Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов

А. В. МИХАЛЁВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

Е. В. ОВЧИННИКОВА
Новосибирский государственный технический университет
e-mail: eovchin@ngs.ru

Е. А. ПАЛЮТИН
Институт математики СО РАН
e-mail: palyutin@math.nsc.ru

А. А. СТЕПАНОВА
Дальневосточный государственный университет
e-mail: stepltd@mail.primorye.ru

УДК 510.67+512.56

Ключевые слова: полигон, регулярный полигон, аксиоматизируемость, полная теория, модельно полная теория, стабильная теория.

Аннотация

Работа посвящена результатам, полученным в теории моделей регулярных полигонов. Даётся характеризация моноидов с аксиоматизируемым и с модельно полным классом регулярных полигонов. Описываются моноиды с полным классом регулярных полигонов, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям. Изучаются моноиды, регулярный центр которых представим в виде объединения конечного числа главных идеалов, все регулярные полигоны над которыми имеют стабильную и суперстабильную теорию. Доказывается стабильность аксиоматизируемого модельно полного класса регулярных полигонов, а также приводится описание моноидов с суперстабильным и ω-стабильным классом регулярных полигонов при условии аксиоматизируемости и модельной полноты этого класса.

Abstract

A. V. Mikhalev, E. V. Ovchinnikova, A. A. Palyutin, A. A. Stepanova, Model-theoretic properties of regular polygons, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 107—157.

This work is devoted to results obtained in the model theory of regular polygons. We give a characterization of monoids with axiomatizable and model-complete class of regular polygons. We describe the monoids with complete class of regular polygons that satisfy some additional conditions. We study the monoids whose regular core is represented as a union of finitely many principal right ideals and all regular polygons over which have a stable and superstable theory. We prove the stability of the class of all regular polygons over a monoid provided this class is axiomatizable and model-complete. We also describe the monoids for which the class of all regular polygons is superstable and ω-stable provided this class is axiomatizable and model-complete.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 4, с. 107—157.

Данная работа посвящена результатам, полученных в теории моделей регулярных полигонов.

Под левым полигоном ${}_SA$ над моноидом S, или просто полигоном, понимается множество A, на котором определено действие элементов из S, причём единица действует на A тождественно. Как видно из этого определения, на полигон над моноидом можно смотреть как на обобщение понятия модуля над кольцом. Поэтому многие понятия и задачи, в частности понятие регулярного полигона, пришли в теорию моделей полигонов из теории моделей модулей. В теории модулей есть несколько различных определений регулярного модуля. В теории полигонов нами используется аналог регулярного по Зельмановичу модуля [Zel], введённый Л. Х. Трэном [Tra].

Одной из стандартных задач теории моделей полигонов является задача описания моноидов, над которыми некоторый класс полигонов обладал бы свойством P, где под P может пониматься аксиоматизируемость, полнота, модельная полнота, стабильность и др. В данной работе эти вопросы рассматриваются для класса регулярных полигонов.

Мы старались сделать изложение по возможности замкнутым, приведя все необходимые определения и утверждения, ставшие уже классическими.

В первых двух параграфах даются необходимые в дальнейшем сведения из теории полигонов.

В третьем параграфе излагаются сведения из теории моделей.

В четвёртом параграфе даётся характеризация моноидов с аксиоматизируемым классом регулярных полигонов (теорема 4.1). Как следствие получается аксиоматизируемость класса регулярных полигонов над группой (следствие 4.3).

В пятом параграфе описываются моноиды с аксиоматизируемым модельно полным классом регулярных полигонов (теорема 5.1). Доказывается модельная полнота аксиоматизируемого класса регулярных полигонов над бесконечной группой (следствие 5.1).

В шестом параграфе рассматриваются вопросы полноты класса регулярных полигонов. Здесь приводится характеризация моноидов с полным классом регулярных полигонов, удовлетворяющих дополнительным условиям, а именно моноидов, класс регулярных полигонов над которыми удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит (теорема 6.1), и линейно упорядоченных моноидов глубины 2 (теорема 6.2). Отметим, что вопрос об описании моноидов с полным классом регулярных полигонов остаётся открытым.

В седьмом и восьмом параграфах изучаются моноиды, регулярный центр которых представи́м в виде объединения конечного числа главных идеалов, все регулярные полигоны над которыми имеют стабильную (теорема 7.1) и суперстабильную (теорема 8.1) теорию.

В девятом параграфе доказывается стабильность аксиоматизируемого модельно полного класса регулярных полигонов, а также приводится описание моноидов с суперстабильным и ω-стабильным классом регулярных полигонов при условии аксиоматизируемости и модельной полноты этого класса (теорема 9.1).

§ 1. Полигоны

Всюду S будет обозначать моноид, 1 — единица S. Алгебраическая система $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ языка $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется (левым) S-полигоном (или полигоном над S, или полигоном), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$. Полигон $\langle A; s\rangle_{s\in S}$ будем обозначать через ${}_SA$. Все рассматриваемые в работе полигоны, если не оговаривается противное, являются левыми S-полигонами. Аналогично определяется понятие правого S-полигона. Через S-Act обозначается класс всех полигонов над S.

Подсистема ${}_SB$ полигона ${}_SA$ называется подполигоном полигона ${}_SA$. Полигон ${}_SA$ называется конечно порождённым, если существуют элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$, такие что ${}_SA = \bigcup\limits_{i=1}^{n} {}_SSa_i$. Полигон ${}_SA$ называется циклическим, если ${}_SA$ — однопорождённый полигон, т. е. ${}_SA = {}_SSa$ для некоторого $a \in S$. Копроизведением полигонов ${}_SA_i$, $i \in I$, называется их дизъюнктное объединение; копроизведение полигонов ${}_SA_i$, $i \in I$, обозначается через $\coprod\limits_{i\in I} {}_SA_i$.

Следующее утверждение часто будем использовать без ссылок.

Утверждение 1.1. *Для любых $a, e, f \in S$, $e^2 = e$, $f^2 = f$, выполнены соотношения*

1) $aS \subseteq eS \iff ea = a$;
2) $Sa \subseteq Se \iff ae = a$. □

Утверждение 1.2. *Пусть $e, f \in S$, $e^2 = e$, $f^2 = f$, $Se \subseteq Sf$, $fS \subseteq eS$. Тогда $e = f$.*

Доказательство. Предположим, что $Se \subseteq Sf$, $fS \subseteq eS$, где $e, f \in S$ — идемпотенты. Тогда из первого включения по пункту 2 утверждения 1.1 следует $e = ef$, из второго по пункту 1 утверждения 1.1 следует $f = ef$. Следовательно, $e = f$. □

Утверждение 1.3. *Пусть T — полугруппа, $e \in T$ — идемпотент. Тогда левый идеал Te является минимальным по включению среди левых идеалов полугруппы T, порождённых идемпотентами, тогда и только тогда, когда правый идеал eT является минимальным по включению среди правых идеалов полугруппы T, порождённых идемпотентами.*

Доказательство. Необходимость. Пусть левый идеал Te является минимальным среди левых идеалов полугруппы T, порождённых идемпотентами, $gT \subseteq eT$, $g^2 = g$. Тогда $g = eg$. В силу минимальности идеала Te имеет место равенство $Tge = Te$. Следовательно, $e = kge$ для некоторого $k \in T$ и $e = kge = kgge = kgege = ege = ge$. Таким образом, $e \in gT$ и $gT = eT$.

Достаточность доказывается аналогично. □

Полугруппа T называется прямоугольной связкой групп, если $T = \bigcup\{T_{ij} \mid i \in I(T),\ j \in J(T)\}$ — разложение полугруппы T на группы T_{ij}, и при этом $T_{ij} \cdot T_{kl} \subseteq T_{il}$.

Замечание 1.1. Если полугруппа $\langle T, *\rangle$ является прямоугольной связкой групп T_{ij} с единицами e_{ij}, $i \in I(T)$, $j \in J(T)$, то для любых $i, k \in I(T)$, $j, l \in J(T)$ выполняются следующие свойства:

1) $e_{ij} \cdot e_{kj} = e_{ij}$; $e_{ij} \cdot e_{il} = e_{il}$;
2) $e_{ij} \cdot T_{kl} = T_{ij} \cdot e_{kl} = T_{ij} \cdot T_{kl} = T_{il}$;
3) $\langle T_{ij}, *\rangle \cong \langle T_{kl}, *\rangle$;
4) $Te_{ij} = \bigcup\limits_{p \in I(T)} T_{pi}$; $e_{ij}T = \bigcup\limits_{p \in J(T)} T_{ip}$;
5) для любого $a \in T$ условие $Ta = Te_{ij}$ $(aT = e_{ij}T)$ равносильно тому, что $a \in T_{pj}$ $(a \in T_{ip})$ для некоторого $p \in I(T)$ $(p \in J(T))$;
6) для любого $a \in T$ множество Ta (aT) образует минимальный левый (правый) идеал. □

Объединение всех минимальных левых идеалов полугруппы T называется ядром и обозначается через $K(T)$.

Утверждение 1.4 ([Суш]). *Если ядро $K(T)$ полугруппы T содержит идемпотент, то $K(T)$ является прямоугольной связкой групп.* □

Множество всех идемпотентов полугруппы T будем обозначать через $E(T)$.

Утверждение 1.5. *Если Te — минимальный левый идеал полугруппы T и $e \in E(T)$, то множество $G_e \rightleftharpoons \{a \mid ea = ae = a\}$ образует подгруппу полугруппы T.*

Доказательство. Если $a, b \in G_e$, то $e(ab) = (ea)b = ab$ и $(ab)e = a(be) = ab$. Следовательно, множество G_e замкнуто относительно полугрупповой операции. Очевидно, идемпотент e является единицей в G_e.

Пусть a — произвольный элемент из G_e. Из $ae = a$ и минимальности левого идеала Se следует, что $Sa = Se$. Тогда существует такой элемент $b \in S$, что $ba = e$. Поскольку $ebe \in G_e$ и $(ebe)a = eb(ea) = eba = e$, то нетрудно проверить, что элемент $a \cdot ebe = g$ является идемпотентом. Так как $g \in Se$, то $eg = ge = g$, т. е. $g \in G_e$. В силу минимальности Se справедливо равенство $Se = Sg$, следовательно, $eg = e$. Так как $ea = a$ и $g = a \cdot ebe$, то $eg = g$. Таким образом, $g = e$, $a^{-1} = b$ и G_e образует подгруппу в полугруппе S. □

§ 2. Регулярные полигоны

Пусть ${}_SA$ — полигон. Элемент $a \in A$ называется act-регулярным, если существует такой гомоморфизм $\varphi\colon {}_SSa \to {}_SS$, что $\varphi(a)a = a$. Полигон ${}_SA$ называется регулярным, если все его элементы act-регулярны.

Утверждение 2.1 ([ККМ]). *Пусть ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Следующие условия эквивалентны*:

1) *элемент a act-регулярен*;

2) *существуют идемпотент* $e \in S$ *и изоморфизм* $\psi\colon {}_SSa \to {}_SSe$*, такие что* $\psi(a) = e$;
3) *существует идемпотент* $e \in S$*, такой что* ${}_SSa \cong {}_SSe$*, т. е. полигон* ${}_SSa$ *является проективным.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $a \in A$ — act-регулярный элемент, $\varphi\colon {}_SSa \longrightarrow {}_SS$ — такой гомоморфизм, что $\varphi(a)a = a$. Пусть $e = \varphi(a)$. Тогда $e = \varphi(a) = \varphi(\varphi(a)a) = \varphi(a)\varphi(a) = e^2$ и $ea = \varphi(a)a = a$. Кроме того, если $sa = ta$, то $se = s\varphi(a) = \varphi(sa) = \varphi(ta) = t\varphi(a) = te$ для любых $s, t \in S$. Тогда отображение $\psi\colon {}_SSa \to {}_SSe$, такое что $\psi(sa) = se$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом полигонов.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Убедимся в справедливости импликации 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть e — идемпотент моноида S, $\psi\colon {}_SSa \to {}_SSe$ — изоморфизм, $\psi(a) = ue$, $\psi(va) = e$. Тогда $eva = va$, $e = \psi(va) = v\psi(a) = vue$, $\psi(ueva) = \psi(uva) = u\psi(va) = ve = \psi(a)$, т. е. $e = vue$ и $ueva = a$. Пусть $f = uev \in S$, $\varphi\colon Sa \to S$ — такое отображение, что $\varphi(sa) = sf$ для любого $s \in S$. Из равенств $f^2 = ue(vue)v = uev = f$ следует, что f — идемпотент. Если $sa = ta$ для некоторых s, t, то $s\psi(a) = t\psi(a)$, $sue = tue$ и $sf = tf$, следовательно, φ — гомоморфизм. Поскольку $\varphi(a)a = ueva = a$, то элемент a является act-регулярным. □

Следствие 2.1. *Следующие условия для полигона* ${}_SA$ *эквивалентны*:
1) *полигон* ${}_SA$ *регулярен*;
2) *для любого* $a \in A$ *существуют такие идемпотент* $e \in S$ *и изоморфизм* $\psi\colon {}_SSa \to {}_SSe$*, что* $\psi(a) = e$;
3) *для любого* $a \in A$ *существует такой идемпотент* $e \in S$*, что* ${}_SSa \cong {}_SSe$. □

Напомним, что элемент a полугруппы T называется регулярным (по Нейману), если $a = aba$ для некоторого $b \in T$. Полугруппа называется регулярной (по Нейману), если все её элементы регулярны.

Утверждение 2.2 ([KKM]). *Если моноид* S *регулярен* (*по Нейману*)*, то полигон* ${}_SS$ *также регулярен. Обратное неверно.*

Доказательство. Пусть S — регулярный (по Нейману) моноид, $a \in S$. Тогда $a = aba$ для некоторого $b \in S$. Обозначим через e элемент ba моноида S. Ясно, что e — идемпотент. Кроме того, $Sa = Saba = Sae \subseteq Se$, $Se = Sba \subseteq Sa$, т. е. $Sa = Se$. Следовательно, ${}_SS$ — регулярный полигон.

С другой стороны, пусть S — моноид с правым сокращением, не являющийся группой. Тогда S не является регулярным (по Нейману) моноидом, но для любого $a \in S$ полигон ${}_SSa$ изоморфен полигону ${}_SS$, т. е. ${}_SS$ — регулярный полигон. □

Пусть в полигоне ${}_SA$ существует регулярный подполигон. Заметим, что объединение всех регулярных подполигонов полигона ${}_SA$ есть регулярный подполигон, который называется регулярным центром полигона ${}_SA$ и обозначается через $R({}_SA)$. Вместо $R({}_SS)$ будем писать ${}_SR$. Подполугруппа R моноида S называется регулярным центром моноида S. Всюду в дальнейшем предполагается, что $R \neq \varnothing$. Через $\mathfrak{R}$ обозначается класс всех регулярных полигонов.

Элементы x и y полигона ${}_SA$ называются связанными (это обозначается $x \sim y$), если существуют $n \in \omega$, $a_0, \ldots, a_n \in A$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, такие что $x = a_0$, $y = a_n$ и справедливо $a_i = s_i a_{i-1}$ или $a_{i-1} = s_i a_i$. Полигон ${}_SA$ называется связным, если для любых $x, y \in {}_SA$ выполняется $x \sim y$. Легко проверить, что отношение $\sim$ является конгруэнцией на полигоне ${}_SA$. Пусть $B \subseteq A$. Элементы $x, y \in A \setminus B$ называются связанными вне B, если существуют $n \in \omega$, $a_0, \ldots, a_n \in A \setminus B$, $s_1, \ldots, s_n \in S$, такие что $x = a_0$, $y = a_n$ и справедливо $a_i = s_i a_{i-1}$ или $a_{i-1} = s_i a_i$.

Пусть ${}_SA$ — полигон. Обозначим через $\mathrm{Con}({}_SA)$ решётку конгруэнций полигона ${}_SA$, через $1_{{}_SA}$ и $0_{{}_SA}$ — единицу и нуль в решётке $\mathrm{Con}({}_SA)$ соответственно. Конгруэнцию $\theta \in \mathrm{Con}({}_SA)$ назовём амальгамной конгруэнцией, если $\theta \cap \sim = 0_{{}_SA}$. Заметим, что амальгамные конгруэнции отождествляют элементы, не связанные друг с другом.

Для произвольного класса полигонов K введём следующие обозначения: $\mathbf{H}_A(K)$ — класс всех полигонов, изоморфных фактор-полигонам полигонов из K по амальгамным конгруэнциям; $\mathbf{S}(K)$ — класс всех полигонов, изоморфных подполигонам из K; $\mathbf{D}(K)$ — класс всех полигонов, изоморфных копроизведениям полигонов из K.

Утверждение 2.3 ([Овч1]). *Для любого моноида S класс всех регулярных S-полигонов ${}_S\mathfrak{R}$ совпадает со следующими классами*: $\mathbf{H}_A\mathbf{DS}({}_SR)$, $\mathbf{SH}_A\mathbf{D}({}_SR)$, $\mathbf{H}_A\mathbf{SD}({}_SR)$. □

Моноид S назовём регулярно линейно упорядоченным, если для любого $a \in R$ множество $\{Sb \mid Sb \subseteq Sa\}$ является линейно упорядоченным относительно включения.

Утверждение 2.4.

1) *Если $r \in R$, $e \in S$, $e^2 = e$ и $rS = eS$, то $e \in R$ и $rR = eR$.*
2) *Если $e, f \in R$, $e^2 = e$ и $f^2 = f$, то равенство $eS = fS$ эквивалентно равенству $eR = fR$.*

Доказательство. Пусть $r \in R$, $e \in S$, $e^2 = e$ и $rS = eS$. Из последнего равенства получаем $Sr \cong Se$. Поскольку $r \in R$, то $e \in R$. Так как $e \in rS$, то $e = rt$, где $t \in S$. Так как $e \in R$, то $te \in R$. Следовательно, $e = rt = rte \in rR$, т. е. $eR \subseteq rR$. В силу включения $rS \subseteq eS$ имеем $r = er \in eR$, т. е. $rR \subseteq eR$. Таким образом, $rR = eR$, и первое утверждение доказано.

Пусть $e, f \in R$, $e^2 = e$ и $f^2 = f$. Если $eR = fR$, то $e = ee \in eR = fR \subseteq fS$ и $eS \subseteq fS$. Аналогично, $fS \subseteq eS$, т. е. $eS = fS$. Если $eS = fS$, то $e = fe \in fR$ и $eR \subseteq fR$. Аналогично, $fR \subseteq eR$, т. е. $eR = fR$, и второе утверждение доказано. □

Утверждение 2.5. *Если моноид S является регулярно линейно упорядоченным, ${}_SA \in \mathfrak{R}$ и $a \in A$, то множество $\{Sb \mid Sb \subseteq Sa\}$ является линейно упорядоченным относительно включения.*

Доказательство. Пусть ${}_SA \in \mathfrak{R}$, $a \in A$ и $b_1, b_2 \in Sa$. Поскольку ${}_SSa \in \mathfrak{R}$, то существует изоморфизм $\varphi\colon {}_SSa \to {}_SSe$, где $e^2 = e \in R$. Тогда в силу регулярной линейной упорядоченности моноида S либо $S\varphi(b_1) \subseteq S\varphi(b_2)$, либо $S\varphi(b_2) \subseteq S\varphi(b_1)$. Следовательно, либо $Sb_1 \subseteq Sb_2$, либо $Sb_1 \subseteq Sb_2$. $\square$

Левая глубина полугруппы T (или просто глубина) — это наибольшая длина цепи главных левых идеалов этой полугруппы, если такая цепь существует и конечна, и символ ∞ в противном случае. Обозначим левую глубину полугруппы T через $\mathrm{ld}(T)$.

Утверждение 2.6. *Если глубина $\mathrm{ld}(R)$ регулярного центра моноида S конечна, то ядро $K(R)$ является прямоугольной связкой групп.*

Доказательство. Из конечности $\mathrm{ld}(R)$ следует существование минимального левого идеала Sa, где $a \in R$. В силу регулярности полигона ${}_SR$ по следствию 2.1 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм $\psi\colon {}_SSa \to {}_SSe$, такие что $\psi(a) = e$. Тогда идеал Se также минимален и элемент e принадлежит $K(R)$. Из утверждения 1.4 следует, что $K(R)$ является прямоугольной связкой групп. $\square$

§ 3. Сведения из теории моделей

Начальные сведения из теории моделей, используемые в данной статье, можно найти в [ЕП], [КЧ] и [Сак]. Напомним некоторые из них.

Зафиксируем некоторую полную теорию T языка L и некоторую достаточно большую и достаточно насыщенную модель $\mathfrak{C}$ теории T, которая называется монстр-моделью, так как предполагается, что все рассматриваемые модели теории T являются её элементарными подмоделями. Все элементы и множества также будут браться из монстр-модели $\mathfrak{C}$. Все рассматриваемые в этом разделе формулы будут иметь язык L.

Конечные последовательности называются кортежами, и множество всех кортежей множества A обозначается через $A^{<\omega}$. Длину кортежа $\bar{a}$ обозначаем через $l(\bar{a})$. Кортежи длины n называются n-кортежами. Для простоты вместо обозначения $\bar{a} \in A^{<\omega}$ часто будем использовать обозначение $\bar{a} \in A$ и $D \subseteq A$. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L, $\bar{a}$ — кортеж элементов и $l(\bar{a}) = l(\bar{y})$, то через $\Phi(C, \bar{a})$ обозначается множество $\{\bar{b} \mid C \models \Phi(\bar{b}, \bar{a})\}$.

Класс K алгебраических систем называется аксиоматизируемым, если существует язык L и такое множество предложений Z языка L, что для любой алгебраической системы $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \in K \iff (\text{язык } \mathcal{A} \text{ равен } L \text{ и } \mathcal{A} \models \Phi \text{ для всех } \Phi \in Z). \qquad (3.1)$$

Если для класса K выполняется (3.1), то L называется языком K, а множество Z называется множеством аксиом для K (обозначаем $K = K_L(Z)$). Если все системы класса K имеют язык L, то множество предложений языка L, истинных на всех системах из K, называется элементарной теорией класса K или просто теорией класса K и обозначается через $\mathrm{Th}(K)$. Если $K = \{\mathcal{A}\}$, то вместо $\mathrm{Th}(K)$ будем писать $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$.

Будем говорить, что класс K алгебраических систем замкнут относительно элементарной эквивалентности (изоморфизмов, подсистем, ультрапроизведений и др.), если вместе с алгебраическими системами $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, он содержит все элементарно эквивалентные им системы (все изоморфные им системы, все их подсистемы, ультрапроизведение систем $\mathcal{A}_i$ и др.).

При изучении аксиоматизируемости классов мы будем использовать следующий критерий.

Теорема 3.1 ([ЕП]). *Класс K алгебраических систем языка L аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.* □

Множество предложений языка L, замкнутое относительно выводимости, называется элементарной теорией или просто теорией языка L. Алгебраическая система, на которой истинны все предложения теории T, называется моделью теории T. Непротиворечивая теория T языка L называется полной, если $\Phi \in T$ или $\neg\Phi \in T$ для любого предложения Φ языка L. Подсистема $\mathcal{A}$ системы $\mathcal{B}$ называется элементарной (обозначается $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$), если для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ языка L и любых $\bar{b} \in B$

$$\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b}) \iff \mathcal{B} \models \Phi(\bar{b}).$$

Заметим, что в данном определении условие «$\iff$» можно заменить на «$\Longleftarrow$» (нужно перейти к отрицанию формулы).

Непротиворечивая теория T языка L называется модельно полной, если

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \implies \mathcal{A} \prec \mathcal{B}$$

для любых моделей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ теории T языка L. Теория T языка L называется теорией с элиминацией кванторов, если любая формула Φ языка L эквивалентна относительно T некоторой бескванторной формуле Ψ. Очевидно, что непротиворечивая теория с элиминацией кванторов модельно полна.

Формулу вида $\exists\bar{x}\,\Psi(\bar{x};\bar{y})$ $(\forall\bar{x}\,\Psi(\bar{x};\bar{y}))$ для бескванторной формулы $\Psi(\bar{x};\bar{y})$ будем называть экзистенциальной (универсальной).

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка L, $X \subseteq A$, язык L_X получается из языка L добавлением новых констант для всех элементов множества X, $\mathcal{A}_X$ — обогащение системы $\mathcal{A}$ до языка L_X с естественной интерпретацией новых констант. Множество $D(\mathcal{A})$ атомных предложений языка L_A, истинных в системе $\mathcal{A}_A$, называется диаграммой системы $\mathcal{A}$.

