2$ колчана \mathcal{R} , а также их образы в \mathcal{E} . Мы используем те же самые обозначения для идемпотентов $\varepsilon_i = \text{id}_{S_i} \in \mathcal{Y}$.

Ввиду предложений 5.3 и 5.4 существует эпиморфизм градуированных K -алгебр $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{Y}$, такой что $\varphi(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$, $\varphi(x_i) = x_i$, $\varphi(y_i) = y_i$, $\varphi(z) = z$, $\varphi(w) = w$. Для доказательства теоремы 2.1 осталось показать, что φ — мономорфизм. Это вытекает из следующего результата.

Предложение 6.1. Для любых $i, j \in \{0, 1, 2\}$ и $m \geq 0$

$$\dim_K(\varepsilon_i \mathcal{E}^m \varepsilon_j) = \dim_K \text{Ext}_R^m(S_j, S_i). \quad (6.1)$$

Доказательство. Для $m \leq 5$ соотношения (6.1) проверяются непосредственно. Пусть теперь $m > 5$. Предположим дополнительно, что $k > 1$, $s > 2$ и $t > 2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично, и мы предоставляем читателю провести соответствующие рассуждения.

а) Рассмотрим сначала случай $i = j = 0$. Из соотношений (2.2) вытекает, что K -алгебра $\varepsilon_0 \mathcal{E} \varepsilon_0$ порождается элементами

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad u = zx_3x_2,$$

удовлетворяющими соотношениям

$$xy = yx, \quad yu = uy, \quad x^2 = 0, \quad u^2 = 0. \quad (6.2)$$

Следовательно, любой ненулевой одночлен из $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$ (т. е. образ пути из $K[\mathcal{R}]$) равен одному из следующих одночленов:

$$y^\eta(xu)^\tau, \quad y^\eta(ux)^\tau, \quad y^\eta x(ux)^\tau, \quad y^\eta u(xu)^\tau, \quad (6.3)$$

где $\eta, \tau \geq 0$.

Положим $d_m = \dim_K \varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$. Докажем, что $d_m - d_{m-2}$ равно числу одночленов из (6.3), для которых $\eta = 0$. Действительно, одночлены степени m из (6.3) образуют K -базис пространства $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$. Заменяя η на $\eta + 1$ в элементах аналогичного базиса для $\varepsilon_0 \mathcal{E}^{m-2} \varepsilon_0$, получаем те базисные элементы из $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$, для которых $\eta > 0$. Это показывает, что базисные элементы пространства $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$, для которых $\eta > 0$, находятся во взаимно-однозначном соответствии с базисными элементами $\varepsilon_0 \mathcal{E}^{m-2} \varepsilon_0$, что доказывает наше утверждение. Если $\eta = 0$, то для одночленов из (6.3) имеем

$$m = 6\tau, \quad m = 6\tau + 1 \quad \text{или} \quad m = 6\tau + 5,$$

откуда получаем, что

$$d_m - d_{m-2} = \begin{cases} 2, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{6}, \\ 1, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{6} \text{ или } m \equiv 5 \pmod{6}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По следствию 4.7а) последовательность $\{\dim_K \text{Ext}_R^m(S_0, S_0)\}$ удовлетворяет аналогичному рекуррентному соотношению. Теперь соотношение (6.1) доказывается с помощью индукции по m .

б) Предположим, что $i = j = 1$. Вновь из соотношений (2.2) следует, что K -алгебра $\varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$ порождается элементами

$$x = x_3, \quad y = y_2, \quad v = x_2 x_1 z,$$

удовлетворяющими соотношениям, аналогичным (6.2) (с заменой u на v). Следовательно, $\varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$ и $\varepsilon_0 \mathcal{E} \varepsilon_0$ изоморфны как K -алгебры, и наше утверждение следует из предыдущей части доказательства.

