О неявных условных операциях на псевдоуниверсальных классах

А. Г. ПИНУС
Новосибирский государственный технический университет
e-mail: algebra@nstu.ru

УДК 512.56

Ключевые слова: псевдоуниверсальные классы, неявно условные операции, условные псевдотождества, условно-термальные функции.

Аннотация

Исследуются синтаксические описания неявных операций на псевдоуниверсальных (замкнутых относительно подалгебр) классах конечных алгебр и вопросы аксиоматизации подобных классов.

Abstract

A. G. Pinus, On the implicit conditional operations defined on pseudouniversal classes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 171—182.

We study syntactical descriptions of implicit operations on pseudouniversal classes of finite algebras (closed under subalgebras) and the questions of axiomatizability of such classes.

По аналогии с псевдомногообразиями и псевдоквазимногообразиями (см., к примеру, [6—8]) под *псевдоуниверсальным классом* будем понимать любой абстрактный (замкнутый относительно изоморфизмов) класс $\mathcal{K}$ конечных универсальных алгебр фиксированной сигнатуры, замкнутый относительно подалгебр. В частности, псевдоуниверсальным является любой класс, состоящий из конечных алгебр произвольного универсального (аксиоматизируемого $\forall$-формулами) класса алгебр.

Для любого класса $\mathcal{K}$ универсальных алгебр через $\mathcal{K}_{\aleph_0}$ обозначим класс, состоящий из конечных $\mathcal{K}$-алгебр. Таким образом, для любого универсального класса $\mathcal{K}$ класс $\mathcal{K}_{\aleph_0}$ является псевдоуниверсальным. Если сигнатура класса $\mathcal{K}$ конечна, то верно и обратное: любой псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K}_1$ конечной сигнатуры имеет вид $\mathcal{K}_{\aleph_0}$ для некоторого универсального класса $\mathcal{K}$. Действительно, пусть $\mathcal{K}$ — наименьший универсальный класс, включающий в себя псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K}_1$. Тогда $\mathcal{K} = \mathrm{ISP_p}(\mathcal{K}_1)$, где $\mathrm{P_p}(\mathcal{K}')$ — класс, состоящий из всех ультрапроизведений $\mathcal{K}'$-алгебр, $\mathrm{S}(\mathcal{K}')$ — класс, состоящий из всех подалгебр $\mathcal{K}'$-алгебр, $\mathrm{I}(\mathcal{K}')$ — класс всех алгебр, изоморфных $\mathcal{K}'$-алгебрам, для произвольного класса алгебр $\mathcal{K}'$. Если $\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{\aleph_0}$, то $\mathcal{A}$ — конечная алгебра, изоморфно вложимая в некоторое ультрапроизведение $\mathcal{K}_1$-алгебр. Но

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 4, с. 171—182.

тогда в силу конечности алгебры $\mathcal{A}$ и конечности её сигнатуры $\mathcal{A}$ вложима в некоторую $\mathcal{K}_1$-алгебру, и равенство $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_{\aleph_0}$ доказано. Для бесконечных сигнатур подобное утверждение неверно. К примеру, пусть сигнатура σ состоит из счётного числа одноместных функциональных символов f_i $(i \in \omega)$. Пусть $\mathcal{K}_1 = \mathrm{I}\{\mathcal{A}_n = \langle\{0, 1, \ldots, n-1\}; \sigma\rangle \mid n \in \omega\}$, при этом $\mathcal{A}_n$ образует цикл длины n относительно функции f_n, а все остальные функции f_i тождественны на $\mathcal{A}_n$. Тогда на ультрапроизведении алгебр $\mathcal{A}_n$ по любому неглавному ультрафильтру все сигнатурные функции являются тождественными, и, следовательно, любая конечная алгебра с тождественными сигнатурными функциями входит в класс $\mathrm{ISP_p}(\mathcal{K}_1)$. Таким образом, псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K}_1$ не совпадает с классом вида $\mathcal{K}_{\aleph_0}$ ни для какого универсального класса $\mathcal{K}$.

Для любой совокупности универсальных формул $\phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$, где $\langle I; \leqslant\rangle$ — некоторое направленное вверх частично упорядоченное множество, будем говорить, что ϕ *финально истинно* на алгебре $\mathcal{A}$, если для некоторого $k \in I$ на $\mathcal{A}$ истинны все формулы из совокупности $\phi_k = \{\varphi_i \mid i \in I,\ i \geqslant k\}$. Через $\mathrm{Mod}^u\,\phi$ обозначим класс всех алгебр, на которых финально истинна совокупность формул ϕ. Очевидно, что любой подобный класс является псевдоуниверсальным. Верно и обратное.

Для псевдомногообразий имеет место следующее утверждение, аналогичное теореме Эйленберга—Шютценберже [8].