Теорема 3.2 ([КЧ]). *Если T — теория языка L, то следующие утверждения эквивалентны*:

1) *теория T модельно полна*;
2) *если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — модели теории T и $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, то для любой экзистенциальной формулы $\Psi(\bar{y})$ языка L и любых $\bar{b} \in A$ выполнено*
$$\mathcal{B} \models \Psi(\bar{b}) \implies \mathcal{A} \models \Psi(\bar{b});$$
3) *для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ языка L существует экзистенциальная формула $\Psi(\bar{x})$, эквивалентная в теории T формуле $\varphi(\bar{x})$.*

Доказательство. Утверждение 1) $\implies$ 2) тривиально. Обозначим через 3$'$) условие, полученное из условия 3) заменой «экзистенциальная» на «универсальная». Ясно, что условия 3) и 3$'$) равносильны (достаточно перейти к отрицанию формулы). Так как экзистенциальные формулы сохраняются при расширениях алгебраических систем, а универсальные формулы — при переходе к подсистемам, то мы получаем утверждение 3) $\implies$ 1).

Приступим к доказательству утверждения 2) $\implies$ 3). Пусть выполняется условие 2) и $\varphi(\bar{x})$ — некоторая формула языка L. Доказательство свойства 3) проведём индукцией по числу кванторов в формуле $\varphi(\bar{x})$. Так как квантор существования выражается через квантор всеобщности и отрицание, то будем считать, что $\varphi(\bar{x})$ не содержит кванторов существования. Пусть $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $\forall y\, \psi(y, \bar{x})$. По индукционному предположению и равносильности условий 3) и 3$'$) формула $\psi(y, \bar{x})$ эквивалентна в теории T некоторой универсальной формуле, следовательно, формула $\varphi(\bar{x})$ также эквивалентна в T некоторой универсальной формуле. Рассмотрим множество Q, состоящее из всех экзистенциальных формул $\xi(\bar{x})$ языка L со свойством $(T \cup \{\xi(\bar{x})\}) \vdash \varphi(\bar{x})$ и множество Q^*, состоящее из отрицаний формул из Q. Если множество $(Q^* \cup \{\varphi(\bar{x})\})$ несовместно с теорией T, то формула $\varphi(\bar{x})$ будет эквивалентна в T дизъюнкции некоторых формул из множества Q, следовательно, некоторой экзистенциальной формуле, что и требуется для установления свойства 3).

Предположим, что множество $(Q^* \cup \{\varphi(\bar{x})\} \cup T)$ совместно. Пусть для некоторой модели $\mathcal{A}$ теории T и $\bar{b} \in \mathcal{A}$ имеет место $\mathcal{A} \models \chi(\bar{b})$ для всех формул $\chi(\bar{x}) \in (Q^* \cup \{\varphi(\bar{x})\})$. Покажем, что
$$(D(\mathcal{A}) \cup T) \vdash \varphi(\bar{c}_{\bar{b}}).$$
Если это не так, то существует модель $\mathcal{B}$ множества $(T \cup D(\mathcal{A}) \cup \{\neg\varphi(\bar{c}_{\bar{b}})\})$. Так как $\mathcal{B}$ — модель множества $D(\mathcal{A})$, то можно считать, что $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Поскольку $\neg\varphi$ эквивалентна в T экзистенциальной формуле и $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b})$, то это противоречит условию 2). Так как $D(\mathcal{A})$ состоит из бескванторных формул, то мы имеем $(\{\Phi(\bar{c}_{\bar{a}}; \bar{c}_{\bar{b}})\} \cup T) \vdash \varphi(\bar{c}_{\bar{b}})$ для некоторой бескванторной формулы Φ и кортежа $\bar{a} \in \mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A} \models \exists \bar{z}\, \Phi(\bar{z}; \bar{b})$ и $\exists \bar{z}\, \Phi(\bar{z}; \bar{x}) \in Q$, что противоречит тому, что в $\mathcal{A}$ на кортеже $\bar{b}$ истинны все формулы множества Q^*. □

Непротиворечивая теория T языка L называется подмодельно полной, если теория $T \cup D(\mathcal{B})$ языка L_B полна для любой подсистемы $\mathcal{B}$ любой модели $\mathcal{A}$ теории T. Заметим, что всякая подмодельно полная теория является модельно полной.

Теорема 3.3 ([Сак]). *Теория T подмодельно полна тогда и только тогда, когда T допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть T — подмодельно полная теория языка L и $\varphi(\bar{x})$ — произвольная формула языка L.

Рассмотрим множество Q, состоящее из всех бескванторных формул $\xi(\bar{x})$ языка L со свойством $(T \cup \{\xi(\bar{x})\}) \vdash \varphi(\bar{x})$ и множество Q^*, состоящее из отрицаний формул из Q. Если множество $(Q^* \cup \{\varphi(\bar{x})\})$ несовместно с теорией T, то формула $\varphi(\bar{x})$ будет эквивалентна в T дизъюнкции некоторых формул из множества Q, следовательно, некоторой бескванторной формуле, что и требуется доказать. Предположим, что множество $(Q^* \cup \{\varphi(\bar{x})\} \cup T)$ совместно. Пусть для некоторой модели $\mathcal{A}$ теории T и $\bar{b} \in \mathcal{A}$ имеет место $\mathcal{A} \models \chi(\bar{b})$ для всех формул $\chi(\bar{x}) \in (Q^* \cup \{\varphi(\bar{x})\})$. Пусть $\mathcal{B}$ — подсистема системы $\mathcal{A}$, порождённая в $\mathcal{A}$ элементами кортежа $\bar{b}$. Так как теория T подмодельно полна, то имеет место один из следующих двух случаев: 1) $(D(\mathcal{B}) \cup T) \vdash \varphi(\bar{c}_{\bar{b}})$, 2) $(D(\mathcal{B}) \cup T) \vdash \neg\varphi(\bar{c}_{\bar{b}})$.

Предположим, что имеет место первый случай. Так как $D(\mathcal{B})$ состоит из бескванторных формул и система $\mathcal{B}$ порождена кортежем $\bar{b}$, то мы имеем $(\{\Phi(\bar{c}_{\bar{b}})\} \cup T) \vdash \varphi(\bar{c}_{\bar{b}})$ для некоторой бескванторной формулы Φ. Тогда бы мы имели $\mathcal{A} \models \Phi(\bar{b})$ и $\Phi(\bar{x}) \in Q$, что противоречит тому, что в $\mathcal{A}$ на кортеже $\bar{b}$ истинны все формулы множества Q^*.

Второй случай также невозможен, так как система $\mathcal{A}$ является моделью множества $(D(\mathcal{B}) \cup T)$ и выполнено $\mathcal{A} \models \varphi(\bar{b})$.

Достаточность. Так как каждая бескванторная формула эквивалентна дизъюнкции формул, являющихся конъюнкциями атомных формул и их отрицаний, а множество $D(\mathcal{A})$ для любого атомного предложения φ языка L_A содержит φ или его отрицание, то для любого бескванторного предложения Φ языка L_A мы имеем $D(\mathcal{A}) \vdash \Phi$ или $D(\mathcal{A}) \vdash \neg\Phi$. Таким образом, если теория T допускает элиминацию кванторов, то T подмодельно полна. $\square$

Если K — класс алгебраических систем языка L, то через K^∞ обозначим класс бесконечных систем из K. Класс K называется полным (модельно полным), если теория $\mathrm{Th}(K^\infty)$ класса K^∞ полна (модельно полна).

Пусть T — непротиворечивая теория языка L, $X = \{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $L_n = L_X$. Множество всех формул языка L со свободными переменными из X и параметрами из множества $A \subseteq \mathfrak{C}$ обозначается через $F_X(A)$. Любое множество предложений p языка L_n называется n-типом языка L. Если теория $p \cup T$ непротиворечива, то p называется n-типом над T. Если p является полной теорией, то p называется полным n-типом языка L. Если к тому же $T \subseteq p$, то p называется полным n-типом над T. Множество всех полных n-типов над T обозначается $S_n(T)$.

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебраическая система языка L, $X \subseteq A$, $a \in A$. Типом элемента a над множеством X называется множество $\mathrm{tp}(a, X) = \{\Phi(x) \mid \mathcal{A}_X \models \Phi(a)\}$. Нетрудно понять, что $\mathrm{tp}(a, X)$ — полный 1-тип над $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_X)$. Через $S_n(X)$ обозначим $S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{A}_X))$. Часто вместо $S_1(X)$ будем писать $S(X)$.

Теория T называется стабильной в мощности $\varkappa$ или $\varkappa$-стабильной, если $|S(X)| \leqslant \varkappa$ для любой модели $\mathcal{A}$ теории T и любого $X \subseteq A$ мощности $\varkappa$. Если теория T $\varkappa$-стабильна для некоторого бесконечного $\varkappa$, то T называется стабильной. Если теория T $\varkappa$-стабильна для всех $\varkappa \geqslant 2^{|T|}$, то T называется суперстабильной. Если теория T не является стабильной, то T называется нестабильной.

Теорема 3.4 ([She, Пал]). *Полная теория нестабильна тогда и только тогда, когда существуют формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ от $2n$ переменных, модель $\mathcal{A}$ теории T и $\bar{a}_i \in A^n$, $i \in \omega$, такие что для любых i, j, $i \neq j$,*

$$i < j \iff \mathcal{A} \models \Phi(\bar{a}_i, \bar{a}_j). \quad \square$$

Теорема 3.5. *Если теория T является стабильной в счётной мощности (ω-стабильной), то она стабильна во всех бесконечных мощностях.*

Доказательство. Пусть теория T является ω-стабильной. Предположим, что существует подмножество A монстр-модели $\mathfrak{C}$ мощности $\lambda \geqslant \omega$, для которого мощность множества $S(A)$ строго больше мощности λ. Из ω-стабильности следует, что существует такой счётный язык $L' \subseteq L$, что для любого предиката (или функции) языка L существует соответственно эквивалентные в теории T предикат (или функция) языка L'. Поэтому можно считать, что язык L является счётным. Тогда множество $F_X(A)$, где $X = \{x\}$, имеет мощность λ.

Рассмотрим стоуновское пространство $S(A)$. Напомним, что это пространство определяется базой окрестностей $\{U_\Phi \mid \Phi \in F_X(A)\}$, где $U_\Phi = \{t \mid \Phi \in t \in \in S(A)\}$. Пусть для топологического пространства X через X' обозначается производное пространство, т. е. пространство, полученное из пространства X удалением изолированных точек. Индукцией по ординалу α определим подпространства $S^{(\alpha)}$ следующим образом: $S^{(0)} = S(A)$, $S^{(\beta+1)} = (S^{(\beta)})'$ и $S^{(\delta)} = \bigcap\{S^{(\beta)} \mid \beta < \delta\}$ для предельного δ. Пусть γ — наименьший ординал, для которого выполняется условие $(S^{(\gamma)})' = S^{(\gamma)}$. Ясно, что для любой формулы $\Phi \in F_X(A)$ существует не более одного ординала $\beta < \gamma$, для которого множество $(U_\Phi \cap S^{(\beta)})$ состоит из одной точки. Поэтому мощность ординала γ не превосходит мощности множества $F_X(A)$, которая равна λ. Так как число изолированных точек у пространства с базой окрестностей мощности λ также не превосходит λ, а мощность $S(A)$ строго больше λ, то мощность $S^{(\gamma)}$ также превосходит λ. Так как пространство $S^{(\gamma)}$ не имеет изолированных точек и является хаусдорфовым, то для каждого кортежа $\varepsilon \in 2^{<\omega}$ элементов множества $\{0, 1\}$ существуют непустые множества $X(\varepsilon)$ вида $\Phi_\varepsilon(\mathfrak{C}; \bar{a}_\varepsilon)$ для формулы $\Phi(x; \bar{a}) \in F_X(A)$ со следующими свойствами:

1) $X(\varnothing) = \mathfrak{C}$;
2) $X(\varepsilon^\wedge L) \subseteq X(\varepsilon)$, $L \in \{0, 1\}$;
3) $(X(\varepsilon^\wedge 0) \cap X(\varepsilon^\wedge 1) = \varnothing$.

Рассмотрим счётное множество $A_0 = \bigcup\{\bar{a}_\varepsilon \mid \varepsilon \in 2^{<\omega}\}$. Из свойств 1—3 получаем, что мощность множества $S(A_0)$ равна 2^ω, что противоречит ω-стабильности теории T. $\square$

В [Мус] Т. Г. Мустафин ввёл понятие стационарной теории полигонов, которое нам понадобится в дальнейшем. Полная теория T полигонов называется стационарной, если для любых ${}_SM \models T$ и $a, b \in \mathfrak{C} \setminus M$ выполняется

$$a \in Sb \implies M \cap Sa = M \cap Sb.$$

Пусть ${}_SA$ — полигон и $a \in \mathfrak{C} \setminus A$. Элемент $c \in A$ называется входным элементом от a в ${}_SA$, если $c \in Sa$ и $Sb \subseteq Sc$ для всех $b \in A \cap Sa$.

Теорема 3.6 ([Мус]). *Пусть T — стационарная теория полигонов, ${}_SM \models T$, $a, b \in \mathfrak{C} \setminus M$ и c — входной элемент от a в ${}_SM$. Следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$;
2) *c является входным элементом от b в ${}_SM$ и* $\mathrm{tp}(a, \{c\}) = \mathrm{tp}(b, \{c\})$;
3) $M \cap Sa = M \cap Sb$ *и* $\mathrm{tp}(a, (M \cap Sa)) = \mathrm{tp}(b, M \cap Sa)$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть выполняется утверждение 1). Равенство $\mathrm{tp}(a, \{c\}) = \mathrm{tp}(b, \{c\})$ очевидно. Покажем, что $M \cap Sa = M \cap Sb$. Предположим, что $m \in M \cap Sa$. Тогда $m = sa$ для некоторого $s \in S$. Следовательно, $m = sx \in \mathrm{tp}(a, M)$, откуда $m = sx \in \mathrm{tp}(b, M)$, т. е. $m = sb \in M \cap Sb$. Таким образом, $M \cap Sa \subseteq M \cap Sb$. Аналогично, $M \cap Sb \subseteq M \cap Sa$. Отсюда следует, что $M \cap Sa = M \cap Sb$. Поскольку c является входным элементом от a в ${}_SM$, то c является входным элементом от b в ${}_SM$.

Проверим импликацию 2) $\implies$ 3). Пусть выполняется утверждение 2). Равенства $M \cap Sa = Sc$ и $M \cap Sb = Sc$ следуют из определения входного элемента, т. е. $M \cap Sa = M \cap Sb$. Из равенства $\mathrm{tp}(a, \{c\}) = \mathrm{tp}(b, \{c\})$ следует существование такого тождественного на $\{c\}$ автоморфизма φ полигона $\mathfrak{C}$, что $\varphi(a) = b$. Если $d \in Sc$ и $d = sc$, где $s \in S$, то $\varphi(d) = \varphi(sc) = s\varphi(c) = sc = d$. Следовательно, φ тождествен на Sc. Отсюда $\mathrm{tp}(a, (M \cap Sa)) = \mathrm{tp}(b, M \cap Sa)$.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 1). Пусть выполняется утверждение 3). Из равенства $\mathrm{tp}(a, M \cap Sa) = \mathrm{tp}(b, M \cap Sa)$ следует существование такого тождественного на $M \cap Sa$ автоморфизма φ полигона ${}_S\mathfrak{C}$, что $\varphi(a) = b$. Через $C_M(u)$ обозначим множество $\{d \in \mathfrak{C} \mid d$ связанный с u вне $M\}$, где $u \in \mathfrak{C}$.

Покажем, что $\varphi(C_M(a)) \subseteq C_M(b)$. Пусть $a_0, \ldots, a_n \in \mathfrak{C} \setminus M$, $a = a_0$ и $a_i \in Sa_{i+1}$ или $a_{i+1} \in Sa_i$ для всех i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Индукцией по n покажем, что $\varphi(a_n) \in C_M(b)$. Для $n = 0$ утверждение следует из условия $b \in \mathfrak{C} \setminus M$. Пусть $\varphi(a_i) \notin M$. Если $a_i \in Sa_{i+1}$, то $\varphi(a_i) \in S\varphi(a_{i+1})$ и $\varphi(a_{i+1}) \notin M$. Предположим, что $a_{i+1} \in Sa_i$ и $\varphi(a_{i+1}) \in M$. Из определения стационарной теории следует, что $M \cap S\varphi(a_{i+1}) = M \cap Sb$. Тогда $\varphi(a_{i+1}) \in M \cap Sb = M \cap Sa$. Так как φ на $M \cap Sa$ действует тождественно, то $a_{i+1 \in M \cap Sa}$, противоречие. Таким образом, $\varphi(C_M(a)) \subseteq C_M(b)$. Аналогично, $\varphi^{-1}(C_M(b)) \subseteq C_M(a)$, т. е. $\varphi(C_M(a)) = C_M(b)$. Так же доказывается равенство $\varphi(C_M(b)) \subseteq C_M(a)$.

Строим автоморфизм ψ полигона ${}_S\mathfrak{C}$ следующим образом: $\psi|_{(C_M(a) \cap C_M(b))} = \varphi|_{(C_M(a) \cap C_M(b))}$ и ψ является тождественным отображением на множестве $\mathfrak{C} \setminus (C_M(a) \cap C_M(b))$. Ясно, что $\psi(a) = b$. Следовательно, утверждение 1) теоремы выполнено. □

Теорема 3.7 ([Мус]). *Каждая стационарная теория стабильна.*

Доказательство. Пусть ${}_SM$ — модель теории T, $|M| = \varkappa$, $\varkappa = \varkappa^{|T|}$. Если $a \in \mathfrak{C}$, то $|Sa| \leqslant |S| \leqslant |T|$ и $M \cap Sa \leqslant |T|$. Тогда по теореме 3.1 $|S_1(M)| \leqslant \leqslant |M|^{|T|} \cdot 2^{|T|} = |M|^{|T|} = \varkappa^{|T|} = \varkappa$. Следовательно, T — $\varkappa$-стабильная теория. □

Пусть K — класс полигонов. Моноид S называется K-стабилизатором (K-суперстабилизатором, K-ω-стабилизатором), если $\mathrm{Th}({}_SA)$ стабильна (суперстабильна, ω-стабильна соответственно) для любого полигона ${}_SA \in K$. Если $K = S$-Act, то K-стабилизатор (K-суперстабилизатор, K-ω-стабилизатор) будем называть стабилизатором (суперстабилизатором, ω-стабилизатором соответственно).

Приведём характеризацию стабилизаторов и суперстабилизаторов, полученную Т. Г. Мустафиным. Моноид S называется линейно упорядоченным, если множество $\{Sa \mid a \in S\}$ является линейно упорядоченным относительно включения.

Теорема 3.8 ([Мус]). *Моноид S является стабилизатором тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный моноид.* □

Вполне упорядоченным моноидом называется линейно упорядоченный моноид, удовлетворяющий условию максимальности для главных левых идеалов.

Теорема 3.9 ([Мус]). *Пусть S — счётный моноид. Моноид S является суперстабилизатором тогда и только тогда, когда S — вполне упорядоченный моноид.* □

§ 4. Аксиоматизируемость класса регулярных полигонов

Центральное место в данном параграфе занимает теорема 4.1, дающая характеризацию моноидов с аксиоматизируемым классом регулярных полигонов. Как частный случай получаем аксиоматизируемость класса регулярных полигонов над группой (следствие 4.3).

Теорема 4.1 ([Сте1]). *Класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем тогда и только тогда, когда*

1) *полугруппа R удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, порождённых идемпотентами;*
2) *для любых $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant n$, множество $\left\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x = t_i x\right\}$ пусто или является конечно порождённым как правый идеал полугруппы R.*

Доказательство. Необходимость. Пусть класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем. Предположим, что утверждение 1) не выполняется. Это означает, что существует бесконечно убывающая цепь главных правых идеалов

$$f_1S \supset f_2S \supset \ldots \supset f_nS \supset \ldots,$$

где $f_n \in R$, $f_n^2 = f$, $n \geqslant 1$. Для любых n, m, $1 \leqslant n \leqslant m$, из включения $f_nS \supseteq f_mS$ следует равенство $f_nf_m = f_m$. Пусть $\bar{f} = (f_n)_{n\in\omega} \in R^\omega$ и D — произвольный неглавный ультрафильтр на ω. Тогда в ${}_SR^\omega/D$ для любого $n \geqslant 1$ верно равенство $f_n \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$. Из аксиоматизируемости класса $\mathfrak{R}$ по теореме 3.1 имеем ${}_SR^\omega/D \in \mathfrak{R}$. По следствию 2.1 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм $\varphi\colon {}_S(S \cdot \bar{f}/D) \to {}_SSe$, такие что $\varphi(\bar{f}/D) = e$. Тогда $e \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$. Для любого $n \geqslant 1$ равенство $f_n \cdot \bar{f}/D = \bar{f}/D$ влечёт равенство $f_ne = e$. Следовательно, существует такое $m \geqslant 1$, что $f_m = ef_m \in eS \subseteq f_nS$ для любых $n \geqslant 1$, что противоречит условию $f_{m+1}S \subset f_mS$. Таким образом, утверждение 1) справедливо.

Предположим, что утверждение 2) не выполняется. Тогда существуют $n \geqslant 1$, $s_i, t_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant n$, для которых множество $X = \Bigl\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_ix = t_ix\Bigr\}$ непусто и не является конечно порождённым как правый идеал R. Значит, найдутся бесконечный ординал γ и $x_\tau \in X$, $\tau < \gamma$, такие что $X = \bigcup\{x_\tau R \mid \tau < \gamma\}$ и $x_\beta R \not\subseteq \bigcup\{x_\tau R \mid \tau < \beta\}$ для любого $\beta < \gamma$. Пусть $\bar{x} = (x_\tau)_{\tau<\gamma} \in R^\gamma$ и D — такой ультрафильтр на γ, что $|Y| = \gamma$ для $Y \in D$. Поскольку класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем, по теореме 3.1 получаем ${}_SR^\gamma/D \in \mathfrak{R}$. По следствию 2.1 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм $\varphi\colon {}_SS\bar{x}/D \to {}_SSe$, такие что $\varphi(\bar{x}/D) = e$. Поскольку $x_\tau \in X$, $\tau < \gamma$, имеем $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i\bar{x}/D = t_i\bar{x}/D$ и $e \in X$. Следовательно, $eR \subseteq \bigcup\{x_\tau R \mid \tau < \gamma\}$, т. е. $eR \subseteq x_{\tau_0}R$ для некоторого $\tau_0 < \gamma$. Так как $e = ee$, то $\bar{x}/D = e \cdot \bar{x}/D$. В частности, $x_\tau \in eR$ для некоторого $\tau > \tau_0$ и $x_\tau R \subseteq x_{\tau_0}R$. Получили противоречие. Таким образом, утверждение 2) справедливо.

Достаточность. Пусть выполняются утверждения 1) и 2) теоремы. Предположим, что $n \geqslant 1$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in S^n$, $X_{\bar{s}\bar{t}} = \Bigl\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_ix = t_ix\Bigr\}$. Покажем, что либо $X_{\bar{s}\bar{t}} = \varnothing$, либо $X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ для некоторых $k \geqslant 1$ и идемпотентов $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Предположим, что $X_{\bar{s}\bar{t}} \neq \varnothing$. По условию теоремы существуют $k \geqslant 1$, $r_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, для которых $X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{r_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Можно считать, что $r_iR \not\subseteq r_jR$, $i \neq j$. Зафиксируем i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Поскольку $r_i \in R$, по следствию 2.1 существуют идемпотент $e_i \in R$ и изоморфизм $\varphi\colon {}_SSr_i \to {}_SSe_i$, такие что $\varphi(r_i) = e_i$. Тогда $e_ir_i = r_i$. Поскольку $r_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$, имеем $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{r_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, т. е. $e_i = r_js$ для некоторых j, $1 \leqslant j \leqslant k$, и $s \in R$. Следовательно, $r_i = e_ir_i = r_jsr_i \in r_jR$. По выбору элементов r_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, это означает, что $r_i = r_j$. Так как $r_i = e_ir_i$, то $r_i \in e_iR$. Ввиду $e_i = r_is$ имеем $e_i \in r_iS$. Следовательно, $r_iS = e_iS$. По пункту 2) утверждения 2.4 $r_iR = e_iR$. Таким образом, $X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$, где $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$.

Определим множество формул Γ следующим образом: для любых $n \geqslant 1$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in S^n$

$$\neg\exists x \bigwedge_{i=2}^{n} s_i x = t_i x \in \Gamma, \qquad \text{если } {}_S R \models \neg\exists x\,(x \in X_{\bar{s}\bar{t}});$$

$$\forall x \left(\bigwedge_{i=2}^{n} s_i x = t_i x \to \bigvee_{j=1}^{k} x = e_j x \right) \in \Gamma, \quad \text{если } {}_S R \models \exists x\,(x \in X_{\bar{s}\bar{t}}),$$

где $X_{\bar{s}\bar{t}} = \left\{ x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x = t_i x \right\} = \bigcup\{e_j R \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $e_j^2 = e_j \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Покажем, что

$${}_S A \in \mathfrak{R} \iff {}_S A \models \Gamma.$$

Пусть ${}_S A \in \mathfrak{R}$. Предположим, что $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i a = t_i a$ для некоторого $a \in A$. По следствию 2.1 существуют идемпотент $f \in R$ и изоморфизм $\varphi\colon {}_S Sa \to {}_S Sf$, такие что $\varphi(a) = f$. Тогда $f \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Следовательно, $X_{\bar{s}\bar{t}} \neq \varnothing$. Пусть $X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{e_j R \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$, $e_j^2 = e_j \in X_{\bar{s}\bar{t}}$. Тогда ${}_S R \models \bigvee\limits_{j=1}^{k} e_j f = f$ и ${}_S A \models \bigvee\limits_{j=1}^{k} e_j a = a$.

