

Поиск объектов. Динамика. Геометрия. Графика

Е. В. ШИКИН, С. Б. БЕРЕЗИН

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 514.11

Ключевые слова: геометрия, компьютерное моделирование, дифференциальное уравнение.

Аннотация

В статье описываются некоторые геометрические методы решения задачи поиска на плоскости с группой ищущих и группой уклоняющихся объектов.

Abstract

E. V. Shikin, S. B. Berezin, Object search. Dynamics. Geometry. Graphics, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 3–34.

The paper describes certain geometric methods for solution of the search problem of several searching and several evading objects in the plane.

1. Вступление

Несмотря на то, что проблему поиска можно рассматривать как частное проявление конфликта, постановки поисковых задач удивительно многообразны. Правда, лишь немногие из них допускают подходящую для содержательного анализа формализацию. В этой работе мы остановимся на обсуждении некоторых вопросов, относящихся к поисковым задачам, в которых осуществляется динамический поиск объектов и где точечные объекты, принимающие участие в поисковом процессе, разделяются на две группы — группу ищущих и группу уклоняющихся. Задача первой из них — обнаружить, в то время как задача второй — как можно дольше обнаружения избегать. Естественно считать, что каждая из этих групп обладает определёнными ресурсами, позволяющими в той или иной степени успешно справляться с основной задачей. Сюда входят уровень информированности о противной стороне (местоположении и динамических возможностях) и условия обнаружения. Мы будем рассматривать детерминированную задачу поиска, когда в каждый момент времени ясно, произошло обнаружение уклоняющихся или нет.

Итак, предположим, что в некоторой плоской области (двумерный случай выбран в силу его большей наглядности) перемещаются две группы точечных объектов, интересы которых противоположны — ищущие и уклоняющиеся. Пер-

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 3–34.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

вые стремятся обнаружить, вторые — избежать обнаружения. При этом объект считается обнаруженным, если его отклонение хотя бы от одного из ищущих не превосходит заданного числа — радиуса видимости ищущего. Относительно возможностей уклоняющихся объектов по видимости никаких ограничений не предполагается. Будем считать также, что каждой из групп известны все скалярные скорости перемещения объектов, которые предполагаются постоянными (такое перемещение объектов называют простым). Ищущие имеют преимущество в скорости, уклоняющиеся — в уровне информированности (радиус видимости ищущих ограничен, уклоняющемуся же всегда известно местоположение каждого из ищущих).

Сравнительно недавно начал разрабатываться подход к решению подобного рода задач, основанный на геометрических соображениях и на придании наглядности степени информированности ищущих в процессе поиска. Опишем коротко основную идею этого подхода.

С точки зрения ищущих поисковая область в каждый момент времени разделяется на две части, в одной из которых уклоняющийся заведомо отсутствует. Успешное разрешение задачи поиска и состоит в том, чтобы эта часть поисковой области, постепенно увеличиваясь, совпала со всей поисковой областью. Посмотрим, что может дать здесь геометрический подход.

Если ищущий объект покоится, то естественно считать, что в круге видимости, центр которого совпадает с ищущим, уклоняющихся нет. Тем самым в этом случае степень осведомлённости ищущего о части поисковой области, свободной от уклоняющихся, описывается кругом. Она увеличивается при перемещении ищущего: вдоль его траектории (позади) образуется шлейф — множество, в которое на данный момент времени уклоняющийся никак не успевает попасть вследствие ограничений на его скорость. Этот шлейф (его называют остаточной областью) как бы бежит за ищущим, примыкая к его траектории и наглядно описывая степень информированности ищущего на данный момент. Оказывается, при определённых условиях перемещение ищущего можно организовать столь разумно, чтобы область, свободная от уклоняющихся, увеличивалась в размерах и, если все сложится удачно, в конце концов совпала бы со всей поисковой областью, что означает успешное завершение поиска (обнаружение).

Природа множеств, свободных от уклоняющихся объектов, довольно разнообразна. Если траектория перемещения уже выбрана ищущим, то вдоль неё (спереди) также появляется изменяющееся во времени множество, свободное от уклоняющихся, — упреждающая область. Следящая область, возникающая в результате объединения остаточной и упреждающей областей, показывает степень осведомлённости ищущего в процессе поиска. Эти изменяющиеся во времени множества и представляют собой основной инструментарий для решения рассматриваемых поисковых задач.

Проблема состоит в том, как в зависимости от формы и размеров поисковой области, условий на скорости объектов, участвующих в поисковом процессе, и радиусов видимости определить, возможно ли успешное решение задачи поиска, и если возможно, то каково оно.

Разработка геометрического подхода позволила успешно решить целый ряд поисковых задач (краткий обзор результатов см. в [8]). Вместе с тем она обозначила трудности, возникающие в случае, когда поисковая область имеет произвольную форму, а количество ищущих достаточно велико. Аналитический подбор необходимых ресурсов для ищущей группы под заданную область поиска резко усложняется. Дело в том, что такой подбор опирается на анализ выбираемого класса траекторий перемещения ищущих объектов и потому требует скорее интерактивного подхода, при котором просматривается несколько приемлемых вариантов. Это наблюдение естественно приводит к мысли о целесообразности использования графических возможностей современных вычислительных устройств, причём в режиме, близком к режиму реального времени. Делается это так. Поисковая область визуализируется на дисплее [2]. Затем из геометрических соображений выбираются те или иные траектории. По ним строятся изменяющиеся во времени информационные множества, свободные от уклоняющихся объектов, и изучается их динамика. Полученные сведения позволяют находить по заданным траекториям содержательные достаточные условия на ресурсы ищущих, обеспечивающие обнаружение, исследовать возможность обнаружения уклоняющихся по предлагаемым траекториям и заданным ресурсам и др.

Разумеется, при визуализации поисковой задачи и поискового процесса возникает ряд подлежащих разрешению вопросов, связанных с описанием информационных множеств, реализацией теоретико-множественных операций и накоплением ошибок.

2. Основные определения

Предположим, что поиск осуществляют N объектов, перемещающихся в области поиска $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ по траекториям $a_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, $t \geq 0$, с постоянными скалярными скоростями α_i , а уклоняющийся объект перемещается в области поиска по траектории $b(t)$ со скоростью, не превышающей по модулю постоянной β . Будем считать, что все скорости ищущих объектов больше β , а критерием обнаружения уклоняющегося объекта является его сближение хотя бы с одним из ищущих объектов на расстояние, меньшее или равное заданному (своему для каждого ищущего объекта),

$$\exists i \quad \|b(t) - a_i(t)\| \leq l_i.$$

Если уклоняющихся объектов несколько, то возможны разные условия успешного завершения поиска — обнаружение хотя бы одного из уклоняющихся объектов, обнаружение части уклоняющихся или обнаружение всех. В случае нескольких уклоняющихся через β будем обозначать максимум скоростей всех уклоняющихся.