Теорема 1. *Для любого псевдоуниверсального класса алгебр $\mathcal{K}$ существует такая совокупность универсальных формул ϕ, что $\mathcal{K} = (\mathrm{Mod}^u\,\phi)_{\aleph_0}$.*

Доказательство. Пусть для некоторых множеств J_1, J_2 имеют место равенства $\mathcal{K} = I\{\mathcal{A}_i \mid i \in J_1\}$ и $\sigma = \langle f_i \mid i \in J_2\rangle$, где σ — сигнатура класса $\mathcal{K}$. Через $P_\omega(A)$ обозначим совокупность всех конечных подмножеств произвольного множества A. Для любого $S \in P_\omega(J_2)$ через σ_S обозначим сигнатуру $\langle f_i \mid i \in S\rangle$, а через $\mathcal{A}_i^S$ — обеднение алгебры $\mathcal{A}_i$ до сигнатуры σ_S. Пусть $D_i^S(x_1, \ldots, x_{n_{S,i}})$ — диаграмма алгебры $\mathcal{A}_i^S$, а

$$\phi_i^S = \forall x_1, \ldots, x_{n_{S,i}}, x_{n_{S,i}+1}\Big(\bigvee_{i\neq j} x_i = x_j) \,\&$$

$$\& \,\forall x_1, \ldots, x_{n_{S,i}}\Big[\Big(\mathop{\&}_{i\neq j} x_i \neq x_j\Big) \to \bigvee_{\pi\in\mathrm{Sym}(n_{S,i})} D_i^S(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n_{S,i})})\Big].$$

Здесь $\mathrm{Sym}(m)$ — группа всех перестановок на множестве $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, а $n_{S,i}$ — мощность алгебры $\mathcal{A}_i$.

Таким образом, для любой алгебры $\mathcal{B}$ сигнатуры σ_S мы имеем, что $\mathcal{B} \models \phi_i^S$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_i^S$. Для любых $S_1 \in P_\omega(J_1)$ и $S_2 \in P_\omega(J_2)$ через ψ_{S_1,S_2} обозначим универсальную формулу $\bigvee_{i\in S_1} \phi_i^{S_2}$.

Упорядочим множество $P_\omega(J_1)\times P_\omega(J_2)$, используя теоретико-множественное включение $\subseteq$, и обозначим его $\langle I; \leqslant\rangle$. Тогда $\langle I; \leqslant\rangle$ — направленное вверх частично упорядоченное множество. Пусть $\psi = \{\psi_{S_1,S_2} \mid \langle S_1, S_2\rangle \in I\}$. Очевидно, что для любой алгебры $\mathcal{A}_i$ на ней истинна совокупность формул

$$\{\psi_{S_1,S_2} \mid \langle S_1, S_2\rangle \in I,\ \langle\{i\} \times \varnothing\rangle \leqslant \langle S_1, S_2\rangle\},$$

т. е. совокупность формул ψ финально истинна на классе $\mathcal{K}$. Очевидно и обратное. Если $\mathcal{B}$ — некоторая конечная алгебра сигнатуры σ, на которой финально истинна совокупность формул ψ, то $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}_i$ для некоторого $i \in J_1$. Тем самым равенство $\mathcal{K} = (\mathrm{Mod}^u\,\psi)_{\aleph_0}$ доказано. □

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый псевдоуниверсальный класс и n-местная функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ определена на каждой из $\mathcal{K}$-алгебр, причём эта функция коммутирует со всеми изоморфными вложениями $\mathcal{K}$-алгебр друг в друга. Подобную функцию назовём *неявной условной операцией на псевдоуниверсальном классе* $\mathcal{K}$. Понятия условного терма и условного тождества были введены в [1]. Так как любая условно термальная функция коммутирует с изоморфными вложениями алгебр друг в друга, то любой условный терм на любом псевдоуниверсальном классе определяет некоторую неявную условную операцию. С другой стороны, для любой алгебры $\mathcal{A}$ из $\mathcal{K}$ справедливо, что, поскольку подалгебры алгебры $\mathcal{A}$ замкнуты относительно g и g коммутирует со всеми внутренними изоморфизмами алгебры $\mathcal{A}$, в силу результатов из [2] найдётся так называемый условный терм (см., к примеру, [4, 5]) сигнатуры класса $\mathcal{K}$, определяющий на алгебре $\mathcal{A}$ функцию g, и этот условный терм, вообще говоря, зависит от выбора алгебры $\mathcal{A}$.

Формальное равенство $g_1(x_1, \ldots, x_n) = g_2(x_1, \ldots, x_n)$ двух неявных условных на классе $\mathcal{K}$ операций g_1 и g_2 будем называть *условным псевдотождеством на классе* $\mathcal{K}$. Будем говорить, что класс $\mathcal{K}$ удовлетворяет условному псевдотождеству $g_1(x_1, \ldots, x_n) = g_2(x_1, \ldots, x_n)$, если на любой алгебре $\mathcal{A}$ из $\mathcal{K}$ функции g_1 и g_2 совпадают. Для любой совокупности $\mathcal{T}$ условных псевдотождеств на псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$ через $\mathrm{Mod}_{\mathcal{K}}(\mathcal{T})$ обозначим совокупность $\mathcal{K}$-алгебр, удовлетворяющих каждому условному псевдотождеству из $\mathcal{T}$.

