Жёсткость Гёльдера для матриц над телом

М. Х. ХОССЕЙНИ
Университет Бирджанда, Иран
e-mail: Hosseini1346@yahoo.com

УДК 512.552

Ключевые слова: жёсткость Гёльдера, (C_1, C_2)-нормирование, матрицы над телом.

Аннотация

Доказано, что (C_1, C_2)-нормирование по Гёльдеру $(2, \alpha)$-эквивалентно классическому нормированию на множестве матриц над произвольным телом и на множестве кубических матриц над полем. Указанные результаты дают расширение теоремы Гарсиа.

Abstract

M. H. Hosseini, Hölder rigidity for matrices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 10 (2004), no. 4, pp. 225—233.

It is proved that a (C_1, C_2)-Hölder valuation is $(2, \alpha)$-equivalent to classical valuation on the set of matrices over a skew field and on the set of cubic matrices over a field. These results provide an extension of the Garcia theorem.

1. (C_1, C_2)-нормирования по Гёльдеру

Подробное изложение теории нормирований можно найти в [3], здесь мы приводим лишь необходимые определения.

Определение 1. *Диагональную сумму* двух квадратных матриц $A \in M_n(D)$, $B \in M_m(D)$ определим как

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n+m}(D).$$

Определение 2. Допустим, что для двух матриц $A, B \in M_n(D)$ все их строки, кроме i-й, совпадают, т. е. $A_i \neq B_i$ и $A_j = B_j$ для $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i$. Тогда определим *детерминантную сумму* по i-й строке как

$$A \bigtriangledown_i B = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_i + B_i \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2004, том 10, № 4, с. 225—233.

Аналогично для двух матриц $A, B \in M_n(D)$, для которых совпадают все столбцы, кроме j-го, т. е. $\hat{A}_j \neq \hat{B}_j$ и $\hat{A}_i = \hat{B}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq j$, определим их детерминантную сумму по j-му столбцу как

$$A \bigtriangledown_j B = \left(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_j + \hat{B}_j, \ldots, \hat{A}_n\right).$$

Пусть $M(D)$ обозначает совокупность всех квадратных матриц всех размеров над телом D.

Для задания нормирования на $M(D)$ необходимы следующие два понятия (см. [3, с. 22]).

Определение 3. Пусть D — тело, $A \in M_{m,n}(D)$, тогда определим *внутренний ранг матрицы* $r(A)$ как наименьшее целое число r, такое что существуют матрицы $P \in M_{m,r}(D)$ и $Q \in M_{r,n}(D)$, такие что $A = PQ$.

Определение 4. Матрица $A \in M_{n,n}(D)$ называется *полной*, если $r = n$, иначе, если $r < n$, матрица A называется *неполной*.

Определение 5 (см. [2]). *Нормированием* (или *классическим нормированием*) *на совокупности всех квадратных матриц $M(D)$ над телом D* называется отображение $|\ |\colon M(D) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $A \in M_n(D)$ и $r(A) < n$, то $|A| = \infty$;
2) если $A, B \in M_n(D)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\hat{B}_j = -\hat{A}_j$ и $\hat{B}_i = \hat{A}_i$ для $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $|A| = |B|$;
3) если $A, B \in M_n(D)$ и детерминантная сумма $A \bigtriangledown B$ определена, то
$$|A \bigtriangledown B| \geqslant \min\{|A|, |B|\};$$
4) для любых $A \in M_n(D)$, $B \in M_m(D)$ справедливо $|A \oplus B| = |A| + |B|$;
5) $|I| = 0$, где I — единичная матрица.

Примеры построения классических нормирований матриц над нормированными телами подробно изложены в [3, глава 9.3] (см. также [5]).

Определение 6. Пусть $C_1, C_2 \geqslant 1$. Тогда *(C_1, C_2)-нормированием по Гёльдеру на совокупности всех квадратных матриц $M(D)$ над телом D* называется отображение $|\ |\colon M(D) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $A \in M_n(D)$ и $r(A) < n$, то $|A| = \infty$;
2) если $A, B \in M_n(D)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\hat{B}_j = -\hat{A}_j$ и $\hat{B}_i = \hat{A}_i$ для $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $|A| = |B|$;
3) если $A, B \in M_n(D)$ и детерминантная сумма $A \bigtriangledown B$ определена, то
$$|A \bigtriangledown B| \geqslant C_2 \min\{|A|, |B|\};$$
4) для любых $A \in M_n(D)$, $B \in M_m(D)$ справедливо
$$C_1^{-1}(|A| + |B|) \leqslant |A \oplus B| \leqslant C_1(|A| + |B|);$$
5) $|I| = 0$, где I — единичная матрица.