Введём определения основных информационных множеств, возникающих в задаче поиска.

Из критерия обнаружения следует, что с каждым ищущим объектом можно связать множество, относительно которого точно известно, что уклоняющегося объекта в точках этого множества нет. Это замкнутый круг $\overline{B(a_i(t), l_i)}$ радиуса l_i с центром в точке $a_i(t)$. Назовём его *кругом обнаружения* i -го объекта в момент времени t (здесь $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| < r\}$, а запись $\overline{M}$ означает замыкание множества M).

Определение 1. Множество $U(t)$ всех точек, в каждой из которых в момент времени t может находиться, не будучи обнаруженным, хотя бы один из уклоняющихся объектов, назовём *областью неопределённости*.

Обычно ищущие объекты стремятся к уменьшению области неопределённости, или, что то же самое, к увеличению множества $\Omega \setminus U(t)$, в котором уклоняющихся объектов нет по определению. Если в некоторый момент времени t_0 область неопределённости окажется полностью исчерпанной, т. е. станет пустым множеством, $U(t_0) = \emptyset$, то все уклоняющиеся объекты будут обнаружены до момента времени t_0 включительно, и задача поиска будет гарантированно решена.

Рассмотрим объединение кругов обнаружения ищущих объектов в момент времени t

$$\bigcup_{i=1}^N \overline{B(a_i(t), l_i)}. \quad (*)$$

Если в этот момент времени некоторый уклоняющийся объект находится в объединении (*), то он обнаружен. В противном случае точно известно, что уклоняющихся объектов в объединении кругов обнаружения (*) нет. При перемещении ищущих объектов в новые точки области поиска Ω они получают подобную информацию о новых частях области поиска Ω . В момент времени $t' > t_0$ это объединение

$$\bigcup_{i=1}^N \overline{B(a_i(t'), l_i)}.$$

При выполнении соотношения

$$t' - t_0 < \frac{\min l_i}{\beta}$$

в некоторых кругах, концентричных кругам объединения (*), уклоняющихся объектов по-прежнему не будет (уклоняющийся объект не может сразу попасть в центр круга обнаружения).

Вследствие превосходства скоростей ищущих объектов над скоростями уклоняющихся, вдоль пройденных ищущими объектами траекторий возникает шлейф из точек, в которых уклоняющихся объектов нет. Будем называть такие информационные множества *остаточными*.

Рассмотрим в момент времени t_0 участки траекторий ищущих объектов с номерами $i_1, \dots, i_m$ за временной промежуток $[t_0 - \Delta, t_0]$, $0 \leq \Delta \leq t_0$, и предположим, что в этом временном промежутке ни один из уклоняющихся объектов обнаружен не был.

Определение 2. *Общей остаточной областью $Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0]$ на момент времени t_0 будем называть множество всех точек, заведомо свободных от уклоняющихся объектов независимо от траекторий ищущих объектов с номерами $i_1, \dots, i_m$ вне промежутка $[t_0 - \Delta, t_0]$.*

Информация о точках так называемых *упреждающих* множеств носит предсказательный характер и зависит от будущих траекторий ищущих: обнаружение уклоняющегося объекта в упреждающем множестве гарантируется при условии, что ищущие объекты будут двигаться по траекториям, для которых эти упреждающие множества были построены. Упреждающие (и остаточные) множества возникают благодаря превосходству ищущих объектов в скорости: уклоняющийся объект не успевает покинуть окрестности будущих траекторий ищущих.

Зафиксируем в момент времени t_0 участки траекторий ищущих объектов с номерами $i_1, \dots, i_m$, которые будут пройдены в будущем за промежуток времени $[t_0, t_0 + \delta]$, $\delta \geq 0$.

Определение 3. *Общей упреждающей областью $P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta]$ на момент времени t_0 будем называть множество всех точек, нахождение в которых любого из уклоняющихся объектов гарантирует его обнаружение хотя бы одним из ищущих объектов с номерами $i_1, \dots, i_m$ в некоторый момент времени из промежутка $[t_0, t_0 + \delta]$ независимо от траекторий ищущих объектов вне его.*

Определение 4. *Общей следящей областью $V_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0 + \delta]$ назовём объединение $Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0] \cup P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta]$.*

Некоторое представление о форме упреждающей и остаточной областей даёт следующее тривиальное утверждение.

Утверждение 1. *Для упреждающей и остаточной областей верны следующие соотношения:*

$$\bigcup_{i \in i_1, \dots, i_m} \bigcup_{t \in [t_0 - \Delta, t_0]} \overline{B(a_i(t), l_i - \beta(t_0 - t))} \subset Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0], \quad (1)$$

$$\bigcup_{i \in i_1, \dots, i_m} \bigcup_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \overline{B(a_i(t), l_i - \beta(t - t_0))} \subset P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta]. \quad (2)$$

В целом ряде случаев эти включения оказываются строгими, т. е. остаточная или упреждающая области могут содержать больше точек, чем объединения в левых частях соотношений (1) и (2). Это происходит за счёт взаимодействия ищущих объектов с границей области поиска и друг с другом.

Например, если в некоторый момент времени центр круга обнаружения из объединения (*) расположен вблизи границы области поиска, то с течением вре-

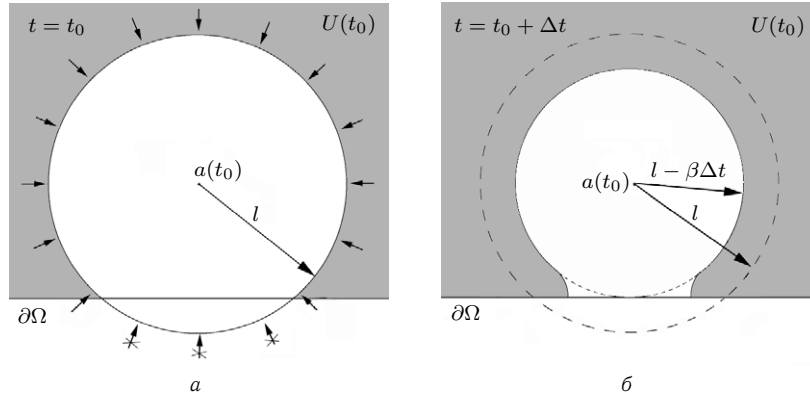


Рис. 1

мени этот круг обнаружения будет стягиваться неравномерно с разных сторон, так как со стороны границы уклоняющийся объект двигаться не может (см. рис. 1).

