О верхней оценке степени кратностей кохарактеров PI-алгебр*

И. Ю. СВИРИДОВА
Ульяновский государственный университет
e-mail: sviridovaiyu@sv.ulsu.ru

УДК 512.552+512.572

Ключевые слова: полиномиальные тождества, ассоциативные алгебры, кратности, коразмерности, рост.

Аннотация

Статья посвящена вычислению верхней оценки показателя полиномиальной степени, ограничивающей рост кратностей кохарактеров произвольного многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль.

Abstract

I. Ju. Sviridova, An upper bound for the index of multiplicities in the cocharacters of PI-algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 207—223.

We give an upper bound for the index of the polynomial degree limiting the multiplicities in the cocharacter of a variety of associative algebras over a field of characteristic zero.

Будем обозначать через $F\langle X\rangle$ свободную ассоциативную алгебру над полем F нулевой характеристики, порождённую счётным множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра над полем F, удовлетворяющая некоторому полиномиальному тождеству (PI-алгебра). Через $T[A]$ обозначим идеал тождеств (T-идеал) алгебры A и через $\mathrm{Var}(A)$ — многообразие всех ассоциативных алгебр над полем F, удовлетворяющих всем полиномиальным тождествам алгебры A.

Хорошо известно [11, 14], что в случае нулевой характеристики основного поля вся информация о тождествах содержится в полилинейной части $P_n(A) = P_n/(P_n \cap T[A])$ относительно свободной алгебры $F\langle X\rangle/T[A]$, которая наделена структурой левого FS_n-модуля. Здесь $P_n = \langle x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\rangle$ — пространство всех полилинейных полиномов степени n. Характер представления симметрической группы S_n на $P_n(A)$

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$$

*Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ 01-01-00728, Минобразования 04.01.036, а также грантом E02-2.0-26.

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 4, с. 207—223.

называют n-м кохарактером алгебры A (а также T-идеала $T[A]$ и многообразия $\mathrm{Var}(A)$). Предметом нашего изучения являются две числовые последовательности, характеризующие многообразие: последовательность кратностей

$$m_n(A) = \max_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

и последовательность кодлин

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda.$$

Следуя обозначениям в работе [5], определим для произвольной ненильпотентной PI-алгебры A параметры

$$\mathrm{mlt}(A) = \limsup_{n\to\infty} \log_n m_n(A) \tag{1}$$

и

$$\mathrm{col}(A) = \limsup_{n\to\infty} \log_n l_n(A). \tag{2}$$

Так как последовательности $m_n(A)$ и $l_n(A)$ являются полиномиально ограниченными [6], определения (1), (2) корректны и дают показатели полиномиальной степени роста кратностей и кодлины.

Как можно видеть в [5, 12], параметры $\mathrm{mlt}(a)$ и $\mathrm{col}(A)$ тесно связаны с экспонентой многообразия

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \text{где} \quad c_n(A) = \dim P_n(A).$$

А. Джамбруно и М. Зайцевым было доказано, что в случае нулевой характеристики поля $\exp(A)$ всегда существует и является целым числом [8, 9].

Согласно классификационной теореме А. Р. Кемера [2] произвольное многообразие ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики порождается грассмановой оболочкой некоторой конечномерной супералгебры. Поэтому мы можем полагать $A = G(C) = C^{(0)} \otimes G_0 + C^{(1)} \otimes G_1$, где $G = G_0 + G_1$ — алгебра Грассмана счётного ранга с естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой (G_0 и G_1 — подпространства, порождённые всеми словами соответственно чётной и нечётной длины от порождающих), $C = C^{(0)} + C^{(1)}$ — некоторая конечномерная $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра. Кроме того, мы можем считать, что $C = B + J$, где B — полупростая конечномерная алгебра, J — радикал Джекобсона алгебры C, и B, J однородны в $\mathbb{Z}_2$-градуировке [11]. Более того, если $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_p$ — разложение алгебры B в прямую сумму простых слагаемых B_i, то B_i также однородны в $\mathbb{Z}_2$-градуировке, $B_i = B_i^{(0)} + B_i^{(1)}$ — ограничение заданной градуировки для любого $i = 1, \ldots, p$. Здесь и далее для алгебр символ «$\oplus$» означает прямую сумму алгебр, символ «$+$» — прямую сумму векторных пространств.

Рассмотрим всевозможные произведения вида

$$B_{i_1} J B_{i_2} J \ldots J B_{i_s} \neq 0 \tag{3}$$

для произвольных наборов $\{i_1, \ldots, i_s\} \subseteq \{1, \ldots, p\}$ и введём обозначения для размерностей

$$k = \dim(B_{i_1}^{(0)} \oplus \ldots \oplus B_{i_s}^{(0)}), \quad m = \dim(B_{i_1}^{(1)} \oplus \ldots \oplus B_{i_s}^{(1)}). \tag{4}$$

Рассмотрим все пары (k, m), определённые условиями (3), (4), и упорядочим их, например, лексикографически: $(k_1, m_1) > (k_2, m_2)$, если или $k_1 > k_2$, или $k_1 = k_2$ и $m_1 > m_2$. Заметим, что данные пары целых чисел (k, m) удовлетворяют неравенствам $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $k \geqslant m$ [11], $k + m \leqslant \exp(A)$ [8, 9].

Лемма 1. *Пусть (k, m) — максимальная пара относительно некоторого порядка среди всех пар, заданных условиями* (3), (4) *для многообразия $\mathcal{V} = \mathrm{Var}(A)$. Тогда $\mathcal{V}$ порождается прямой суммой $G(A_1) \oplus \ldots \oplus G(A_t)$ грассмановых оболочек конечномерных супералгебр $A_i = D_i + J_i$, где полупростая часть $D_i = D_i^{(0)} + D_i^{(1)}$ супералгебры A_i удовлетворяет условию $(\dim D_i^{(0)}, \dim D_i^{(1)}) \leqslant (k, m)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant t$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{V} = \mathrm{Var}(A)$, где $A = G(C)$ и $C = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_p + J$, как описано выше. Рассмотрим все подалгебры $A_l \subseteq C$, такие что $A_l = B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_s} + J$, где $B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$ удовлетворяют условиям (3) и $J = J(C)$ — радикал Джекобсона алгебры C. Покажем, что $\mathcal{V} = \mathrm{Var}(G(A_1) \oplus \ldots \oplus G(A_t))$.

Так как $G(A_l)$ — подалгебра $G(C)$ для любого $1 \leqslant l \leqslant t$, достаточно доказать, что любое полилинейное тождество алгебры $G(A_1) \oplus \ldots \oplus G(A_t)$ выполняется в $G(C)$.