Пусть ${}_S A \models \Gamma$, $a \in A$. Докажем, что ${}_S Sa \cong {}_S Se$, где e — некоторый идемпотент из R. Пусть $sa = ta$, $s, t \in S$. Поскольку ${}_S A \models \Gamma$, имеем ${}_S R \models \exists x\,(sx = tx)$ и $a = fa$ для некоторого идемпотента $f \in R$. Пусть $\{f_\tau \mid \tau < \gamma\} = \{f \mid f^2 = f, fa = a, f \in R\}$. Индукцией по γ покажем, что существует такой ординал $\gamma_0 < \gamma$, что

$$f_{\gamma_0} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}.$$

Пусть γ — предельный ординал, $\tau_0 < \gamma$. По предположению индукции существует $\beta_0 < \tau_0$, для которого $f_{\beta_0} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \tau_0\}$. Если $f_{\beta_0} S \neq \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}$, то существуют β_1, τ_1, $\beta_1 < \tau_1 < \gamma$, такие что

$$f_{\beta_0} S \supset f_{\beta_1} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \tau_1\}$$

и т. д. Так как $f_{\beta_n} S \supset f_{\beta_{n+1}} S$, то $f_{\beta_{n+1}} = f_{\beta_n} f_{\beta_{n+1}}$, следовательно, $f_{\beta_n} R \supseteq f_{\beta_{n+1}} R$, и по пункту 2) утверждения 2.4 $f_{\beta_n} R \supset f_{\beta_{n+1}} R$, $n \geqslant 0$. По условию теоремы убывающая цепь идеалов

$$f_{\beta_0} R \supset f_{\beta_1} R \supset \ldots \supset f_{\beta_n} R \supset \ldots$$

обрывается. По пункту 2) утверждения 2.4 обрывается также и убывающая цепь идеалов

$$f_{\beta_0} S \supset f_{\beta_1} S \supset \ldots \supset f_{\beta_n} S \supset \ldots,$$

т. е. $f_{\beta_k} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma\}$ для некоторого $k \geqslant 0$.

Пусть γ — непредельный ординал и существует ординал $\beta_0 < \gamma - 1$, такой что $f_{\beta_0} S = \bigcap\{f_\tau S \mid \tau < \gamma - 1\}$. Тогда ${}_S A \models a = f_{\beta_0} a \wedge a = f_{\gamma-1} a$. Поскольку ${}_S A \models \Gamma$, имеем ${}_S R \models \exists x\,(x = f_{\beta_0} x \wedge x = f_{\gamma-1} x)$ и существует такой элемент $f \in R$, что $a = fa$, $f = f_{\beta_0} f = f_{\gamma-1} f$. Следовательно, $f = f_{\gamma_0}$, $\gamma_0 < \gamma$, $f_{\gamma_0} S \subseteq f_{\beta_0} S \cap f_{\gamma-1} S$, $f_{\gamma_0} S = \bigcap\{f_\tau \mid \tau < \gamma\}$. Положим $e = f_{\gamma_0}$. Тогда $ea = a$, и для любого идемпотента $g \in R$ из равенства $ga = a$ следует $eS \subseteq gS$, т. е. $e = ge$. Покажем, что отображение $\varphi\colon Sa \to Se$, такое что $\varphi(sa) = se$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом полигонов. Пусть $ra = ka$, $r, k \in S$. Поскольку ${}_SA \models \Gamma$, то существует такой идемпотент $g \in R$, что $rg = kg$ и $ga = a$. Тогда $ge = e$ и $re = ke$. Пусть $re = ke$, $r, k \in S$. Поскольку $ea = a$, получаем $ra = ka$. Таким образом, ${}_SSa \cong {}_SSe$ и ${}_SA \in \mathfrak{R}$ ввиду произвольности выбора элемента a. □

Из доказательства достаточности вытекает следствие 4.1.

Следствие 4.1. *Пусть класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем и множество* $X_{\bar{s}\bar{t}} = \left\{x \in R \mid \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s_i x = t_i x\right\}$, *где* $n \geqslant 1$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $\bar{t} = \langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in S^n$, *непусто. Тогда множество* $X_{\bar{s}\bar{t}}$ *является конечно порождённым как правый идеал полугруппы R тогда и только тогда, когда* $X_{\bar{s}\bar{t}} = \bigcup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *для некоторых* $k \geqslant 1$ *и идемпотентов* $e_i \in X_{\bar{s}\bar{t}}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. □

Следствие 4.2. *Если класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем, то* $R = \bigcup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ *для некоторых* $n \geqslant 1$, $e_i \in R$, $e_i^2 = e_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство следует из теоремы 4.1, следствия 4.1 и равенства $R = \{x \in R \mid x = x\}$. □

Следующее утверждение очевидно.

Следствие 4.3. *Класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов над группой аксиоматизируем.* □

§ 5. Модельная полнота класса регулярных полигонов

В данном параграфе формулируется и доказывается критерий модельной полноты аксиоматизируемого класса регулярных полигонов (теорема 5.1). Как следствие получается модельная полнота класса регулярных полигонов над бесконечной группой (следствие 5.1).

Лемма 5.1. *Пусть моноид S является регулярно линейно упорядоченным,* ${}_SB \subseteq {}_SA \in \mathfrak{R}$, $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant k$. *Тогда для любого* i, $1 \leqslant i \leqslant k$, *выполняются следующие условия*:

1) $\bigcap\{Sa_j \mid Sa_j \cap Sa_i \neq \varnothing\} \neq \varnothing$;
2) *если* $Sa_i \cap B \neq \varnothing$, *то* $B \cap \bigcap\{Sa_j \mid Sa_j \cap Sa_i \neq \varnothing\} \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Докажем второе утверждение (первое устанавливается аналогично). Пусть $\{j_0, \ldots, j_s\} = \{j \mid Sa_j \cap Sa_i \neq \varnothing\}$, где $j_0 = i$;

$$B_n = B \cap \bigcap\{Sa_j \mid j \in \{j_0, \ldots, j_n\}\}, \quad n \leqslant s.$$

Достаточно показать, что для любого n, $n < s$, из неравенства $B_n \neq \varnothing$ вытекает неравенство $Sa_{j_{n+1}} \cap B_n \neq \varnothing$. Пусть $c \in B_n \subseteq Sa_i$, $b \in Sa_{j_{n+1}} \cap Sa_i$. Поскольку $c, b \in Sa_i$, то по утверждению 2.5 либо $Sc \subseteq Sb$, либо $Sb \subseteq Sc$, т. е. либо $c \in Sa_{j_{n+1}} \cap B_n$, либо $b \in Sa_{j_{n+1}} \cap B_n$. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем и для любых $a \in R$ и идемпотента $e \in R$ из включения $Sa \subseteq Se$ следует существование такого идемпотента $f \in R$, что $Sa = Sf$ и $fS \subseteq eS$. Тогда для любого идемпотента $g \in R$ существует такой идемпотент $h \in R$, что $Sh \subseteq Sg$, полигон ${}_SSh$ минимален по включению и правый идеал hS минимален среди главных правых идеалов моноида S, порождённых идемпотентами.*

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены и $g \in R$, $g = g^2$. Предположим, что существует бесконечно убывающая цепь полигонов

$$ {}_SSg \supset {}_SSk_1 \supset \ldots \supset {}_SSk_n \supset \ldots, $$

где $k_i \in R$, $i \geqslant 1$. По условию существуют идемпотенты $h_i \in R$, $i \geqslant 0$, такие что $h_0 = g$, $Sk_i = Sh_i$, $i \geqslant 1$, и

$$ gS = h_0S \supseteq h_1S \supseteq \ldots \supseteq h_nS \supseteq \ldots. $$

В силу аксиоматизируемости класса $\mathfrak{R}$ и теоремы 4.1 существует такое $n \in \omega$, что $h_iS = h_jS$ для всех $i \geqslant n$, $j \geqslant n$. Включение $Sh_{n+1} \subset Sh_n$ и равенство $h_{n+1}S = h_nS$ по утверждению 1.2 влекут $h_{n+1} = h_n$, что противоречит предположению $Sh_{n+1} \neq Sh_n$. Следовательно, существует минимальный по включению полигон ${}_SSh$, для которого $Sh \subseteq Sg$. По утверждению 1.3 правый идеал hS минимален среди главных правых идеалов моноида S, порождённых идемпотентами. $\square$

Теорема 5.1 ([Сте1]). *Пусть класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем. Класс $\mathfrak{R}$ модельно полон тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *S — регулярно линейно упорядоченный моноид*;
2) *для любого идемпотента $e \in R$, если $Sa \subset Se$ и $e \notin \bigcup\{a_iS \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, где $a, a_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то найдутся идемпотенты $e_j \in R$, $j \in \omega$, такие что $e_j \neq e_k$, $Sa = Se_j$, $e_j \in eS \setminus \bigcup\{a_iS \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$ для любых $j, k \in \omega$, $j \neq k$*;
3) *$|eSf| \geqslant \omega$ для любых идемпотентов $e, f \in R$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что класс $\mathfrak{R}$ модельно полон.

Докажем утверждение 1). Пусть $e^2 = e \in R$. Поскольку любой циклический регулярный полигон изоморфен подполигону полигона ${}_SS$, порождённому идемпотентом, то достаточно показать, что множество $\{Sa \mid Sa \subseteq Se\}$ является линейно упорядоченным по включению. Пусть $Sa_1 \subseteq Se$ и $Sa_2 \subseteq Se$. Тогда $a_1e = a_1$, $a_2e = a_2$ и ${}_SSe \models \exists x\,(a_1x = a_1 \wedge a_2x = a_2)$. В силу модельной полноты класса $\mathfrak{R}$ имеет место соотношение ${}_S(Sa_1 \cup Sa_2) \prec {}_SSe$, т. е. ${}_S(Sa_1 \cup Sa_2) \models \exists x\,(a_1x = a_1 \wedge a_2x = a_2)$. Пусть $a_1c = a_1$, $a_2c = a_2$, где

$c \in Sa_1 \cup Sa_2$. Если, например, $c \in Sa_1$, то $a_2 = a_2 c \in Sa_1$. Таким образом, $Sa_2 \subseteq Sa_1$.

Докажем утверждение 2). Пусть $Sa \subset Se$, $e \notin \bigcup\{a_i S \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$, $e^2 = e \in R$. Введём обозначение

$$\Phi(y,a) \rightleftharpoons a = ay \wedge \bigwedge_{i=1}^{m} \neg \exists x\,(y = a_i x) \wedge y = ey.$$

Тогда ${}_S Se \models \Phi(e,a)$, т. е. ${}_S Se \models \exists y\,\Phi(y,a)$. Поскольку класс $\mathfrak{R}$ модельно полон, имеем ${}_S Sa \prec {}_S Se$ и ${}_S Sa \models \exists y\,\Phi(y,a)$. Следовательно, ${}_S Sa \models \Phi(e_1,a)$ для некоторого $e_1 \in Sa \subseteq R$, откуда получаем $a = ae_1$ и $Sa = Se_1$. Пусть $e_1 = ka$. Так как $e_1 = ee_1$, то $e_1 \in eS$. Покажем, что e_1 — идемпотент: $e_1 e_1 = kae_1 = ka = e_1$. Кроме того, ${}_S Sa \models \bigwedge_{i=1}^{m} \neg \exists x\,(e_1 = a_i x)$, т. е. $e_1 \notin \bigcup\{a_i S \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

Предположим, что существуют идемпотенты $e_1, \ldots, e_k \in R$, удовлетворяющие соотношениям $Sa = Se_i$, $e_i \in eS \setminus \bigcup\{a_r S \mid 1 \leqslant r \leqslant m\}$, $e_i \neq e_j$ для любых i, j, $i \neq j$, $1 \leqslant i,j \leqslant k$. Покажем, что существует идемпотент $e_{k+1} \in R$, удовлетворяющий этим же соотношениям с заменой i на $k+1$, т. е. такой, что ${}_S Se \models \Phi(e_{k+1})$, и e_{k+1} отличен от $e_1, \ldots, e_k$. Так как по условию $Se_j = Sa \subset Se$, то $e \neq e_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Поэтому ${}_S Se \models \exists y\,\Psi(y)$, где

$$\Psi(y) \rightleftharpoons \bigwedge_{j=1}^{k} \neg y = e_j \wedge \Phi(y).$$

Следовательно, ${}_S Sa \models \Psi(e_{k+1})$ для некоторого $e_{k+1} \in Sa$. Таким образом, ${}_S Se \models \Phi(e_{k+1})$ и e_{k+1} отличен от $e_1, \ldots, e_k$. Как и для e_1, доказывается, что e_{k+1} — идемпотент.

Докажем утверждение 3). Пусть $e^2 = e \in R$, $f^2 = f \in R$, ${}_S Sf_i$, $i \in \omega$, — попарно непересекающиеся копии полигона ${}_S Sf$. Так как ${}_S Sf \models e(ef) = ef$, то ${}_S Sf \models \exists x\,(ex = x)$ и

$${}_S Sf \sqcup \coprod_{i \in \omega} {}_S Sf_i \models \exists x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} ex_i = x_i \right)$$

для любого $n \geqslant 1$. В силу модельной полноты класса $\mathfrak{R}$ и соотношения $Sf \subseteq \subseteq Sf \sqcup \coprod\limits_{i \in \omega} Sf_i$ имеет место

$${}_S Sf \models \exists x_1, \ldots, x_n \left(\bigwedge_{i \neq j,} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} ex_i = x_i \right)$$

для любого $n \geqslant 1$. Следовательно, $|eSf| \geqslant \omega$.

Достаточность. Пусть утверждения 1)—3) данной теоремы выполнены. Предположим, что ${}_S A, {}_S B \in \mathfrak{R}$, ${}_S B \subseteq {}_S A$, $\bar{d} = \langle d_1, \ldots, d_r \rangle \in B^r$,

$${}_S A \models \exists \bar{x} \bigwedge_{j=1}^{4} \Phi_j(\bar{x}, \bar{d}),$$

где $\bar{x} = \langle x_1, \dots x_k \rangle$,

$$\Phi_1(\bar{x}, \bar{d}) \rightleftharpoons \bigwedge \{nx_i = mx_j \mid \langle i, j, n, m \rangle \in L_1\},$$
$$\Phi_2(\bar{x}, \bar{d}) \rightleftharpoons \bigwedge \{nx_i = md_j \mid \langle i, j, n, m \rangle \in L_2\},$$
$$\Phi_3(\bar{x}, \bar{d}) \rightleftharpoons \bigwedge \{\neg nx_i = mx_j \mid \langle i, j, n, m \rangle \in L_3\},$$
$$\Phi_4(\bar{x}, \bar{d}) \rightleftharpoons \bigwedge \{\neg nx_i = md_j \mid \langle i, j, n, m \rangle \in L_4\},$$

$L_t \subseteq \tilde{k} \times \tilde{k} \times S \times S$ для $t \in \{1, 3\}$, $L_t \subseteq \tilde{k} \times \tilde{r} \times S \times S$ для $t \in \{2, 4\}$, $\tilde{k} = \{1, \dots, k\}$, $\tilde{r} = \{1, \dots, r\}$, причём если $\langle i, j, n, m \rangle \in L_r$, то $\langle j, i, m, n \rangle \in L_r$, $r \in \{1, 3\}$. Для доказательства того, что ${}_S B \prec {}_S A$, по определению модельной полноты теории и теореме 3.2 достаточно показать, что

$${}_S B \models \exists \bar{x} \bigwedge_{j=1}^{4} \Phi_j(\bar{x}, \bar{d}).$$

Пусть ${}_S A \models \bigwedge\limits_{j=1}^{4} \Phi_j(\bar{a}, \bar{d})$, $\bar{a} = \langle a_1, \dots a_k \rangle \in A^k$. Можно считать, что для любых i, j, удовлетворяющих условию $Sa_i \cap Sa_j \neq \varnothing$, существуют такие $n, m \in S$, что $\langle i, j, n, m \rangle \in L_1$. Поскольку $a_i \in A$, ${}_S A \in \mathfrak{R}$, то по утверждению 2.1 существуют идемпотент $f_i \in R$ и изоморфизм $\varphi_i \colon {}_S Sa_i \to {}_S Sf_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Если $Sa_i \subset Sa_j$, то по утверждению 2) теоремы можно считать, что $Sf_i = S\varphi_i(a_i) \subseteq Sf_j$ и $\varphi_i = \varphi_j|_{Sa_i}$. Если $Sa_i = Sa_j$, то полагаем $f_i = f_j$ и $\varphi_i = \varphi_j$.

Для i, $1 \leqslant i \leqslant k$, такого что $Sa_i \cap B \neq \varnothing$, вводим обозначение

$$\begin{aligned} Sc_i = \max(&\{Smd_j \mid md_j \in Sa_i, \\ &\langle j', j, m', m \rangle \in L_2 \text{ для некоторых } j',\ 1 \leqslant j' \leqslant k,\ m' \in S\} \cup \\ &\cup \{Sma_j \mid ma_j \in B \cap Sa_i, \\ &\langle j, j', m, m' \rangle \in L_1 \text{ для некоторых } j',\ 1 \leqslant j' \leqslant k,\ m' \in S\} \cup \{Sb\}), \end{aligned}$$

где $b \in B \cap \bigcap \{Sa_j \mid Sa_j \cap Sa_i \neq \varnothing\}$. Корректность определения множества Sc_i следует из леммы 5.1 и утверждения 2.5.

Зафиксируем i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Пусть $B \cap Sa_i \cap Sa_j \neq \varnothing$,

$$\begin{aligned} Sd_{ij} = \max(&\{Smd_{j'} \mid md_{j'} \in Sa_i \cap Sa_j, \\ &\langle i', j', n, m \rangle \in L_2 \text{ для некоторых } i',\ 1 \leqslant i' \leqslant k,\ n \in S\} \cup \\ &\cup \{Sma_{i'} \mid ma_{i'} \in Sa_i \cap Sa_j, \\ &\langle i', j', m, n \rangle \in L_1 \text{ для некоторых } j',\ 1 \leqslant j' \leqslant k,\ n \in S\}. \end{aligned}$$

Данное обозначение корректно в силу утверждения 2.5. Ясно, что $Sd_{ij} = Sd_{ji}$. Полагаем $d_{ij} = d_{ji}$.

Перенумеруем (если это необходимо) элементы множества $\{a_1, \dots, a_k\}$ таким образом, чтобы для любого i, $1 \leqslant i < k$, выполнялось следующее условие:

$$Sd_{i+1i} = \max\{Sd_{ji} \mid i < j \leqslant k\}. \qquad (5.1)$$

Доказательство достаточности будет содержать ряд лемм.

Лемма 5.3. *Для любых i, j, $1 \leqslant i < k$, $0 \leqslant j < k-i$, имеют место следующие включения*:

1) $Sd_{i+j+1\,i} \subseteq Sd_{i+j\,i}$;
2) $Sd_{i+j+1\,i} \subseteq \bigcap\{Sd_{i+s+1\,i+s} \mid 0 \leqslant s \leqslant j\}$.

Доказательство. Пусть i, j — произвольные числа, такие что $1 \leqslant i < k$, $0 \leqslant j < k-i$.

Доказательство включения 1) будем вести индукцией по j. Если $j = 0$, то включение $Sd_{i+1\,i} \subseteq Sd_{ii}$ следует из определения Sd_{ii}. Предположим, что включение 1) леммы доказано для всех $j' < j$, т. е.

$$Sd_{i+j\,i} \subseteq Sd_{i+j-1\,i} \subseteq \ldots \subseteq Sd_{i+1\,i} \subseteq Sd_{ii}.$$

Покажем, что $Sd_{i+j+1\,i} \subseteq Sd_{i+j\,i}$.

Предположим противное. Тогда в силу регулярной линейной упорядоченности моноида S и утверждения 2.5 $Sd_{i+j\,i} \subset Sd_{i+j+1\,i}$. Пусть a — элемент типа $md_{i'}$ или $ma_{i'}$ из определения $Sd_{i+j+1\,i}$, такой что $Sd_{i+j+1\,i} = Sa$ и $a \in Sa_{i+j+1} \cap Sa_i$. Тогда $a \notin Sa_{i+j}$. Индукцией по r, $0 \leqslant r \leqslant j-1$, докажем, что $a \notin Sa_{i+j-r}$. Предположим, что $a \notin Sa_{i+j-r+1}$, $a \in Sa_{i+j-r}$. Так как $a \in Sa_{i+j+1}$, из равенства (5.1) и определения $Sd_{i+j-r\,i+j-r+1}$ получаем $a \in Sd_{i+j-r\,i+j-r+1}$. Следовательно, $a \in Sa_{i+j-r+1}$, что противоречит предположению индукции. Таким образом, $a \notin Sa_{i+j-r}$ для любых r, $0 \leqslant r \leqslant j-1$. В частности, $a \notin Sa_{i+1}$. Поскольку $a \in Sa_i \cap Sa_{i+j+1}$, используя (5.1), получаем $i = i+j+1$, что невозможно.

Докажем включение 2). По 1)

$$Sd_{i+j+1\,i} \subseteq Sd_{i+j\,i} \subseteq \ldots \subseteq Sd_{i+1\,i} \subseteq Sd_{ii}.$$

Предположим, что включение $Sd_{i+j+1\,i} \subseteq Sd_{i+1\,i} \cap \ldots \cap Sd_{i+r\,i+r-1}$ доказано для $0 \leqslant r \leqslant j-1$, $1 \leqslant j < k$. Покажем, что $Sd_{i+j+1\,i} \subseteq Sd_{i+r+1\,i+r}$. Пусть $Sd_{i+j+1\,i} = Sb$, где b — элемент типа $md_{i'}$ или $ma_{i'}$ из определения $Sd_{i+j+1\,i}$, и $b \in Sa_{i+j+1} \cap Sa_i$. Так как $Sd_{i+j+1\,i} \subseteq Sd_{i+r\,i+r-1}$, то $b \in Sa_{i+r}$. Из неравенства $i+j+1 > i+r+1$ и определения $Sd_{i+r\,i+r+1}$ следует, что $b \in Sd_{i+r\,i+r+1}$, т. е. $Sd_{i+j+1\,i} \subseteq Sd_{i+r\,i+r+1}$. □

Лемма 5.4. *Для любых i, j, j', $1 \leqslant i,j,j' \leqslant k$, существуют идемпотенты $e_{ij} \in R$, такие что $Se_{ij} = S\varphi_i(d_{ij})$, причём если $Se_{ij} \subseteq Se_{ij'}$, то $e_{ij}S \subseteq e_{ij'}S \subseteq f_iS$.*

Доказательство. По утверждению 2) доказываемой теоремы существуют идемпотенты $e'_{ij} \in R$, такие что $Se'_{ij} = S\varphi_i(d_{ij})$. Пусть $1 \leqslant i \leqslant k$. В силу регулярной линейной упорядоченности моноида S множество $\{Se'_{ij} \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$ является линейно упорядоченным относительно включения. Пусть

$$Se'_{ij_1} \subseteq Se'_{ij_2} \subseteq \ldots \subseteq Se'_{ij_k} \subseteq Sf_i,$$

где $\{j_1, \dots, j_k\} = \{1, \dots, k\}$. Предположим, что существуют идемпотенты e_{ij_t}, $e_{ij_{t+1}}, \dots, e_{ij_k} \in R$, такие что $Se_{ij_t} = Se'_{ij_t}, Se_{ij_{t+1}} = Se'_{ij_{t+1}}, \dots, Se_{ij_k} = Se'_{ij_k}$,

$$Se_{ij_t} \subseteq Se_{ij_{t+1}} \subseteq \ldots \subseteq Se_{ij_k} \subseteq Sf_i,$$

где $1 < t \leqslant k$. Покажем, что существует идемпотент $e_{ij_{t-1}} \in R$, такой что $Se_{ij_{t-1}} = Se'_{ij_{t-1}}$ и $e_{ij_{t-1}}S \subseteq e_{ij_t}S$. Если $Se'_{ij_{t-1}} = Se_{ij_t}$, то полагаем $e_{ij_{t-1}} = e_{ij_t}$. Если $Se'_{ij_{t-1}} \subset Se_{ij_t}$, то $e_{ij_t}S \not\subseteq e'_{ij_{t-1}}S$ (иначе по утверждению 1.2 $e_{ij_{t-1}} = e'_{ij_t}$), и по утверждению 2) теоремы существует идемпотент $e_{ij_{t-1}} \in R$, такой что $Se_{ij_{t-1}} = Se'_{ij_{t-1}}$ и $e_{ij_{t-1}}S \subseteq e_{ij_t}S$. □

Поскольку φ_i — изоморфизм и $\varphi_i(d_{ij}) = \varphi_i(d_{ij})e_{ij} \in \varphi_i(d_{ij})e_{ij}Se_{ij}$, получаем $d_{ij} \in \varphi_i(d_{ij})e_{ij}Sd_{ij}$. Поскольку φ_j — изоморфизм, имеем $\varphi_j(d_{ij}) \in \varphi_i(d_{ij})e_{ij}S\varphi_j(d_{ij}) = \varphi_i(d_{ij})e_{ij}Se_{ji}$. Выберем такой элемент $t_{ij} \in e_{ij}Se_{ji}$, что $\varphi_j(d_{ji}) = \varphi_i(d_{ij})t_{ij}$. Если $\varphi_i|_{Sd_{ij}} = \varphi_j|_{Sd_{ji}}$, то положим $t_{ij} = e_{ij}$, $t_{ji} = e_{ji}$, в частности $t_{ii} = e_{ii}$.