На рис. 1а изображён круг обнаружения ищущего объекта, расстояние от которого до границы $\partial\Omega$ меньше радиуса обнаружения. Темным цветом обозначена область неопределённости, стрелки отмечают возможные направления движения уклоняющегося объекта. Перечёркнутые стрелки обозначают направления, по которым уклоняющийся объект двигаться не может. На рис. 1б показано уменьшение круга обнаружения за время Δt . Вблизи границы области поиска стягивание области, свободной от уклоняющихся объектов, происходит медленнее.

Замечание. На рис. 1б отражено только возможное движение уклоняющихся объектов и влияние границы области поиска. Действия ищущих объектов и происходящие при этом изменения информационных множеств не учтены.

Аналогичная ситуация возможна при расположении i -го и j -го ищущих объектов на расстоянии, меньшем $l_i + l_j$. И в этом случае стягивание области, свободной от уклоняющихся объектов, может происходить с разной скоростью на разных участках её границы.

Построение информационных множеств для одного ищущего объекта производится достаточно просто и может быть выполнено аналитически. При увеличении количества ищущих объектов сложность задачи построения остаточных и упреждающих множеств резко возрастает вследствие необходимости учёта влияния границы поиска и взаимодействия ищущих объектов между собой. В этих случаях граница информационного множества может иметь достаточно сложную структуру (см. рис. 2 и 3).

Другие примеры взаимодействия нескольких ищущих объектов и возникающих при этом информационных множеств приведены в следующем разделе.

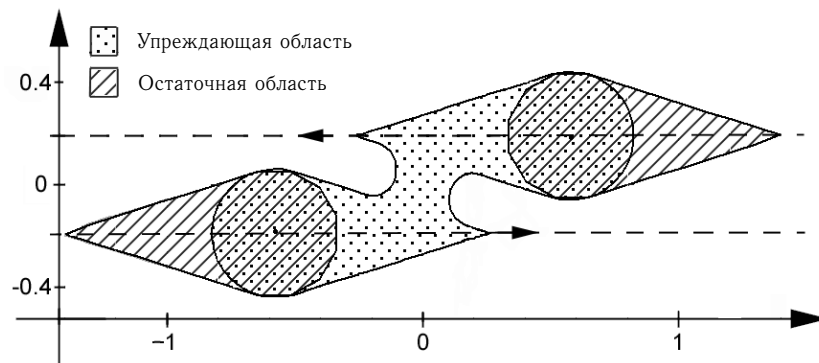


Рис. 2. Взаимодействие упреждающих областей ищущих объектов

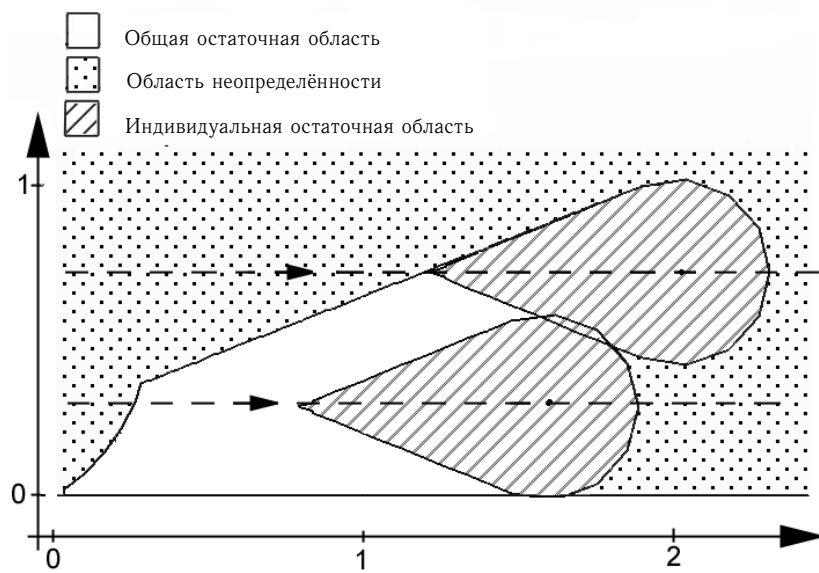


Рис. 3. Взаимодействие остаточных областей и границы

3. Поиск с участием нескольких ищущих объектов

3.1. Уменьшение времени поиска в прямоугольнике

Один ищущий объект

В [7] была предложена стратегия поиска в прямоугольнике одним ищущим объектом. Приведём некоторые результаты из этой работы, полезные для дальнейшего.

Пусть поиск в прямоугольнике ширины D и высоты H ($D \leq H$),

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D, 0 \leq y \leq H\},$$

проводит один ищущий объект, скорость которого равна α , а радиус круга обнаружения — l . Скорость уклоняющегося объекта равна $\beta < \alpha$.

При выполнении достаточного условия

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \left[\left(\frac{D}{l}\right)^2 - 4\right] < 1$$

поисковая задача в прямоугольнике R разрешима. Траектория, приводящая к обнаружению ищущего объекта, представляет собой ломаную $Z_0 Z_1 \dots Z_N$, где

$$Z_{2k} = (d, 2k(D - 2d) \operatorname{tg} \theta), \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor,$$

$$Z_{2k+1} = (D - d, (2k + 1)(D - 2d) \operatorname{tg} \theta), \quad k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor,$$

$$\theta = \arcsin \frac{-\frac{\beta}{\alpha} + \eta \sqrt{1 + \eta^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}}}{1 + \eta^2}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{D}{l}\right)^2 - 4}}, \quad d = \frac{2l^2}{D}.$$

Здесь и далее через $\lceil x \rceil$ обозначено наименьшее целое число, большее или равное x , а через $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое, не превосходящее x .

Движение по ломаной $Z_0 Z_1 \dots Z_N$ способствует *вытеснению* уклоняющегося объекта: если в момент времени, когда ищущий находился в точке Z_{k-1} , уклоняющийся оказался не ниже точки Z_{k-1} , то к моменту времени, когда ищущий окажется в точке Z_k , уклоняющийся будет вынужден переместиться в точку, расположенную не ниже уровня точки Z_k (иначе он будет обнаружен).