Любое условное тождество является условным псевдотождеством на произвольном псевдоуниверсальном классе. С другой стороны, условные многообразия (совокупности универсальных алгебр, определяемые условными тождествами), как доказано в [1], суть универсальные классы алгебр, включающие в себя одноэлементную алгебру соответствующей сигнатуры.

Как и для псевдомногообразий и псевдотождеств (см. [10]), имеет место характеризация псевдоуниверсальных классов на языке условных псевдотождеств (аналог теоремы Райтермана).

Доказательство следующего утверждения очевидно в силу замеченного выше и того, что в случае конечности сигнатуры любой псевдоуниверсальный класс алгебр $\mathcal{K}$ имеет вид $\mathcal{K}'_{\aleph_0}$ для некоторого универсального класса $\mathcal{K}'$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}_0$ — некоторый фиксированный псевдоуниверсальный класс алгебр конечной сигнатуры и $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_0$, при этом одноэлементная алгебра входит в класс $\mathcal{K}$, если она входит в $\mathcal{K}_0$. В этом случае $\mathcal{K}$ является* *псевдоуниверсальным классом тогда и только тогда, когда для некоторого множества* $\mathcal{T}$ *условных псевдотождеств на* $\mathcal{K}_0$ *(более того, условных тождеств) имеет место равенство* $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}_{\mathcal{K}_0}(\mathcal{T})$.

Приведём несколько примеров условно неявных операций на псевдоуниверсальных классах.

1. Как известно (см., к примеру, [5]), класс всех конечных групп, рассматриваемых в полугрупповой сигнатуре, является псевдомногообразием, определяемым псевдотождеством

$$\pi(x) \cdot y = y \cdot \pi(x) = y,$$

где $\pi(x)$ — неявная операция, определяемая на классе $\mathcal{K}$ всех конечных полугрупп следующим образом: $\pi(x)$ — идемпотент $\mathcal{K}$-полугруппы, содержащийся в полугруппе, порождённой элементом x.

Рассмотрим неявную условную операцию $\zeta(x, y)$ на классе $\mathcal{K}$, определённую следующим образом: $\zeta(x, y) = \pi(x)$, если $x = y^n$ либо $y = x^n$ для некоторого натурального n, и $\zeta(x, y) = xy$ иначе. Тогда пара условных псевдотождеств

$$\pi(x) \cdot y = y \cdot \pi(x) = y,$$
$$\zeta(x, y) = \pi(x)$$

определяет псевдоуниверсальный класс всех конечных циклических групп, не являющийся псевдомногообразием.

2. Моноунар $\mathcal{A}$ сигнатуры $\langle f \rangle$ назовём *связным*, если для любых x, y из $\mathcal{A}$ для некоторых натуральных n и m имеет место равенство

$$f^n(x) = f^m(y),$$

где $f^i(x)$ — i-я итерация функции f.

Через $\mathcal{K}_\mathrm{C}$ обозначим псевдомногообразие всех конечных связных моноунаров. *Циклом* $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ $\mathcal{K}_\mathrm{C}$*-связного моноунара* $\mathcal{A}$ назовём единственную циклическую подалгебру алгебры $\mathcal{A}$. Связный моноунар $\mathcal{A}$ назовём n*-циклическим* (n — некоторое положительное натуральное число), если $|\mathrm{C}(\mathcal{A})| = n$. Пусть $\mathcal{K}_n$ состоит из всех конечных n-циклических связных моноунаров. Очевидно, что $\mathcal{K}_n$ является псевдоуниверсальным классом, не являющимся псевдомногообразием при $n \neq 1$.

Для любого элемента x произвольного конечного моноунара $\mathcal{A}$ пусть $\pi(x)$ — это наименьшая степень x^m элемента x, входящая в $\mathrm{C}(\langle x \rangle)$, где $\langle x \rangle$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, порождённая x. Функция $\pi(x)$ является неявной операцией на классе $\mathcal{K}$ всех конечных моноунаров. Для любых x, y из конечного моноунара $\mathcal{A}$ пусть $\zeta(x, y) = f^n(x)$, где n — наименьшая степень, такая что $f^n(x) = \pi(y)$, если $\mathrm{C}(\langle x \rangle) = \mathrm{C}(\langle y \rangle)$ (где $\langle z \rangle$ — подалгебра, порождённая элементом z), и $\zeta(x, y) = y$, если $\mathrm{C}(\langle x \rangle) \neq \mathrm{C}(\langle y \rangle)$.

Функция ζ является неявной условной операцией на $\mathcal{K}$. Класс $\mathcal{K}_\mathrm{C}$ определяется внутри класса $\mathcal{K}$ условным псевдотождеством

$$\zeta(x, y) = \pi(y),$$

а класс $\mathcal{K}_1$ внутри класса $\mathcal{K}$ — условным псевдотождеством

$$\pi(x) = \pi(y).$$

Условное псевдотождество

$$f^n(\pi(x)) = \pi(x)$$

определяет класс $\bigcup\limits_{d \in D(n)} \mathcal{K}_d$ внутри класса $\mathcal{K}_{\mathrm{C}}$, где $D(n)$ — совокупность делителей числа n.