Замечание. Заметим, что $(1, 1)$-нормирование является классическим нормированием.

Определение 7. Пусть $|\ |_1$, $|\ |_2$ — нормирования на кольце R. Эти нормирования являются (C_0, α)-*эквивалентными* по Гёльдеру, если

$$C_0^{-1}|x|_1^\alpha \leqslant |x|_2 \leqslant C_0|x|_1^\alpha$$

для всех $x \in R$.

2. Жёсткость по Гёльдеру для совокупности всех квадратных матриц

Теорема 1. *Пусть* $|\ |_1 \colon M(D) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — (C_1, C_2)*-нормирование по Гёльдеру на совокупности всех квадратных матриц* $M(D)$*, где* $C_1 \geqslant 1$*,* $C_2 \geqslant 1$*. Тогда существует нормирование* $|A|_2$ *на* $M(D)$*, которое* $(2, \alpha)$*-эквивалентно по Гёльдеру нормированию* $|\ |_1$*, где* $\alpha = (\log_2(2C_1))^{-1}$.

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Определение 8. Для любых $A \in M(D)$ определим

$$|A|_3 = |A|_1^\alpha.$$

Лемма 1. *Отображение* $|\ |_3 \colon M(D) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *является* $(2, C_2^\alpha)$*-нормированием по Гёльдеру на* $M(D)$.

Доказательство. Проверим условия 1)—5).

1) Если $A \in M_n(D)$ и $r(A) < n$, то $|A|_3 = |A|_1^\alpha = \infty$, поскольку $|A|_1 = \infty$ и $\alpha > 0$.

2) Если $A, B \in M_n(D)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\hat{B}_j = -\hat{A}_j$ и $\hat{B}_i = \hat{A}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq j$, то $|A|_1 = |B|_1$ (см. п. 2) определения 6), и поэтому $|B|_3 = |B|_1^\alpha = |A|_1^\alpha = |A|_1$.

3) Если $A, B \in M_n(D)$ и детерминантная сумма $A \bigtriangledown B$ определена, то

$$|A \bigtriangledown B|_1 \geqslant C_2 \min\{|A|_1, |B|_1\}$$

(см. п. 3) определения 6), поэтому

$$|A \bigtriangledown B|_3 = |A \bigtriangledown B|_1^\alpha \geqslant C_2^\alpha \min\{|A|_1^\alpha, |B|_1^\alpha\} = C_2^\alpha \min\{|A|_3, |B|_3\}.$$

4) Для любых $A \in M_n(D)$, $B \in M_m(D)$ справедливо

$$C_1^{-1}(|A|_1 + |B|_1) \leqslant |A \oplus B|_1 \leqslant C_1(|A|_1 + |B|_1)$$

(см. п. 4) определения 6), также имеем $|A|_1 + |B|_1 \leqslant 2\max\{|A|_1, |B|_1\}$, поэтому

$$\begin{aligned} |A \oplus B|_3 = |A \oplus B|_1^\alpha \leqslant C_1^\alpha(|A|_1 + |B|_1)^\alpha \leqslant C_1^\alpha(2^\alpha \max\{|A|_1^\alpha, |B|_1^\alpha\} \leqslant \\ \leqslant (2C_1)^\alpha(|A|_1^\alpha + |B|_1^\alpha) \leqslant 2(|A|_1^\alpha + |B|_1^\alpha) = 2(|A|_3 + |B|_3). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |A \oplus B|_3 = |A \oplus B|_1^\alpha \geqslant C_1^{-\alpha}(|A|_1 + |B|_1)^\alpha \geqslant C_1^{-\alpha}(|A|_1^\alpha + |B|_1^\alpha) \geqslant \\ \geqslant (2C_1)^{-\alpha}(|A|_1^\alpha + |B|_1^\alpha) = (2C_1)^{-\alpha}(|A|_3 + |B|_3) = 2^{-1}(|A|_3 + |B|_3). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$2^{-1}(|A|_3+|B|_3)\leqslant|A\oplus B|_3\leqslant 2(|A|_3+|B|_3).$$

5) $|I|_3=|I|_1^\alpha=0$, где I — единичная матрица. □

Лемма 2. *Пусть* $A\in M(D)$, $a_n=\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3$. *Последовательность* $(a_n)_{n\geqslant1}^{1/n}$ *является ограниченной сверху.*

Доказательство. В силу п. 4) леммы 1

$$a_n=\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\leqslant n2^n|A|_3.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}((n2^n)^{1/n})=2$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3\Big)^{1/n}\leqslant 2|A|_3$. Следовательно, последовательность $(a_n)_{n\geqslant1}^{1/n}$ является ограниченной. □