Так как высота прямоугольника равна H , то число звеньев ломаной можно взять равным

$$N = \left\lceil \frac{H \operatorname{ctg} \theta}{D - 2d} \right\rceil.$$

Чтобы последнее звено ломаной не выходило за пределы прямоугольника, координату y точки Z_N можно положить равной H . На прохождение одного звена ломаной ищущий объект затратит время, равное

$$T_0 = \frac{D - 2d}{\alpha \cos \theta}.$$

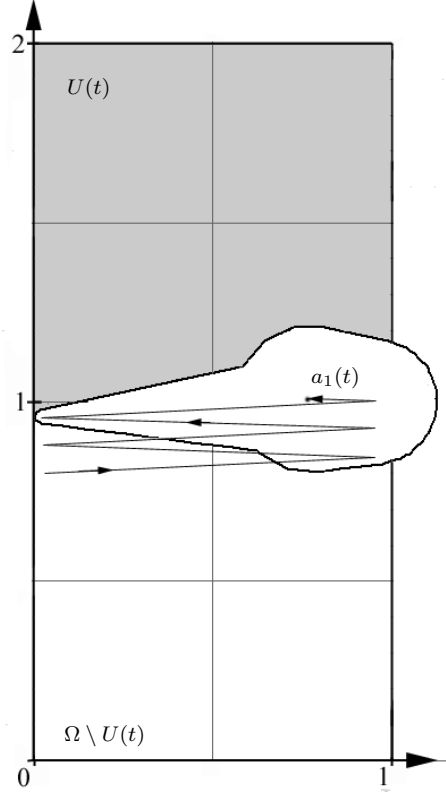


Рис. 4. Поиск в прямоугольнике одним ищущим объектом

Вся траектория будет пройдена и процесс поиска завершится за время, не большее

$$T_1 = NT_0 = \frac{\left\lceil \frac{H \operatorname{ctg}(\theta)}{D-2d} \right\rceil (D-2d)}{\alpha \cos \theta} \leq \frac{H}{\alpha \sin \theta} + T_0.$$

Обозначим через R_k часть прямоугольника R , лежащую ниже точки Z_k ,

$$R_k = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D, 0 \leq y < 2k(D-2d) \operatorname{tg} \theta\},$$

а через t_k — моменты времени, в которые ищущий объект находился в точках Z_k . Условие *вытеснения* в терминах информационных множеств можно сформулировать так: если в момент времени t_{k-1} область неопределённости $U(t_{k-1})$ не пересекалась с R_{k-1} , $U(t_{k-1}) \cap R_{k-1} = \emptyset$, то в момент времени t_k будет выполнено равенство $U(t_k) \cap R_k = \emptyset$. Другими словами, в каждый момент времени t_k все точки, лежащие ниже Z_k , будут принадлежать свободной от уклоняющихся объектов области $R_k \subset \Omega \setminus U(t_k)$. Согласно определению 2 в каждый момент

времени t_k будет выполнено включение $R_k \subset Q_1[0, t_k]$. Хотя о непрерывном росте остаточной области $Q_1[0, t]$ говорить нельзя, тем не менее в каждый момент времени t_k остаточная область $Q_1[0, t_k]$ включает в себя остаточную область $Q_1[0, t_{k-1}]$ для момента времени t_{k-1} .

Два ищущих объекта

Покажем, что увеличение количества ищущих объектов позволяет значительно уменьшить время поиска.

Пусть поисковая область представляет собой полосу шириной D ,

$$R' = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D\},$$

в которой перемещаются два ищущих объекта с одинаковыми скоростями и радиусами кругов обнаружения. В качестве траектории первого ищущего объекта возьмём ломаную $Z'_0 Z'_1 \dots Z'_N$:

$$\begin{aligned} Z'_{2k} &= \left(d, \frac{H}{2} + 2k(D - 2d) \operatorname{tg} \theta \right), \\ Z'_{2k+1} &= \left(D - d, \frac{H}{2} + (2k + 1)(D - 2d) \operatorname{tg} \theta \right), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Второй ищущий объект будет двигаться по ломаной $Z''_0 Z''_1 \dots Z''_N$, которая симметрична $Z_0 Z_1 \dots Z_N$ относительно прямой $y = H/2$:

$$\begin{aligned} Z''_{2k} &= \left(d, \frac{H}{2} - 2k(D - 2d) \operatorname{tg} \theta \right), \\ Z''_{2k+1} &= \left(D - d, \frac{H}{2} - (2k + 1)(D - 2d) \operatorname{tg} \theta \right), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что к моменту времени t_1 , когда ищущие объекты достигнут точек Z'_1 и Z''_1 , уклоняющийся объект будет вынужден подняться выше точки Z'_1 или переместиться ниже точки Z''_1 (иначе он будет обнаружен). В самом деле, если в начальный момент времени уклоняющийся объект находился выше прямой $y = H/2$, то во избежание обнаружения он к моменту времени t_1 должен подняться выше точки Z'_1 . Если же в начальный момент времени уклоняющийся объект находился ниже прямой $y = H/2$, то он должен к моменту времени t_1 оказаться ниже точки Z''_1 .

Далее ищущие объекты вытесняют уклоняющийся объект аналогично тому, как это делал один ищущий объект. Только область, свободная от уклоняющегося объекта, будет расширяться сразу в двух направлениях и расти вдвое быстрее, чем в случае одного ищущего объекта.

Рассмотрим часть полосы R' , совпадающую с прямоугольником R . Можно считать, что первый ищущий объект осуществляет поиск в прямоугольнике высотой $H/2$

$$\left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq D, \frac{H}{2} \leq y \leq H \right\}.$$

Время, затраченное им на поиск, будет не больше

$$T_2 = \frac{H}{2\alpha \sin \theta} + T_0.$$

За это же время второй ищущий объект вытеснит уклоняющегося из прямоугольника такой же высоты

$$\left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq D, 0 \leq y \leq \frac{H}{2} \right\}.$$

Тем самым пара ищущих завершит поиск в прямоугольнике R высотой H за время, не превышающее

$$T_2 = \frac{H}{2\alpha \sin \theta} + T_0 = \frac{T_1}{2} + T_0.$$

Для достаточно больших H время, затраченное на поиск в прямоугольнике R двумя объектами, оказывается почти в два раза меньше времени, за которое завершит поиск один объект.

2*m* ищущих объектов

Пусть в прямоугольнике R шириной D и высотой H ведут поиск $2m$, $m > 1$, ищущих объектов. В этом случае время поиска можно сократить почти в $2m$ раз по сравнению с временем, затраченным одним ищущим объектом. Покажем, как это можно сделать.