Пусть двухместная функция $\mu_n(x, y)$ определена на $\mathcal{K}$-алгебрах следующим образом: если

$$f^n(\pi(x)) = \pi(x) \mathbin{\&} \mathop{\&}\limits_{d \in D(n) \setminus \{n\}} f^d(\pi(x)) \neq \pi(x),$$

то $\mu_n(x, y) = y$, и $\mu_n(x, y) = x$ иначе. Функция μ_n является неявной условной операцией на классе $\mathcal{K}$-алгебр, и условное псевдотождество

$$\mu_n(x, y) = x$$

определяет псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K}_n$ внутри класса $\mathcal{K}_{\mathrm{C}}$.

3. Наконец, очевидно, что псевдоуниверсальными классами являются классы всех конечных полей $\mathcal{F}$ и классы $\mathcal{F}_p$ всех конечных полей фиксированной характеристики p, рассматриваемые в кольцевой сигнатуре $\langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

Как уже отмечалось выше, если псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K}$ состоит из алгебр, изоморфных подалгебрам некоторой конечной алгебры, то неявные условные операции на $\mathcal{K}$ определены условными термами. То же самое можно утверждать, если $\mathcal{K}$ состоит из алгебр, изоморфных подалгебрам конечных алгебр из некоторой конечной совокупности, т. е. $\mathcal{K} = \mathrm{IS}\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n\}$, где алгебры $\mathcal{A}_i$ конечны. Действительно, так как $\mathcal{K}$ является универсальным классом, то это следует из утверждений работы [3]. Таким образом, если сигнатура псевдоуниверсального класса $\mathcal{K}$ конечна и для любого натурального n через $\mathcal{K}_n$ обозначим класс $\{\mathcal{A} \in \mathcal{K} \mid |\mathcal{A}| \leqslant n\}$, то любая неявная условная операция $g(x_1, \ldots, x_m)$ на $\mathcal{K}$ аппроксимируема относительно классов $\mathcal{K}_n$ условными термами, т. е. для любого $n \in \omega$ существует такой условный терм $t_n(x_1, \ldots, x_m)$, что на $\mathcal{K}_n$-алгебрах функция g совпадает с условно термальной функцией, определяемой условным термом t_n. Это, как и в случае с псевдомногообразиями и термами, даёт основание ввести некоторую естественную метрику на совокупности неявных условных операций на псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$ так, что совокупность условно термальных функций на $\mathcal{K}$ оказывается плотным подмножеством в соответствующем метрическом пространстве условно неявных операций на $\mathcal{K}$.

Для произвольных неявных условных операций $g(x_1, \ldots, x_m)$, $h(x_1, \ldots, x_m)$ на фиксированном псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$ определим $d(g, h) = \min\{n \in \omega \mid$ в классе $\mathcal{K}_n$ существует алгебра $\mathcal{A}$, на которой функции g и h не совпадают$\}$. Полагая $\zeta(g, h) = 2^{-d(g,h)}$, замечаем, что совокупность $\mathrm{CIO}^m_{\mathcal{K}}$ m-местных неявных условных операций на классе $\mathcal{K}$, наделённая метрикой ζ, является метрическим пространством, более того — полным метрическим пространством. А в силу замеченного выше совокупность $\mathrm{CT}_{\mathcal{K}}^m$ условно термальных функций на алгебрах класса $\mathcal{K}$ является плотным подмножеством в метрическом пространстве $\mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m$. При этом если мощности $\mathcal{K}$-алгебр ограничены некоторым натуральным числом (напомним, что мы рассматриваем случай конечности сигнатуры класса $\mathcal{K}$), то $\mathrm{CT}_{\mathcal{K}}^m = \mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m$.

На совокупности $\mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ естественным образом можно определить функции сигнатуры σ. Пусть $f(x_1, \ldots, x_k) \in \sigma$ и $g_1, \ldots, g_k \in \mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m$, тогда, определяя на любой $\mathcal{K}$-алгебре $\mathcal{A}$ для любых элементов $a_1, \ldots, a_m$ из $\mathcal{A}$ значение операции $f(g_1, \ldots, g_k)$ как

$$f(g_1, \ldots, g_k)(a_1, \ldots, a_m) = f(g_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, g_k(a_1, \ldots, a_m)),$$

очевидным образом получаем, что операция $f(g_1, \ldots, g_m)$ является неявной условной операцией на псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$. Подобным образом определённую σ-алгебру $\langle \mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m; \sigma\rangle$ обозначим как $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ и назовём *алгеброй неявных условных m-местных операций на псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$*.