Лемма 5.5. *Для любых i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, выполняются следующие равенства*:

1) $\varphi_j(x) = \varphi_i(x)t_{ij}$ *для любого* $x \in Sd_{ij}$;
2) $t_{ij} \cdot t_{ji} = e_{ij}$;
3) $\varphi_i^{-1}(y) = \varphi_j^{-1}(yt_{ij})$ *для любого* $y \in Se_{ij}$.

Доказательство. Проверим равенство 1). Пусть $x \in Sd_{ji}$. Тогда $x = sd_{ji} = sd_{ij}$ для некоторого $s \in S$. Следовательно,

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(sd_{ji}) = s\varphi_j(d_{ji}) = s\varphi_i(d_{ij})t_{ij} = \varphi_i(sd_{ij})t_{ij} = \varphi_i(x)t_{ij}.$$

Докажем 2). Так как $t_{ij} \in e_{ij}S$, то $e_{ij}t_{ij} = t_{ij}$. Поскольку $Se_{ij} = S\varphi_i(d_{ij})$, получаем $e_{ij} = \varphi_i(x)$ для некоторого $x \in Sd_{ij}$. По первому утверждению данной леммы $\varphi_j(x) = \varphi_i(x)t_{ij}$ и $\varphi_i(x) = \varphi_j(x)t_{ji}$. Следовательно,

$$t_{ij} \cdot t_{ji} = e_{ij}t_{ij}t_{ji} = \varphi_i(x)t_{ij} \cdot t_{ji} = \varphi_j(x)t_{ji} = \varphi_i(x) = e_{ij}.$$

Проверим равенство 3). Пусть $y \in Se_{ij} = S\varphi_i(d_{ij})$. Тогда $\varphi_i^{-1}(y) \in Sd_{ij}$. По первому утверждению данной леммы $\varphi_j(\varphi_i^{-1}(y)) = \varphi_i(\varphi_i^{-1}(y))t_{ij} = yt_{ij}$, т. е. $\varphi_i^{-1}(y) = \varphi_j^{-1}(yt_{ij})$. □

Лемма 5.6. *Пусть $Sa_i \cap B \neq \varnothing$ и $c_i \in Sa_j$ для любых i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Тогда существуют идемпотенты $g_1, \dots, g_k \in R$, такие что для любых i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$, выполняются следующие условия*:

1) $Sg_i = S\varphi_i(c)$;
2) $g_i \in Se_{ij}$;
3) $g_i \in e_{i\,i-1}S$;
4) $g_i = t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i}$;
5) $e_{i-1\,i}g_{i-1} = t_{i-1\,i}g_it_{i\,i-1}$;
6) $e_{i1}g_i = t_{i1}g_1t_{1i}$;
7) $g_1 = t_{1i}g_it_{i1}$.

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены. Заметим, что $Sc_i = Sc_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Пусть $Sc = Sc_1$. Тогда $Sc \subseteq Sd_{ij}$ для любых i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Выбираем идемпотент g_1 так, что $S\varphi_1(c) = Sg_1$ и $g_1 \in e_{1i}S$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Это можно сделать по утверждению 2) доказываемой теоремы и поскольку по лемме 5.4 множество $\{e_{1j}S \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$ является линейно упорядоченным относительно включения. Тогда

$$g_1 \in S\varphi_1(c) \subseteq S\varphi_1(d_{1i}) = Se_{1i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

и для $i = 1$ утверждения 1) и 2) леммы выполняются. Утверждения 6) и 7) леммы для $i = 1$ выполняются тривиальным образом, так как $t_{11} = e_{11}$.

Предположим, что $i \geqslant 2$ и идемпотенты $g_1, \ldots, g_{i-1}$ построены так, что для них выполняются утверждения 1)—7). Положим $g_i = t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i}$ и докажем, что g_i — идемпотент. По утверждению 2) леммы 5.5 $t_{i-1\,i}t_{i\,i-1} = e_{i-1\,i}$. Поскольку $g_{i-1} \in Se_{i-1\,i}$, имеем $g_{i-1}e_{i-1\,i} = g_{i-1}$. Следовательно,

$$g_ig_i = t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i}t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i} = \\ = t_{i\,i-1}g_{i-1}e_{i-1\,i}g_{i-1}t_{i-1\,i} = t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i} = g_i.$$

Покажем выполнение утверждения 1) леммы, т. е. $Sg_i = S\varphi_i(c)$. Так как $Sg_{i-1} = S\varphi_{i-1}(c)$, то $g_{i-1} = \varphi_{i-1}(x)$, $\varphi_{i-1}(c) = rg_{i-1}$, где $x \in Sc \subseteq Sd_{i\,i-1}$, $r \in S$. Используя утверждение 1) леммы 5.5 получаем

$$\begin{aligned} &g_i = t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i} = t_{i\,i-1}\varphi_{i-1}(x)t_{i-1\,i} = t_{i\,i-1}\varphi_i(x) \in S\varphi_i(c); \\ &\varphi_i(c) = \varphi_{i-1}(c)t_{i-1\,i} = rg_{i-1}t_{i-1\,i} = rg_{i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i} = \\ &\quad = r\varphi_{i-1}(x)g_{i-1}t_{i-1\,i} = r\varphi_i(x)t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i} = r\varphi_i(x)g_i \in Sg_i. \end{aligned}$$

Утверждение 2) леммы выполняется, так как $g_i \in S\varphi_i(c) \subseteq S\varphi_i(d_{ij}) = Se_{ij}$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Справедливость утверждения 3) следует из определения g_i и построения $t_{i\,i-1}$ (по построению $t_{i\,i-1} \in e_{i\,i-1}S$).

Докажем выполнение утверждения 5) леммы. Применяя утверждение 2) леммы 5.5 и равенство $g_{i-1}e_{i-1\,i} = g_{i-1}$, которое справедливо по предположению индукции, получаем

$$t_{i-1\,i}g_it_{i\,i-1} = t_{i-1\,i}t_{i\,i-1}g_{i-1}t_{i-1\,i}t_{i\,i-1} = e_{i-1\,i}g_{i-1}e_{i-1\,i} = e_{i-1\,i}g_{i-1}.$$

Докажем выполнение утверждения 6) леммы. Так как $e_{i1} \in S\varphi_i(d_{i1})$ и $g_1 \in S\varphi_1(c)$, то $e_{i1} = \varphi_i(y)$, $g_1 = \varphi_1(z)$, где $y \in Sd_{i1}$, $z \in Sc$. По лемме 5.3 $Sd_{i1} \subseteq \bigcap\{Sd_{2+r\,1+r} \mid 0 \leqslant r \leqslant i-2\}$. По определению Sc имеем $Sc \subseteq \bigcap\{Sd_{jr} \mid 1 \leqslant j, r \leqslant k\}$. Следовательно, по утверждению 1) леммы 5.5

$$\begin{aligned} &e_{i1}t_{i1} = \varphi_i(y)t_{i1} = \varphi_1(y) = \\ &\quad = \varphi_2(y)t_{21} = \ldots = \varphi_i(y)t_{i\,i-1}\ldots t_{21} = e_{i1}t_{i\,i-1}\ldots t_{21}; \\ &g_1t_{1i} = \varphi_1(z)t_{1i} = \varphi_i(z) = \\ &\quad = \varphi_{i-1}(z)t_{i-1\,i} = \ldots = \varphi_1(z)t_{12}\ldots t_{i-1\,i} = g_1t_{12}\ldots t_{i-1\,i}. \end{aligned}$$

Поскольку утверждение 4) леммы имеет место для всех индексов, не превосходящих i, то

$$t_{i1}g_1t_{1i} = e_{i1}t_{i1}g_1t_{1i} = e_{i1}t_{i\,i-1}\dots t_{21}g_1t_{12}\dots t_{i-1\,i} = e_{i1}g_i.$$

Утверждение 7) вытекает из следующих равенств, которые верны в силу утверждения 2) леммы 5.5 и утверждения 6) данной леммы:

$$g_1 = e_{1i}g_1e_{1i} = e_{1i}t_{1i}t_{i1}g_1t_{1i}t_{i1} = e_{1i}t_{1i}e_{i1}g_it_{i1} = t_{1i}g_it_{i1}.$$

Таким образом, построены идемпотенты $g_1,\dots,g_k \in R$, для которых выполняются утверждения 1)—7) леммы. $\square$

Замечание 5.1. Идемпотент g_1 выбран произвольно с учётом условий

$$S\varphi_1(c) = Sg_1 \text{ и } g_1 \in e_{1i}S \text{ для всех } i,\ 1 \leqslant i \leqslant k. \tag{5.2}$$

В леммах 5.7—5.9 будем предполагать, что элементы $a_1,\dots,a_k$ удовлетворяют условиям $Sa_i \cap B \neq \varnothing$ и $Sa_i \cap Sa_j \neq \varnothing$ для всех i, j, $1 \leqslant i,j \leqslant k$. Определим на множестве $\{a_1,\dots,a_k\}$ бинарное отношение следующим образом:

$$a_i \sim a_j \iff c_i, c_j \in Sa_i \cap Sa_j.$$

Из определения множеств Sc_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, следует, что это отношение является отношением эквивалентности. Для каждого класса эквивалентности строим идемпотенты g_i, удовлетворяющие лемме 5.6.

Лемма 5.7. *${}_SB \models \Phi_1(\bar b, \bar d)$, где $\bar b = \langle b_1,\dots,b_k\rangle \in B^k$, $b_i = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. Пусть $\langle i,j,n,m\rangle \in L_1$. Предположим, что $a_i \sim a_j$. Покажем, что ${}_SB \models nb_i = mb_j$ для $b_r = \varphi_r^{-1}(\varphi_r(a_r)g_r)$, $r \in \{i,j\}$. Пусть $i = j+l$, где $l \geqslant 0$. Так как $na_i = ma_j \in Sa_i \cap Sa_j$, то $na_i \in Sd_{ij} = Sd_{j+l\,j}$. По лемме 5.3

$$Sd_{j+l\,j} \subseteq \bigcap\{Sd_{j+r+1\,j+r} \mid 0 \leqslant r \leqslant l-1\},$$

если $l \geqslant 1$. Следовательно, по утверждениям 1), 3) леммы 5.5 и утверждению 4) леммы 5.6 получаем равенства

$$\begin{aligned} mb_j &= m\varphi_j^{-1}(\varphi_j(a_j)g_j) = \varphi_j^{-1}(\varphi_j(ma_j)g_j) = \varphi_{j+1}^{-1}(\varphi_{j+1}(ma_j)t_{i+1\,j}g_jt_{j\,j+1}) = \\ &= \varphi_{j+1}^{-1}(\varphi_{j+1}(ma_j)g_{j+1}) = \ldots = \\ &= \varphi_{j+l}^{-1}(\varphi_{j+l}(ma_j)g_{j+l}) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(na_i)g_i) = n\varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i) = nb_i, \end{aligned}$$

т. е. $mb_j = nb_i$. Если $l = 0$, то равенство $mb_j = nb_i$ очевидно.

Предположим, что соотношение $a_i \sim a_j$ не выполняется. Пусть, например, $c_i \notin Sa_j$. Покажем, что $Sa_i \cap Sa_j \subseteq B$. Пусть $a \in Sa_i \cap Sa_j$. По определению Sc_i имеем $Sc_i \subseteq Sa_i \cap B$. По утверждению 2.5 либо $Sa \subseteq Sc_i$, либо $Sc_i \subseteq Sa$. Если $Sc_i \subseteq Sa$, то $c_i \in Sa_j$, что противоречит предположению. Следовательно, $Sa_i \cap Sa_j \subseteq Sc_i \subseteq B$.

Поскольку $na_i = ma_j$, то $na_i, ma_j \in Sa_i \cap Sa_j \subseteq Sc_i$. Следовательно, $ma_j \in B$, $ma_j \in Sc_j$ и $na_i \in Sc_i$. Таким образом, $\varphi_i(na_i) \in S\varphi_i(c_i) = Sg_i$, $\varphi_j(ma_j) \in S\varphi_j(c_j) = Sg_j$,

$$nb_i = n\varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(na_i)g_i) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(na_i)) = na_i.$$

Аналогично, $mb_j = ma_j$. Отсюда $nb_i = na_i = ma_j = mb_j$, и лемма доказана. □

Лемма 5.8. *${}_SB \models \Phi_2(\bar b, \bar d)$, где $\bar b = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle \in B^k$, $b_i = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. Пусть $\langle i, j, n, m\rangle \in L_2$. Покажем, что ${}_SB \models nb_i = md_j$ для $b_i = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i)$. По определению Sc_i имеем $md_j \in Sc_i$. Поскольку $na_i = md_j$, то $na_i \in Sc_i$. По утверждению 1) леммы 5.6 $S\varphi_i(c_i) = Sg_i$. Следовательно, $\varphi_i(na_i)g_i = \varphi_i(na_i)$ и

$$nb_i = n\varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(na_i)g_i) = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(na_i)) = na_i = md_j,$$

т. е. $nb_i = md_j$. □

По замечанию 5.1 для каждого класса эквивалентности по отношению $\sim$ существует некоторая свобода выбора одного из идемпотентов g_i, построенных для этого класса. Пусть $g_{i_1}, \ldots, g_{i_s}$ — все такие идемпотенты.

Лемма 5.9. *Идемпотенты $g_{i_1}, \ldots, g_{i_s}$ можно выбрать таким образом, что для них выполняются условия* (5.2) *с заменой g_1 на g_{i_t}, $1 \leqslant t \leqslant s$, и ${}_SB \models \bigwedge\limits_{i=1}^{4} \Phi_i(\bar b, \bar d)$, где $\bar b = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle \in B^k$, $b_i = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Доказательство. Пусть $\langle i, j, n, m\rangle \in L_3$. Заметим, что

$$\varphi_i(b_i) = \varphi_i(\varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i)) = \varphi_i(a_i)g_i \in Sg_i,$$

т. е. $b_i \in Sc_i \subseteq B$. Кроме того, $b_i \in Sa_i$. Добавим к множеству $\{d_1, \ldots, d_r\}$ элемент b_i. Можно считать, что $b_i = d'_i \in \{d_1, \ldots, d_r\}$. Добавим к множеству $\{a_1, \ldots, a_r\}$ элемент b_i. Можно считать, что $b_i = a_{i'} \in \{a_1, \ldots, a_k\}$. Аналогично, считаем что $b_j = d'_j \in \{d_1, \ldots, d_r\}$ и $b_j = a_{j'} \in \{a_1, \ldots, a_k\}$. Формулу

$$\Phi_1(\bar x, \bar d) \wedge nx_{i'} = nd'_i \wedge mx_{j'} = md'_j$$

обозначим снова через $\Phi_1(\bar x)$. Поскольку $b_i \in Sc_i$, то множества Sc_i и Sd_{il}, где $a_l \sim a_i$, не изменятся. По этой же причине не изменятся множества Sc_j и Sd_{jl}, где $a_l \sim a_j$. Поскольку $a_{i'} \in Sa_i$, то $\varphi_{i'} = \varphi_i|_{Sa_{i'}}$ и при любом выборе идемпотентов g'_i, удовлетворяющих лемме 5.6, $\varphi_{i'}(a_{i'}) \in Sg'_{i'}$ и

$$b'_{i'} = \varphi_{i'}^{-1}(\varphi_{i'}(a_{i'})g'_{i'}) = a_{i'} = b_i.$$

Аналогично, $b'_{j'} = b_j$. Если $na_i = md'_j$ и $ma_j = nd'_i$, то при любом выборе идемпотентов g'_i, удовлетворяющих лемме 5.6,

$$nb'_i = n\varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g'_i) = a_{i'} = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(na_i)g'_i) = na_i.$$

Аналогично, $mb'_j = ma_j$, т. е. $nb'_i \neq mb'_j$. Поэтому рассматриваем только случай $na_i \neq md'_j$ или $ma_j \neq nd'_i$. Без ограничения общности можно считать, что $ma_j \neq nd'_i$. Формулу

$$\Phi_4(\bar{x}, \bar{d}) \wedge \neg m x_j = n d'_i$$

обозначим снова через $\Phi_4(\bar{x}, \bar{d})$. Формулу, получающуюся из формулы $\Phi_3(\bar{x}, \bar{d})$ вычёркиванием подформул $\neg m x_j = n x_i$ и $\neg n x_i = m x_j$ при условии $na_i \neq md'_j$ или $ma_j \neq nd'_i$, обозначим через $\Phi_3(\bar{x}, \bar{d})$. Таким образом поступаем со всеми $\langle i, j, n, m\rangle \in L_3$. В результате в множестве L_3 остаются только такие наборы $\langle i, j, n, m\rangle$, для которых $nb'_i \neq mb'_j$ при любом выборе идемпотентов g'_i, удовлетворяющих лемме 5.6. Если мы выберем идемпотенты $g_{i_1}, \ldots, g_{i_s}$ (по которым строятся все остальные g_i, $1 \leqslant i \leqslant k$), удовлетворяющие (5.2) с заменой g_1 на g_{i_t}, $1 \leqslant t \leqslant s$, так, что ${}_S B \models \Phi_4(\bar{x}, \bar{d})$, то по отмеченному выше и леммам 5.7 и 5.8 ${}_S B \models \bigwedge\limits_{i=1}^{4} \Phi_i(\bar{b}, \bar{d})$, где $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle \in B^k$.

Без ограничения общности можно считать, что $g_{i_1} = g_1$. Покажем, как можно выбрать элемент g_1 (остальные идемпотенты $g_{i_2}, \ldots, g_{i_s}$ выбираются аналогичным образом). Пусть $K_1 = \{1, 2, \ldots, k_1\} = \{i \mid a_i \sim a_1\}$ и имеет место лемма 5.3 с заменой k на k_1. Заметим, что если $\langle i, j, n, m\rangle \in L_4$, $i \in K_1$ и $md_j \notin Sa_i$, то $nb_i \neq md_j$ при любом выборе g_1, удовлетворяющего условиям (5.2). Для всех $i \in K_1$ построим e'_{ij} и t'_{ij}, где $j \in K_1$, так, что они удовлетворяют лемме 5.4 с заменой e_{ij} на e'_{ij}, лемме 5.5 с заменой t_{ij} на t'_{ij} и условию

$$\varphi_l(na_l) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i} e'_{ij} \neq \varphi_l(md_t) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i} e'_{ij},$$

где $md_t \in Sa_l$, $l \geqslant i$, $\langle l, t, n, m\rangle \in L_4$. Предположим, что $e'_{k_1 j}, e'_{k_1-1 j}, \ldots, e'_{i+1 j}$ и $t'_{k_1 j}, t'_{k_1-1 j}, \ldots, t'_{i+1 j}$ построены для всех $j \in K_1$. Введём обозначения

$$Y_i^l = \{x \in R \mid \varphi_l(na_l) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i} x = \varphi_l(md_t) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i} x,$$
$$md_t \in Sa_l,\ \langle l, t, n, m\rangle \in L_4\},$$

$$Y_i = \bigcup \{Y_i^l \mid l \geqslant i\}.$$

Покажем, что $f_i \notin Y_i$. Пусть $f_i \in Y_i^l$. Если $l = i$, то

$$\varphi_i(na_i) = \varphi_i(na_i) f_i = \varphi_i(ma_j) f_i = \varphi_i(ma_j),$$

т. е. $na_i = ma_j$, что неверно. По определению $t'_{i+1i} \in Se'_{ii+1} \subseteq Sf_i$, т. е. $t'_{i+1i} f_i = t'_{i+1i}$. Следовательно,

$$\varphi_l(na_l) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i} = \varphi_l(md_t) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i}.$$

Тогда

$$\varphi_l(na_l) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i} t'_{ii+1} = \varphi_l(md_t) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+1i} t'_{ii+1}.$$

По утверждению 2) леммы 5.5

$$\varphi_l(na_l) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+2i+1} e'_{i+1i} = \varphi_l(md_t) t'_{ll-1} t'_{l-1l-2} \ldots t'_{i+2i+1} e'_{i+1i},$$

что противоречит выбору элемента e'_{i+1i}. Пусть $Y_i \neq \varnothing$. В силу аксиоматизируемости класса $\mathfrak{R}$ имеем $Y_i = \bigcup\{k_sR \mid 1 \leqslant s \leqslant t\}$ для некоторых $t > 0$, $k_s \in S$, $1 \leqslant s \leqslant t$. Положим $X_i = \bigcup\{k_sS \mid 1 \leqslant s \leqslant t\}$. Ясно, что

$$h \in Y_i \iff h \in X_i$$

для любого идемпотента $h \in R$. Следовательно, $f_i \notin X_i$. По леммам 5.3 и 5.4 множество $\{Se_{ij} \mid j \in K_1\}$ является линейно упорядоченным по включению. Пусть

$$Se_{ij_1} \subseteq Se_{ij_2} \subseteq \ldots \subseteq Se_{ij_r} \subseteq Sf_i,$$

где $\{j_1, \ldots, j_r\} = \{j \mid j \in K_1\}$. Пусть $e'_{ij_{r+1}} = f_i$. Предположим, что идемпотенты $e'_{ij_l}, e'_{ij_{l+1}}, \ldots, e'_{ij_r}$ уже построены, причём $Se'_{ij_l} = Se_{ij_l}$. Поскольку $e'_{ij_l} \notin X_i$, то по утверждению 2) доказываемой теоремы существует идемпотент $e'_{ij_{l-1}}$, такой что $Se'_{ij_{l-1}} = Se_{ij_{l-1}}$, $e'_{ij_{l-1}}S \subseteq e_{ij_l}S$ и $e'_{ij_{l-1}} \notin X_i$. По идемпотентам e'_{ij} строим $t'_{ij'} \in S$, удовлетворяющие условиям леммы 5.5. По построению $g_1 \in Se_{1j} = Se'_{1j}$, где j/inK_1. Тогда по утверждению 2) данной теоремы существует идемпотент g'_1, такой что $Sg'_1 = Sg_1$, $g'_1S \subseteq e_{1j}S$ для всех $j \in K_1$ и $g'_1 \notin X_1$. Аналогично строим идемпотенты $g_{i_2}, \ldots, g_{i_s}$. Остальные идемпотенты g_i строим удовлетворяющими лемме 5.6. Элементы b'_i определяем так же, как и прежде: $b'_i = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g'_i)$, где $i \in K_1$. Тогда, как замечено выше, ${}_SB \models \bigwedge\limits_{i=1}^{2} \Phi_i(b'_1, \ldots, b'_k)$.