с) Предположим, что $i = 1, j = 0$. Ясно, что любой ненулевой одночлен из $\varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$ равен $f \cdot x_2 \cdot g$ для некоторых одночленов $f \in \varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$ и $g \in \varepsilon_0 \mathcal{E} \varepsilon_0$. Аналогично части а) получаем, что f равен одному из следующих одночленов (ср. (6.3)):

$$y_2^\zeta (x_3 v)^\theta, \quad y_2^\zeta (v x_3)^\theta, \quad y_2^\zeta x_3 (v x_3)^\theta, \quad y_2^\zeta v (x_3 v)^\theta, \quad (6.4)$$

где $v = x_2 x_1 z$ и $\zeta, \theta \geq 0$. Ввиду соотношений $y_2 x_3 = x_3 y_2$, $y_2 v = v y_2$ и $y_2 x_2 = x_2 y_1$ можем считать, что в (6.4) имеем $\zeta = 0$. Кроме того, $(v x_3) x_2 = x_2 (x_1 u)$, и потому в (6.4) можем дополнительно положить $\theta = 0$. Используя соотношение $x_2 u = 0$, получаем, что любой одночлен из $\varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$ равен одному из следующих одночленов:

$$x_2 \cdot y_1^\eta (x_1 u)^\tau, \quad x_2 \cdot y_1^\eta x_1 (u x_1)^\tau, \quad x_3 \cdot x_2 \cdot y_1^\eta (x_1 u)^\tau, \quad x_3 \cdot x_2 \cdot y_1^\eta x_1 (u x_1)^\tau, \quad (6.5)$$

где $\eta, \tau \geq 0$. Положим $d_m = \dim_K \varepsilon_1 \mathcal{E}^m \varepsilon_0$. Аналогично части а) доказательства получаем, что $d_m - d_{m-2}$ равно числу одночленов из (6.5), для которых $\eta = 0$, откуда следует, что

$$d_m - d_{m-2} = \begin{cases} 2, & \text{если } m \equiv 2 \pmod{6}, \\ 1, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{6} \text{ или } m \equiv 3 \pmod{6}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

По следствию 4.7b) последовательность $\{\dim_K \text{Ext}_R^m(S_0, S_1)\}$ удовлетворяет аналогичному рекуррентному соотношению, и теперь доказываем соотношение (6.1) по индукции.

d) Предположим, что $i = 0, j = 1$. Любой ненулевой одночлен из $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_1$ равен $f \cdot z \cdot g$ для некоторых одночленов $f \in \varepsilon_0 \mathcal{E} \varepsilon_0$ и $g \in \varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$; кроме того, g равен одному из одночленов в (6.4). Так как $zy_2 = y_1z, z(x_3v) = (ux_1)z$ и $zv = 0$, то можно предположить, что $g = \varepsilon_1$ или $g = x_3$. Используя соотношение $uz = 0$, получаем, что любой одночлен из $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_1$ равен одному из следующих:

$$y_1^\eta (ux_1)^\tau \cdot z, \quad y_1^\eta x_1 (ux_1)^\tau \cdot z, \quad y_1^\eta (ux_1)^\tau \cdot z \cdot x_3, \quad y_1^\eta x_1 (ux_1)^\tau \cdot z \cdot x_3, \quad (6.6)$$

где $\eta, \tau \geq 0$. Положим $d_m = \dim_K \varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_1$. Как и выше, получаем, что $d_m - d_{m-2}$ равно числу одночленов в (6.6), для которых $\eta = 0$, откуда следует, что

$$d_m - d_{m-2} = \begin{cases} 2, & \text{если } m \equiv 4 \pmod{6}, \\ 1, & \text{если } m \equiv 3 \pmod{6} \text{ или } m \equiv 5 \pmod{6}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Остаётся заметить, что последовательность $\{\dim_K \text{Ext}_R^m(S_1, S_0)\}$ удовлетворяет аналогичному рекуррентному соотношению по следствию 4.7c).

e) Предположим, что $i = j = 2$. Из соотношений (2.2) следует, что K -алгебра $\varepsilon_2 \mathcal{E} \varepsilon_2$ порождена элементами w и $w' = x_4 x_3 x_2 x_1 x_5$, удовлетворяющими соотношениям $ww' = w'w, (w')^2 = 0$. Легко видеть, что

$$\dim_K \varepsilon_2 \mathcal{E}^m \varepsilon_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{6} \text{ или } m \equiv 5 \pmod{6}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и формула (6.1) вытекает из следствия 4.7d).