Разобьём область поиска вдоль стороны длиной H на m непересекающихся прямоугольников R_i шириной D и высотой H/m . Ищущие объекты расположим так, чтобы поиск в произвольном прямоугольнике R_i пара объектов с номерами $2n - 1$ и $2n$, $n = 1, \dots, m$, могла осуществить в полном соответствии со стратегией, указанной в предыдущем пункте. Тогда за время, не превышающее

$$T_{2m} = \frac{H}{2m\alpha \sin \theta} + T_0 = \frac{T}{2m} + T_0,$$

уклоняющийся объект будет вытеснен из прямоугольника R_i . Но так как

$$R = \bigcup_{i=1}^m R_i,$$

то с исчерпанием всех прямоугольников R_i одновременно произойдёт полное исчерпание области поиска, и уклоняющийся объект будет обнаружен.

Надо заметить, что если число ищущих объектов $2m \geq \lceil D/(2l) \rceil$, то круги обнаружения ищущих объектов можно расположить на стороне прямоугольника шириной D так, что они будут перекрывать всю область поиска по горизонтали. Стратегия поиска в этом случае становится тривиальной: при одновременном параллельном перемещении ищущих объектов вдоль другой стороны прямоугольника (шириной H) происходит исчерпание области поиска. Полное исчерпание области поиска в этом случае произойдёт за время, не большее H/α .

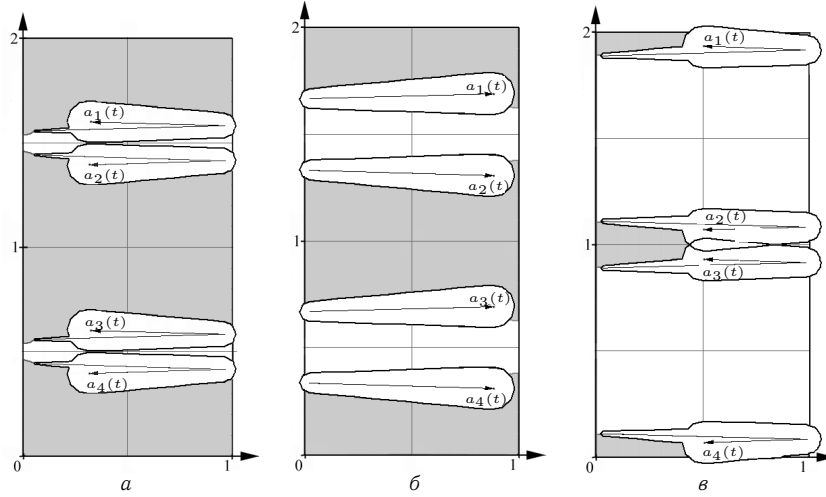


Рис. 5. Информационные множества:
 a — в момент времени $t > 0$; $б$ — в момент времени $t' > t$; $в$ — в момент времени $t'' > t'$

На рис. 5 показаны информационные множества, возникающие в процессе поиска в прямоугольнике с участием четырёх ищущих объектов. Тёмным цветом обозначена область неопределённости $U(t)$, белым — область $R \setminus U(t)$, свободная от уклоняющихся объектов.

3.2. Многосвязная упреждающая область

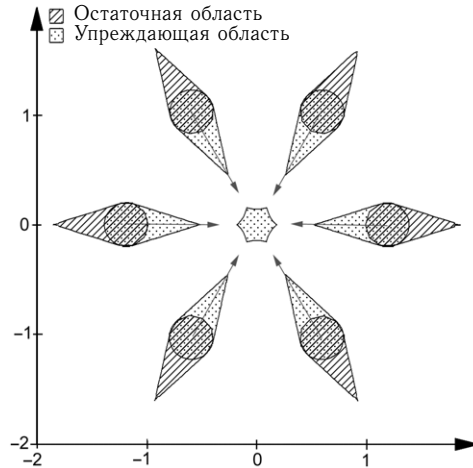
Приведём пример взаимодействия нескольких ищущих объектов, при котором число компонент связности упреждающей области оказывается больше числа ищущих объектов. Подробно такое взаимодействие исследовано в [3].

В поиске участвуют $n > 2$ ищущих объектов, обладающих одинаковыми скоростями α и радиусами кругов обнаружения l . Предположим, что в начальный момент ищущие объекты равномерно распределены по окружности достаточно большого радиуса R_0 с центром в точке O , а затем начинают синхронно перемещаться по прямолинейным траекториям к центру окружности.

В момент времени

$$t_1 = \frac{R_0 - \frac{l}{\sin(\frac{\pi}{n})}}{\alpha}$$

круги обнаружения ищущих объектов одновременно коснутся друг друга. Но задолго до этого, в некоторый момент времени $t^* < t_1$, вокруг точки O возникнет и будет расти область, при нахождении в которой уклоняющийся объект не успеет избежать обнаружения. Согласно определению 3 точки этой области будут принадлежать общей упреждающей области $P_{i_1, \dots, i_m}[t, R_0/l]$, $t \geq t^*$.

Рис. 6. Упреждающая область с $(n + 1)$ компонентой связности ($n = 6$)

При известном соотношении между параметрами задачи $(R_0, \alpha, \beta, l, n)$ в момент времени t^* уклонение ещё возможно из сужающегося кольца с центром в точке O , отделяющего компоненты связности упреждающей области, соответствующие ищущим объектам, от компоненты связности, содержащей точку O .

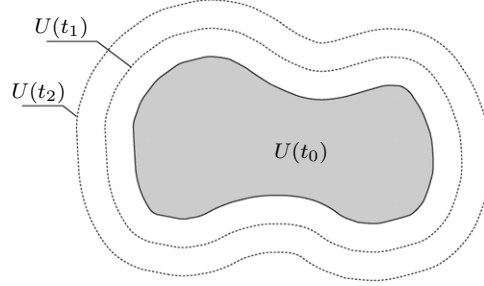
На рис. 6 показан результат численных расчётов упреждающей области при $n = 6$, $l = 0,2$, $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,15$.

4. Аппроксимации информационных множеств

Рассмотренные в предыдущих разделах примеры взаимодействия нескольких ищущих объектов показывают, что упреждающая и остаточная области могут иметь весьма сложную структуру, поддающуюся аналитическому описанию далеко не всегда. К сожалению, определения 1, 2 и 3 не конструктивны и не указывают достаточно эффективного способа построения информационных множеств.

В [2] были приведены и обоснованы формулы, позволяющие строить аппроксимацию области неопределённости по начальной области неопределённости $U(0)$ и заданным на промежутке $[0, t_0]$ траекториям за конечное число шагов.