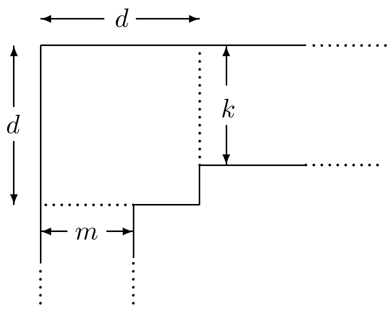
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ — произвольное полилинейное тождество алгебры $G(A_1) \oplus \ldots \oplus G(A_t)$. Следовательно, $f \in \bigcap\limits_{l=1}^{t} T[G(A_l)]$. Выберем некоторый базис алгебры C $\{b_1, \ldots, b_d, r_1, \ldots, r_q\}$, пусть при этом $\{b_1, \ldots, b_d\}$ — базис её полупростой части B, $\{r_1, \ldots, r_q\} \subseteq J$. Поскольку полином $f(x_1, \ldots, x_n)$ полилинеен, достаточно проверить все подстановки вида $x_i = c_i \otimes g_i$, где $c_i \in \{b_1, \ldots, b_d, r_1, \ldots, r_q\}$, $g_i \in G_0 \cup G_1$. При этом возникают два случая: либо для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $c_i \in B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_s} \cup J$, где $B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$ удовлетворяют условиям (3), либо если для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $c_i \in B_{i_1} \cup \ldots \cup B_{i_s} \cup J$, то $B_{i_1} J \ldots J B_{i_s} = 0$. В первом случае $f(c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n) = 0$, так как $\{c_1, \ldots, c_n\} \subseteq A_l$ для некоторого l. Во втором случае

$$\begin{aligned} f(c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n) &= f'(c_1, \ldots, c_n) \otimes (g_1 \cdot \ldots \cdot g_n) = \\ &= \Big(\sum \alpha_{(j)} b_{j_1} r_1 \ldots r_{t-1} b_{j_t} + \sum \beta_l w_l\Big) \otimes (g_1 \cdot \ldots \cdot g_n) = \\ &= 0 \otimes (g_1 \cdot \ldots \cdot g_n) = 0, \end{aligned}$$

где $\sum \alpha_{(j)} b_{j_1} r_1 \ldots r_{t-1} b_{j_t} \in B_{i_1} J \ldots J B_{i_s} = (0)$, а второе слагаемое $\sum \beta_l w_l$ есть линейная комбинация мономов w_l, содержащих выражения вида $b_{j_1} \cdot b_{j_2}$, где b_{j_1} и b_{j_2} принадлежат двум различным простым компонентам B_{j_1} и B_{j_2} алгебры C, и также равно нулю.

В любом случае $f(c_1 \otimes g_1, \ldots, c_n \otimes g_n) = 0$ для всех возможных подстановок. Следовательно, $f \in T[G(C)]$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что пара (k, m) есть максимальная среди пар размерностей $B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \ldots \oplus B_{i_s}$, удовлетворяющих условию (3). Следовательно, для полупростой части $D_l = D_l^{(0)} + D_l^{(0)}$ каждой алгебры A_l $(\dim D_i^{(0)}, \dim D_i^{(1)}) \leqslant (k, m)$. $\square$

Заметим, что в действительности нами доказано, что произвольное многообразие $\mathcal{V}$ порождается прямой суммой $G(A_1) \oplus \ldots \oplus G(A_t)$, где $A_j = B_{j1} \oplus \ldots \oplus B_{js_j} + J(A_j)$ и $B_{j1} J \ldots J B_{js_j} \neq 0$, $J = J(A_j)$. Рассмотрим такие алгебры более подробно. Обозначим через $H(k, m, d)$ бесконечный обобщённый (объединённый с квадратом $d \times d$) крюк вида



Для разбиения $\lambda \vdash n$ обозначим через λ' сопряжённое разбиение (то есть λ'_j — длина j-го столбца диаграммы Юнга, отвечающей разбиению λ).

Докажем следующую лемму, которая является уточнением [9, лемма 8].

Лемма 2. *Рассмотрим произвольную конечномерную супералгебру $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_p + J$, удовлетворяющую условию $B_1 J \ldots J B_p \neq 0$, $J = J(A)$. Пусть*

$$k = \dim(B_1^{(0)} \oplus \ldots \oplus B_p^{(0)}), \quad m = \dim(B_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus B_p^{(1)}). \tag{5}$$

Тогда

$$\chi_n(G(A)) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Доказательство. Пусть N — степень нильпотентности радикала J, введём обозначение $d = N + (m+1)(k+1)$. Обозначим также через $D(s, t)$ прямоугольную таблицу Юнга размера $s \times t$.

Рассмотрим произвольный неприводимый модуль M_λ, отвечающий разбиению λ, такому что $\lambda_{k+1} > d$. В этом случае $T_\lambda \supseteq D(d+1, k+1)$.

Хорошо известно (см., например, [1]), что $M_\lambda = FS_n \bar{f}_\lambda$, где $\bar{f}_\lambda$ — образ при естественном гомоморфизме элемента $f_\lambda = e_\lambda f$ для некоторого полилинейного полинома $f \in P_n$ и квазиидемпотента групповой алгебры FS_n

$$e_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in R_\lambda} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in Q_\lambda} (-1)^\tau \tau \right),$$

заданного некоторой таблицей Юнга T_λ, где R_λ — подгруппа S_n, содержащая все перестановки, оставляющие на местах строки таблицы T_λ, и Q_λ — подгруппа, оставляющая на местах столбцы T_λ.

Все переменные полинома

$$\tilde{f} = \Big(\sum_{\tau\in Q_\lambda}(-1)^\tau\tau\Big)f_\lambda \not\equiv 0$$

можно разделить на λ_1 набор кососимметризованных между собой букв, лежащих в одном столбце. Будем обозначать множество переменных, принадлежащих столбцу с номером s, $X_s = \{x_{is} \mid 1 \leqslant i \leqslant \lambda'_s\}$, $1 \leqslant s \leqslant \lambda_1$.

Рассмотрим произвольную подстановку элементов алгебры $G(A)$ в полином $\tilde{f}$. В силу полилинейности $\tilde{f}$ достаточно рассматривать подстановки вида

$$x_{is} = a_0\otimes g_0,\quad x_{is} = a_1\otimes g_1 \ \text{ либо } \ x_{is} = a_2\otimes g, \tag{6}$$

где

$g_0 \in G_0$, a_0 — элемент базиса B_0 $\{b_1^{(0)},\dots,b_k^{(0)}\}$;

$g_1 \in G_1$, a_1 — элемент базиса B_1 $\{b_1^{(1)},\dots,b_m^{(1)}\}$;

$g \in G_0\cup G_1$, a_2 — элемент базиса радикала J $\{r_1,\dots,r_t\}$.

Так как G_0 является центром алгебры Грассмана G, переменные из X_s альтернируют, а N — степень нильпотентности радикала Джекобсона $J = J(A)$, то либо в прямоугольнике $D(d+1,k+1)$ найдётся строка, содержащая более чем $Nm > m$ переменных полинома $\tilde{f}$, принимающих при подстановке значения второго типа $b_l^{(1)}\otimes g_1$, либо $\tilde{f}$ обращается при данной подстановке в нуль.

Рассмотрим подгруппу $H \leqslant R_\lambda$, $H = \{\sigma \in R_\lambda \mid \sigma(i) = i\ \forall i \notin \lambda_j,$ $1 \leqslant j \leqslant k+1\}$, и полином $\hat{f} = \Big(\sum\limits_{\sigma\in H}\sigma\Big)\tilde{f} \not\equiv 0$ ($e_\lambda f_\lambda = \Big(\sum\limits_{\sigma\in R_\lambda}\Big)\tilde{f} = \Big(\sum\limits_{\delta\in H'}\delta\Big)\hat{f} \not\equiv 0$, где $H\otimes H' = R_\lambda$).