Теперь докажем, что последовательность $((a_n)^{1/n})_{n\geqslant1}$ является возрастающей начиная с некоторого номера M. Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{\Big[2^{-1}\Big(|A|_3+\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3\Big)\Big]^{1/(n+1)}}{\Big(\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3\Big)^{1/n}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\Big(2^{-1}\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3\Big)^{1/(n+1)}}{\Big(\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3\Big)^{1/n}}\geqslant\left(\frac12\right)^{1/(n+1)}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{-1/n(n+1)}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac12\right)^{1/(n+1)}(n2^n)^{-1/n(n+1)}(|A|_3)^{-1/n(n+1)}=n^{-1/n(n+1)}(|A|_3)^{-1/n(n+1)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\lim_{n\to\infty}(n^{-1/n(n+1)}(|A|_3)^{-1/n(n+1)})=1.$$

Поэтому существует такое $M\in\mathbb{N}$, что для $n\geqslant M$ справедливо $a_{n+1}/a_n\leqslant1$, т. е. $a_N\leqslant a_{N+1}\leqslant a_{N+2}\leqslant\ldots$ для всех целых чисел $n\geqslant M$. Это означает, что последовательность $(a_n)_{n\geqslant1}^{1/n}$ является возрастающей начиная с некоторого номера M.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Предел последовательности* $(a_n)_{n\geqslant1}^{1/n}=\Big(\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3\Big)^{1/n}$ *существует.*

Предложение 1. *Пусть* $|A|_2=\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3\Big)^{1/n}$. *Тогда*

$$2^{-1}|A|_3\leqslant|A|_2\leqslant2|A|_3.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

$$\text{(i)}\quad |A|_3 \leqslant 1, \quad \text{(ii)}\quad |A|_3 \geqslant 1.$$

(i) Из п. 4) леммы 1 следует, что $\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3 \geqslant n2^{-n}|A|_3$. Поэтому

$$\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \geqslant n^{1/n}2^{-1}|A|_3^{1/n} \geqslant 2^{-1}|A|_3.$$

Следовательно,

$$|A|_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \geqslant 2^{-1}|A|_3. \tag{1}$$

С другой стороны, из отношения $\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3 \leqslant n2^n|A|_3$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \leqslant \lim_{n\to\infty}(n2^n|A|_3)^{1/n} = 2.$$

Поэтому найдётся такое $N_1 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant N_1$ справедливо

$$\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \leqslant 2.$$

Пусть $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Из соотношений $\lim\limits_{n\to\infty}(|A|_3)^{1/n} = 1$ и $|A|_3 \leqslant 1$ следует, что найдётся такое $N_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N_2$ справедливо $|A|_3^{1/n} > 1-\varepsilon$, т. е. $|A|_3 > (1-\varepsilon)^n$ для $n \geqslant N_2$. Полагая $M = \max\{N_1, N_2\}$, для каждого $n \geqslant M$ получим

$$\frac{\left(\left|\bigoplus\limits_1^n A\right|_3\right)^{1/n}}{|A|_3} \leqslant \frac{2}{(1-\varepsilon)^n}.$$

Теперь предположим, что $\varepsilon \to 0$. Получим

$$|A|_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \leqslant 2|A|_3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$2^{-1}|A|_3 \leqslant |A|_2 \leqslant 2|A|_3.$$

(ii) Из п. 4) леммы 1 следует, что $\Big|\bigoplus\limits_1^n A\Big|_3 \leqslant n2^n|A|_3$. Поэтому

$$\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \geqslant n^{1/n}2|A|_3^{1/n} \geqslant 2n^{1/n}|A|_3.$$

Следовательно,

$$|A|_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \geqslant 2|A|_3 \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 2|A|_3. \tag{3}$$

С другой стороны, из соотношения $\left|\bigoplus_1^n A\right|_3 \geqslant n2^{-n}|A|_3$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \geqslant \lim_{n\to\infty}(n2^{-n}|A|_3)^{1/n} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому найдётся такое $K_1 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant K_1$ справедливо

$$\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Пусть $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Из соотношений $\lim\limits_{n\to\infty}(|A|_3)^{1/n} = 1$ и $|A|_3 \geqslant 1$ следует, что найдётся такое $K_2 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geqslant K_2$ справедливо $(|A|_3)^{1/n} < 1 + \varepsilon$, т. е. $|A|_3 < (1+\varepsilon)^n$ для $n \geqslant K_2$. Полагая $K = \max\{K_1, K_2\}$, для каждого $n \geqslant K$ получим

$$\frac{\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n}}{|A|_3} \geqslant \frac{1/2}{(1+\varepsilon)^n}.$$

Теперь предположим, что $\varepsilon \to 0$. Получим

$$|A|_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} \geqslant 2^{-1}|A|_3, \tag{4}$$

откуда

$$2^{-1}|A|_3 \leqslant |A|_2 \leqslant 2|A|_3.$$

Таким образом, предложение 1 доказано. □

Предложение 2. *Отображение* $|\ |_2\colon M(D) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, *определённое путём* $|A|_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n}$, *является классическим нормированием на* $M(D)$.