f) Предположим, что $i = 2, j = 1$. Любой ненулевой одночлен из $\varepsilon_2 \mathcal{E}^m \varepsilon_1$ равен $f \cdot x_4 \cdot g$ для некоторых одночленов $f \in \varepsilon_2 \mathcal{E} \varepsilon_2$ и $g \in \varepsilon_1 \mathcal{E} \varepsilon_1$. Так как $w \cdot x_4 = -x_4 \cdot x_3 v$ (напомним, что $v = x_2 x_1 z$), $w' \cdot x_4 = 0, x_4 \cdot v x_3 = 0$, то получаем, что любой одночлен из $\varepsilon_2 \mathcal{E}^m \varepsilon_1$ равен одному из следующих:

$$x_4 \cdot (x_3 v)^\theta, \quad x_4 \cdot (x_3 v)^\theta x_3,$$

где $\theta > 0$, откуда следует, что

$$\dim_K \varepsilon_2 \mathcal{E}^m \varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{6} \text{ или } m \equiv 2 \pmod{6}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ввиду следствия 4.7f) получаем соотношение (6.1).

g) Наконец, предположим, что $i = 2, j = 0$. Как и выше, мы доказываем, что любой одночлен из $\varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_2$ равен одному из следующих одночленов:

$$(ux_1)^\tau \cdot x_5, \quad x_1(ux_1)^\tau \cdot x_5,$$

где $\tau > 0$. Отсюда следует, что

$$\dim_K \varepsilon_0 \mathcal{E}^m \varepsilon_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 1 \pmod{6} \text{ или } m \equiv 2 \pmod{6}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя следствие 4.7 f), получаем требуемое утверждение. \square

Литература

- [1] Антипов М. А., Генералов А. И. Когомологии алгебр полудиэдрального типа, II // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — Т. 289. — С. 9—36.
- [2] Балашов О. И., Генералов А. И. Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. — 1999. — Вып. 3, № 15. — С. 3—10.
- [3] Балашов О. И., Генералов А. И. Когомологии алгебр диэдрального типа, II // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 1. — С. 3—25.
- [4] Генералов А. И. Когомологии алгебр диэдрального типа, I // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 1999. — Т. 265. — С. 139—162.
- [5] Генералов А. И. Когомологии алгебр полудиэдрального типа, I // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 4. — С. 54—85.
- [6] Генералов А. И., Осюк Е. А. Когомологии алгебр диэдрального типа, III: серия $D(2A)$ // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — Т. 289. — С. 113—133.
- [7] Генералов А. И. Когомологии алгебр диэдрального типа, IV: серия $D(2B)$ // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2002. — Т. 289. — С. 76—89.
- [8] Генералов А. И. Когомологии алгебр полудиэдрального типа, III: серия $SD(3K)$ // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2003. — Т. 305. — С. 84—100.
- [9] Alperin J. L. Diagrams for modules // J. Pure Appl. Algebra. — 1980. — Vol. 16, no. 2. — P. 111—119.
- [10] Benson D. J. Representations and Cohomology, I: Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
- [11] Benson D. J., Carlson J. F. Diagrammatic methods for modular representations and cohomology // Comm. Algebra. — 1987. — Vol. 15, no. 1—2. — P. 53—121.
- [12] Erdmann K. Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras. — Berlin: Springer, 1990. — Lecture Notes in Math. Vol. 1428.
- [13] Fuller K. R. Algebras from diagrams // J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — Vol. 48, no. 1—2. — P. 23—37.

- [14] Generalov A. I., Kosmatov N. V. Computation of the Yoneda algebras of dihedral type // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2003. — Т. 305. — С. 101–120.
- [15] Kosmatov N. Resolut. — <http://www.lifc.univ-fcomte.fr/~kosmatov/resolut/>. — 2003.