Пусть $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ — совокупность представителей всех типов изоморфизма $\mathcal{K}$-алгебр и $\mathcal{A}_i = \langle A_i; \sigma\rangle$. Через $\mathrm{CT}_{\mathcal{A}_i}^m$ обозначим совокупность всех условно термальных m-местных функций алгебры $\mathcal{A}_i$. Тогда $\mathrm{CT}_{\mathcal{A}_i}^m \subseteq A_i^{A_i^m}$. Естественным образом определяя на множестве $\mathrm{CT}_{\mathcal{A}_i}^m$ сигнатурные функции, мы получаем σ-алгебру $\mathcal{CT}_{\mathcal{A}_i}^m = \langle \mathrm{CT}_{\mathcal{A}_i}^m; \sigma\rangle$. Любая неявная условная операция $g(x_1, \ldots, x_m)$ столь же естественно может быть рассмотрена как некоторый элемент множества $\prod\limits_{i\in I} A_i^{A_i^m}$, т. е. $\mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m \subseteq \prod\limits_{i\in I} A_i^{A_i^m}$. Более того, в силу отмеченной выше аппроксимации неявных условных операций на классе $\mathcal{K}$ относительно классов $\mathcal{K}_n$ $(n \in \omega)$ условно термальными функциями имеет место включение

$$\mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{CT}_{\mathcal{A}_i}^m, \tag{$*$}$$

при этом алгебра $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ неявных условных m-местных операций на $\mathcal{K}$ оказывается разложима в подпрямое произведение алгебр $\mathcal{CT}_{\mathcal{A}_i}^m$.

Рассматривая на алгебрах $\mathcal{CT}_{\mathcal{A}_i}^m$ дискретную топологию и определяя на алгебре $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ в силу включения $(*)$ тихоновскую топологию, получаем возможность рассматривать алгебру $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ как хаусдорфову, компактную, вполне несвязную σ-алгебру. Очевидно, что топология на совокупности $\mathrm{CIO}_{\mathcal{K}}^m$, индуцированная введённой выше метрикой ζ, совпадает с только что определённой топологией на алгебре $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$. Определяя для любого условного терма $t(x_1, \ldots, x_m)$ сигнатуры σ элемент $\hat{t} \in \prod\limits_{i\in I} \mathrm{CT}_{\mathcal{A}_i}^m$ равенством $\hat{t}(i) = t_{\mathcal{A}_i}$, где $t_{\mathcal{A}_i}$ — условно термальная функция на алгебре $\mathcal{A}_i$, соответствующая условному терму t, получаем, что совокупность $\mathrm{CT}_{\mathcal{K}}^m = \{\hat{t} \mid tm\text{-местный условный терм сигнатуры } \sigma\}$ образует плотную в $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ подалгебру $\mathcal{CT}_{\mathcal{K}}^m = \langle \mathrm{CT}_{\mathcal{K}}^m; \sigma\rangle$ (назовём её *алгеброй m-местных условно термальных функций на псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$*), и при этом алгебра $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ является пополнением алгебры $\mathcal{CT}_{\mathcal{K}}^m$. Резюмируем всё сказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *Алгебра неявных условных m-местных операций $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ на любом псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$ конечной сигнатуры σ разложима в подпрямое произведение алгебр $\mathcal{CT}_{\mathcal{A}_i}^m$ m-местных условно термальных функций на алгебрах $\mathcal{A}_i$ (где $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ — представители типов изоморфизмов алгебр из $\mathcal{K}$), и при этом алгебра $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ является хаусдорфовой, компактной, вполне несвязной топологической σ-алгеброй. Алгебра же $\mathcal{CT}_{\mathcal{K}}^m$ m-местных условно термальных функций на классе $\mathcal{K}$ является плотной подалгеброй алгебры $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$, а алгебра $\mathcal{CIO}_{\mathcal{K}}^m$ есть пополнение подалгебры $\mathcal{CT}_{\mathcal{K}}^m$.*

Отметим связь неявных условных операций с условно термальными функциями. Эта связь очевидным образом вытекает из отмеченной выше аппроксимации на псевдоуниверсальных классах $\mathcal{K}$ относительно классов $\mathcal{K}_n$ ($n \in \omega$) неявных условных операций условно термальными функциями. Пусть $g(x_1, \ldots, x_m)$ — неявная условная операция на псевдоуниверсальном классе $\mathcal{K}$ конечной сигнатуры. Напомним, что любой условный терм сигнатуры σ, как замечено в [1], эквивалентен условному терму в нормальной форме, т. е. имеет вид

$$t(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} \mathcal{T}_1(x_1, \ldots, x_m) \to t_1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{T}_k(x_1, \ldots, x_m) \to t_k(x_1, \ldots, x_m), \end{cases}$$

где k — некоторое натуральное число, $t_i(x_1, \ldots, x_m)$ — стандартные термы сигнатуры σ, а $\mathcal{T}_i(x_1, \ldots, x_m)$ — условия (т. е. попарно несовместные конечные системы равенств и неравенств между термами сигнатуры σ).