Покажем, что $nb'_i \neq md_j$, где $\langle i, j, n, m\rangle \in L_4$, $i \in K_1$. Пусть $nb'_i = md_j$. Тогда $\varphi_i(na_i)g'_i = \varphi_i(md_j)$. По утверждению 4) леммы 5.6 $\varphi_i(na_i)t'_{ii-1}g'_{i-1}t'_{i-1i} = \varphi_i(md_j)$. Тогда $\varphi_i(na_i)t'_{ii-1}g'_{i-1}t'_{i-1i}t'_{ii-1} = \varphi_i(md_j)t'_{ii-1}$. По утверждению 2) леммы 5.5 $\varphi_i(na_i)t'_{ii-1}g'_{i-1}e'_{i-1i} = \varphi_i(md_j)t'_{ii-1}$. По утверждению 2) леммы 5.6 $\varphi_i(na_i)t'_{ii-1}g'_{i-1} = \varphi_i(md_j)t'_{ii-1}$. Продолжая этот процесс, получаем

$$\varphi_i(na_i)t'_{ii-1}t'_{i-1i-2}\ldots t'_{21}g'_1 = \varphi_i(md_j)t'_{ii-1}t'_{i-1i-2}\ldots t'_{21},$$

т. е. $g'_1 \in Y_1$. Следовательно, $g'_1 \in X_1$, что противоречит построению элемента g'_1. Таким образом, ${}_SB \models \Phi_4(\bar{b}, \bar{d})$. $\square$

Пусть $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\}$ — произвольное максимальное подмножество множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$ со свойствами

$$Sa_i \cap B = \varnothing, \quad Sa_i \cap Sa_j \neq \varnothing \ \text{ для любых } \ i, j \in \{i_1, \ldots, i_s\}, \tag{5.3}$$

b^1 — произвольный элемент B. По определению регулярного полигона существуют идемпотент $f^1 \in R$ и изоморфизм $\psi_1\colon {}_SSb^1 \to {}_SSf^1$. По лемме 5.2 найдётся такой идемпотент $f \in R$, что $Sf \subseteq Sf^1$ и ${}_SSf$ — минимальный по включению полигон. Введём обозначения $Sb = S\psi_1^{-1}(f_1)$, $\psi = \psi_1|_{Sb}$. Поскольку $Sa_i \cap Sa_j \neq \varnothing$ для любых $i, j \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, то по утверждению 1) леммы 5.1 существует такой элемент $a^1 \in S$, что $a^1 \in \bigcap\{Sa_i \mid i \in \{i_1, \ldots, i_s\}\}$. В силу регулярности полигона ${}_SA$ существуют идемпотент $e^1 \in R$ и изоморфизм $\varphi\colon {}_SSa^1 \to {}_SSe^1$. По лемме 5.2 существует такой идемпотент $e \in R$, что $Se \subseteq Se^1$, полигон

${}_S Se$ минимален и правый идеал eS минимален среди главных правых идеалов моноида S, порождённых идемпотентами. Полагаем $B' = Sa = S\varphi^{-1}(e)$, где $a \in A$. Тогда $Sa_i \cap B' \neq \varnothing$ для любого $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$. Заменяя B на B' во всех предыдущих рассуждениях, относящихся к доказательству достаточности, получаем, в частности, $b^i = \varphi_i^{-1}(\varphi_i(a_i)g_i) \in B'$, где $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$. Пусть α — произвольный изоморфизм из ${}_S Sa$ в ${}_S Se$ (например, $\alpha = \varphi|_{Sa}$). Через b_i обозначим элемент $\psi^{-1}(\alpha(b^i)f)$. Ясно, что $b_i \in Sb \subseteq B$, $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$. Для элементов $a_i \in \{a_1, \ldots, a_k\}$, таких что $Sa_i \cap B \neq \varnothing$, элементы $b_i \in B$ строим, как в лемме 5.9.

Докажем, что ${}_S B \models \bigwedge\limits_{i=1}^{4} \Phi_i(\bar{b}, \bar{d})$, где $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle \in B^k$.

Если $\langle i, j, n, m \rangle \in L_2$, то $Sa_i \cap B \neq \varnothing$, и по лемме 5.9 ${}_S B \models nb_i = md_j$.

Если $\langle i, j, n, m \rangle \in L_1$ и $Sa_i \cap B \neq \varnothing$, то $Sa_i \cap Sa_j \neq \varnothing$. По утверждению 1) доказываемой теоремы $Sa_j \cap B \neq \varnothing$, по лемме 5.9 ${}_S B \models nb_i = md_j$.

Пусть $\langle i, j, n, m \rangle \in L_1$, $Sa_i \cap B = \varnothing$, $Sa_j \cap B = \varnothing$. Тогда ${}_S Sa \models nb^i = mb^j$ по лемме 5.9 и выбору $b^i, b^j \in B'$. Следовательно,

$$nb_i = n\psi^{-1}(\alpha(b^i)f) = \psi^{-1}(\alpha(nb^i)f) = \psi^{-1}(\alpha(mb^j)f) = m\psi^{-1}(\alpha(b^j)f) = mb_j.$$

Если $\langle i, j, n, m \rangle \in L_3$ или $\langle i, j', n, m \rangle \in L_4$ и $Sa_i \cap Sa_j \neq \varnothing$, $Sa_i \cap B \neq \varnothing$, $Sa_j \cap B \neq \varnothing$, то по лемме 5.9 $nb_i \neq mb_j$ или $nb_i \neq md_{j'}$ соответственно.

Пусть индекс i, $1 \leqslant i \leqslant k$, такой, что $Sa_i \cap B = \varnothing$. Множество $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\}$, где $i_1 = i$, является максимальным подмножеством множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$ со свойствами (5.3). Выше для множества $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_s}\}$ определены элементы $a \in \bigcap\{Sa_j \mid j \in \{i_1, \ldots, i_s\}\}$, $e \in S$ и выбран произвольный изоморфизм $\alpha\colon {}_S Sa \to {}_S Se$, причём полигон ${}_S Se$ минимален и правый идеал eS минимален среди главных правых идеалов моноида S, порождённых идемпотентами.

Предположим, что $\langle i, j, n, m \rangle \in L_3$, $j \in \{i_1, \ldots, i_s\}$. По лемме 5.9 $nb^i \neq mb^j$. Так как $\alpha(nb^i), \alpha(mb^j) \in Se$, то $e \notin X = \{x \mid \alpha(nb^i)x = \alpha(mb^j)x\}$. Ясно, что $efS \subseteq eS$. Так как $Sef \subseteq Sf$, то по утверждению 2) доказываемой теоремы $efS = gS$ для некоторого идемпотента $g \in S$. В силу минимальности правого идеала eS и включения $gS \subseteq eS$ получаем равенство $eS = gS = efS$, т. е. $e = efr$ для некоторого $r \in S$. Если бы $f \in X$, то $ef \in X$ и $e \in X$. Следовательно, $f \notin X$ и

$$nb_i = n\psi^{-1}(\alpha(b^i)f) = \psi^{-1}(\alpha(nb^i)f) \neq \psi^{-1}(\alpha(mb^j)f) = m\psi^{-1}(\alpha(b^j)f) = mb_j.$$

Предположим, что $\langle i, j, n, m \rangle \in L_3$ и $j \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$ или $\langle i, j, n, m \rangle \in L_4$. Определим гомоморфизм $\alpha_t\colon {}_S Se \to {}_S Se$, $t \in S$, следующим образом: $\alpha_t(se) = sete$ для любого $s \in S$. В силу минимальности полигона ${}_S Se$ выполняется равенство $Se = Sete$, т. е. $e = lete$ для некоторого $l \in S$ и α_t — эпиморфизм. Из минимальности правого идеала eS следует равенство $eS = eteS$, т. е. $e = etel'$ для некоторого $l' \in S$ и α_t — изоморфизм. Заметим, что $\alpha_t \neq \alpha_s$ влечёт $\alpha_t(c) \neq \alpha_s(c)$ для любого $c \in Se$. Действительно, если $cete = \alpha_t(c) = \alpha_s(c) = cese$, то, поскольку $Se = Sce$, т. е. $e = c_1ce$ для некоторого $c_1 \in S$, имеем $ete = c_1cete = c_1cese = ese$, что противоречит предположению. По утверждению 3) доказываемой теоремы $|eSe| \geqslant \omega$. Следовательно, существуют t_i,

$i \in \omega$, такие что $\alpha_{t_i} \neq \alpha_{t_j}$, $i \neq j$. В силу минимальности полигона Sf выполняется равенство $Sef = Sf$, т. е.

$$f = uef \tag{5.4}$$

для некоторого $u \in S$. Для $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$ и $n \in S$ введём обозначения

$$X_i^n = \{x \in Se \mid x = \psi(mb_j)ue, \text{ где } mb_j \in Sb,\ \langle i, j, n, m\rangle \in L_3\},$$
$$Y_i^n = \{x \in Se \mid x = \psi(md_j)ue, \text{ где } md_j \in Sb,\ \langle i, j, n, m\rangle \in L_4\}.$$

Если $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$ и $n \in S$ таковы, что либо множество X_i^n, либо множество Y_i^n не определено, то полагаем $X_i^n = \varnothing$ или $Y_i^n = \varnothing$ соответственно. Поскольку множества X_i^n и Y_i^n конечны для всех $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$ и $n \in S$, а множество различных изоморфизмов α_t бесконечно, существует такой элемент $t \in S$, что $\alpha_t\alpha(nb^i) \notin X_i^n \cup Y_i^n$ для любых $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, $n \in S$. В качестве изоморфизма α возьмём изоморфизм $\alpha_t\alpha\colon {}_SSa \to {}_SSe$, который вновь обозначим через α. Тогда $\alpha(nb^i) \notin X_i^n \cup Y_i^n$ для любых $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, $n \in S$.

Предположим, что $\langle i, j, n, m\rangle \in L_3$ и $j \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$. Если $nb_i = mb_j$, то $\psi^{-1}(\alpha(nb^i)f) = mb_j$ по определению b_i и $mb_j \in Sb$, т. е.

$$\alpha(nb^i)ef = \alpha(nb^i)f = \psi(mb_j) = \psi(mb_j)f.$$

Из равенства (5.4) вытекает $\alpha(nb^i)ef = \psi(mb_j)uef$. Пользуясь минимальностью правого идеала eS и равенством $efS = eS$, получаем $\alpha(nb^i)e = \alpha(nb^i) = \psi(mb_j)ue$, т. е. $\alpha(nb^i) \in X_i^n$, что противоречит выбору изоморфизма α. Следовательно, $nb_i \neq mb_j$.

Если $\langle i, j, n, m\rangle \in L_4$, то неравенство $nb_i \neq md_j$ доказывается аналогично. Теорема доказана. □

Следствие 5.1. *Класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов над бесконечной группой аксиоматизируем и модельно полон.*

Доказательство следует из теоремы 5.1 и следствия 4.3. □

§ 6. Полнота класса регулярных полигонов

В данном параграфе изучаются моноиды с полным классом регулярных полигонов. Известно, что из модельной полноты класса $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов следует полнота этого класса (лемма 6.1). Теоремы 6.1 и 6.2 утверждают, что полнота класса $\mathfrak{R}$ влечёт модельную полноту этого класса, если на моноид наложить одно из условий: класс $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит или моноид является линейно упорядоченным глубины 2. Теоремы 6.3 и 6.4 показывают, что в теоремах 6.1 и 6.2 эти условия являются существенными.

Если для элементов $a \in {}_SA$ и $b \in {}_SB$ существует такой изоморфизм $f\colon {}_SSa \to {}_SSb$, что $f(a) = b$, то этот факт будем обозначать ${}_SSa \,\widetilde{\to}\, {}_SSb$.

Будем говорить, что класс $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит, если для каждого идемпотента $e \in R$ существует такая формула $\Phi_e(x)$, что для любого регулярного полигона ${}_SA$ и любого $a \in {}_SA$

$$ {}_SA \models \Phi_e(a) \iff {}_SSa \mathrel{\widetilde{\to}} {}_SSe. $$

Теорема 6.1 ([Овч2]). *Следующие условия эквивалентны*:

1) *аксиоматизируемый класс $\mathfrak{R}$ модельно полон и удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит*;
2) *аксиоматизируемый класс $\mathfrak{R}$ полон и удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит*;
3) *полугруппа R является прямоугольной связкой бесконечных групп, множество $I(R)$ конечно.*

Доказательство содержит ряд лемм.

Лемма 6.1. *Если класс регулярных S-полигонов $\mathfrak{R}$ модельно полон, то $\mathfrak{R}$ полон.*

Доказательство. Если ${}_SA, {}_SB \in \mathfrak{R}$, то полигон ${}_SC \rightleftharpoons {}_SA \sqcup {}_SB$ также регулярен. Так как в силу модельной полноты класса $\mathfrak{R}$ полигоны ${}_SA$ и ${}_SB$ являются элементарными подмоделями полигона ${}_SC$, то $\mathrm{Th}({}_SA) = \mathrm{Th}({}_SC) = \mathrm{Th}({}_SB)$, т. е. ${}_SA \equiv {}_SB$. □

Лемма 6.2. *Если класс $\mathfrak{R}$ полон и удовлетворяет условию формульной определимости изоморфных орбит, то для любого идемпотента $e \in R$ и любого элемента $a \in R$ из $Sa \subseteq Se$ следует $Sa = Se$.*

Доказательство. Пусть e — идемпотент, принадлежащий R, и формула $\Phi_e(x)$ такова, что для любого ${}_SA \in \mathfrak{R}$ и любого $a \in A$

$$ {}_SA \models \Phi_e(a) \iff {}_SSa \mathrel{\widetilde{\to}} {}_SSe. $$

Предположим, что для некоторого элемента $a \in R$ выполняется $Sa \subset Se$. Так как $a \in R$, то полигон ${}_SSa$ регулярен и ${}_SSa \equiv {}_SSe$ в силу полноты класса $\mathfrak{R}$. Поскольку ${}_SSe \models \Phi_e(e)$, выполнимо ${}_SSe \models \exists x\, \Phi_e(x)$. Пусть b — реализация формулы $\Phi_e(x)$ в полигоне ${}_SSa$. Так как $Sa \subset Se$, то $b \neq e$ и $Sb \subset Se$. Тогда $be = b$ и

$$ {}_SSe \models \Phi_e(b) \wedge be = b \wedge \Phi_e(e). $$

Следовательно,

$$ {}_SSe \models \Phi_e(b) \wedge \exists y\, (by = b \wedge \Phi_e(y)). $$

Обозначим через $\Psi(x)$ формулу $\Phi_e(x) \to \exists y\, (by = x \wedge \Phi_e(y))$. Очевидно, ${}_SSe \models \Psi(b)$.

Покажем, что ${}_SSe \not\models \Psi(e)$. Так как ${}_SSe \models \Phi_e(e)$, то достаточно проверить, что

$$ {}_SSe \not\models \exists y\, (by = e \wedge \Phi_e(y)) $$

или

$$ {}_SSe \models \forall y\,(\Phi_e(y) \to by \neq e). $$

Предположим, что существует такой элемент $c \in Se$, что ${}_SSe \models \Phi_e(c)$ и $bc = e$. Так как ${}_SSe \models \Phi_e(c)$, то ${}_SSc \xrightarrow{\sim} {}_SSe$. Пусть $f\colon {}_SSc \to {}_SSe$ — изоморфизм, для которого $f(c) = e$. Так как $c \in Se$, то $ce = c$. Из равенства $bc = e$ получаем, что $cbc = c$. Тогда $cbf(c) = f(c)$ или $cbe = e$, но $be = b$, следовательно, $cb = e$ и, значит, $e \in Sb$, что противоречит включению $Sb \subset Se$. Итак, ${}_SSe \not\models \Psi(e)$ и, следовательно, ${}_SSe \not\models \forall x\,\Psi(x)$.

Построим теперь по индукции регулярный полигон ${}_SA$, на котором истинна формула $\forall x\,\Psi(x)$.

1. Положим ${}_SA_0 \rightleftharpoons {}_SSe$. Очевидно, полигон ${}_SA_0$ регулярен и связен.

2. Если регулярный связный полигон ${}_SA_k$ построен, то обозначим через X_k множество

$$ \{x \mid x \in A_k,\ {}_SSx \xrightarrow{\sim} {}_SSe,\ {}_SA_k \models \forall y\,(\Phi_e(y) \to by \neq x)\}. $$

Для каждого $x \in X_k$ рассмотрим такой регулярный полигон ${}_SSa_x$, что ${}_SSa_x \xrightarrow{\sim} {}_SSe$. При этом без ограничения общности мы можем считать, что $Sa_x \cap Sa_y = \varnothing$ при $x \neq y$ и $Sa_x \cap A_k = \varnothing$ для любого $x \in X_k$. Пусть $f_x\colon {}_SSa_x \to {}_SSe$ — изоморфизм, для которого $f(a_x) = e$. Положим

$$ {}_S\tilde{A}_{k+1} \rightleftharpoons \Bigl({}_SA_k \bigsqcup \Bigl(\bigsqcup_{x\in X_k} {}_SSa_x\Bigr)\Bigr)/\theta, $$

где θ — конгруэнция, порождённая множеством $\{(x, ba_x) \mid x \in X_k\}$. Так как ${}_SSb = {}_SS(be) \xrightarrow{\sim} {}_SSe$ и ${}_SSa_x \xrightarrow{\sim} {}_SSe$, то

$$ {}_SS(ba_x) \xrightarrow{\sim} {}_SS(be) \xrightarrow{\sim} {}_SSe. $$

По определению множества X_k для любого $x \in X_k$ выполняется ${}_SSx \xrightarrow{\sim} {}_SSe$. Так как существует изоморфизм $f_x\colon {}_SSx \to {}_SSba_x$, при котором $f_x(x) = b \cdot a_x$, то

$$ \langle x_0, y_0\rangle \in \theta \iff $$
$$ \iff x_0 = y_0, \text{ или } x_0 = sx \text{ и } y_0 = sba_x \text{ для некоторых } s \in S,\ x \in X_k. $$

Поскольку для любого $x \in X_k$ имеет место $x \in A_k$ и $ba_x \in Sa_x$, то $x \not\sim ba_x$, следовательно, $sx \not\sim sba_x$ и θ является амальгамной конгруэнцией. Так как ${}_SA_k$, ${}_SSa_x$ — регулярные полигоны, то полигон ${}_S\tilde{A}_{k+1}$ регулярен.

Покажем, что $c \sim d$ для любых $c, d \in {}_SA_{k+1}$. Пусть c_1, d_1 — некоторые элементы, для которых $c = c_1/\theta$, $d = d_1/\theta$. Если $c_1, d_1 \in A_k$, то $c \sim d$ в силу связности полигона ${}_SA_k$. Если $c_1 \in A_k$ и $d_1 \in Sa_x$, то $d_1 \sim a_x \sim ba_x$ и $c_1 \sim x$ в силу связности полигона ${}_SA_k$. Тогда $c_1/\theta \sim x/\theta$ и $d_1/\theta \sim ba_x/\theta$. Так как $x/\theta = ba_x/\theta$, то $c_1/\theta \sim d_1/\theta$, т. е. $c \sim d$. Если же $c_1 \in Sa_x$ и $d_1 \in Sa_y$ для некоторых $x, y \in X_k$, то для любого $b_1 \in A_k$ выполняется $c_1/\theta \sim b_1/\theta$ и $d_1/\theta \sim b_1/\theta$. По транзитивности отношения $\sim$ получаем, что $c_1/\theta \sim d_1/\theta$, т. е. $c \sim d$. Таким образом, ${}_S\tilde{A}_{k+1}$ — связный полигон.

Покажем, что для любого $x_0 \in X_k$ выполняется ${}_S\tilde{A}_{k+1} \models \Psi(x_0/\theta)$. Так как полигоны ${}_SA_k$ и ${}_SSa_{x_0}$ связны и θ — амальгамная конгруэнция, то ограничения на ${}_SA_k$ и ${}_SSa_{x_0}$ естественного гомоморфизма, соответствующего θ, являются изоморфными вложениями. Поскольку ${}_SSx_0 \xrightarrow{\sim} {}_SSe$ и ${}_SSa_{x_0} \xrightarrow{\sim} {}_SSe$, то

$$ {}_SS(x_0/\theta) \xrightarrow{\sim} {}_SSe, \quad {}_SS(a_{x_0}/\theta) \xrightarrow{\sim} {}_SSe, $$
$$ {}_S\tilde{A}_{k+1} \models \Phi_e(x_0/\theta), \quad {}_S\tilde{A}_{k+1} \models \Phi_e(a_{x_0}/\theta). $$

Так как

$$ b(a_{x_0}/\theta) = (ba_{x_0})/\theta = x_0/\theta, $$

то

$$ {}_S\tilde{A}_{k+1} \models b(a_{x_0}/\theta) = x_0/\theta $$

и

$$ {}_S\tilde{A}_{k+1} \models \Phi_e(x_0/\theta) \to \exists y\,(by = (x_0/\theta) \wedge \Phi_e(y)), $$

т. е. ${}_S\tilde{A}_{k+1} \models \Psi(x_0/\theta)$.

Поскольку ${}_SA_k$ изоморфно вкладывается в ${}_S\tilde{A}_{k+1}$, то существует такой полигон ${}_SA_{k+1}$, что ${}_SA_k \subseteq {}_SA_{k+1}$ и ${}_SA_{k+1} \cong {}_S\tilde{A}_{k+1}$. Тогда для любого $x_0 \in X_k$ выполняется ${}_SA_{k+1} \models \Psi(x_0/\theta)$.

В результате индукционного процесса мы получаем цепочку регулярных полигонов

$$ {}_SA_0 \subseteq {}_SA_1 \subseteq \ldots \subseteq {}_SA_k \subseteq {}_SA_{k+1} \subseteq \ldots. $$

Положим ${}_SA \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i\in\omega} {}_SA_i$. Тогда в силу замкнутости класса ${}_S\mathfrak{R}$ относительно объединений полигон ${}_SA$ регулярен.

Покажем, что ${}_SA \models \forall x\,\Psi(x)$. Заметим, что так как для любого регулярного полигона ${}_S\hat{A}$ и любого $a \in \hat{A}$ выполняется

$$ {}_S\hat{A} \models \Phi_e(a) \iff {}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe, $$

то для любого элемента $a \in A$, любого подполигона ${}_SB$, содержащего элемент a, и любого надполигона ${}_SC$ справедливо

$$ {}_SB \models \Phi_e(a), \quad {}_SC \models \Phi_e(a). $$

Так как

$$ \Psi(x) = \Phi_e(x) \to \exists y\,(by = x \wedge \Phi_e(y)), $$

то из ${}_SA \models \Psi(a)$ следует ${}_SC \models \Psi(a)$ для любого регулярного надполигона ${}_SC$.

Предположим, что существует такой элемент $d \in A$, что ${}_SA \not\models \Psi(d)$. Выберем число $k \in \omega$, для которого $d \in A_k$. Так как ${}_SA \not\models \Psi(d)$ и ${}_SA_k$ — подполигон полигона ${}_SA$, то ${}_SA_k \not\models \Psi(d)$, т. е. ${}_SA_k \models \Phi_e(d)$ и ${}_SA_k \models \forall y\,(\Phi_e(y) \to by \neq d)$. Тогда $d \in X_k$, но по построению полигона ${}_SA_{k+1}$ получаем ${}_SA_{k+1} \models \Psi(d)$ и, следовательно, ${}_SA \models \Psi(d)$. Таким образом, ${}_SA \models \forall x\,\Psi(x)$.

Так как ${}_SSe \not\models \forall x\,\Psi(x)$, получаем противоречие с полнотой класса $\mathfrak{R}$. $\square$

Лемма 6.3. *Если* $\mathrm{ld}(R) = 1$, *то класс* $\mathfrak{R}$ *аксиоматизируем тогда и только тогда, когда множество* $I(R)$ *конечно.*

Доказательство. Предположим, что класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем. Тогда в силу теоремы 4.1 множество $\{x \in R \mid 1 \cdot x = x\}$ равно R и является конечно порождённым как правый идеал полугруппы R. Так как по утверждению 2.6 полугруппа R является прямоугольной связкой групп, то главные правые идеалы в R не пересекаются и R является их объединением. Поскольку множество всех главных правых идеалов в R равномощно множеству $I(R)$, заключаем, что множество $I(R)$ конечно.

Для доказательства достаточности заметим, что число главных правых идеалов совпадает с числом элементов множества $I(R)$ и, следовательно, является конечным. Тогда, очевидно, выполняются условия теоремы 4.1 и класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем. □

Лемма 6.4. *Если класс $\mathfrak{R}$ полон, ${}_SA \in \mathfrak{R}$ и ${}_SA \models \exists x\, \Phi(x)$, то ${}_SA \models \exists^{\geqslant\omega} x\, \Phi(x)$.*

Доказательство. Пусть ${}_SA_i$, $i \in \omega$, — непересекающиеся изоморфные копии полигона ${}_SA$. Тогда $\bigsqcup\limits_{i\in\omega} {}_SA_i \models \exists^{\geqslant\omega} x\, \Phi(x)$, и в силу $\bigsqcup\limits_{i\in\omega} {}_SA_i \equiv {}_SA$ получаем ${}_SA \models \exists^{\geqslant\omega} x\, \Phi(x)$. □

Лемма 6.5. *Если класс $\mathfrak{R}$ полон, то для любых идемпотентов $e \in S$ и $g \in R$ выполняется $|eSg| \geqslant \omega$.*

Доказательство. Обозначим через a элемент eg. Очевидно, $a \in eSg$ и $Sg \models ea = a$. Следовательно, $Sg \models \exists x\, (ex = x)$ и по лемме 6.4 $Sg \models \exists^{\geqslant\omega} x\, (ex = x)$. Так как принадлежность $x \in eSg$ равносильна тому, что $ex = x$ и $x \in Sg$, имеем $|eSg| \geqslant \omega$. □

Лемма 6.6. *Если ядро $K(R)$ не пусто и класс $\mathfrak{R}$ полон, то $K(R)$ является прямоугольной связкой бесконечных групп.*

Доказательство. Из утверждения 1.4 и того, что ${}_SR$ — регулярный полигон, следует, что $K(R)$ является прямоугольной связкой групп. В силу замечания 1.1 достаточно доказать, что группа G_e бесконечна для любого идемпотента $e \in K(R)$.