Подставим произвольным образом элементы из $G(A)$ в полином $\hat{f}$. Как было замечено выше, можно ограничиться подстановками вида (6). Тогда $\hat{f}(c_1,\dots,c_n) = \Big(\sum\limits_{\sigma\in H}\sigma\Big)\tilde{f}(c_1,\dots,c_n)$, где либо $\tilde{f}(c_1,\dots,c_n) = 0$, либо существует набор из более чем m переменных, принадлежащих одной и той же строке таблицы Юнга T_λ с номером j, $1 \leqslant j \leqslant k+1$, и принимающих значения вида $b_l^{(1)}\otimes g_1$.

Учитывая, что $\dim B_1 = m$ и полином $\tilde{f}$ симметризован по переменным строк с номерами $1 \leqslant j \leqslant k+1$, в любом случае имеем $\Big(\sum\limits_{\sigma\in H}\sigma\Big)\tilde{f}(c_1,\dots,c_n) = 0$ в алгебре $G(A)$.

Следовательно, $\hat{f} \in T[G(A)]$ и $f_\lambda = \gamma e_\lambda f_\lambda = \gamma\Big(\sum\limits_{\delta\in H'}\delta\Big)\hat{f} \in T[G(A)]$ для каждого $f \in P_n$. Таким образом, для любого разбиения λ, удовлетворяющего условию $\lambda_{k+1} > d$, кратности m_λ нулевые.

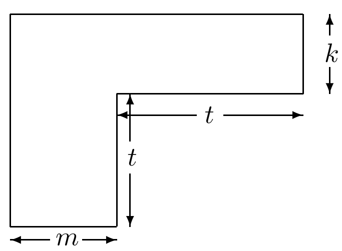
Аналогично можно доказать, что для всех разбиений $\lambda \vdash n$, таких что $T_\lambda \supseteq D(m+1, d+1)$, кратности m_λ также нулевые. Таким образом,

$$\chi_n(G(A)) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} m_\lambda \chi_\lambda. \quad \square$$

Подчеркнём ещё раз, что в лемме 2 утверждается, что любая диаграмма Юнга D_λ, не лежащая целиком в обобщённом крюке $H(k, m, d)$, имеет нулевые кратности в разложении кохарактеров. Следуя [10, Definition 1], будем называть конечномерную супералгебру, удовлетворяющую условиям леммы 2, приведённой. Для приведённых супералгебр справедлива также следующая лемма.

Лемма 3 ([9, Lemma 15]). *Пусть A — произвольная конечномерная $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра над алгебраически замкнутым полем F с радикалом Джекобсона J. Пусть $B_1, \ldots, B_p$ — различные $\mathbb{Z}_2$-градуированные простые подалгебры A, такие что $B_1 J B_2 J \ldots J B_p \neq 0$, и пусть $k = \dim(B_1^{(0)} \oplus \ldots \oplus B_p^{(0)})$, $m = \dim(B_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus B_p^{(1)})$. Тогда для любого натурального $t \geqslant 2 \dim A$ существует такое разбиение $\lambda \vdash n$, что $h(k, m, 2t - s) \leqslant \lambda \leqslant h(k, m, 2t)$, $s = 4 \dim A$, и для некоторой таблицы T_λ и некоторого полилинейного полинома f степени $\deg f \leqslant n + 3 \dim A$ справедливо $e_{T_\lambda} \circ f \notin T[G(A)]$.*

Здесь $h(k, m, t) = ((m + t)^k, m^t)$ — диаграмма, имеющая форму



Из леммы 2 в сочетании с леммой 3 непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Паре размерностей (k, m) $(k \geqslant m)$ произвольной приведённой супералгебры A взаимно-однозначно соответствует бесконечный обобщённый крюк $H(k, m, d)$ для некоторого целого числа d, содержащий все ненулевые диаграммы Юнга многообразия $\mathrm{Var}(G(A))$.*

Отметим, что это утверждение уточняет хорошо известный результат [4].

Найдём верхнюю оценку для показателя степени кратностей $\mathrm{mlt}(G(A))$ грассмановой оболочки приведённой супералгебры.

Для вычисления мы будем использовать непосредственное обобщение техники, предложенной в [12]. Пусть (k, m) — пара размерностей $G(A)$ и $H(k, m, d)$ —

соответствующий бесконечный обобщённый крюк. Тогда для произвольного натурального n и $\lambda \vdash n$ разобьём n переменных на $k+d$ непересекающихся подмножеств $\{x_1, \ldots, x_n\} = X_1 \cup \ldots \cup X_{k+d}$, таких что $|X_{k+i}| = \lambda'_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant d$ и $|X_i| = \lambda_i - d$, если $1 \leqslant i \leqslant k$. Обозначим это разбиение ϱ.

Заметим, что произвольный неприводимый модуль $M_\lambda \subseteq P_n(G(A))$ порождается гомоморфным образом некоторого ненулевого полилинейного полинома f_ϱ, симметрического по всем переменным из X_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и кососимметрического по всем переменным из X_j, $k+1 \leqslant j \leqslant k+d$ (см., например, [2, 9, 12]).

Для элементов вида $a \otimes g \in G(A)$ мы будем писать $a \otimes g_1 \simeq a \otimes g_2$ для любых $g_1, g_2 \in G$. Рассмотрим множество Φ всех подстановок вида $x_i = b \otimes g$, где $g \in G_0 \cup G_1$ и b — базисный элемент алгебры A, в полином $f \in F\langle X \rangle$.

Обозначим

$$R^*_\varrho = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(x) = x \ \forall x \in X_j,\ k+1 \leqslant j \leqslant k+d;\ \sigma(X_i) \subseteq X_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\},$$
$$Q^*_\varrho = \{\tau \in S_n \mid \tau(x) = x \ \forall x \in X_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k;\ \sigma(X_j) \subseteq X_j,\ k+1 \leqslant j \leqslant k+d\}.$$

Определим на множестве Φ следующее отношение: для $\varphi, \psi \in \Phi$

$$\varphi \sim_\varrho \psi \iff \exists \sigma \in R^*_\varrho \times Q^*_\varrho \colon (\varphi\sigma)(f_\varrho) \simeq \psi(f_\varrho)$$

для любого полилинейного полинома f_ϱ,
симметричного по переменным из X_i, $1 \leqslant i \leqslant k$,
и кососимметричного по переменным из X_j, $k+1 \leqslant j \leqslant k+d$.

Несложно видеть, что $\sim_\varrho$ является отношением эквивалентности.