Пусть $\mathcal{K}_n^m$ — подкласс класса $\mathcal{K}$, состоящий из m-порождённых $\mathcal{K}$-алгебр, мощности которых не превышают n ($m, n \in \omega$). Пусть $\{\mathcal{A}_1^n, \ldots, \mathcal{A}_{l_n}^n\}$ — представители типов изоморфизма алгебр из $\mathcal{K}_n^m \setminus \bigcup\limits_{j<n} \mathcal{K}_j^m$ с фиксированными (с точностью до их бескванторных типов в алгебрах $\mathcal{A}_i$) порождающими. Пусть $D_i^r(x_1, \ldots, x_m)$ — диаграмма алгебры $\mathcal{A}_i^r$ при интерпретации переменных $x_1, \ldots x_m$ порождающими, соответствующими алгебре $\mathcal{A}_i^r$. Пусть $t_i^r(x_1, \ldots, x_m)$ — такой терм сигнатуры σ, что

$$\mathcal{A}_i^r \models g(a_1, \ldots, a_m) = t_i^r(a_1, \ldots, a_m),$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — порождающие алгебры $\mathcal{A}_i^r$, соответствующие переменным $x_1, \ldots, x_m$ из диаграммы $D_i^r(x_1, \ldots, x_m)$. Рассмотрим следующую бесконечную схему, подобную определению условного терма:

$$t(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} D_1^1(x_1, \ldots, x_m) \to t_1^1(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_1^n(x_1, \ldots, x_m) \to t_1^n(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{l_n}^n(x_1, \ldots, x_m) \to t_{l_n}^n(x_1, \ldots, x_m), \\ D_1^{n+1}(x_1, \ldots, x_m) \to t_1^{n+1}(x_1, \ldots, x_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Подобную схему назовём бесконечно условным термом на классе $\mathcal{K}$. Естественным образом этот бесконечно условный терм определяет некоторую m-местную операцию на $\mathcal{K}$-алгебрах: для любой $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ и любых $b_1, \ldots, b_m, c \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models t(b_1, \ldots, b_m) = c \iff \mathcal{A} \models D_j^n(b_1, \ldots, b_m) \,\&\, t_j^n(b_1, \ldots, b_m) = c$$

для некоторых (единственных в силу определения t) натуральных чисел n, j.

Очевидно, что операция, определяемая на $\mathcal{K}$-алгебрах данным бесконечно условным термом, совпадает с исходной неявной условной операцией g. При этом если класс $\mathcal{K}$ равномерно локально конечен, т. е. существует такая функция $h\colon \omega \to \omega$, что мощность любой n-порождённой $\mathcal{K}$-алгебры не превышает числа $h(n)$ для любого натурального n, то терм $t(x_1, \ldots, x_m)$ является обычным условным термом сигнатуры σ (состоит из конечного числа строк).

Утверждение 1. *Неявные условные операции на псевдоуниверсальных классах $\mathcal{K}$ конечной сигнатуры определимы бесконечно условными термами, а в случае равномерно локально конечного класса $\mathcal{K}$ определимы на $\mathcal{K}$ условными термами.*

Представляется естественным вопрос об определимости псевдоуниверсального класса конечной системой условных псевдотождеств.

Пусть $\mathcal{K}_\sigma$ — класс всех конечных алгебр сигнатуры σ и $\mathcal{K}$ — некоторый псевдоуниверсальный класс этой же сигнатуры. Класс $\mathcal{K}$ назовём *n-локальным* для некоторого натурального n, если любая σ-алгебра, все n-порождённые подалгебры которой суть $\mathcal{K}$-алгебры, и сама входит в $\mathcal{K}$.

Теорема 4. *Для любой конечной сигнатуры σ псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, включающий в себя одноэлементную алгебру, определим внутри $\mathcal{K}_\sigma$ конечной системой условных псевдотождеств тогда и только тогда, когда класс $\mathcal{K}$ является n-локальным для некоторого натурального n. Более того, любой n-локальный псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K}$ определим внутри $\mathcal{K}_\sigma$ некоторым одним условным псевдотождеством вида*

$$g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = x_{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{K}$ — n-локальный псевдоуниверсальный класс и $\langle \mathcal{A}_1, a_1^1, \ldots, a_n^1\rangle, \ldots, \langle \mathcal{A}_m, a_1^m, \ldots, a_n^m\rangle, \ldots$ — перечисление всех n-порождённых $\mathcal{K}$-алгебр вместе с наборами их порождающих, включающих не более n-элементов, а $\langle \mathcal{B}_1, b_1^1, \ldots, b_n^1\rangle, \ldots, \langle \mathcal{B}_m, b_1^m, \ldots, b_n^m\rangle, \ldots$ — перечисление всех n-порождённых $(\mathcal{K}_\sigma \setminus \mathcal{K})$-алгебр вместе с наборами их порождающих, включающих не более n элементов. Пусть $D_{\langle \mathcal{A}_m, a_1^m, \ldots, a_n^m\rangle}(x_1, \ldots, x_n)$ — такая диаграмма алгебры $\mathcal{A}_m$, что

$$\mathcal{A}_m \models D_{\langle \mathcal{A}_m, a_1^m, \ldots, a_n^m\rangle}(a_1^m, \ldots, a_n^m).$$