Пусть e — произвольный идемпотент из $K(R)$. Тогда ${}_SSe \models (ee = e)$ и, следовательно, ${}_SSe \models \exists x\, (ex = x)$. По лемме 6.4 получаем ${}_SSe \models \exists^{\geqslant\omega} x\, (ex = x)$. Так как $K(R)$ — прямоугольная связка групп, то идеал Se минимален, и, следовательно, для любого $a \in Se$ выполняется $Se \models (ea = a)$ тогда и только тогда, когда $a \in G_e$. Таким образом, для любого $e \in K(R)$ группа G_e бесконечна и ядро $K(R)$ является прямоугольной связкой бесконечных групп. □

Лемма 6.7. *Если H — подгруппа моноида S, e — единица в H, то ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe$ для любого $a \in H$.*

Доказательство. Определим отображение $\varphi\colon {}_SSa \to {}_SSe$ по правилу $\varphi(x) = xa^{-1}$, где a^{-1} — обратный для a элемент в группе H. Тогда $\varphi(a) = aa^{-1} = e$ и $\varphi(sx) = (sx)a^{-1} = s(xa^{-1}) = s\varphi(x)$ для любых $s \in S$ и $x \in Sa$. Следовательно, φ — гомоморфизм.

Если $x, y \in Sa$ и $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $xa^{-1} = ya^{-1}$. Тогда $xa^{-1}a = ya^{-1}a$, $xe = ye$, $x = y$ и, значит, отображение φ разнозначно. Если $x \in Se$, то $x = xe = xaa^{-1} = \varphi(xa)$. Таким образом, φ — изоморфизм. $\square$

Лемма 6.8. *Если R — прямоугольная связка групп, то для любого элемента $a \in R$ и любого идемпотента $e \in R$ условие ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe$ выполнимо тогда и только тогда, когда $ea = a$.*

Доказательство. Если ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe$, то равенство $ea = a$ очевидно.

Пусть теперь выполняется равенство $ea = a$ и R — прямоугольная связка групп S_{ij} с единицами e_{ij}, $i \in I$, $j \in J$. Тогда $e = e_{ij}$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$. Так как $e_{ij}a = a$, то $e_{ij}R = aR$, и по замечанию 1.1 получаем $a \in S_{ik}$ для некоторого $k \in J$.

Докажем, что ${}_SSe_{ik} \xrightarrow{\sim} {}_SSe_{ij}$. Определим отображение φ из Se_{ik} в Se_{ij} по правилу $\varphi(x) = xe_{ij}$. Допустим, что $s \in S$, $x \in Se_{ik}$. Тогда $sx \in Se_{ik}$ и

$$\varphi(sx) = (sx)e_{ij} = s(xe_{ij}) = s\varphi(x),$$

т. е. φ — гомоморфизм. Если $a, b \in Se_{ik}$ и $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $ae_{ij} = be_{ij}$, тогда $ae_{ij}e_{ik} = be_{ij}e_{ik}$, следовательно, $ae_{ik} = be_{ik}$, $a = b$, и, значит, отображение φ разнозначно. Если $c \in Se_{ij}$, то

$$c = ce_{ij} = ce_{ik}e_{ij} = \varphi(ce_{ik}),$$

т. е. φ — сюръекция. Таким образом, φ — изоморфизм и $\varphi(e_{ik}) = e_{ik}e_{ij} = e_{ij}$. Следовательно, ${}_SSe_{ik} \xrightarrow{\sim} {}_SSe_{ij}$. Так как ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe_{ik}$ по лемме 6.7 и $e_{ij} = e$, то ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe$. $\square$

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из леммы 6.1.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Предположим, что класс $\mathfrak{R}$ полон. Тогда по лемме 6.2 $\mathrm{ld}(R) = 1$, и в силу леммы 6.3 R является прямоугольной связкой групп.

Конечность множества $I(R)$ следует из леммы 6.3, а бесконечность групп, образующих R, — из леммы 6.8.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Так как в прямоугольной связке групп любой главный правый идеал в R минимален, то S удовлетворяет условию 1) теоремы 4.1. Поскольку множество $I(R)$ конечно, множество главных правых идеалов также конечно. Следовательно, моноид S удовлетворяет условию 2) теоремы 4.1, и класс $\mathfrak{R}$ является аксиоматизируемым.

Так как в прямоугольной связке групп любой левый идеал в R минимален, то S удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 5.1. Если идемпотенты e и g принадлежат R, то $e = e_{ij}$ и $g = e_{kl}$ для некоторых $i, k \in I(R)$, $j, l \in J(R)$. Тогда по свойствам прямоугольной связки групп

$$eSg = e_{ij}Re_{kl} = \left(\bigcup_{p \in J(R)} S_{ip}\right)e_{kl} = \bigcup_{p \in J(R)} (S_{ip}e_{kl}) = S_{il}.$$

В силу бесконечности группы S_{il} выполняется условие 3) теоремы 5.1, и класс $\mathfrak{R}$ модельно полон.

Условие формульной определимости изоморфных орбит для класса $\mathfrak{R}$ следует из леммы 6.8. Теорема доказана. □

Следствие 6.1 ([Овч2]). *Если полугруппа R содержит конечное число идемпотентов, то следующие условия эквивалентны*:

1) *класс $\mathfrak{R}$ модельно полон*;
2) *класс $\mathfrak{R}$ полон*;
3) *полугруппа R является прямоугольной связкой конечного числа бесконечных групп.*

Доказательство. Так как в любом регулярном полигоне ${}_SA$ для любого элемента $a \in A$ найдётся такой идемпотент $e \in R$, что ${}_SSa \overset{\sim}{\to} {}_SSe$, и полугруппа R содержит лишь конечное число идемпотентов, то для каждого идемпотента $e \in R$ существует формула $\Phi_e(x)$, для которой выполнимо

$$
{}_SA \models \Phi_e(x) \iff {}_SSa \overset{\sim}{\to} {}_SSe,
$$

т. е. класс $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условию формульной отделимости изоморфных орбит. Таким образом, следствие справедливо в силу теоремы 6.1. □

Следствие 6.2. *Если полугруппа R содержит единственный идемпотент, то следующие условия эквивалентны*:

1) *класс $\mathfrak{R}$ модельно полон*;
2) *класс $\mathfrak{R}$ полон*;
3) *R — бесконечная группа.* □

Следствие 6.3. *Если S — коммутативный моноид, то следующие условия эквивалентны*:

1) *класс $\mathfrak{R}$ модельно полон*;
2) *класс $\mathfrak{R}$ полон*;
3) *R — бесконечная абелева группа.*

Доказательство. Учитывая следствие 6.2, достаточно показать, что если $\mathfrak{R}$ — полный класс регулярных полигонов над коммутативным моноидом, то R содержит единственный идемпотент. Предположим, что e_1 и e_2 — некоторые идемпотенты из R. Тогда для произвольного $x \in Se_1$ выполняется $xe_1 = x$. В силу коммутативности моноида S имеет место $e_1x = x$, и, следовательно, ${}_SSe_1 \models \forall x\,(e_1x = x)$. Так как класс $\mathfrak{R}$ полон, то ${}_SSe_2 \models \forall x\,(e_1x = x)$, и, значит, $e_1e_2 = e_2$. Аналогично получаем $e_2e_1 = e_1$. Таким образом, из коммутативности моноида S следует $e_1 = e_2$. □

Теорема 6.2 ([Овч3]). *Если S — линейно упорядоченный моноид глубины 2 и $\mathfrak{R}$ — аксиоматизируемый класс, то следующие условия эквивалентны*:

1) *класс $\mathfrak{R}$ модельно полон*;
2) *класс $\mathfrak{R}$ полон*;
3) *полугруппа $K(S)$ является прямоугольной связкой бесконечного числа бесконечных групп.*

Доказательство содержит ряд лемм.

Лемма 6.9. *Если моноид S имеет конечную глубину, то $K(S) = K(R)$.*

Доказательство. Включение $K(R) \subseteq K(S)$ очевидно. Так как глубина $\mathrm{ld}(S)$ конечна, то глубина $\mathrm{ld}(R)$ тоже конечна. Тогда по утверждению 2.6 ядро $K(R)$ является прямоугольной связкой групп. Пусть e — элемент из $E(S) \cap K(R)$. Тогда e принадлежит $K(S)$, и, следовательно, по утверждению 1.4 ядро $K(S)$ является прямоугольной связкой групп. Отсюда получаем, что $K(S) \subseteq R$ и, очевидно, $K(S) \subseteq K(R)$. □

Лемма 6.10. *Если моноид S имеет глубину 2, то $R = S$.*

Доказательство. Поскольку моноид S имеет глубину 2, то для любого элемента $a \in S$ имеем, что если $Sa \neq S1$, то из включения $Sa \subset S1$ следует, что $Sa \subseteq K(S)$. По лемме 6.9 и утверждению 2.6 ядро $K(S)$ является прямоугольной связкой групп. Следовательно, $K(S) \subseteq R$. Если $a \in S \setminus K(S)$, то $Sa = S = S1$, и тогда полигон ${}_S Sa$ принадлежит классу $\mathfrak{R}$, т. е. $a \in R$. Таким образом, $R = S$. □

Лемма 6.11. *Если S — прямоугольная связка групп и $|J(S)| = 1$, то для некоторой группы G полугруппа S изоморфна полугруппе с носителем $S' = \{\langle b, i\rangle \mid b \in G,\ i \in I(S)\}$ и операцией $\cdot$, задаваемой соотношениями*

$$\langle c, j\rangle \cdot \langle d, k\rangle = \langle c \cdot d, j\rangle$$

для любых элементов $\langle c, j\rangle, \langle c, j\rangle \in S'$.

Доказательство. Пусть S — прямоугольная связка групп G_i с идемпотентами e_i для $i \in I(S)$. Зафиксируем элемент $i_0 \in I(S)$ и положим $G \rightleftharpoons G_{i_0}$, $S' \rightleftharpoons G \times I(S)$. Определим отображение $\varphi\colon S' \to S$, действующее по правилу $\varphi(\langle b, i\rangle) \rightleftharpoons e_i \cdot b$, $b \in G$, $i \in I(S)$. По утверждению 3) замечания 1.1 для любого $i \in I(S)$ группа G_i изоморфна группе G, а также группе G_i' с носителем $\{\langle b, i\rangle \mid b \in G\}$ и операцией, задаваемой по правилу $\langle b_1, i\rangle \cdot \langle b_2, i\rangle = \langle b_1 \cdot b_2, i\rangle$. При этом, очевидно, ограничение отображения φ на множество G_i' осуществляет изоморфизм между группами G_i' и G_i. Кроме того, непосредственно проверяется, что само отображение φ является биекцией.

Определим операцию $\cdot$ на элементах множества S' по следующему правилу: $\langle c, j\rangle \cdot \langle d, k\rangle = \langle c \cdot d, j\rangle$, $\langle c, j\rangle, \langle c, j\rangle \in S'$. Покажем, что отображение φ сохраняет операцию $\cdot$. Действительно, используя свойства прямоугольной связки групп, для любых $j, k \in I(S)$ и $c, d \in G$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\langle c, j\rangle) \cdot \varphi(\langle d, k\rangle) &= e_j c \cdot e_k d = e_j (c e_{i_0}) \cdot e_k d = \\ &= e_j c (e_{i_0} e_k) d = e_j c e_{i_0} d = e_j (c e_{i_0}) d = e_j (cd) = \varphi(\langle c \cdot d, j\rangle). \end{aligned}$$

Таким образом, отображение φ осуществляет изоморфизм между S' и S, а отображение $\varphi^{-1}\colon S \to S$ — искомый изоморфизм. □

В дальнейшем при $J(S) = 1$ прямоугольная связка групп S будет отождествляться с полугруппой S'.

Лемма 6.12. *Если моноид S имеет конечную глубину и $R = S$, то для любого элемента $a \in S$, такого что $Sa = S$, выполняется $1 \in aS$.*

Доказательство. Обозначим через G_1 множество $\{x \in S \mid Sx = S\}$. Покажем, что тогда $G_1 \cap E(S) = \{1\}$. Действительно, если $e \in G_1 \cap E(S)$, то $1 \cdot e = e$. Поскольку $1 \cdot e = e$, то $e = 1$. С другой стороны, очевидно, единица принадлежит $G_1 \cap E(S)$. Таким образом, $G_1 \cap E(S) = \{1\}$.

Обозначим через n глубину $\mathrm{ld}(S)$. Так как для любого $a \in S$ выполняется $Sa \subseteq S \cdot 1$, то любая цепь длины n главных левых идеалов содержит в качестве максимального элемента множество $S \cdot 1$, т. е. $S \cdot 1$ — единственный главный левый идеал глубины n. Поскольку $R = S$, то для любого элемента $a \in G_1$ найдётся идемпотент $g \in S$, для которого выполняется ${}_SSa \mathrel{\widetilde{\to}} {}_SSg$. Так как $Sa = S$ и глубина Sa равна n, то ${}_SSa \mathrel{\widetilde{\to}} {}_SS1$. Пусть φ — такой изоморфизм из ${}_SSa$ в ${}_SS1$, что $\varphi(a) = 1$. Так как $1 \in Sa$, то определён элемент $\varphi(1)$. Тогда $a \cdot \varphi(1) = \varphi(a \cdot 1) = \varphi(a) = 1$, т. е. $1 \in aS$. □

Лемма 6.13. *Если $2 \leqslant \mathrm{ld}(R) < \infty$ и класс $\mathfrak{R}$ полон, то $|I(R)| \geqslant \omega$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{ld}(R) \geqslant 2$, то существуют идемпотент $g \in R$ и элемент $a \in R$, такие что $Sa \subset Sg$. В силу конечности $\mathrm{ld}(R)$ можно полагать, что Sa — минимальный левый идеал. Тогда элемент a принадлежит $K(R)$. По утверждению 2.6 ядро $K(R)$ является прямоугольной связкой групп, и в силу свойств прямоугольной связки групп выполнимо $Sa = \bigcup\limits_{i \in I(R)} S_{ij_0}$ для некоторого $j_0 \in J(R)$.

Предположим теперь, что множество $I(R)$ конечно. Тогда конечно множество $\{e_{ij_0} \mid i \in I(R)\}$ и справедливо

$$ {}_SSa \models \forall x \Bigl(\bigvee_{i \in I(R)} e_{ij_0} x = x \Bigr). $$

Но так как $Se_{ij_0} \subset Sg$, то $e_{ij_0} g = e_{ij_0} \neq g$ для всех $i \in I(R)$, и ${}_SSg \not\models e_{ij} g = g$. Следовательно, ${}_SSg \not\equiv {}_SSa$, что противоречит полноте класса ${}_S\mathfrak{R}$. □

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из леммы 6.1.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Из леммы 6.9 и утверждения 2.6 следует, что $K(S)$ является прямоугольной связкой групп. По лемме 6.13 множество $I(K(S))$ бесконечно, т. е. групп, образующих $K(S)$, бесконечное число. Бесконечность групп следует из леммы 6.6.

Проверим импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Так как класс ${}_S\mathfrak{R}$ аксиоматизируем, то можно воспользоваться теоремой 5.1.

По лемме 6.10 выполняется $R = S$, и поскольку S является линейно упорядоченным моноидом глубины 2, то существует единственная цепь главных левых идеалов $Sa \subset S \cdot 1$. Следовательно, выполняется условие 1) теоремы 5.1.

Так как $\mathrm{ld}(S) = 2$, то выполнение условия $Sa \subset Se$ для $a \in S$, $e \in E(S)$ возможно только при $e = 1$. Тогда $Sa \subseteq K(S)$, и в силу линейной упорядоченности S выполняется $Sa = K(S)$, т. е. по лемме 6.9 и утверждению 2.6 полугруппа Sa является прямоугольной связкой групп. Таким образом, ядро

$K(S)$ состоит из одного главного левого идеала и $J(S) = 1$. Зафиксируем группу $\langle G; \cdot\rangle$ с единицей e', такую что ей изоморфны все группы, содержащиеся в Sa. Тогда по лемме 6.11 элементы из $K(S)$ можно представить в виде $\langle b, i\rangle$, где $b \in G$, $i \in I(K(S))$. Следовательно,

$$S = \{x \mid Sx = S \cdot 1\} \cup \{\langle b, i\rangle \mid b \in G,\ i \in I(K(S))\}.$$

Предположим, что $1 \notin \bigcup\limits_{i=1}^{m} a_i S$ для некоторых $a_i \in S$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда справедливо $1 \notin a_i S$ для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$, и в силу леммы 6.12 для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ существуют $b_i \in G$, $k_i \in I(K(S))$, такие что $a_i = \langle b_i, k_i\rangle$. В силу свойств прямоугольной связки групп из $|J(K(S))| = 1$ следует $\langle b_i, k_i\rangle S = S_{k_i}$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$ (где $S_{k_i} = \{\langle b, k_i\rangle \mid b \in G\}$). Так как для любого $j \in I(K(S)) \setminus \{k_i\}$ выполняется $\langle e', j\rangle \notin S_{k_i}$, $S\langle e', j\rangle = S\langle b_i, k_i\rangle$ и $\langle e', j\rangle = 1 \cdot \langle e', j\rangle \in 1 \cdot S$, то множество $E_{k_i} \rightleftharpoons E(S) \cap \{x \mid x \in (1 \cdot S) \setminus a_i S\}$ совпадает с множеством $\{\langle e', j\rangle \mid j \in I(K(S)) \setminus \{k_i\}\}$. По лемме 6.13 множество $I(K(S))$ бесконечно, и, следовательно, бесконечны множества E_{k_i} для всех $i \in I(K(S))$. Так как

$$(1 \cdot S) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} a_i S = \bigcap_{i=1}^{m} ((1 \cdot S) \setminus a_i S),$$

то

$$E(S) \cap \left\{x \mid x \in (1 \cdot S) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} a_i S\right\} = \{\langle e', j\rangle \mid j \in I(S) \setminus \{k_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\}\},$$

и в силу бесконечности множества $I(K(S))$ выполняется утверждение 2) теоремы 5.1.

Для проверки выполнения утверждения 3) теоремы 5.1, рассмотрим всевозможные варианты для значений идемпотентов e и g.

Если $e = 1$ и $g = 1$, то $|eSg| = |1S \cdot 1| = |S| \geqslant \omega$.

Если $e = 1$ и $g = \langle e', i\rangle$ для некоторого $i \in I(K(S))$, то

$$|eSg| = |1S\langle e', i\rangle| = |S\langle e', i\rangle| = |K(S)| \geqslant \omega.$$

Если $e = \langle e', i\rangle$ для некоторого $i \in I(K(S))$ и $g = 1$, то в силу леммы 6.6 выполняется

$$|eSg| = |\langle e', i\rangle S \cdot 1| = |\langle e', i\rangle S| = |S_i| \geqslant \omega.$$

Если $e = \langle e', i\rangle$ и $g = \langle e', j\rangle$ для некоторых $i, j \in I(K(S))$, то по свойствам прямоугольной связки групп выполняется

$$|eSg| = |\langle e', i\rangle S\langle e', j\rangle| = |S_i\langle e', j\rangle| = |S_i| \geqslant \omega.$$

Таким образом, все условия теоремы 5.1 выполняются, и класс ${}_S\mathfrak{R}$ является модельно полным.

Теорема доказана. □

Следующие две теоремы показывают, что существуют моноиды, над которыми класс всех регулярных полигонов полон, но не модельно полон. Здесь мы только построим такие моноиды, а подробные доказательства их свойств можно найти в [Овч4, Овч5].

Теорема 6.3. *Существует не линейно упорядоченный моноид глубины* 2, *над которым класс всех регулярных полигонов полон, но не модельно полон.*

Доказательство. Для абелевой группы $\mathcal{G} = \langle G, +\rangle$, непустых множеств I, J и функции $\varphi\colon I \times J \to G$ назовём $\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$*-связкой* полугруппу $\langle \mathcal{G} \times I \times J, *\rangle$, в которой операция $*$ определяется по следующему правилу:

$$\langle a, i, j\rangle * \langle b, k, l\rangle \rightleftharpoons \langle a + b + \varphi(k, j), i, l\rangle.$$

Для произвольных элементов $i \in I$ и $j \in J$ обозначим через S_{ij} множество $\{\langle a, i, j\rangle \mid a \in G\}$. Тогда алгебра $\mathcal{S}_{ij} = \langle S_{ij}, *\rangle$ является подгруппой $\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$-связки с идемпотентом $\langle -\varphi(i, j), i, j\rangle$ в качестве единичного элемента. Так как $S_{ij} * S_{kl} \subseteq S_{il}$, то $\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$ является прямоугольной связкой групп, которую будем обозначать через $\mathrm{RB}\langle \mathcal{G}, I, J, \varphi\rangle$.

Напомним [КМ], что для произвольной группы G с единицей e и ординала α через G^α обозначается *прямая степень* группы G, т. е. множество всех функций $f\colon \alpha \to G$, таких что множество $\{x \mid f(x) \neq e\}$ конечно.

Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_2^\omega$, где $\mathbb{Z}_2 = \langle\{0, 1\}, +\rangle$. Элементы группы $\mathbb{Z}_2^\omega$ будем обозначать через $\bar a, \bar b, \ldots$, полагая, что $\bar a = (a_0, a_1, \ldots)$, $\bar b = (b_0, b_1, \ldots)$, нуль группы $\mathbb{Z}_2^\omega$ — через $\bar 0$. Для произвольного элемента $\bar a \in \mathbb{Z}_2^\omega$ введём следующие обозначения:

$$h(\bar a) \rightleftharpoons \begin{cases} (0), & \text{если } \bar a = \bar 0,\\ (a_0, \ldots, a_{n-1}), & \text{если } a_{n-1} = 1 \text{ и } a_k = 0 \text{ для всех } k \geqslant n, \end{cases}$$

$$l(\bar a) \rightleftharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } \bar a = \bar 0,\\ n, & \text{если } h(\bar a) = (a_0, \ldots, a_{n-1}), \end{cases}$$

$$r(\bar a) \rightleftharpoons \sum_{i=0}^{l(\bar a)} a_i \cdot 2^i.$$

Если $a = \langle \bar a, i, j\rangle \in S$, то полагаем $l(a) \rightleftharpoons l(\bar a)$, $r(a) \rightleftharpoons r(\bar a)$.

Определим функцию ψ из ω в $\mathbb{Z}_2^\omega$ по следующему правилу:

$$\psi(n) = r^{-1}\left(\left[\sqrt{n}\,\right]\right)$$

(здесь $[x]$ означает целую часть действительного числа x).

Зададим операцию умножения элементов группы $\mathbb{Z}_2^\omega$ на 0 и 1 следующим образом:

$$\bar a \cdot 0 \rightleftharpoons \bar 0,$$
$$\bar a \cdot 1 \rightleftharpoons \bar a.$$

Положим $\mathcal{G} \rightleftharpoons \mathbb{Z}_2^\omega$, $I \rightleftharpoons \omega$, $J \rightleftharpoons \{0, 1\}$, $\varphi(i, j) \rightleftharpoons \psi(i) \cdot j$.

Определим моноид S равенством

$$S = \langle \mathrm{RB}(\mathcal{G}, I, J, \varphi) \cup \mathbb{Z}_2^\omega, * \rangle,$$

где действие операции $*$ между элементами одной природы определяется естественным образом, а между элементами из $\mathrm{RB}(\mathcal{G}, I, J, \varphi)$ и $\mathbb{Z}_2^\omega$ по правилу

$$\langle \bar{a}, i, j \rangle * \bar{b} = \bar{b} * \langle \bar{a}, i, j \rangle = \langle \bar{a} + \bar{b}, i, j \rangle.$$

Единицей моноида S является элемент $\bar{0}$. Все идемпотенты моноида S образуют множество

$$E(S) = \{\langle \varphi(i,j), i, j \rangle \mid i \in I,\ j \in J\} \cup \{\bar{0}\}.$$

Моноид S является объединением групп, изоморфных $\mathbb{Z}_2^\omega$, следовательно, справедливо равенство $R = S$. $\square$

Теорема 6.4. *Существует линейно упорядоченный моноид глубины* 3, *над которым класс всех регулярных полигонов полон, но не модельно полон.*

Доказательство. Пусть $G = \langle G; *, 0 \rangle$ — счётная группа.