Лемма 4. *Существует такая константа C, что число W_ϱ классов эквивалентности отношения $\sim_\varrho$ удовлетворяет неравенству $W_\varrho \leqslant Cn^{k(k-1)+m(m-1)}$.*

Доказательство. Пусть $\{b_1^{(0)}, \ldots, b_k^{(0)}\}$ — базис чётной полупростой части B_0 супералгебры A, $\{b_1^{(1)}, \ldots, b_m^{(1)}\}$ — базис нечётной полупростой части B_1 и $\{r_1, \ldots, r_t\}$ — базис радикала Джекобсона $J = J(A)$, как в лемме 2. Для произвольного $\varphi \in \Phi$ обозначим

$$[\varphi] = (\ldots, \alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{kj}, \beta_{1j}, \ldots, \beta_{mj}, \gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{tj}, \ldots), \tag{7}$$

где

$$\alpha_{ij} = \sharp\{x \in X_j \mid x = b_i^{(0)} \otimes g_0,\ g_0 \in G_0\},$$
$$\beta_{ij} = \sharp\{x \in X_j \mid x = b_i^{(1)} \otimes g_1,\ g_1 \in G_1\},$$
$$\gamma_{ij} = \sharp\{x \in X_j \mid x = r_i \otimes g,\ g \in G_0 \cup G_1\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k+d.$$

Очевидно, $[\varphi] = [\psi]$ влечёт существование такой перестановки $\sigma \in R^*_\varrho \times Q^*_\varrho$, что $(\varphi\sigma)(f_\varrho) \simeq \psi(f_\varrho)$ для произвольного полилинейного полинома f_ϱ, симметричного по переменным из X_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и кососимметричного по переменным из X_j, $k+1 \leqslant j \leqslant k+d$. Согласно введённым выше обозначениям $\varphi \sim_\varrho \psi$.

Кроме того, строка $[\varphi]$ должна удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \alpha_{ij_1} \leqslant 1 && \text{для любых } i,\ k+1 \leqslant j_1 \leqslant k+m;\\
&0 \leqslant \beta_{ij_2} \leqslant 1 && \text{для любых } i,\ 1 \leqslant j_2 \leqslant k;\\
&\sum_{ij} \gamma_{ij} \leqslant N-1, && \text{где } N \text{ — степень нильпотентности радикала } J.
\end{aligned} \tag{8}$$

В противном случае подстановка φ принадлежит нулевому классу эквивалентности

$$E_0 = \{\varphi \in \Phi \mid \varphi(f_\varrho) = 0 \times g,\ g \in G,\ f_\varrho \text{ — произвольный полином, удовлетворяющий всем необходимым условиям}\}.$$

Необходимо также учитывать, что для любого j

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} + \sum_{i=1}^{t} \gamma_{ij} = |X_j|, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
&|X_j| \leqslant n, \quad \text{если} \quad 1 \leqslant j \leqslant k+m;\\
&|X_j| \leqslant d, \quad \text{если} \quad k+m+1 \leqslant j \leqslant k+d.
\end{aligned}$$

Таким образом, W_ϱ не превосходит числа различных наборов вида (7), удовлетворяющих условиям (8), (9), и, следовательно, не больше чем число решений следующей системы:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij_1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij_1} + \sum_{i=1}^{t} \gamma_{ij_1}\right) = |X_{j_1}|, \quad 1 \leqslant j_1 \leqslant k,\\
&\quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij_1} \leqslant m, \quad \sum_{i=1}^{t} \gamma_{ij_1} \leqslant N-1;\\
&\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ij_2}\right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij_2} + \sum_{i=1}^{t} \gamma_{ij_2}\right) = |X_{j_2}|, \quad k+1 \leqslant j_2 \leqslant k+m,\\
&\quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij_2} \leqslant k, \quad \sum_{i=1}^{t} \gamma_{ij_2} \leqslant N-1;\\
&\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij_3} + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij_3} + \sum_{i=1}^{t} \gamma_{ij_3} \leqslant d, \quad k+m+1 \leqslant j_3 \leqslant k+d.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из комбинаторных соображений число решений системы (10) меньше или равно

$$C_1(k,m,d,N) \prod_{j_1=1}^{k} \binom{|X_{j_1}|+k-1}{|X_{j_1}|} \prod_{j_2=k+1}^{k+m} \binom{|X_{j_2}|+m-1}{|X_{j_2}|} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(k,m,d,N)\prod_{j=1}^{k}\binom{n+k-1}{n}\prod_{j=k+1}^{k+m}\binom{n+m-1}{n}\leqslant$$
$$\leqslant C_2(k,m,d,N)\cdot n^{k(k-1)+m(m-1)},$$

где $C_1(k,m,d,N)$ и $C_2(k,m,d,N)$ — некоторые числа, зависящие только от k, m, d, N. □

Лемма 5. *Рассмотрим n-й кохарактер алгебры $G(A)$*

$$\chi_n(G(A))=\sum_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\in H(k,m,d)}} m_\lambda\chi_\lambda.$$

Тогда для некоторой константы C справедливо $m_\lambda\leqslant CW_\varrho$ для всех $\lambda\vdash n$.

Доказательство. Фиксируем произвольное разбиение $\lambda\vdash n$, $\lambda\in H(k,m,d)$, обозначим $\eta=m_\lambda$, $\theta=W_\varrho$. Рассмотрим полилинейные полиномы $f_1,\ldots,f_\eta$, порождающие все неприводимые подмодули $P_n(G(A))$, отвечающие разбиению λ. Как было отмечено выше, можно считать, что все f_i симметричны по переменным из X_i, $1\leqslant i\leqslant k$, и кососимметричны по переменным, лежащим в X_j, $k+1\leqslant j\leqslant k+d$. Выберем представителей $\varphi_1,\ldots,\varphi_\theta\in\Phi$ всех классов эквивалентности $\sim_\varrho$. Пусть $\varphi_i(f_j)=u_{ij}\otimes g_i$, $u_{ij}\in A$, $g_i\in G$, $1\leqslant i\leqslant\theta$, $1\leqslant j\leqslant\eta$. Заметим, что элемент $g_i\in G$ не зависит от j.

Предположим, что $\eta>\kappa\theta$, где $\dim_F A=\kappa$. Тогда столбцы $[U]_j$ матрицы $U=(u_{ij})\in A_{\theta\times\eta}$ линейно зависимы над основным полем. Таким образом, найдутся элементы $\delta_1,\ldots,\delta_\eta$ основного поля F, не все равные нулю, такие что $\delta_1[U]_1+\ldots+\delta_\eta[U]_\eta=0$. Рассмотрим ненулевой полином $f=\delta_1f_1+\ldots+\delta_\eta f_\eta$. Докажем, что в алгебре $G(A)$ выполняется тождество $f=0$.