Аналогично определяется формула $D_{\langle \mathcal{B}_m, b_1^m, \ldots, b_n^m\rangle}(x_1, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим бесконечный условный терм

$$
t(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}) = \begin{cases} D_{\langle \mathcal{A}_1,a_1^1,\ldots,a_n^1\rangle}(x_1,\ldots,x_n) \to x_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{\langle \mathcal{A}^m,a_1^m,\ldots,a_n^m\rangle}(x_1,\ldots,x_n) \to x_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{\langle \mathcal{B}^1,b_1^1,\ldots,b_n^1\rangle}(x_1,\ldots,x_n) \to x_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_{\langle \mathcal{B}^m,b_1^m,\ldots,b_n^m\rangle}(x_1,\ldots,x_n) \to x_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}
$$

Пусть $g(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$ — неявная условная операция, определяемая на $\mathcal{K}_\sigma$-алгебрах этим бесконечным условным термом t. Тогда очевидно, что условное псевдотождество $g(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}) = x_{n+1}$ определяет псевдоуниверсальный класс $\mathcal{K}$ внутри псевдоуниверсального класса $\mathcal{K}_\sigma$.

Обратное, т. е. n-локальность псевдоуниверсального класса, определяемого внутри класса $\mathcal{K}_\sigma$ некоторой конечной системой условных псевдотождеств, очевидно, поскольку в этой системе фигурирует лишь конечное число переменных. $\square$

В [3] для любого класса алгебр $\mathcal{K}$ под категорией $\overrightarrow{\mathcal{K}}$ вложимости класса $\mathcal{K}$ понимается категория, объектами которой являются $\mathcal{K}$-алгебры, а морфизмами — всевозможные изоморфные вложения одних $\mathcal{K}$-алгебр в другие. Там же доказан аналог теоремы Мальцева о рациональной эквивалентности: любые два условных многообразия (универсальные классы, включающие в себя одноэлементную алгебру) условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны категории вложимости этих условных многообразий.

Два псевдоуниверсальных класса $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно назовём *неявно условно эквивалентными*, если существуют отображения F_1 (F_2) сигнатурных символов операций из σ_1 (σ_2) в совокупности неявных условных операций на $\mathcal{K}_2$ ($\mathcal{K}_1$), такие что для n-арного символа $f \in \sigma_1$ ($f \in \sigma_2$) $F_1(f)$ ($F_2(f)$) есть n-арная неявная условная операция на классе $\mathcal{K}_2$ ($\mathcal{K}_1$) и при этом

1) для любой $\mathcal{K}_1$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A;\sigma_1\rangle$ алгебра $F_2(\mathcal{A}) = \langle A;\sigma_2\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}_2$, здесь σ_2-операции алгебры $F_2(\mathcal{A})$ определены как соответствующие $F_2(\sigma_2)$-неявные условные операции алгебры $\mathcal{A}$;
2) для любой $\mathcal{K}_2$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A;\sigma_2\rangle$ алгебра $F_1(\mathcal{A}) = \langle A;\sigma_1\rangle$ принадлежит классу $\mathcal{K}_1$;
3) для любой $\mathcal{K}_1$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A;\sigma_1\rangle$ имеет место равенство $F_1(F_2(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$;
4) для любой $\mathcal{K}_2$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A;\sigma_2\rangle$ имеет место равенство $F_2(F_1(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.

Напомним, что классы алгебр $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ называются *эквивалентными по вложимости* тогда и только тогда, когда эквивалентны их категории вложимости, т. е. тогда и только тогда, когда существует изоморфизм G категории $\overrightarrow{\mathcal{K}_1}$ на категорию $\overrightarrow{\mathcal{K}_2}$, коммутирующий со стирающими функторами этих категорий, т. е.

такой что

$$S_{\mathcal{K}_2} \cdot G = S_{\mathcal{K}_1}.$$

Здесь $S_{\mathcal{K}}$ — стирающий функтор из категории $\overrightarrowtail{\mathcal{K}}$ в категорию множеств.

Из определения неявной условной эквивалентности следует, что любые неявно условно эквивалентные псевдоуниверсальные классы будут эквивалентны по вложимости. С другой стороны, из определения неявных условных операций как любых операций, коммутирующих с изоморфными вложениями, следует, что любые эквивалентные по вложимости псевдоуниверсальные классы будут неявно условно эквивалентны.

Для любого класса алгебр $\mathcal{K}$ и любого натурального n через $\mathcal{K}_n$ обозначим совокупность $\{\mathcal{A} \in \mathcal{K} \mid |\mathcal{A}| \leqslant n\}$, а через $\mathrm{CT}(\sigma)$ — совокупность всех условных термов сигнатуры σ.