Определим моноид $S = \langle S; \cdot \rangle$ следующим образом:

$$S = \left(\bigcup_{i \in \omega} G_{1i} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \omega} G_{2i} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in \omega} G_{3i} \right) \cup G_4 \cup G_5,$$

где

$$G_{1i} = \{[1, i, \bar{\jmath}] \mid \bar{\jmath} \in G^\omega\}, \quad G_{2i} = \{[2, i, \bar{\jmath}] \mid \bar{\jmath} \in G^\omega\},$$
$$G_{3i} = \{[3, i, \bar{\jmath}] \mid \bar{\jmath} \in G^\omega\}, \quad G_4 = \{[4, \bar{\imath}] \mid \bar{\imath} \in G^\omega\}, \quad G_5 = \{[5, \bar{\imath}] \mid \bar{\imath} \in G^\omega\}.$$

Действие операции $\cdot$ зададим таблицей Кэли:

$\cdot$	$[1, m, \bar{k}]$	$[2, m, \bar{k}]$	$[3, m, \bar{k}]$	$[4, \bar{k}]$	$[5, \bar{k}]$
$[1, i, \bar{\jmath}]$	$[1, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[1, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[1, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[1, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[1, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$
$[2, i, \bar{\jmath}]$	$[2, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[2, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[2, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[2, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[2, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$
$[3, i, \bar{\jmath}]$	$[3, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[3, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[3, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[3, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[3, i, \bar{\jmath} * \bar{k}]$
$[4, \bar{\jmath}]$	$[1, m, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[2, m, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[2, m, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[4, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[4, \bar{\jmath} * \bar{k}]$
$[5, \bar{\jmath}]$	$[1, m, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[2, m, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[3, m, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[4, \bar{\jmath} * \bar{k}]$	$[5, \bar{\jmath} * \bar{k}]$

Отметим, что моноид S является объединением групп. Группы, образующие S, изоморфны группе G^ω. Единицей моноида является элемент $[5, \bar{0}]$. Полигон ${}_SS$ имеет три различные орбиты $S[1, 0, \bar{0}] \subset S[4, \bar{0}] \subset S[5, \bar{0}]$, каждая из которых порождается идемпотентом, и, следовательно, $R = S$, $\mathrm{ld}(S) = 3$. $\square$

§ 7. Стабильность класса регулярных полигонов

В этом параграфе охарактеризованы $\mathfrak{R}$-стабилизаторы (см. § 3), регулярный центр R которых представим в виде объединения конечного числа главных правых идеалов (теорема 7.1). Как следствие доказывается, что для аксиоматизируемого класса всех регулярных полигонов стабильность этого класса равносильна регулярной линейной упорядоченности моноида S (следствие 7.1). Регулярная линейная упорядоченность моноида является необходимым (утверждение 7.1), но не является достаточным (пример 7.1) условием стабильности любого регулярного полигона. Пример 7.2 показывает, в частности, что существует регулярно линейно упорядоченный моноид с неаксиоматизируемым классом всех регулярных полигонов, над которым все регулярные полигоны стабильны.

Утверждение 7.1. *Если S — $\mathfrak{R}$-стабилизатор, то S — регулярно линейно упорядоченный моноид.*

Доказательство. Предположим, что S — $\mathfrak{R}$-стабилизатор, не являющийся регулярно линейно упорядоченным моноидом, т. е. существуют такие $a, b, c \in R$, что $Sb \nsubseteq Sc \subseteq Sa$ и $Sc \nsubseteq Sb \subseteq Sa$. Тогда $b = ta$, $c = sa$ для некоторых $t, s \in S$. Пусть $K = \{\langle i, j\rangle \mid j \leqslant i < \omega\}$; ${}_SA_{ij}$ — копия полигона ${}_SSa$, $\langle i, j\rangle \in K$, причём $A_{ij} \cap A_{kl} = \varnothing$, если $\langle i, j\rangle \neq \langle k, l\rangle$; d_{ij} — копия элемента $d \in Sa$ в A_{ij}. Через ${}_SA$ обозначим полигон $\bigcup\limits_{\langle i,j\rangle\in K} {}_SA_{ij}/\theta$, где θ — конгруэнция полигона $\bigcup\limits_{\langle i,j\rangle\in K} {}_SA_{ij}$, порождённая множеством $\{\langle b_{ij}, b_{il}\rangle \mid \langle i, j\rangle \in K, \langle i, l\rangle \in K\} \cup \{\langle c_{ij}, c_{lj}\rangle \mid \langle i, j\rangle \in K,\ \langle l, j\rangle \in K\}$; через b_i — класс эквивалентности θ с представителем b_{ij}; через c_j — класс эквивалентности θ с представителем c_{ij}; через $\varphi(x, y)$ — формулу $\exists z\, (x = tz \wedge y = sz)$. Поскольку ограничение θ на полигон ${}_SA_{ij}$, $\langle i, j\rangle \in K$, является нулевой конгруэнцией, то ${}_SA \in \mathfrak{R}$. Заметим, что $b_i = ta_{ij}/\theta$ и $c_j = sa_{ij}/\theta$. Более того,

$$ {}_SB \models \varphi(b_i, c_j) \iff i \geqslant j, $$

что по теореме 3.5 противоречит стабильности $\mathrm{Th}({}_SA)$. □

Теорема 7.1 ([Сте2]). *Пусть*

$$ R = \bigcup_{i=0}^{n} a_i R \tag{7.1} $$

для некоторых $n \geqslant 0$ и $a_i \in R$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Моноид S является $\mathfrak{R}$-стабилизатором тогда и только тогда, когда S — регулярно линейно упорядоченный моноид.

Доказательство. Предположим, условие теоремы выполняется.

Необходимость следует из утверждения 7.1.

Докажем достаточность. Пусть S — регулярно линейно упорядоченный моноид и ${}_SA \in \mathfrak{R}$. Покажем, что теория $\mathrm{Th}({}_SA)$ стационарна. Предположим, что ${}_SM \equiv {}_SA$, $a, b \in \mathfrak{C} \setminus M$, $a = sb$, $c = rb$, $c \in M$. Пусть $d \in A$. По следствию 2.1 существуют идемпотент $e \in R$ и изоморфизм $\varphi\colon Sd \to Se$, такие что $\varphi(d) = e$. По условию (7.1) существуют i, $0 \leqslant i \leqslant n$, и $u \in R$, такие что $e = a_i u$. Тогда $e = a_i ue$. Следовательно, ${}_SSd \models \exists y\, (d = a_i y)$. Таким образом, ${}_SA \models \forall x\, \exists y \bigvee\limits_{i=0}^{n} (x = a_i y)$. Так как ${}_SM \equiv {}_SA$ и ${}_SM \prec {}_S\mathfrak{C}$, то $b = a_i v$ для некоторых i, $0 \leqslant i \leqslant n$, $v \in \mathfrak{C}$. В силу линейной упорядоченности множества $\{Sa \mid Sa \subseteq Sa_i\}$ имеет место одно из включений: $Ssa_i \subseteq Sra_i$ или $Sra_i \subseteq Ssa_i$.

Если $Ssa_i \subseteq Sra_i$, то $a = sb = sa_i v \in Sra_i v = Srb = Sc \subseteq M$, что противоречит выбору элемента a. Следовательно, $Sra_i \subseteq Ssa_i$. В этом случае $c = rb = ra_i v \in \in Ssa_i v = Ssb = Sa$, т. е. теория $\mathrm{Th}({}_SA)$ стационарна. По теореме 3.7 теория $\mathrm{Th}({}_SA)$ стабильна, т. е. S — $\mathfrak{R}$-стабилизатор. □

Следствие 7.1. *Пусть класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем. Класс $\mathfrak{R}$ стабилен тогда и только тогда, когда S — регулярно линейно упорядоченный моноид.*

Доказательство следует из теоремы 7.1 и следствия 4.2. □

Из доказательства теоремы 7.1 вытекает следствие 7.2.

Следствие 7.2. *Если выполняется условие теоремы* 7.1 *и моноид S регулярно линейно упорядочен, то теория любого регулярного полигона стационарна.*

Пример 7.1 (не $\mathfrak{R}$-стабилизатора, являющегося регулярным линейно упорядоченным моноидом). Пусть S — объединение пяти взаимно непересекающихся множеств:

$$S = A \cup B \cup C \cup \langle \alpha, \beta \rangle \cup \{1\},$$

где $A = \{a_i \mid i \in \omega\}$, $B = \{b_i \mid i \in \omega\}$, $C = \{c_{ij} \mid i \geqslant j,\ i, j \in \omega\}$, $\langle \alpha, \beta \rangle$ — свободная двухпорождённая полугруппа с порождающими α и β. Зададим на S бинарную операцию следующим образом: 1 — единичный элемент S, $a_i x = a_i$, $b_i x = b_i$, $c_{ij} x = c_{ij}$, $(\gamma\alpha) c_{ij} = a_i$, $(\gamma\beta) c_{ij} = b_j$, $(\gamma\alpha) y = y$, $(\gamma\beta) y = y$ для любых $x \in S$, $y \in S \setminus (C \cup \langle \alpha, \beta \rangle)$, $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle \cup \{1\}$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, $c_{ij} \in C$. Легко проверить, что S — моноид относительно введённой операции. Кроме того, $R = A \cup B \cup C$ и $Sa_i = Sb_i = Sc_{ij} = R$ для любых $a_i \in A$, $b_i \in B$, $c_{ij} \in C$. Следовательно, S — регулярно линейно упорядоченный моноид. Пусть $\Phi(x, y) \rightleftharpoons \exists z\, (x = \alpha z \wedge y = \beta z)$. Тогда

$${}_SR \models \exists z\, (a_i = \alpha z \wedge b_j = \beta z) \iff i \geqslant j,$$

что по теореме 3.5 влечёт нестабильность $\mathrm{Th}({}_SR)$, т. е. моноид S не является $\mathfrak{R}$-стабилизатором. □

Пример 7.2 (регулярно линейно упорядоченного $\mathfrak{R}$-стабилизатора, не удовлетворяющего условию теоремы 7.1). Пусть

$$S = \bigcup_{i \in \omega} \mathbb{Z}_i \cup \langle \alpha, \beta \rangle \cup \{1\},$$

где $\mathbb{Z}_i = \{n_i \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — копия множества целых чисел $\mathbb{Z}$ с естественно определённой операцией сложения, $\mathbb{Z}_i \cap \mathbb{Z}_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\langle \alpha, \beta \rangle$ — свободная двухпорождённая коммутативная полугруппа с порождающими α и β. Зададим на S бинарную операцию следующим образом: 1 — единичный элемент S, $n_i \cdot m_j = = (n+m)_{\min(i,j)}$, $\alpha n_i = n_i \alpha = (n+3)_i$, $\beta n_i = n_i \beta = (n+2)_i$, $(\gamma_1\gamma_2) n_i = \gamma_1(\gamma_2 n_i)$ для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \langle \alpha, \beta \rangle$, $i, j \in \omega$. Легко проверить, что S — моноид относительно введённой операции, $\{1, 0_0, 0_1, \ldots, 0_i, \ldots\}$ — множество всех идемпотентов моноида S и $S \cdot n_i = n_i \cdot S = \bigcup\limits_{j=0}^{i} \mathbb{Z}_j$ для всех $i \in \omega$, $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$R = \bigcup_{i\in\omega} \mathbb{Z}_i$ и S — регулярно линейно упорядоченный моноид, не удовлетворяющий условию (7.1).

Покажем, что S — $\mathfrak{R}$-стабилизатор. Для этого достаточно доказать стационарность $\mathrm{Th}({}_SA)$ для любого ${}_SA \in \mathfrak{R}$. Пусть ${}_SA \in \mathfrak{R}$, ${}_SM \equiv {}_SA$, $c = sb$, $a = tb$, $a, b \in \mathfrak{C} \setminus M$, $c \in M$. Если $s, t \in R$, т. е. $s = n_i$, $t = m_j$, то при $i \leqslant j$ выполняются равенства $n_i = (n-m)_i m_j$, $c = (n-m)_i m_j b = (n-m)_i a$ и $c \in Sa$; при $i > j$ аналогично получаем $a \in Sc$, что невозможно. Предположим, что $s \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Заметим, что

$$S \cdot 0_i \models \forall x\, \exists! y\, (x = sy) \tag{7.2}$$

для любого $i \in \omega$. Докажем, что ${}_SA \models \forall x\, \exists! y\, (x = sy)$. Действительно, по следствию 2.1 для любого $d \in A$ существует такое $i \in \omega$, что ${}_SSd \cong {}_SS0_i$. Поскольку в ${}_SS0_i$ истинна формула $\forall x\, \exists y\, (x = sy)$, то эта формула истинна в ${}_SSd$, следовательно и в ${}_SA$. Пусть $d = sd_1$ и $d = sd_2$, где $d, d_1, d_2 \in A$. По следствию 2.1 существуют $i \in \omega$ и изоморфизм $\varphi\colon Sd_1 \to S \cdot 0_i$. Тогда $\varphi d_1, \varphi d \in \mathbb{Z}_i$ и $S\varphi d_1 = S\varphi d$. Следовательно, $Sd_1 = Sd$. Аналогично, $Sd_2 = Sd$, т. е. $Sd_1 = Sd_2 \cong S \cdot 0_i$. В силу (7.2) $d_1 = d_2$. Так как ${}_SM \equiv {}_SA$, то ${}_SM \models \exists! y\, (c = sy)$ и ${}_S\mathfrak{C} \models \exists! y\, (c = sy)$, но $c = sb$, $b \notin M$, что невозможно. Таким образом, $s \in R$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Пусть $s = n_i$. Существует такое $k \in \omega$, $k \geqslant 2$, что ${}_SR \models \forall x\, (n_i x = (n-k)_i tx)$. В силу регулярности полигона ${}_SA$ по следствию 2.1 ${}_SA \models \forall x\, (n_i x = (n-k)_i tx)$. Поскольку ${}_SA \equiv {}_S\mathfrak{C}$, то ${}_S\mathfrak{C} \models \forall x\, (n_i x = (n-k)_i tx)$, в частности, $c = sb = n_i b = (n-k)_i tb = (n-k)_i a$, т. е. $c \in Sa$. Следовательно, $\mathrm{Th}({}_SA)$ стационарна, и по теореме 3.7 S — $\mathfrak{R}$-стабилизатор. □

§ 8. Суперстабильность класса регулярных полигонов

В этом параграфе охарактеризованы $\mathfrak{R}$-суперстабилизаторы, регулярный центр R которых представим в виде объединения конечного числа главных правых идеалов (теорема 8.1). Так же, как в случае стабильности, условие представимости регулярного центра в виде объединения конечного числа главных правых идеалов можно ослабить, заменив его на аксиоматизируемость класса $\mathfrak{R}$ (следствие 8.1). Так как класс регулярных полигонов над группой аксиоматизируем, то он является суперстабильным (следствие 8.2). Утверждение 8.1 даёт необходимое условие суперстабильности всех регулярных полигонов, которое, как показывает пример 8.1, не является достаточным. В этом же параграфе строятся пример $\mathfrak{R}$-суперстабилизатора, не являющегося стабилизатором (пример 8.3), и пример $\mathfrak{R}$-стабилизатора, не являющегося $\mathfrak{R}$-суперстабилизатором (пример 8.4).

Утверждение 8.1. *Если моноид S является $\mathfrak{R}$-суперстабилизатором, то S — регулярно линейно упорядоченный моноид и для любого $a \in R$ полугруппа Sa удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов.*

Доказательство. Пусть S — $\mathfrak{R}$-суперстабилизатор. Тогда S — $\mathfrak{R}$-стабилизатор, и по утверждению 7.1 он регулярно линейно упорядочен. Предположим, что $a, a_i \in R$ таковы, что $Sa_i \subset Sa_{i+1} \subseteq Sa$, $a_i = s_i a$, $s_i \in S$, $i \in \omega$. Пусть T — теория класса $\mathfrak{R}$, $\varkappa$ — произвольный кардинал, $\varkappa \geqslant 2^{|T|}$; $Q = \{\eta \in \varkappa^\omega \mid \exists n < \omega\, \forall m > n\, (\eta(m) = 0)\}$; $\hat{0} \in \varkappa^\omega$ такой, что $\hat{0}(m) = 0$ для любого $m \in \omega$, $r(\eta) = \min\{n \in \omega \mid \forall m \geqslant n\, (\eta(m) = 0)\}$. Зададим на Q отношение $<$:

$$\eta < \varepsilon \iff r(\eta) \leqslant r(\varepsilon),$$

причём при выполнении равенства $r(\eta) = r(\varepsilon)$ существует такое $k \in \omega$, что $\eta|_k = \varepsilon|_k$, но $\eta(k) < \varepsilon(k)$. Система $\langle Q; \leqslant \rangle$ является вполне упорядоченным множеством. Через η_k обозначим такой элемент $\varkappa^{k-1}$, что $\eta_k|_k = \eta|_k$, где $\eta \in Q$, $k \in \omega$. Полагаем $\eta_0 = \varnothing$. Для любых $\eta \in Q$, $k \in \omega$ строим полигоны ${}_SN_\eta$, ${}_SN'_\eta$ и элементы $b_\eta, b_{\eta_k} \in N_\eta$. Пусть $N_{\hat{0}} = Sa$, $b_{\hat{0}} = a$, $b_{\hat{0}_k} = a_k$, $k \in \omega$. Предположим, что для всех $\xi \in Q$, $\xi < \eta$, $k \in \omega$ полигоны ${}_SN'_\xi$, ${}_SN_\xi$ и элементы b_ξ, b_{ξ_k} построены. Заметим, что элемент $b_{\eta_{r-1}}$ на предыдущих шагах построен. Если существует наибольший элемент $\varepsilon \in Q$, такой что $\varepsilon < \eta$, то ${}_SN'_\eta = {}_SN_\varepsilon$, в противном случае ${}_SN'_\eta = \bigcup\limits_{\zeta<\eta} {}_SN_\zeta$. Полагаем ${}_SN_\eta = {}_S(N'_\eta \sqcup Sa)/\Theta_\eta$, где Θ_η — конгруэнция на полигоне ${}_S(N'_\eta \sqcup Sa)$, порождённая парой $\langle b_{\eta_{r-1}}, a_{r-1}\rangle$; при этом отождествляем элементы из N'_η с классами конгруэнции Θ_η, представителями которых они являются. Элемент a/θ_η переобозначим через b_η, элементы a_i/θ_η — через b_{η_i}, где $i > r-1$. Через ${}_SN$ обозначаем $\bigcup\limits_{\eta\in Q} {}_SN_\eta$. Ясно, что ${}_SN \in \mathfrak{R}$. Пусть $A = \{b_{\eta_k} \mid \eta \in \varkappa^\omega,\ k \in \omega\}$. Так как

$$b_{\eta_k} = s_k x \in \mathrm{tp}(b_\varepsilon, A) \iff \eta(\xi) = \varepsilon(\xi) \text{ для всех } \xi \leqslant k,$$

где $k \geqslant 0$, то $\mathrm{tp}(b_\eta, A) \neq \mathrm{tp}(b_\varepsilon, A)$, $\eta \neq \varepsilon$, $\eta, \varepsilon \in Q$. Поскольку $|A| = \sum\limits_{k\in\omega} \varkappa^k = \varkappa$, то $|S(A)| \geqslant |\{b_\eta \mid \eta \in \varkappa^\omega\}| = \varkappa^\omega > \varkappa$. Таким образом, $\mathrm{Th}({}_SN)$ не суперстабильна. Следовательно, моноид S не является $\mathfrak{R}$-суперстабилизатором. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\square$

Теорема 8.1 ([Сте2]). *Пусть*

$$R = \bigcup_{i=0}^{n} a_i R$$

для некоторых $n \geqslant 0$ и $a_i \in R$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Моноид S является $\mathfrak{R}$-суперстабилизатором тогда и только тогда, когда S — регулярно линейно упорядоченный моноид и для любого $a \in R$ полугруппа Sa удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов.

Доказательство. Предположим, что условие теоремы выполняется.

Необходимость следует из утверждения 8.1.

Докажем достаточность. Пусть S — регулярно линейно упорядоченный моноид и для любого $a \in R$ полугруппа Sa удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов, ${}_SA \in \mathfrak{R}$, ${}_SM \equiv {}_SA$, $a \in \mathfrak{C} \setminus M$ и $Sa \cap M \neq \varnothing$.

Покажем, что существует входной элемент от a в M, т. е. существует такой элемент $c \in M$, что $c \in Sa$ и $Sb \subseteq Sc$ для любого $b \in M \cap Sa$. Пусть d — произвольный элемент A и

$$\Phi \rightleftharpoons \forall x \bigvee_{i \leqslant n} \exists y\,(x = a_i y).$$

Из регулярности полигона ${}_SA$ по следствию 2.1 получаем, что существует такой идемпотент $e \in R$, что $Sd \cong Se$. По условию теоремы ${}_SSe \models \Phi$. Следовательно, ${}_SSd \models \Phi$. В силу произвольности элемента d имеем ${}_SA \models \Phi$. Из элементарной эквивалентности полигонов ${}_SA$, ${}_SM$ и ${}_S\mathfrak{C}$ получаем, что ${}_SM \models \Phi$ и ${}_S\mathfrak{C} \models \Phi$. Следовательно, $a = a_i a'$ для некоторых $i \leqslant n$, $a' \in \mathfrak{C}$. Предположим, что $m, m' \in Sa \cap M$. Тогда $m = sa = sa_i a'$, $m' = ta = ta_i a'$ для некоторых $s, t \in S$. Поскольку S — регулярно линейно упорядоченный моноид, то либо $Ssa_i \subseteq Sta_i$, либо $Sta_i \subseteq Ssa_i$. Тогда существует такой элемент $r \in S$, что либо $sa_i = rta_i$, либо $ta_i = rsa_i$, т. е. либо $m = rm'$, либо $m' = rm$. Следовательно, либо $Sm \subseteq Sm'$, либо $Sm' \subseteq Sm$. Предположим, что не существует входного элемента от a в M, т. е. существуют $m_i \in Sa \cap M$, $i \in \omega$, такие что $Sm_i \subset Sm_{i+1}$ и любой полигон ${}_SSm$, $m \in Sa \cap M$, совпадает с некоторым полигоном ${}_SSm_i$. Тогда для любого $j \in \omega$ существует такой элемент $s_j \in S$, что $m_j = s_j a = s_j a_i a'$. Пусть $Ss_{j+1}a_i \subseteq Ss_j a_i$, т. е. $s_{j+1}a_i = ks_j a_i$ для некоторого $k \in S$. Следовательно, $s_{j+1}a_i a' = ks_j a_i a'$, откуда $s_{j+1}a = ks_j a$, т. е. $m_{j+1} = km_j$ и $Sm_{j+1} \subseteq Sm_j$, что противоречит предположению. Тогда в силу регулярной линейной упорядоченности моноида S имеет место включение $Ss_j a_i \subset Ss_{j+1}a_i$, что противоречит условию максимальности для левых идеалов полугруппы Sa_i. Таким образом, доказано существование входного элемента от a в M.

Пусть $a, b \in \mathfrak{C} \setminus M$ и m — входной элемент от a в M. По следствию 7.2 теория $\mathrm{Th}({}_SM)$ стационарна. По теореме 3.6

$$\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M) \iff \\ \iff \mathrm{tp}(a, \{m\}) = \mathrm{tp}(b, \{m\}) \text{ и } m \text{ — входной элемент от } b \text{ в } M.$$

Пусть $T = \mathrm{Th}({}_SM)$, $|M| = \varkappa \geqslant 2^{|T|}$, $Q_0 = \{\mathrm{tp}(a, M) \mid a \in M\}$, $Q_1 = \{\mathrm{tp}(a, M) \mid a \in \mathfrak{C} \setminus M,\ M \cap Sa = \varnothing\}$, $Q_2 = \{\mathrm{tp}(a, M) \mid a \in \mathfrak{C} \setminus M,\ M \cap Sa \neq \varnothing\}$. Тогда $|Q_0| = \varkappa$, $|Q_1| \leqslant |S(\varnothing)| \leqslant 2^{|T|} \leqslant \varkappa$, $|Q_2| \leqslant |M| \cdot 2^{|T|} = \varkappa \cdot 2^{|T|} = \varkappa$, т. е. $|S(M)| = |Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2| = \varkappa$. Следовательно, теория T суперстабильна и моноид S — $\mathfrak{R}$-суперстабилизатор. $\square$

Заметим, что условие максимальности для левых идеалов полугруппы Sa, $a \in R$, из формулировки теоремы 8.1 можно заменить на условие максимальности для левых идеалов полугруппы Sa_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Это следует из доказательства теоремы 8.1.