Так как f полилинеен, достаточно проверить это тождество на всех подстановках из множества Φ. Учитывая, что полином f, как и f_l, симметричен по переменным из X_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ и кососимметричен по переменным из X_j $(k+1\leqslant j\leqslant k+d)$, для любой подстановки $\varphi\in\Phi$ получаем $\varphi(f)\simeq(\varphi_i\sigma)(f)$ для некоторой φ_i $(1\leqslant i\leqslant\theta)$, $\sigma\in R^*_\varrho\times Q^*_\varrho$. Это означает, что найдутся $\pi\in R^*_\varrho$, $\tau\in Q^*_\varrho$, такие что

$$\varphi(f)\simeq\varphi_i(\pi\tau(f))=\varphi((-1)^\tau f)=$$
$$=(-1)^\tau\left(\sum_{j=1}^{\eta}\delta_j\varphi_i(f_j)\right)=(-1)^\tau\left(\sum_{j=1}^{\eta}\delta_ju_{ij}\right)\otimes g_i=0\otimes g_i.$$

Следовательно, $\varphi(f)=0\otimes g=0$ для некоторого другого элемента $g\in G$ и $f=0$ — тождество алгебры $G(A)$. Это противоречит тому факту, что полиномы $f_1,\ldots,f_\eta$ линейно независимы по модулю идеала тождеств алгебры $G(A)$. Значит, в действительности $\eta\leqslant\kappa\theta$. □

Из лемм 4 и 5 немедленно получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A — произвольная конечномерная приведённая супералгебра и (k, m) — пара её размерностей, тогда* $\mathrm{mlt}(G(A)) \leqslant k(k-1) + m(m-1)$.

С учётом следствия 1 можно получить верхнюю оценку и для показателя степени роста кодлины $\mathrm{col}(G(A))$ грассмановой оболочки произвольной приведённой супералгебры.

Теорема 2. *Пусть (k, m) — пара размерностей произвольной конечномерной приведённой супералгебры A. Тогда* $\mathrm{col}(G(A)) \leqslant k^2 + m^2$.

Доказательство. Из леммы 2 имеем

$$\chi_n(G(A)) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} m_\lambda \chi_\lambda.$$

По теореме 1 $m_\lambda \leqslant C_1 n^{k(k-1)+m(m-1)}$ для некоторой константы C_1 и для всех $\lambda \vdash n$.

Следовательно,

$$l_n(G(A)) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} m_\lambda \leqslant \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} C_1 n^{k(k-1)+m(m-1)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 n^{k(k-1)+m(m-1)} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} 1 \leqslant C_1 n^{k(k-1)+m(m-1)} \cdot C_2 n^{k+m} = C_3 n^{k^2+m^2},$$

так как число ND диаграмм, лежащих в бесконечном обобщённом крюке $H(k, m, d)$, используя комбинаторные соображения, можно оценить как

$$\mathrm{ND} = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} 1 = \#\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \mid \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = n;\ n \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_s \geqslant 1;$$
$$\lambda_i \leqslant d, \text{ если } k+1 \leqslant i \leqslant d;\ \lambda_i \leqslant m, \text{ если } i \geqslant d+1\} \leqslant C_2 n^{k+m}$$

для некоторой константы C_2.

Следовательно, $\mathrm{col}(A) = \limsup\limits_{n\to\infty} \log_n l_n(A) \leqslant k^2 + m^2$. □

Рассмотрим произвольное многообразие $\mathcal{V}$ ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики. Оно порождено прямой суммой $G(A_1) \oplus \ldots \oplus G(A_t)$ грассмановых оболочек конечномерных приведённых супералгебр $A_i = D_i + J_i$, $J_i = J(A_i)$. Из следствия 1 вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ однозначно характеризуется набором всех пар размерностей (k_i, m_i) полупростых частей D_i супералгебр A_i, $i = 1, \ldots, t$. Обозначим этот набор $\Omega(\mathcal{V}) = \{(k_i, m_i) \mid k_i = \dim D_i^0$, $m_i = \dim D_i^1,\ 1 \leqslant i \leqslant t\}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее техническое утверждение.

Лемма 6. *Пусть даны $t+1$ последовательность $\{a_n^{(i)}\}_{n\geqslant 1}$, $i = 1, \ldots, t$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, а также верхние пределы их логарифмов $a_i = \limsup\limits_{n\to\infty} \log_n a_n^{(i)}$,*

$b = \limsup\limits_{n\to\infty} \log_n b_n$. *Если для любого* $i = 1, \ldots, t$ *справедливо*

$$a_n^{(i)} \leqslant b_n \leqslant \sum_{j=1}^{t} a_n^{(j)} \quad \text{для каждого } n \in \mathbb{N},$$

тогда

$$b = \max_{1\leqslant i\leqslant t} a_i.$$

Доказательство. Условия леммы означают, что $a_n^{(i)} \leqslant C_i n^{a_i}$ при стремящемся к бесконечности n. Очевидно, в этом случае $b_n \leqslant C' n^{a_s}$, где $a_s = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant t} a_i$. Следовательно, $b \leqslant a_s$. Также из условия $a_n^{(i)} \leqslant b_n$ получаем $a_s \leqslant b$. □

Теорема 3. *Пусть* $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_t$ *— прямая сумма алгебр, тогда*

$$\operatorname{mlt}(B) = \max_{1\leqslant i\leqslant t} \operatorname{mlt}(B_i), \quad \operatorname{col}(B) = \max_{1\leqslant i\leqslant t} \operatorname{col}(B_i).$$

Доказательство. Рассмотрим

$$\chi_n(B) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \quad \chi_n(B_i) = \sum_{\lambda\vdash n} m_{i\lambda}\chi_\lambda.$$

Рассмотрим идеал тождеств алгебры B $T[B] = \bigcap\limits_{i=1}^{t} T[B_i]$. Так же, как в [7, лемма 3.2], отображение

$$\varphi\colon P_n \to (P_n/P_n \cap T[B_1]) \oplus \ldots \oplus (P_n/P_n \cap T[B_t]),$$
$$\varphi\colon g \mapsto (g + P_n \cap T[B_1], \ldots, g + P_n \cap T[B_t])$$

задаёт вложение

$$P_n/P_n \cap (T[B_1] \cap \ldots \cap T[B_t]) \hookrightarrow (P_n/P_n \cap T[B_1]) \oplus \ldots \oplus (P_n/P_n \cap T[B_t]).$$

Следовательно, для любого разбиения $\lambda \vdash n$ справедливо $m_\lambda \leqslant \sum\limits_{i=1}^{t} m_{i\lambda}$. Далее,

$$m_n(B) = \max_{\lambda\vdash n} m_\lambda \leqslant \max_{\lambda\vdash n}\left(\sum_{i=1}^{t} m_{i\lambda}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{t} \max_{\lambda\vdash n} m_{i\lambda} = \sum_{i=1}^{t} m_n(B_i)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$.