Разобьём временной промежуток $[0, t_0]$ на N частей $0 = t_N < t_{N-1} < \dots < t_0$. Положим $U^N = U(0)$ и будем считать, что аппроксимация области неопределённости U^k в момент времени t_k уже построена. Аппроксимация области неопределённости в момент времени t_{k-1} рассчитывается исходя из аппроксимации области неопределённости в момент времени t_k .

Рис. 7. Область неопределённости в моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$

Назовём Δ -расширением множества M объединение множества M и полосы шириной $2\Delta \geq 0$, эквидистантной границе M . Операцию Δ -расширения множества M можно записать так:

$$G(M, \Delta) = \bigcup_{x \in M} \overline{B(x, \Delta)}.$$

Свойства операции Δ -расширения подробно рассмотрены в [9].

Смоделируем движение уклоняющихся объектов на временном промежутке $[t_k, t_{k-1}]$, считая, что они находятся вблизи границы области неопределённости $U(t_k)$. За время $t_{k-1} - t_k$ уклоняющиеся объекты успеют удалиться от границы области неопределённости $U(t_k)$ на расстояние, не превосходящее $\beta(t_{k-1} - t_k)$. Следовательно, к аппроксимации области неопределённости U^k можно применить операцию Δ -расширения, где $\Delta = \beta(t_{k-1} - t_k)$:

$$U'^{(k-1)} = G(U^k, \beta(t_{k-1} - t_k)).$$

Изменение области неопределённости (без учёта перемещения ищущих объектов) $U(t)$ в последовательные моменты времени $t_0 < t_1 < t_2$ показано на рис. 7. Область неопределённости в момент времени t_0 отмечена тёмным цветом. Границы области неопределённости в моменты времени t_1 и t_2 показаны прерывистыми линиями.

К моменту времени t_{k-1} ищущие объекты перемещаются по своим траекториям в точки $a_i(t_{k-1})$ и присоединяют часть области неопределённости к области, свободной от уклоняющихся объектов. Учтём перемещение ищущих объектов, вычитая из выросшей области неопределённости $U'^{(k-1)}$ множества V_i^{k-1} :

$$U''^{(k-1)} = U'^{(k-1)} \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i^{k-1}.$$

Здесь через V_i^{k-1} обозначен круг обнаружения i -го ищущего объекта $\overline{B(a_i(t_{k-1}), l_i)}$. Но в качестве V_i^{k-1} можно взять любое легко вычисляемое подмножество индивидуальной остаточной области i -го ищущего объекта

$Q_i[t_k, t_{k-1}]$. Например, это может быть объединение

$$V_i^{k-1} = \bigcup_{t \in [t_k, t_{k-1}]} \overline{B(a_i(t), l_i - \beta(t_{k-1} - t))}.$$

Осталось учесть, что уклоняющиеся и ищущие объекты перемещаются только в области поиска:

$$U^{k-1} = U''^{(k-1)} \cap \Omega.$$

Объединяя описанные выше шаги, получаем следующие рекуррентные формулы для аппроксимации области неопределённости:

$$U^N = U(0), \quad (3)$$

$$U^{k-1} = \left(G(U^k, \beta(t_{k-1} - t_k)) \setminus \bigcup_{i=1}^n V_i^{k-1} \right) \cap \Omega, \quad k = N, N-1, \dots, 1. \quad (4)$$

Формулы (3), (4) позволяют свести построение аппроксимации области неопределённости в некоторый момент времени к построению простых множеств V_i^k . Соотношение между теоретической областью неопределённости и построенной аппроксимацией этой области описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Аппроксимация U^0 , построенная согласно формулам (3), (4), содержит в себе теоретическую область неопределённости $U(t_0)$.*

Иными словами, построенная аппроксимация области неопределённости содержит все возможные точки расположения уклоняющегося объекта.

Вычисление аппроксимаций для общих остаточной и упреждающей областей можно свести к вычислению множеств V_i^k аналогичным образом. Вывод соответствующих формул и доказательство некоторых свойств полученных аппроксимаций приведены в [3]. Приведём основные результаты.

1. Рассмотрим разбиение промежутка $[t_0 - \Delta, t_0]$ на $N > 0$ частей: $t_0 - \Delta = t_N < t_{N-1} < \dots < t_0$. Тогда множество Q^0 , аппроксимирующее общую остаточную область $Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0]$, строится при помощи следующих формул:

$$Q^N = \Omega \cap \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}^N, \quad (5)$$

$$Q^{k-1} = \Omega \cap \mathbb{R}^2 \setminus G(\mathbb{R}^2 \setminus Q^k, \beta(t_{k-1} - t_k)) \cup \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}^{k-1}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Ответ на вопрос о том, как соотносятся полученная аппроксимация и теоретическая остаточная область, даёт следующая теорема.

Теорема 2. *Общая остаточная область, построенная согласно формулам (5), (6), содержится в теоретической остаточной области,*

$$Q^0 \subset Q_{i_1, \dots, i_m}[t_0 - \Delta, t_0].$$

Иными словами, в точках аппроксимации остаточной области упреждающего объекта гарантированно нет.

2. Разобьём отрезок $[t_0, t_0 + \delta]$ на $N > 0$ частей, $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + \delta$, и построим аналогичным образом аппроксимацию упреждающей области P_0 :

$$P^N = \Omega \cap \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}^N, \quad (7)$$

$$P^{k-1} = \Omega \cap \mathbb{R}^2 \setminus G(\mathbb{R}^2 \setminus P^k, \beta(t_k - t_{k-1})) \cup \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}^{k-1}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Замечание. Структуры формул (5), (6) и (7), (8) отличаются лишь порядком нумерации точек разбиения соответствующего отрезка, что отражает определённую симметрию остаточной и упреждающей областей.

Для аппроксимации упреждающей области также справедлива теорема о вложении.

Теорема 3. *Общая упреждающая область, построенная согласно формулам (7), (8), содержится в теоретической упреждающей области,*

$$P^0 \subset P_{i_1, \dots, i_m}[t_0, t_0 + \delta].$$

Иными словами, если объект находится в точках, принадлежащих аппроксимации упреждающей области, то он будет гарантированно обнаружен в течение заданного времени.

Формулы (3), (4), (5), (6) и (7), (8) хорошо подходят для построения информационных множеств по заданным траекториям ищущих объектов на компьютере. Такая задача может быть полезна, например, в следующих приложениях.