Следствие 8.1. *Пусть класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем. Класс $\mathfrak{R}$ суперстабилен тогда и только тогда, когда S — регулярно линейно упорядоченный моноид и для любого $a \in R$ полугруппа Sa удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов.*

Доказательство следует из теоремы 8.1 и следствия 4.2. □

Следствие 8.2. *Класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов над группой суперстабилен.*

Доказательство следует из следствий 4.3 и 8.1. □

Пример 8.1. Пример 7.1 является примером регулярно линейно упорядоченного не $\mathfrak{R}$-суперстабилизатора S, такого что для любого $a \in R$ полугруппа Sa удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов. □

Пример 8.2 (регулярно линейно упорядоченного суперстабилизатора S, не удовлетворяющего условию теоремы 8.1, причём для любого $a \in R$ полугруппа Sa удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов). Пусть $S = \omega \cup \langle\alpha\rangle \cup \{1\}$, где $\langle\alpha\rangle$ — однопорождённая свободная полугруппа с порождающим α. Бинарную операцию на S зададим следующим образом: 1 — единичный элемент S, $n \cdot m = n$, $\alpha^i \cdot n = n \cdot \alpha^i = n$ для любых $n, m \in \omega$, $i \geqslant 1$. Легко проверить, что S — моноид относительно введённой операции, $Sn = \omega = R$ и $nS = \{n\}$, где $n \in \omega$. Тогда S — регулярно линейно упорядоченный моноид, не удовлетворяющий условию теоремы 8.1, и для любого $a \in R$ полугруппа Sa удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов. Так как $Sm \subset S\alpha^{i+1} \subset S\alpha^i \subset S$ для любых $m \in \omega$, $i \geqslant 1$, то по теореме 3.9 S — суперстабилизатор. □

Пример 8.3 ($\mathfrak{R}$-суперстабилизатора, не являющегося стабилизатором). Моноид S получается из моноида из примера 7.2 заменой ординала ω на $\{0\}$ с сохранением операции. Тогда $R = \mathbb{Z}_0 = 0_0 \cdot R$, и по теореме 8.1 S — $\mathfrak{R}$-суперстабилизатор. Поскольку S не является линейно упорядоченным, то по теореме 3.8 S не стабилизатор. □

Пример 8.4 ($\mathfrak{R}$-стабилизатора, не являющегося $\mathfrak{R}$-суперстабилизатором). Моноид S получается из моноида из примера 7.2 заменой ординала ω на ординал $\omega \cup \{\omega\}$ с сохранением операции. Тогда $R = \bigcup\limits_{i \in \omega \cup \{\omega\}} \mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}_\omega$ и $S0_i \subset S0_{i+1} \subset S0_\omega$ для любого $i \in \omega$. Следовательно, по утверждению 8.1 моноид S не является $\mathfrak{R}$-суперстабилизатором. Так же, как в примере 7.2, показывается, что S — $\mathfrak{R}$-стабилизатор. □

§ 9. ω-стабильность класса регулярных полигонов

В [FG] рассматриваются вопросы стабильности теории, являющейся модельным компаньоном теории всех полигонов. Такая теория существует, если моноид S когерентен слева. В этой работе доказано, что каждый полный тип этой теории характеризуется тройкой, состоящей из левого идеала моноида S, левой конгруэнции моноида S и гомоморфизма полигонов. В данном параграфе в случае аксиоматизируемости и модельной полноты класса $\mathfrak{R}$ каждый полный тип теории класса $\mathfrak{R}$ характеризуется тройкой, состоящей из левого идеала полугруппы Se_i, левой конгруэнции полугруппы Se_i и гомоморфизма полигонов, где идемпотенты e_i взяты из следствия 4.2 (лемма 9.1). Этот результат позволяет переводить теоретико-модельные свойства класса $\mathfrak{R}$ в алгебраические свойства моноида S. Как следствие, можно легко находить верхние границы числа полных типов теории класса $\mathfrak{R}$. В теореме 9.1 сформулированы критерии суперстабильности и ω-стабильности для аксиоматизированного и модельно полного класса $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов. В этой же теореме показывается стабильность аксиоматизированного модельно полного класса $\mathfrak{R}$. В конце параграфа приводится пример $\mathfrak{R}$-суперстабилизатора, не являющегося ω-$\mathfrak{R}$-стабилизатором и не являющегося суперстабилизатором.

Пусть ${}_SA \in \mathfrak{R}$, $R = \bigcup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $n \in \omega$, $e_i^2 = e_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Через $\mathrm{Tr}^i(A)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим множество троек $\langle \theta, I, \alpha\rangle$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) θ — конгруэнция полигона ${}_SSe_i$;
2) ${}_SI$ — подполигон полигона ${}_SSe_i$;
3) $\alpha\colon {}_SI \to {}_SA$, α — гомоморфизм полигонов;
4) ${}_SI$ — θ-насыщенный полигон, т. е. если $\langle a, b\rangle \in \theta$ и $a \in I$, то $b \in I$;
5) $\operatorname{Ker}\alpha = \theta \cap (I \times I)$;
6) ${}_S(Se_i/\theta) \in \mathfrak{R}$.

Пусть $\mathrm{Tr}(A) = \bigcup\{\mathrm{Tr}^i(A) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Лемма 9.1. *Пусть класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем и модельно полон, $R = \bigcup\{e_iR \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $n \in \omega$, $e_i^2 = e_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ${}_SA \in \mathfrak{R}$. Существует сюръективное отображение $\varphi\colon \mathrm{Tr}(A) \to S_1(A)$, где $S_1(A)$ — множество 1-типов над A, причём $\varphi|_{\mathrm{Tr}^i(A)}$ — инъективное отображение для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть ${}_SA \in \mathfrak{R}$ и $\langle \theta, I, \alpha\rangle \in \mathrm{Tr}^i(A)$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Через $p'(x)$ обозначим следующий тип над A:

$$\{sx = a \mid \alpha(se_i) = a,\ se_i \in I\} \cup \{sx \neq a \mid se_i \notin I,\ a \in A\} \cup \\ \cup \{sx = tx \mid \langle se_i, te_i\rangle \in \theta\} \cup \{sx \neq tx \mid \langle se_i, te_i\rangle \notin \theta\}.$$

Покажем, что тип $p'(x)$ совместим с теорией T класса $\mathfrak{R}$. Можно предполагать, что $A \cap Se_i = \varnothing$ (в противном случае заменим A на изоморфную копию A', $A' \cap Se_i = \varnothing$, гомоморфизм α — на $\alpha' = \beta\alpha$, где $\beta\colon A \to A'$ — изоморфизм). На множестве $A \cup Se_i$ определим отношение σ:

$$\sigma = \{\langle \alpha(t), t\rangle \mid t \in I\}.$$

Полагаем $\tau = \varepsilon \cup \sigma \cup \sigma^{-1} \cup \theta$, где ε — нулевая конгруэнция полигона ${}_S(A \cup Se_i)$. Покажем, что τ — конгруэнция полигона ${}_S(A \cup Se_i)$. Для этого достаточно доказать, что τ — транзитивное отношение. Пусть $x, y, z \in A \cup Se_i$, $x\ \tau\ y\ \tau\ z$, $x \neq y$, $y \neq z$.

Если $x\ \sigma\ y$, то $x = \alpha(y)$, $y \in I$. Тогда $z = \alpha(y)$ или $y\ \theta\ z$. В первом случае $x = z$, во втором случае, в силу θ-насыщенности полигона ${}_SI$, $z \in I$, и из соотношения $\operatorname{Ker}\alpha = \theta \cap (I \times I)$ получаем $\alpha(y) = \alpha(z)$, т. е. $x\ \sigma\ z$.

Если $x\ \sigma^{-1}\ y$, то $y = \alpha(x)$, $y \in A$, следовательно, $y = \alpha(z)$, $x, y \in I$ и $x\ \theta\ z$.

Если $x\,\theta\,y$, то либо $y\,\theta\,z$, либо $z=\alpha(y)$, $y\in I$, т. е. $z=\alpha(x)$ и $z\,\sigma\,x$.

Таким образом, τ — конгруэнция полигона ${}_S(A\cup Se_i)$. Пусть ${}_SC = {}_S(A\cup Se_i)/\tau$, $c=e_i/\tau$. Тогда c реализует тип $p'(x)$ в ${}_SC$. Кроме того, поскольку ${}_SA\in\mathfrak{R}$ и ${}_S(Se_i/\theta)\in\mathfrak{R}$, то ${}_SC\in\mathfrak{R}$. Следовательно, тип $\Sigma(x)=p'(x)\cup T\cup D({}_SA)$, где $D({}_SA)$ — диаграмма полигона ${}_SA$, реализуется элементом $c\in C$, т. е. совместен.

Покажем, что тип $p(x)=\mathrm{tp}(c,A)$ элемента c над множеством A — единственный полный тип, содержащий тип $\Sigma(x)$. Ясно, что $\Sigma(x)\subseteq p(x)$. Пусть $\Phi(x)$ — атомарная формула языка $L_S(A)$, являющегося обогащением языка L_S с помощью константных символов для всех элементов A. Если $\Phi(x)$ — предложение, то $\Phi(x)\in D({}_SA)$ или $\neg\Phi(x)\in D({}_SA)$. Если x — свободная переменная формулы Φ, $\Phi(x)\notin\Sigma$ и $\neg\Phi(x)\notin\Sigma$, то из определения $p'(x)$ следует, что $\Phi(x)$ имеет вид $sx=a$, где $se_i\in I$, $\alpha(se_i)\neq a$, $a\in A$. Так как $se_i\in I$, то $\alpha(se_i)=b\in A$, $b\neq a$, следовательно, $(sx=b)\in\Sigma(x)$ и $\Sigma(x)\models\neg\Phi(x)$. Таким образом, для любой бескванторной формулы $\psi(x)$ либо $\Sigma(x)\models\psi(x)$, либо $\Sigma(x)\models\neg\psi(x)$. Поскольку T — подмодельно полная теория, то по теореме 3.3 T допускает элиминацию кванторов. Следовательно, $\Sigma(x)\models p(x)$ для любого типа $p(x)\in S_1(A)$. Тип p ставим в соответствие тройке $\langle\theta,I,\alpha\rangle\in\mathrm{Tr}^i(A)$. Отображение φ построено. Очевидно, $\varphi|_{\mathrm{Tr}^i(A)}$ — инъективное отображение для любого i, $1\leqslant i\leqslant n$.

Покажем, что φ — сюръективное отображение. Пусть $p(x)\in S_1(A)$, ${}_SB$ — насыщенная модель T, реализующая тип $p(x)$ и являющаяся элементарным расширением ${}_SA$, элемент $b_0\in B$ реализует тип $p(x)$. Поскольку класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем и ${}_SA\in\mathfrak{R}$, то ${}_SB\in\mathfrak{R}$ и ${}_SSb_0\in\mathfrak{R}$. По следствию 2.1 существуют идемпотент $f\in R$ и изоморфизм $\eta\colon {}_SSb_0\to{}_SSf$, такие что $\eta(b_0)=f$. Так как $f\in R=\bigcup\{e_iR\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$, то $f\in eS$, т. е. $f=ef$ для некоторого $e\in\{e_1,\ldots,e_n\}$. Легко понять, что для любых $s,r\in S$

$$se=re \implies sef=ref \iff sf=rf \iff \iff sb_0=rb_0 \iff (sx=rx)\in p(x). \quad (9.1)$$

Введём обозначения

$$\theta=\{\langle re,se\rangle\in(Se)^2\mid (rx=sx)\in p(x),\ r,s\in S\},$$
$$I=\{re\in Se\mid (rx=a)\in p(x),\ r\in S,\ a\in A\},$$
$$\alpha\colon I\to A,$$

где $\alpha(re)=a$ для всех $re\in I$, таких что $(rx=a)\in p(x)$, $a\in A$.

Пользуясь полнотой типа $p(x)$ и (9.1), легко доказать выполнение условий 1)–5) для тройки $\langle\theta,I,\alpha\rangle$. Выполнение условия 6) следует из соотношения ${}_SSe/\theta\cong{}_SSb_0\in\mathfrak{R}$. Ясно, что $\varphi(\langle\theta,I,\alpha\rangle)=p(x)$. Лемма доказана. □

Теорема 9.1 ([Сте3]). *Пусть класс $\mathfrak{R}$ всех регулярных полигонов является аксиоматизируемым и модельно полным. Тогда $|R|\geqslant\omega$, $R=\bigcup\{e_iR\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ для некоторых $n\in\omega$, $e_1,\ldots,e_n\in R$, $e_i^2=e_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, и*

1) *класс $\mathfrak{R}$ является стабильным;*

2) *класс* $\mathfrak{R}$ *является суперстабильным тогда и только тогда, когда для любого* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *полугруппа* Se_i *удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов*;
3) *для счётной полугруппы* R *класс* $\mathfrak{R}$ *является* ω*-стабильным тогда и только тогда, когда для любого* i, $1 \leqslant i \leqslant n$, *полугруппа* Se_i *удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов и имеет не более счётного числа таких левых конгруэнций* θ, *что* ${}_S(Se_i/\theta) \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Пусть класс $\mathfrak{R}$ всех регулярных полигонов является аксиоматизируемым и модельно полным. Неравенство $|R| \geqslant \omega$ следует из утверждения 3) теоремы 5.1. Факт, что полугруппа R представляется в виде объединения конечного числа правых идеалов, утверждается в следствии 4.2.

Пусть ${}_SA \in \mathfrak{R}$. Заметим, что число всех подполигонов ${}_SI$ полигона ${}_SSe_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, не превосходит $2^{|R|}$, число всех левых конгруэнций θ полугруппы Se_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, не превосходит $2^{|R|^2}$, число всех гомоморфизмов из подполигона ${}_SI$ полигонов ${}_SSe_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в полигон ${}_SA$ не превосходит $2|A|^{|R|}$. Таким образом, $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant 2^{|R|} \cdot 2^{|R|^2} \cdot |A|^{|R|}$.

Если $|A| \leqslant 2^{|R|}$, то $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant 2^{|R|}$, и по лемме 9.1 $|S_1(A)| \leqslant 2^{|R|}$. Следовательно, класс $\mathfrak{R}$ стабилен, и утверждение 1) доказано.

Пусть для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, полугруппа Se_i удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов. Тогда каждый подполигон ${}_SI$ полигона ${}_SSe_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, конечно порождён. Следовательно, число таких подполигонов не превосходит $|R|$, а число всех гомоморфизмов из подполигона ${}_SI$ полигона ${}_SSe_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, в полигон ${}_SA$ не превосходит $\omega \cdot |A| \cdot |R|$. Поэтому $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant |A| \cdot |R| \cdot \omega \cdot |A|^{|R|}$. Если $|A| \geqslant 2^{|R|}$, то $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant |A|$, и по лемме 9.1 $|S_1(A)| \leqslant |A|$. Следовательно, класс $\mathfrak{R}$ суперстабилен.

Пусть $|R| = \omega$ и для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, полугруппа Se_i удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов и имеет не более счётного числа таких левых конгруэнций θ, что ${}_S(Se_i/\theta) \in \mathfrak{R}$. Тогда по доказанному выше $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant$ $\leqslant |A| \cdot |R| \cdot \omega$. Если $|A| = \omega$, то, поскольку полугруппа R счётна, $|\operatorname{Tr}(A)| \leqslant \omega$, и по лемме 9.1 $|S_1(A)| \leqslant \omega$. Следовательно, класс $\mathfrak{R}$ ω-стабилен.

Пусть класс $\mathfrak{R}$ суперстабилен. Поскольку класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем, то моноид S является $\mathfrak{R}$-суперстабилизатором, и по утверждению 8.1 для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, полугруппа Se_i удовлетворяет условию максимальности для левых идеалов. Утверждение 2) доказано.

Предположим, что класс $\mathfrak{R}$ ω-стабилен. Тогда по теореме 3.4 класс $\mathfrak{R}$ суперстабилен. Покажем, что для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, полугруппа Se_i имеет не более счётного числа таких левых конгруэнций θ, что ${}_S(Se_i/\theta) \in \mathfrak{R}$. Поскольку ${}_SR \in \mathfrak{R}$ и $|R| = \omega$, то $|S_1(R)| \leqslant \omega$. По лемме 9.1 $|\operatorname{Tr}^i(R)| \leqslant |S_1(R)|$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$, т. е. $|\operatorname{Tr}^i(R)| \leqslant \omega$. Пусть θ — такая левая конгруэнция полугруппы ${}_SSe_i$, что ${}_S(Se_i/\theta) \in \mathfrak{R}$. Полагаем $I = Se_i$. Поскольку ${}_S(Se_i/\theta) = {}_SS(e_i/\theta) \in \mathfrak{R}$, то по следствию 2.1 существуют идемпотент $f \in R$ и изоморфизм $\alpha' \colon {}_SS(e_i/\theta) \to {}_SSf$. Строим гомоморфизм $\alpha \colon {}_SI \to {}_SR$ следующим образом: $\alpha(a) = \alpha'(a/\theta)$ для любого $a \in Se_i$. Тогда $\langle \theta, I, \alpha \rangle \in \operatorname{Tr}^i(R)$ и число конгруэнций полигона ${}_SSe_i$ не превосходит $\mathrm{Tr}^i(R)$. Поскольку $|\,\mathrm{Tr}^i(R)| \leqslant \omega$, то полугруппа Se_i имеет не более счётного числа таких левых конгруэнций θ, что ${}_S(Se_i/\theta) \in \mathfrak{R}$ для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Утверждение 3) доказано. $\square$

Заметим, что утверждения 1) и 2) теоремы 9.1 можно получить как следствия теорем 7.1 и 8.1 соответственно.

Следствие 9.1. *Класс регулярных полигонов над счётной полугруппой ω-стабилен.*

Доказательство. По следствию 5.1 класс регулярных полигонов над счётной группой аксиоматизируем и модельно полон. Единственный идемпотент в группе — единица, единственный левый идеал группы S — сама группа S. Пусть θ — такая левая конгруэнция группы S, что ${}_S(S/\theta) \in \mathfrak{R}$. Тогда $S/\theta = S \cdot 1/\theta$. По следствию 2.1 существует такой изоморфизм $\varphi\colon S \cdot 1/\theta \to S$, что $\varphi(1/\theta) = 1$. Если $t \in 1/\theta$, то $t \cdot 1/\theta = 1/\theta$, следовательно, $t = 1$ и $|1/\theta| = 1$. Таким образом, по теореме 9.1 класс регулярных полигонов над счётной полугруппой ω-стабилен. $\square$

Формулу $\exists^n x\, \Psi(x, x_1, \ldots, x_n)$ будем применять как сокращение формулы «существует ровно n элементов x, таких что $\Psi(x, x_1, \ldots, x_n)$».

Лемма 9.2. *Пусть $a, b, c \in R$ такие, что $Sc \subset Sb \subset Sa$, $b = \alpha a$, $c = \beta b$ и существуют формула $\Phi(x, y, z)$ и $n \in \omega$, $n > 0$, такие что $\Phi(S, S, c) = \Phi(Sa \setminus Sb, Sb \setminus Sc, c)$ и*

$$\begin{aligned}&{}_SSa \models \Phi(a, b, c) \wedge \\ &\qquad \wedge \forall y\, (\beta y = c \wedge \exists x\, (\Phi(x, y, c) \wedge \alpha x = y) \to \exists^n x\, (\Phi(x, y, c) \wedge \alpha x = y)).\end{aligned}$$

Тогда S не $\mathfrak{R}$-ω-стабилизатор.

Доказательство. Предположим, что условия леммы выполнены. Пусть $K \subseteq \omega$; ${}_SM_K = \bigcup\limits_{i \in K} \bigcup\limits_{j \leqslant i} {}_SS\langle a, j^i, K\rangle/\theta_K$; ${}_SM = \bigcup\limits_{K \subseteq \omega} {}_SM_K$, где $S\langle a, j^i, K\rangle = \{\langle x, j^i, K\rangle \mid x \in Sa\}$, $s \cdot \langle x, j^i, K\rangle = \langle sx, j^i, K\rangle$ для всех $x \in Sa$, $i \in K$, $j \leqslant i$; θ_K — конгруэнция полигона $\bigcup\limits_{i \in K} \bigcup\limits_{j \leqslant i} {}_SS\langle a, j^i, K\rangle$, порождённая множеством

$$\begin{aligned}&\{\langle\langle b, j_1^i, K\rangle, \langle b, j_2^i, K\rangle\rangle \mid j_1, j_2 \leqslant i,\ i \in K\} \cup \\ &\qquad \cup \{\langle\langle c, j_1^{i_1}, K\rangle, \langle c, j_2^{i_2}, K\rangle\rangle \mid j_1 \leqslant i_1,\ j_2 \leqslant i_2,\ i_1, i_2 \in K\}.\end{aligned}$$

Через $\Gamma_K(x)$ обозначим множество формул

$$\begin{aligned}&\{\exists y\, \exists^{n(i+1)} z\, (x = \beta y \wedge y = \alpha z \wedge \Phi(z, y, x) \mid i \in K\} \cup \\ &\qquad \cup \{\neg \exists y\, \exists^{n(i+1)} z\, (x = \beta y \wedge y = \alpha z \wedge \Phi(z, y, x) \mid i \notin K\}.\end{aligned}$$

Нетрудно понять, что множество формул $\Gamma_K(x)$ реализуется элементом $\langle c, j^i, K\rangle/\theta_K$ и не реализуется элементом $\langle c, j^i, K'\rangle/\theta_{K'}$ для любого $K' \subseteq \omega$, $K \neq K'$. Следовательно, $|S(\varnothing)| = 2^\omega$, т. е. S не $\mathfrak{R}$-ω-стабилизатор. $\square$

Пример 9.1 ($\mathfrak{R}$-суперстабилизатора, не являющегося $\mathfrak{R}$-ω-стабилизатором и стабилизатором). Пусть $S = \{a, b, c\} \cup \langle \alpha, \beta \rangle \cup \{1\}$, где $\langle \alpha, \beta \rangle$ — свободная двухпорождённая коммутативная полугруппа с порождающими α и β. Зададим на S бинарную операцию следующим образом: 1 — единичный элемент S, $a \cdot x = a$, $b \cdot x = x$ для любого $x \in \{a, b\}$, $c \cdot y = y \cdot c = y$ для любого $y \in \{a, b, c\}$, $\gamma \cdot z = z \cdot \gamma = z$ для любых $z \in \{a, b, c\}$, $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Легко проверить, что S — моноид относительно введённой операции, $\{a, b, c\}$ — множество всех идемпотентов моноида S, $Sa \subset Sb \subset Sc = S$ и $R = Sc = cS$. По теореме 8.1 S — $\mathfrak{R}$-суперстабилизатор. Для элементов a, b, c, формулы $\Phi(x, y, z) \rightleftharpoons bx = y \wedge x \neq y$ и $n = 1$ выполняются условия леммы 9.2. Следовательно, S не является $\mathfrak{R}$-ω-стабилизатором. Поскольку моноид S не является линейно упорядоченным, то S не является стабилизатором. □

Литература

[ЕП] Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Наука, 1987.

[КМ] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1982.

[КЧ] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[Мус] Мустафин Т. Г. О стабильностной теории полигонов // Теория моделей и её применение. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1988. — С. 92—107. — Тр. АН СССР. Сиб. отд-е. Ин-т математики. Т. 8.

[Овч2] Овчинникова Е. В. Полные классы регулярных полигонов с конечным числом идемпотентов // Сиб. мат. журн. — 1995. — Т. 36, № 2. — С. 381—384.

[Овч1] Овчинникова Е. В. Строение класса регулярных полигонов // Исследования в теории алгебраических систем. Межвузовский сборник научных трудов. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. — С. 84—86.

[Овч4] Овчинникова Е. В. Моноид, над которым класс регулярных полигонов полон, не модельно полон // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 110—114.

[Овч5] Овчинникова Е. В. Не линейно упорядоченный моноид, над которым класс регулярных полигонов полон, но не модельно полон // Алгебра и теория моделей, 3. Сборник трудов. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — С. 83—98.

[Овч3] Овчинникова Е. В. Полные классы регулярных полигонов над моноидами глубины 2 // Алгебра и логика. — 2002. — Т. 41, № 6. — С. 745—753.

[Пал] Палютин Е. А. Спектр и структура моделей полных теорий // Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. — М.: Наука, 1982. — С. 320—387.

[Сак] Сакс Дж. Теория насыщенных моделей. — М.: Мир, 1976.

[Сте1] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // Сиб. мат. журн. — 1994. — Т. 35, № 1. — С. 181—193.

[Сте3] Степанова А. А. Стабильность класса регулярных полигонов // Исследования в теории алгебраических систем. Межвузовский сборник научных трудов. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. — С. 95—102.

[Сте2] Степанова А. А. Моноиды со стабильными теориями регулярных полигонов // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 4. — С. 430—457.

[Суш] Сушкевич А. К. Теория обобщённых групп. — Харьков, Киев: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1937.

[FG] Fountain J. B., Gould V. Stability of S-Sets. — Preprint. — 2001.

[KKM] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2000.

[She] Shelah S. Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models. — Second edition. — North-Holland, 1990.

[Tra] Tran L. H. Characterization of monoid by regular acts // Period. Math. Hungar. — 1985. — Vol. 16. — P. 273—279.

[Zel] Zelmanowitz J. Regular modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 163. — P. 341—355.