С другой стороны, так как $T[B_i] \supseteq T[B]$ для всех i,

$$m_{i\lambda} \leqslant m_\lambda \quad \text{для всех } \lambda \vdash n,\ 1 \leqslant i \leqslant t. \tag{11}$$

Следовательно, для любого i выполнено

$$m_n(B_i) = \max_{\lambda\vdash n} m_{i\lambda} \leqslant \max_{\lambda\vdash n} m_\lambda = m_n(B).$$

Таким образом, последовательности $m_n(B_i)$, $1 \leqslant i \leqslant t$, $m_n(B)$ удовлетворяют условиям леммы 6. Поэтому

$$\operatorname{mlt}(B) = \limsup_{n\to\infty} \log_n m_n(B) = \max_{1\leqslant i\leqslant t} \limsup_{n\to\infty} \log_n m_n(B_i) = \max_{1\leqslant i\leqslant t} \operatorname{mlt}(B_i).$$

Последовательности кодлин $l_n(B_i)$, $1 \leqslant i \leqslant t$, $l_n(B)$ также удовлетворяют условиям леммы 6. Так как $m_\lambda \leqslant \sum\limits_{i=1}^{t} m_{i\lambda}$ для каждого $\lambda \vdash n$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо

$$l_n(B) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{t} \sum_{\lambda \vdash n} m_{i\lambda} = \sum_{i=1}^{t} l_n(B_i),$$

и из (11) $l_n(B_i) \leqslant l_n(B)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда по лемме 6

$$\operatorname{col}(B) = \limsup_{n\to\infty} \log_n l_n(B) = \max_{1\leqslant i\leqslant t} \limsup_{n\to\infty} \log_n l_n(B_i) = \max_{1\leqslant i\leqslant t} \operatorname{col}(B_i). \quad \square$$

Для многообразия $\mathcal{V}$ введём обозначения

$$M(\mathcal{V}) = \max_{(k,m)\in\Omega(\mathcal{V})} (k(k-1) + m(m-1)), \quad L(\mathcal{V}) = \max_{(k,m)\in\Omega(\mathcal{V})} (k^2 + m^2).$$

Теорема 4. *Для произвольного многообразия $\mathcal{V}$ ассоциативных алгебр над полем характеристики нуль*

$$\operatorname{mlt}(\mathcal{V}) \leqslant M(\mathcal{V}), \quad \operatorname{col}(\mathcal{V}) \leqslant L(\mathcal{V}).$$

Теорема непосредственно следует из теоремы 3 и теорем 1 и 2.

Заметим, что функции $k(k-1) + m(m-1)$ и $k^2 + m^2$ могут принимать максимальные значения на $\Omega(\mathcal{V})$ при различных аргументах (k, m). Однако этот максимум можно оценить при помощи экспоненты многообразия.

Следствие 2. *Для произвольной ассоциативной алгебры A над полем нулевой характеристики*

$$\operatorname{mlt}(A) \leqslant \exp(A)^2 - \exp(A), \quad \operatorname{col}(A) \leqslant \exp(A)^2.$$

Доказательство. Как упоминалось выше, любая пара размерностей $(k, m) \in \Omega(\mathcal{V})$ произвольного многообразия $\mathcal{V}$ удовлетворяет условиям $k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $k \geqslant m$ [11], $k + m \leqslant \exp(A)$ [8, 9]. Несложно проверить, что

$$\max_{\substack{k\geqslant 0,\ m\geqslant 0,\ k\geqslant m,\\ k+m\leqslant \exp(A)}} (k(k-1) + m(m-1)) =$$
$$= (k(k-1) + m(m-1))|_{(k,m)=(\exp(A),0)} = \exp(A)^2 - \exp(A),$$
$$\max_{\substack{k\geqslant 0,\ m\geqslant 0,\ k\geqslant m,\\ k+m\leqslant \exp(A)}} (k^2 + m^2) = (k^2 + m^2)|_{(k,m)=(\exp(A),0)} = \exp(A)^2. \quad \square$$

Возможно, верхняя оценка показателя полиномиальной степени, ограничивающей рост кратностей кохарактера, полученная в теореме 4, не является точной. Однако следующий результат демонстрирует, что она достаточно близка к точной.

Возьмём множество $\{t_i, x_i, y_i, z_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ попарно различных переменных. Рассмотрим T-идеал $\hat{\Gamma}_{km}$, порождённый некоторым полиномом вида $f_1 t_1 f_2 t_2 \ldots t_{k-1} f_k$, где $f_i \in \{[x_i, y_i], [[x_i, y_i], z_i]\}$ — коммутаторы длины 2 или 3, зависящие от разных переменных x_i, y_i, z_i. Здесь k — число всех коммутаторов, а через m обозначим число коммутаторов длины 3. Вычислим точный параметр $\mathrm{mlt}(\hat{\mathcal{V}}_{km})$ для многообразия $\hat{\mathcal{V}}_{km}$, заданного T-идеалом $\hat{\Gamma}_{km}$.

Нам потребуется один несложный комбинаторный факт.

Лемма 7.

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = p_{k+1}(n),$$

где $p_{k+1}(n)$ — *некоторый полином от* n *степени* $k+1$.

Мы будем называть диаграмму Юнга D_μ, отвечающую разбиению $\mu \in H(k,m,d)$, критической относительно кохарактера

$$\chi_n = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} m_\lambda \chi_\lambda,$$

если $m_\mu \neq 0$, $\mu_k > d$, $\mu'_m > d$, $\mu'_{m+2} = k$ и μ'_{m+1} принимает наибольшее значение среди всех λ в χ_n, удовлетворяющих предыдущим условиям (напомним, что через μ' обозначено разбиение, сопряжённое к μ).

Лемма 8. *Для любого многообразия* $\hat{\mathcal{V}}_{km}$, *заданного описанным выше тождеством, найдутся натуральные числа* d *и* C, *не зависящие от* n, *такие что справедливы следующие утверждения*:

1) $\chi_n(\hat{\mathcal{V}}_{km}) = \sum\limits_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,m,d)}} m_\lambda \chi_\lambda$;
2) $m_\lambda \leqslant Cn^{\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}}$ *для всех* $\lambda \vdash n$ *и всех* n;
3) *кратности произвольного критического разбиения* $\lambda \in H(k,m,d)$ *имеют вид*

$$m_\lambda = p(s_1,\ldots,s_{k-1},t_1,\ldots,t_{m-1}) + v_\lambda(s_1,\ldots,s_{k-1},t_1,\ldots,t_{m-1}),$$

где p — *однородный в отношении полной степени* $\binom{k}{2}+\binom{m}{2}$ *полином, зависящий от переменных* $s_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $t_j = \lambda'_j - \lambda'_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant m-1$, *и* v_λ — *некоторый полином меньшей степени с коэффициентами, возможно зависящими от* λ, *но ограниченными константами* k, m, d.

Доказательство. Доказательство проведём индукцией по числу коммутаторов k.

Основание индукции. Первый случай $k=1$, $m=0$ тривиален. В этом случае $\hat{\Gamma}_{10} = \{[x,y]\}^T$ и формула для кохарактеров многообразия всех коммутативных ассоциативных алгебр хорошо известна: $\chi_n(\hat{\mathcal{V}}_{10}) = 1 \cdot (n)$. Здесь $d=0$, $C=1$, $p \equiv 1$ — полином нулевой степени.

Во втором случае $k=1$, $m=1$ мы имеем многообразие, порождённое алгеброй Грассмана G (см. [3]), $\hat{\Gamma}_{11} = \{[x,y,z]\}^T$, и согласно [13] $\chi_n(\hat{\mathcal{V}}_{11}) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} 1 \cdot (n-j, 1^j)$. Здесь также $d=0$, $C=1$, $p \equiv 1$.