1. При визуализации поискового процесса по заданным траекториям для предварительного анализа поисковой задачи или для проверки траекторий, полученных из некоторых иных соображений. Особенно полезным может оказаться вариант программного обеспечения, допускающего интерактивное задание и изменение траекторий.

2. Теоремы вложения из данного раздела утверждают, что если траектории ищущих объектов решают задачу поиска на аппроксимациях информационных множеств, то теоретическая задача поиска также будет решена. Этот факт позволяет создать программу, осуществляющую эвристический перебор параметров задачи (например, α_i и l_i) для заданных траекторий и указывающую достаточные для успешного поиска ресурсы.

5. Алгоритмическая реализация

Применение компьютера для построения информационных множеств согласно формулам (3), (4), (5), (6) и (7), (8) возможно только при наличии компьютерной реализации теоретико-множественных операций и операции Δ -расширения над элементами из некоторого класса Σ компьютерно представимых множеств.

Существует несколько подходов к компьютерному представлению множеств, включая растровый [2], граничный [5, 6] и функциональный [1]. Граничный подход позволяет выполнять операции над множествами с достаточно высокой точностью и производительностью и с небольшими затратами памяти, именно поэтому он был выбран для проведения вычислений по формулам (3), (4), (5), (6) и (7), (8). При граничном подходе множество определяется своей границей, являющейся планарным графом, рёбра которого разбивают плоскость на некоторое число областей. Построение результата теоретико-множественной операции над множествами в граничном представлении состоит из двух этапов. Сначала строится разбиение плоскости объединением границ множеств-операндов. Затем в результирующее множество включаются области полученного разбиения, соответствующие выбранной теоретико-множественной операции.

К сожалению, на этапе построения объединения границ значительное влияние могут оказать погрешности представления чисел с плавающей точкой: основной операцией при объединении границ множеств-операндов является нахождение точек пересечения двух заданных отрезков кривых, особенно подверженное влиянию ошибок округления, если точки отрезков расположены на небольшом (порядка 10^{-5}) расстоянии. Здесь даже небольшая погрешность в вычислениях может привести к нарушению логической структуры данных [10]. Рекуррентные формулы (3), (4), (5), (6) и (7), (8) подразумевают многократное применение теоретико-множественных операций, поэтому учёт влияния ошибок округления является очень важной задачей.

Чтобы избежать влияния ошибок округления на результат теоретико-множественных операций, можно вообще отказаться от арифметики с плавающей точкой. Воспользуемся подходом, предложенным в [10]. Ограничим класс кривых, входящих в границу множества, только отрезками прямых. Применение теоретико-множественных операций может приводить к появлению новых вершин, но прямые, отрезки которых составляют границу, остаются неизменными. Поэтому в качестве фундаментальных геометрических данных возьмём коэффициенты уравнений прямых и на их основе найдём представление для вершин графов-границ.

Введём на плоскости прямоугольную систему координат. В класс $\mathcal{L}$ поместим все прямые, уравнения которых во введённой системе координат могут быть заданы в виде

$$ax + by + c = 0, \quad (9)$$

$$a, b \in I_{32} = \{-2^{31}, -2^{31} + 1, \dots, 2^{31} - 1\}, \quad (10)$$

$$c \in I_{64} = \{-2^{63}, -2^{63} + 1, \dots, 2^{63} - 1\}. \quad (11)$$

В частности, прямая из класса $\mathcal{L}$ может быть проведена между любыми двумя точками с целочисленными координатами из прямоугольника $\Omega_0 = [-2^{30}, 2^{30} - 1] \times [-2^{30}, 2^{30} - 1]$. Поэтому будем считать, что графы, представляющие границы множеств, целиком принадлежат области Ω_0 , а рёбра графов лежат на прямых из класса $\mathcal{L}$.

Нетрудно доказать, что координаты точки пересечения двух произвольных рёбер можно представить в виде

$$x = x_i + \frac{x_r}{D}, \quad y = y_i + \frac{y_r}{D}, \quad (12)$$

$$x_i, y_i \in I_{32}, \quad (13)$$

$$x_r, y_r, D \in I_{64}. \quad (14)$$

Объединение графов, рёбра и вершины которых допускают предложенное выше представление, может быть построено точно, при этом рёбра и вершины построенного объединения снова будут представимы в виде (9)—(11) и (12)—(14).

Следует отметить, что предложенный метод граничного представления множеств обладает вполне приемлемой точностью. В виде (9)—(11) и (12)—(14) могут быть представлены рёбра и вершины границы множества, полученного применением любого конечного количества теоретико-множественных операций к многоугольникам, вершины которых имеют целочисленные координаты и принадлежат области Ω_0 . Характерные размеры области поиска в большинстве постановок задач поиска не превосходят $10^2, \dots, 10^3$, поэтому масштабирование Ω_0 до размеров Ω позволяет получить точность представления координат порядка 10^{-6} .

Представление (9)—(11) и (12)—(14) использует только 32- и 64-битные целые числа, эффективно обрабатываемые современными процессорами, и позволяет выполнять теоретико-множественные операции с производительностью, достаточной для интерактивного моделирования поискового процесса.

Вместе с формулами из раздела 4 рассмотренная здесь алгоритмическая реализация теоретико-множественных операций позволяет проводить моделирование поисковых задач с применением компьютера и делать на основе построенных информационных множеств обоснованные суждения о наличии или отсутствии ищущих объектов в заданных подмножествах области поиска.

6. Поиск в невыпуклых областях

6.1. Постановка задачи

Среди плоских невыпуклых областей можно указать области, устроенные особенно просто: это области, выпуклые в одном направлении. Простейшие из них составляют класс монотонных многоугольников [4].

Определение 5. Многоугольник P называется *монотонным*, если существует хотя бы одна прямая γ , такая что любая прямая, параллельная данной, пересекает границу P не более чем в двух точках или по целому отрезку.

Определение 6. Стороны монотонного многоугольника P , параллельные прямой γ , будем называть *основаниями* (относительно выбранной прямой γ).

Считая область поиска Ω монотонным многоугольником, укажем достаточные условия существования в ней поисковой траектории, перемещение по которой позволит обнаружить уклоняющийся объект, и опишем один из возможных способов построения такой траектории.

Введём на плоскости прямоугольную систему координат OXY так, чтобы в качестве прямой γ для области Ω можно было бы взять ось OX , а нижняя точка Ω лежала бы на оси OY . Если у Ω существуют основания, то будем называть одно из них *верхним* (Ω расположена ниже его), а другое — *нижним*.

Ясно, что прямую γ и систему координат OXY можно выбрать не единственным способом. Соображения, согласно которым прямая γ может быть выбрана, рассмотрены далее.