Доказательство. Докажем справедливость условий 1)—5) в определении классического нормирования на совокупности матриц $M(D)$.

1) По предложению 1 имеем, что для всех $A \in M_n(D)$ $|A|_3 = \infty$ тогда и только тогда, когда $|A|_2 = \infty$. По п. 1) леммы 1 $|A|_3 = \infty$, если $r(A) < n$. Следовательно, $|A|_2 = \infty$, если $r(A) < n$.

2) Если $A, B \in M_n(D)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\hat{B}_j = -\hat{A}_j$ и $\hat{B}_i = \hat{A}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, $i \neq j$, то по п. 2) леммы 1 имеем $|A|_3 = |B|_3$. Из этого следует, что $\left|\bigoplus_1^n A\right|_3 = \left|\bigoplus_1^n B\right|_3$, откуда получаем, что

$$|A|_2 = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\bigoplus_1^n B\right|_3\right)^{1/n} = |B|_2.$$

3) Если $A, B \in M_n(D)$ и детерминантная сумма $A \bigtriangledown B$ определена, то

$$|A \bigtriangledown B|_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \bigoplus_1^n (A \bigtriangledown B) \right|_3 \right)^{1/n} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \left(C_2^{-\alpha} \left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \bigtriangledown \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \left(C_2^{-\alpha} \min\left\{ \left| \bigoplus_1^n A \right|_3, \left| \bigoplus_1^n B \right|_3 \right\} \right)^{1/n} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left\{ \lim_{n\to\infty} \left(C_2^{-\alpha} \left| \bigoplus_1^n A \right|_3 \right)^{1/n}, \lim_{n\to\infty} \left(C_2^{-\alpha} \left| \bigoplus_1^n B \right|_3 \right)^{1/n} \right\} = \min\{|A|_3, |B|_3\}.$$

4) Для любых $A \in M_n(D)$, $B \in M_m(D)$, во-первых, имеем

$$|A \oplus B|_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \bigoplus_1^n (A \oplus B) \right|_3 \right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \oplus \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} \left(\left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \right|_3 + \left| \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \left(\left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \right|_3 \right)^{1/n} + \lim_{n\to\infty} \left(\left| \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} = |A|_3 + |B|_3.$$

Во-вторых, имеем

$$|A \oplus B|_2 = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \bigoplus_1^n (A \oplus B) \right|_3 \right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \oplus \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{1/n} \left(\left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \right|_3 + \left| \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \right|_3 + \left| \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n\to\infty} (n^{-1/n}) \left(\left| \left(\bigoplus_1^n A \right) \right|_3 \right)^{1/n} + \lim_{n\to\infty} (n^{-1/n}) \left(\left| \left(\bigoplus_1^n B \right) \right|_3 \right)^{1/n} = |A|_3 + |B|_3.$$

Следовательно, $|A \oplus B|_2 = |A|_2 + |B|_2$.

5) Справедливо $|I|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left| \bigoplus_1^n I \right|_3 \right)^{1/n} = 0$.

Таким образом, отображение $|\ |_2 \colon M(D) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, определённое путём $|A|_2 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left| \bigoplus_1^n A \right|_3 \right)^{1/n}$, является классическим нормированием. $\square$

Доказательство теоремы 1. По следствию 1 предел последовательности $(a_n)_{n\geqslant 1}^{1/n} = \left(\left|\bigoplus_1^n A\right|_3\right)^{1/n}$ существует. По предложению 2 $|\ |_2$ является классическим нормированием на $M(D)$. По предложению 1 имеем

$$2^{-1}|A|_1^{\alpha} = 2^{-1}|A|_3 \leqslant |A|_2 \leqslant 2|A|_3 = 2|A|_1^{\alpha}.$$

Это означает, что нормирование $|\ |_2$ $(2,\alpha)$-эквивалентно (C_1, C_2)-нормированию по Гёльдеру $|\ |_1$, что завершает доказательство. □

3. Нормирования над кубическими матрицами

Пусть P — поле, через $M^{(3)}(P)$ обозначено множество всех кубических матриц с коэффициентами из P. Мы следуем определениям и обозначением [1, главы I, II] (см. также [4]).