Два псевдоуниверсальных класса $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно назовём *аппроксимационно условно рационально эквивалентными*, если для любого натурального n существуют отображения F_1^n (F_2^n) сигнатурных символов операций из σ_1 (σ_2) в совокупности $\mathrm{CT}(\sigma_2)$ ($\mathrm{CT}(\sigma_1)$), такие что для m-арного символа $f \in \sigma_1$ ($f \in \sigma_2$) $F_1^n(f)$ ($F_2^n(f)$) есть m-арный условный терм сигнатуры σ_2 (σ_1) и при этом

1) для любой $(\mathcal{K}_1)_n$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ алгебра $F_2^n(\mathcal{A}) = \langle A; \sigma_2 \rangle$ принадлежит классу $(\mathcal{K}_2)_n$;
2) для любой $(\mathcal{K}_2)_n$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ алгебра $F_1^n(\mathcal{A}) = \langle A; \sigma_1 \rangle$ принадлежит классу $(\mathcal{K}_1)_n$;
3) для любой $(\mathcal{K}_1)_n$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ имеет место равенство
$$F_1^n(F_2^n(\mathcal{A})) = \mathcal{A};$$
4) для любой $(\mathcal{K}_2)_n$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ имеет место равенство
$$F_2^n(F_1^n(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

В силу отмеченной выше аппроксимации неявных условных операций на псевдоуниверсальных классах конечной сигнатуры условными термами имеет место связь между эквивалентностью по вложимости и аппроксимационно условной рациональной эквивалентностью подобных классов.

Утверждение 2. *Для любых псевдоуниверсальных классов* $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *эквивалентны по вложимости*;
2) $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *неявно условно эквивалентны.*

Если сигнатуры классов $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *конечны, то условиям* 1) *и* 2) *эквивалентно условие*

3) $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *аппроксимационно условно рационально эквивалентны.*

В силу определимости неявных условных операций условными термами на равномерно локально конечных псевдоуниверсальных классах конечной сигнатуры имеет место следствие 1.

Следствие 1. *Для любых равномерно локально конечных псевдоуниверсальных классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ конечных сигнатур следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *эквивалентны по вложимости*;
2) $\mathcal{K}_1$ *и* $\mathcal{K}_2$ *условно рационально эквивалентны.*

Пример псевдоуниверсального класса $\mathcal{K}$ всех конечных полугрупп и класса всех конечных полугрупп, обогащённых операцией $\pi(x)$ (где $\pi(x)$ — идемпотент полугруппы, порождённой элементом x), показывает необходимость условия равномерной локальной конечности в формулировке этого следствия.

Пусть теперь $\mathcal{A}$ — некоторая конечная алгебра и $\mathrm{Sub}_\omega(\mathcal{A})$ — совокупность её конечных подалгебр, пусть $\mathrm{Iso}_\omega(\mathcal{A})$ — полугруппа внутренних изоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$ между её конечными подалгебрами. Очевидно, что класс $\mathrm{I}\,\mathrm{Sub}_\omega(\mathcal{A})$ является псевдоуниверсальным, а его категория вложимости $\overrightarrow{\mathrm{I}\,\mathrm{Sub}_\omega}(\mathcal{A})$ полностью и однозначно определяется полугруппой $\mathrm{Iso}_\omega(\mathcal{A})$.

Из утверждения 2, следствия 1 и этого факта вытекает следствие 2.

Следствие 2. *Если $\mathcal{A}_1 = \langle A; \sigma_1\rangle$, $\mathcal{A}_2 = \langle A; \sigma_2\rangle$ — локально конечные алгебры с общим базисным множеством A, то следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathrm{Iso}_\omega(\mathcal{A}_1) = \mathrm{Iso}_\omega(\mathcal{A}_2)$;
2) *сигнатурные функции алгебры $\mathcal{A}_2$ можно определить как неявно условные операции класса $\mathrm{I}\,\mathrm{Sub}_\omega(\mathcal{A}_1)$ (или, иначе, как бесконечные условные термы алгебры $\mathcal{A}_1$), и наоборот.*

Если же алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ равномерно локально конечны, то условия 1) *и* 2) *эквивалентны условию*

3) *алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ условно рационально эквивалентны.*

Литература

[1] Пинус А. Г. Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах // Вычислительные системы. — 1996. — Т. 156. — С. 59—78.

[2] Пинус А. Г. Характеризация условно термальных функций // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 1. — С. 161—165.

[3] Пинус А. Г. Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность // Алгебра и логика. — 1998. — Т. 37, № 4. — С. 432—459.

[4] Пинус А. Г. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 4. — С. 35—72.

[5] Пинус А. Г. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003.

[6] Ash C. J. Pseudovarieties, generalized varieties and similarly described classes // J. Algebra. — 1985. — Vol. 92, no. 1. — P. 104—115.

[7] Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. — New York: Academic Press, 1976.

[8] Eilenberg S., Schutzenberger M. P. On pseudovarieties // Adv. Math. — 1976. — Vol. 19. — P. 413—418.

[9] Higgins P. M. An algebraic proof that pseudovarieties are defined by pseudoidentities // Algebra Universalis. — 1990. — Vol. 27, no. 4. — P. 597—599.

[10] Reiterman J. The Birkhoff theorem for finite algebras // Algebra Universalis. — 1982. — Vol. 14, no. 1. — P. 1—10.