Предположение индукции. Рассмотрим T-идеал $\hat{\Gamma}_{k+1m} = \hat{\Gamma}_{km} \cdot [x_{k+1}, y_{k+1}]^T$. Применим для нахождения кратностей многообразия $\hat{\mathcal{V}}_{k+1m}$ формулу для кохарактеров произведения T-идеалов [7]

$$\chi_n(\hat{\Gamma}_{k+1m}) = \chi_n(\hat{\Gamma}_{km}) + \chi_{(n)} - \\ - \sum_{j=0}^{n} \chi_j(\hat{\Gamma}_{km}) \otimes \chi_{(n-j)} + \chi_{(1)} \otimes \sum_{j=0}^{n-1} \chi_j(\hat{\Gamma}_{km}) \otimes \chi_{(n-j-1)}. \quad (12)$$

Рассмотрим в этой формуле отдельно слагаемые

$$\zeta_1(n) = \sum_{j=0}^{n} \chi_j(\hat{\Gamma}_{km}) \otimes \chi_{(n-j)} = \sum_{\bar{\lambda} \vdash n} m_{\bar{\lambda}} \chi_{\bar{\lambda}}$$

и

$$\zeta_2 = \chi_{(1)} \otimes \zeta_1(n-1) = \sum_{\tilde{\lambda} \vdash n} m_{\tilde{\lambda}} \chi_{\tilde{\lambda}}.$$

Кратности неприводимых кохарактеров в произведении $\chi_j(\hat{\Gamma}_{km}) \otimes \chi_{(n-j)}$ вычисляются при помощи правила Юнга [1]. Согласно правилу Юнга любая строка в новой, полученной таким образом, диаграмме $\bar{\lambda}$ в слагаемом ζ_1 не может быть длиннее, чем предыдущая строка соответствующей старой диаграммы λ в $\chi_j(\hat{\Gamma}_{km})$, а также кратность неприводимого характера $\chi_{\bar{\lambda}}$ равна $m_{\bar{\lambda}} = \sum_{\lambda \preceq \bar{\lambda}} m_\lambda$, где $\lambda \preceq \bar{\lambda}$ означает выполнение следующей системы условий:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \leqslant \bar{\lambda}_1,\ \lambda_2 \leqslant \bar{\lambda}_2 \leqslant \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_r \leqslant \bar{\lambda}_r \leqslant \lambda_{r-1},\ 0 \leqslant \bar{\lambda}_{r+1} \leqslant \lambda_r, \\ &\bar{\lambda}_j = 0 \ \text{ для всех } j > r+1, \text{ где } r \text{ — высота разбиения } \lambda. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как λ по предположению индукции лежит в $H(k, m, d)$ для некоторого натурального d, в сумме ζ_1 получим $\bar{\lambda}_{k+2} \leqslant \lambda_{k+1} \leqslant d+1$ (при этом $(k+1)$-я строка диаграммы, отвечающей $\bar{\lambda}$, может получиться, вообще говоря, произвольной длины). Кроме того, $\bar{\lambda}_{d+2} \leqslant \lambda_{d+1} \leqslant m$. Слагаемое ζ_2 получается из ζ_1 умножением слева на одну клетку, при этом в диаграммах возможен сдвиг на одну клетку вправо или вниз, $\tilde{\lambda}_{k+2} \leqslant \bar{\lambda}_{k+2} + 1 \leqslant d+2$ и $\tilde{\lambda}_{d+3} \leqslant \bar{\lambda}_{d+2} \leqslant m$. В результате для диаграммы, задаваемой разбиением $\hat{\lambda}$, в кохарактере $\chi_n(\hat{\Gamma}_{k+1m})$ произведения получаем $\hat{\lambda}_{k+2} \leqslant d+2$, $\hat{\lambda}_{d+3} \leqslant m$. Таким образом, произвольная диаграмма $\hat{\lambda}$ принадлежит обобщённому крюку $H(k+1, m, d')$, где $d' = d+2$. Это доказывает первое утверждение леммы.

Из условий (13) также следует, что

$$m_{\bar{\lambda}} = \sum_{\lambda \preceq \bar{\lambda}} m_\lambda \leqslant \sum_{\lambda \preceq \bar{\lambda}} C_1 n^{\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}} \leqslant C_1 n^{\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}} \left(\sum_{\lambda \preceq \bar{\lambda}} 1 \right) \leqslant \\ \leqslant C_2 n^{\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2} + k} = C_2 n^{\frac{k(k+1)+m(m-1)}{2}},$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы и $\sum\limits_{\lambda\preceq\bar\lambda} 1$ представляет собой число решений $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ системы неравенств (13) для фиксированного набора $\bar\lambda=(\bar\lambda_1,\ldots,\bar\lambda_{r+1})$.

В итоге получаем $m_{\hat\lambda}\leqslant C_4 n^{\frac{(k+1)k+m(m-1)}{2}}$. Это доказывает второе утверждение леммы.

Несложно видеть, что критическая диаграмма $\hat\mu$ кохарактера $\chi_n(\hat\Gamma_{k+1m})$ в формуле (12) может быть получена только в слагаемом ζ_2 добавлением клетки к $m+1$-му столбцу и получена только из критической диаграммы кохарактера $\chi_n(\hat\Gamma_{km})$. Поэтому $m_{\hat\mu}=m_{\tilde\mu}=m_{\bar\mu}=\sum\limits_{\lambda\preceq\bar\mu} m_\lambda$, где $\bar\mu\vdash n-1$, $\chi_{\bar\mu}$ — соответствующее слагаемое в сумме $\zeta_1(n-1)$ и разбиение $\bar\mu$ получено из разбиения $\hat\mu$ добавлением одной клетки в $(m+1)$-й столбец.

Обозначим $x_i=\bar\mu_i-\lambda_i$ и $y_j=\bar\mu'_j-\lambda'_j$. Тогда условие $\lambda\preceq\bar\mu$ для разбиения $\bar\mu$ можно переписать в терминах переменных $s_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$, $t_j=\lambda'_j-\lambda'_{j+1}$ и $\bar s_i=\bar\mu_i-\bar\mu_{i+1}$, $\bar t_j=\bar\mu'_j-\bar\mu'_{j+1}$ следующим образом:

$$\begin{gathered}0\leqslant x_1\leqslant\bar s_1,\ 0\leqslant x_2\leqslant\bar s_2,\ldots,\ 0\leqslant x_k\leqslant\bar s_k,\\ 0\leqslant y_1\leqslant 1,\ 0\leqslant y_2\leqslant 1,\ldots,\ 0\leqslant y_m\leqslant 1,\end{gathered}\tag{$*$}$$

где $s_i=\bar s_i-(x_i-x_{i+1})$, $t_j=\bar t_j-(y_j-y_{j+1})$.