Определение 9. *Нормированием* (или *классическим нормированием*) *на множестве кубических матриц* $M^{(3)}(P)$ *над полем* P называется отображение $|\ |\colon M^{(3)}(P) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $A = \|A_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$ и A вырожденная, то $|A| = \infty$;
2) если $A = \|A_{ijk}\|, B = \|B_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant n$, $B_{\lambda jk} = -A_{\lambda jk}$ и $B_{ijk} = A_{ijk}$ для $i \neq \lambda$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, то $|A| = |B|$;
3) если $A = \|A_{ijk}\|, B = \|B_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$ и детерминантная сумма $A \bigtriangledown B$ определена, то $|A \bigtriangledown B| \geqslant \min\{|A|, |B|\}$;
4) для любых $A = \|A_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$, $B = \|B_{ijk}\| \in M_m^{(3)}(P)$ справедливо $|A \oplus B| = |A| + |B|$;
5) $|I| = 0$, где $I = I_n \in M_n^{(3)}(P)$ — единичная кубическая матрица.

Определение 10. Пусть $C_1, C_2 \geqslant 1$. Тогда (C_1, C_2)-нормированием по Гёльдеру на множестве кубических матриц $M^3(P)$ над полем P называется отображение $|\ |\colon M^{(3)}(P) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) если $A = \|A_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$ и A вырожденная, то $|A| = \infty$;
2) если $A = \|A_{ijk}\|, B = \|B_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$, $1 \leqslant \lambda \leqslant n$, $B_{\lambda jk} = -A_{\lambda jk}$ и $B_{ijk} = A_{ijk}$ для $i \neq \lambda$, $1 \leqslant j, k \leqslant n$, то $|A| = |B|$;
3) если $A = \|A_{ijk}\|, B = \|B_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$ и детерминантная сумма $A \bigtriangledown B$ определена, то $|A \bigtriangledown B| \geqslant C_2 \min\{|A|, |B|\}$;
4) для любых $A = \|A_{ijk}\| \in M_n^{(3)}(P)$, $B = \|B_{ijk}\| \in M_m^{(3)}(P)$ справедливо
$$C_1^{-1}(|A| + |B|) \leqslant |A \oplus B| \leqslant C_1(|A| + |B|);$$
5) $|I| = 0$, где $I = I_n \in M_n^{(3)}(P)$ — единичная кубическая матрица.

Замечание. Заметим, что $(1,1)$-нормирование на множестве кубических матриц $M^{(3)}(P)$ над полем P является классическим нормированием.

Используя операции детерминантной и диагональной суммы кубических матриц вместо соответствующих операций для обычных матриц, полностью аналогично теореме 1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2 (жёсткость по Гёльдеру для множества кубических матриц). *Пусть* $|\ |_1 \colon M^{(3)}(P) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — (C_1, C_2)*-нормирование по Гёльдеру на множестве кубических матриц* $M^{(3)}(P)$, *где* $C_1 \geqslant 1$, $C_2 \geqslant 1$. *Тогда существует классическое нормирование* $|\ |_2$ *на множестве кубических матриц* $M^{(3)}(P)$, *которое* $(2, \alpha)$*-эквивалентно по Гёльдеру нормированию* $|\ |_1$, *где* $\alpha = (\log_2(2C_1))^{-1}$. □

Литература

[1] Соколов Н. П. Пространственные матрицы и их приложения. — М.: Физматлит, 1960.

[2] Cohn P. M. The construction of valuations on skew fields // J. Indian Math. Soc. — 1989. — Vol. 54. — P. 1—45.

[3] Cohn P. M. Skew Fields, Theory of General Division Rings. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[4] Lecat M. Coup d'oeil sur la theorie des determinants superieurs dans son état actuel // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. — 1926. — Vol. 45, II, fasc. 1/2. — P. 1—98; fasc. 3/4. — P. 141—168; 1926. — Vol. 46. — P. 15—54; 1927. — Vol. 47, serie A, II, fasc. 1. — P. 1—37.

[5] Mahdavi-Hezavehi M. Matrix valuations and their associated skew fields // Resultate d. Math. — 1982. — Vol. 5. — P. 149—156.

[6] Munoz Garcia E. Hoelder absolute values are equivalent to classical ones // Proc. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 127, no. 7. — P. 1967—1971.

[7] Rice L. H. Introduction to higher determinants // J. Math. Phys. — 1930. — Vol. 9. — P. 47—71.