В результате получаем

$$\begin{aligned}m_{\hat\mu}&=\sum_{\lambda\preceq\bar\mu} m_\lambda=\\ &=\sum_{(*)}(p(s_1,\ldots,s_{k-1},t_1,\ldots,t_{m-1})+v_\lambda(s_1,\ldots,s_{k-1},t_1,\ldots,t_{m-1}))=\\ &=\sum_{(*)}p(\bar s_1-(x_1-x_2),\ldots,\bar t_{m-1}-(y_{m-1}-y_m))+\\ &+\sum_{(*)}v_\lambda(\bar s_1-(x_1-x_2),\ldots,\bar t_{m-1}-(y_{m-1}-y_m))=\\ &=\hat p(\bar s_1,\ldots,\bar s_{k-1},\bar t_1,\ldots,\bar t_{m-1})+\hat v_\lambda(\bar s_1,\ldots,\bar s_{k-1},\bar t_1,\ldots,\bar t_{m-1}).\end{aligned}$$

Здесь суммирование ведётся по переменным x_i, y_j, удовлетворяющим системе неравенств $(*)$. Полином $\hat p$ — однородная в отношении полной степени часть предыдущей суммы, имеющая наибольшую степень. Из леммы 7 следует, что $\hat p$ является полиномом степени

$$\deg p+k=\binom{k}{2}+\binom{m}{2}+k=\binom{k+1}{2}+\binom{m}{2}.$$

Оставшаяся часть суммы $\hat v_\lambda$, очевидно, также является полиномом от тех же переменных, но имеет меньшую общую степень и коэффициенты, ограниченные константами k, m, d. Это дополняет доказательство случая $\hat\Gamma_{k+1m}$.

Осталось отметить, что применение правила Литтлвуда—Ричардсона в случае $\hat{\Gamma}_{k+1m+1} = \hat{\Gamma}_{km} \cdot [x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}]^T$ в формуле (12) эквивалентно независимому применению правила Юнга последовательно к руке и ноге диаграммы из обобщённого крюка $H(k, m, d)$ (рукой при этом считаем часть диаграммы, лежащую в горизонтальной полосе ширины k, а ногой — часть, принадлежащую вертикальной полосе ширины d). Аналогичные предыдущим рассуждения доказывают справедливость леммы и в этом случае. □

Теорема 5.

$$\mathrm{mlt}(\hat{\mathcal{V}}_{km}) = \frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}.$$

Доказательство. Из леммы 8 следует существование такой константы C, что $\chi_n(\hat{\mathcal{V}}_{km}) = \sum\limits_{\substack{\lambda\vdash n\\ \lambda\in H(k,m,d)}} m_\lambda\chi_\lambda$, где $m_\lambda \leqslant Cn^{\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}}$ для всех $\lambda \vdash n$. В частности, $m_n(\hat{\mathcal{V}}_{km}) = \max\limits_{\lambda\vdash n} m_\lambda \leqslant C\cdot n^{\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}}$, следовательно,

$$\mathrm{mlt}(\hat{\mathcal{V}}_{km}) = \limsup_{n\to\infty} \log_n m_n(\hat{\mathcal{V}}_{km}) \leqslant \frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}.$$

С другой стороны, для любого критического разбиения $\lambda \vdash n$ справедливо $m_\lambda = p(s_1, \ldots, t_{m-1}) + v_\lambda$, где p — полином степени $\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}$ от переменных $s_{i-1} = \lambda_{i-1} - \lambda_i$, $2 \leqslant i \leqslant k$, $t_{i-1} = \lambda'_{i-1} - \lambda'_i$, $2 \leqslant i \leqslant m$. Таким образом, для любого натурального n найдётся такое разбиение $\lambda_n \vdash n$, что $s_{i-1} = \gamma_i n$, $t_{i-1} = \eta_i n$, где γ_i и η_i — некоторые числа, не зависящие от n. Учитывая, что основное поле имеет нулевую характеристику, числа γ_i и η_i можно выбрать таким образом, что после соответствующей подстановки $p(s_1, \ldots, s_{k-1}, t_1, \ldots, t_{m-1}) = \hat{p}(n)$, где $\hat{p}(n)$ — некоторый многочлен от n степени $\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}$. Отсюда

$$m_n(\hat{\mathcal{V}}_{km}) = \max_{\lambda\vdash n} m_\lambda \geqslant m_{\lambda_n} = \hat{p}(n) \geqslant C'n^{\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}}$$

для некоторого C'. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \log_n m_n(\hat{\mathcal{V}}_{km}) \geqslant \frac{k(k-1)+m(m-1)}{2},$$

и

$$\mathrm{mlt}(\hat{\mathcal{V}}_{km}) = \frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}. \quad \square$$

Из доказательства леммы 8 видно, что почти все диаграммы, лежащие в бесконечном крюке $h(k, m)$, имеют ненулевые кратности. Это означает, что пара чисел (k, m) однозначно определяет бесконечный обобщённый крюк $H(k, m, d)$, содержащий все ненулевые диаграммы кохарактера многообразия $\mathcal{V}_{km}$, и согласно следствию 1 (k, m) задаёт пару размерностей конечномерной приведённой супералгебры, грассманова оболочка которой порождает многообразие $\hat{\mathcal{V}}_{km}$.

Теорема 1 в этом случае даёт для $\mathrm{mlt}(\hat{\mathcal{V}}_{km})$ оценку $k(k-1)+m(m-1)$. Это не так далеко от действительного значения $\frac{k(k-1)+m(m-1)}{2}$.

Из доказательства последней теоремы также видно, что для многообразия $\hat{\mathcal{V}}_{km}$ существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n m_n(\mathcal{V}_{km}) = \mathrm{mlt}(\mathcal{V}_{km})$ и этот предел является целым числом. Существование обычного предела в случае произвольного многообразия остаётся открытым вопросом.

Основные идеи данной работы появились во время визита автора в Палермский университет. Автор хотела бы выразить глубокую признательность А. Джамбруно, Ф. Бенанти, а также другим итальянским коллегам за гостеприимство и полезные обсуждения.

Литература

[1] Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. — М.: Мир, 1982.

[2] Кемер А. Р. Представимость приведённо-свободных алгебр // Алгебра и логика. — 1988. — Т. 27, № 3. — С. 274—294.

[3] Латышев В. Н. Два замечания о PI-алгебрах // Сиб. мат. журн. — 1963. — Т. 4. — С. 1120—1121.

[4] Amitsur S. A., Regev A. P.I. algebras and their cocharacters // J. Algebra. — 1982. — Vol. 78. — P. 248—254.

[5] Benanti F., Giambruno A., Sviridova I. Asymptotics for the multiplicities in the cocharacters of some PI-algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 132, no. 3. — P. 669—679.

[6] Berele A., Regev A. Applications of hook Young diagrams to P.I. algebras // J. Algebra. — 1983. — Vol. 82. — P. 559—567.

[7] Berele A., Regev A. Codimensions of products and of intersections of verbally prime T-ideals // Israel J. Math. — 1998. — Vol. 103. — P. 17—28.

[8] Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. — 1998. — Vol. 140. — P. 145—155.

[9] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. — 1999. — Vol. 142. — P. 221—243.

[10] Giambruno A., Zaicev M. Asymptotics for the standard and the Capelli identities // Israel J. Math. — 2003. — Vol. 135. — P. 125—145.

[11] Kemer A. R. Ideals of Identities of Associative Algebras. — Providence: AMS, 1991. — Amer. Math. Soc. Translations of Math. Monographs. Vol. 87.

[12] Mishchenko S. P., Regev A., Zaicev M. V. A characterization of PI-algebras with bounded multiplicities of the cocharacters // J. Algebra. — 1999. — Vol. 219. — P. 356—368.

[13] Olsson J., Regev A. The colength of some T-ideals // J. Algebra. — 1976. — P. 100—111.

[14] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — Academic Press, 1980.