6.2. Патрулирование горизонтального сечения

Рассмотрим вспомогательную задачу патрулирования горизонтального сечения AB монотонного многоугольника. Пусть в l -окрестности отрезка AB граница области поиска состоит из четырёх отрезков прямых, образующих угол $\varphi \in (0, \pi/2]$ с горизонталью. Обозначим расстояние между точками A и B через D . Будем считать, что $D > 2l$ (в противном случае задача патрулирования решается тривиально).

Пусть ищущий объект движется по отрезку $Z_1Z_2 \subseteq AB$, вершины которого находятся на расстоянии $d \in [0, l]$ от точек A и B . Найдём соотношения на параметры D, l, λ, φ и соответствующие им значения d , при которых возможно патрулирование отрезка Z_1Z_2 , т. е. периодическое движение по траектории $Z_1Z_2Z_1Z_2 \dots$, при котором уклоняющийся объект не может пересечь прямую AB , не будучи обнаруженным.

Обозначим через t_1 момент времени, в который ищущий объект находится в точке Z_1 . Для определённости будем считать, что в момент времени t_1 уклоняющийся объект находится выше прямой AB . Пусть L_1 — точка пересечения левой границы области поиска с окружностью радиуса l и центром в точке Z_1 , лежащая выше прямой патрулирования; L_2 — точка пересечения правой границы области поиска с окружностью радиуса l и центром в точке Z_2 , лежащая ниже прямой патрулирования (рис. 8).

Предположим, что ищущий объект окажется в точке Z_2 в момент времени t_2 . Подберём параметры задачи так, чтобы уклоняющийся объект в момент времени t_2 по-прежнему находился выше прямой. Вне круга обнаружения $\overline{B}(Z_2, l)$ радиуса l с центром в точке Z_2 он будет находиться по определению (рис. 8б).

Для того чтобы обойти перемещающийся круг обнаружения слева, уклоняющийся объект должен пройти расстояние, не меньшее чем L_1A , и затратить время, не меньшее чем L_1A/β . Если же уклоняющийся объект попытается обойти круг обнаружения справа, то он должен будет пройти расстояние, не меньшее чем $L_2B = L_1A$. На движение по отрезку Z_1Z_2 ищущий объект затратит время, равное Z_1Z_2/α .

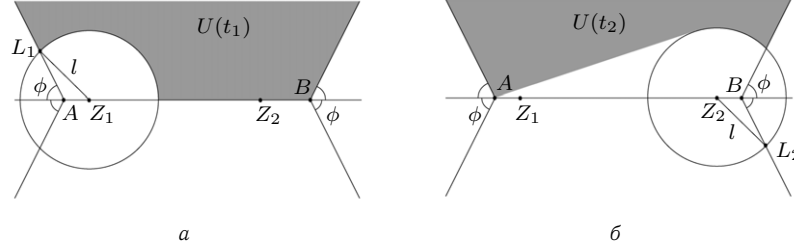


Рис. 8. Информационные множества:
 a — в момент времени $t = t_1$; b — в момент времени $t = t_2$

Таким образом, при выполнении условия

$$\frac{L_1 A}{\beta} = \frac{L_2 B}{\beta} \geq \frac{Z_1 Z_2}{\alpha} \quad (15)$$

уклоняющийся объект не может спуститься ниже прямой патрулирования, не будучи обнаруженным. Из симметрии части области поиска и поисковой траектории относительно прямой AB следует, что при нахождении в момент времени t_1 ниже прямой AB , уклоняющийся объект не сможет к моменту времени t_2 подняться выше AB , не будучи обнаруженным.

Ясно, что при движении ищущего объекта от точки Z_2 к точке Z_1 уклоняющийся объект также не сможет пересечь прямую AB , не будучи обнаруженным. Таким образом, периодическое движение между точками Z_1 и Z_2 означает патрулирование горизонтального сечения области поиска.

Перепишем соотношение (15), учитывая, что

$$\begin{aligned} L_1 A &= L_2 B = -d \cos \varphi + \sqrt{l^2 - d^2 \sin^2 \varphi}, \\ Z_1 Z_2 &= D - 2d. \end{aligned}$$

Получим неравенство

$$-d \cos \varphi + \sqrt{l^2 - d^2 \sin^2 \varphi} \geq \lambda(D - 2d). \quad (16)$$

Правая и левая части неравенства (16) пропорциональны длинам отрезков и, следовательно, неотрицательны. Оставим в левой части только квадратный корень и возведём обе части неравенства в квадрат:

$$l^2 - d^2 \sin^2 \varphi \geq \lambda^2(D - 2d)^2 + 2\lambda d(D - 2d) \cos \varphi + d^2 \cos^2 \varphi. \quad (17)$$

После несложных преобразований соотношения (17) получим относительно d следующее неравенство:

$$(1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2)d^2 + 2\lambda dD(\cos \varphi - 2\lambda) + \lambda^2 D^2 - l^2 \leq 0. \quad (18)$$

Заметим, что

$$1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2 = (\cos \varphi - 2\lambda)^2 + \sin^2 \varphi > 0 \quad \forall \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \quad (19)$$

и неравенство (18) является квадратичным с положительным коэффициентом при старшей степени.

Для того чтобы неравенство (18) имело действительные решения, его дискриминант H должен быть неотрицательным:

$$H = l^2(1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2) - \lambda^2 D^2 \sin^2 \theta \geq 0. \quad (20)$$

Из этого соотношения можно получить неравенство, связывающее радиус круга обнаружения с остальными параметрами задачи патрулирования:

$$l \geq \frac{\lambda D \sin \varphi}{\sqrt{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}}. \quad (21)$$

Теперь необходимо определить дополнительные условия на параметры задачи, гарантирующие непустоту пересечения множества решений (18) и множества допустимых значений $d \in [0, l]$:

$$\left[\frac{\lambda D(2\lambda - \cos \varphi) - \sqrt{H}}{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}, \frac{\lambda D(2\lambda - \cos \varphi) + \sqrt{H}}{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2} \right] \cap [0, l] \neq \emptyset. \quad (22)$$

Рассмотрим случай $1/\cos \varphi \geq 2\lambda \geq \cos \varphi$. Тогда центральной точкой интервала решений неравенства (18) будет

$$d_0 = \frac{\lambda D(2\lambda - \cos \varphi)}{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2} \geq 0.$$

Необходимо доказать, что существуют решения неравенства (18), меньшие чем l . Введём обозначение

$$d^* = \frac{l^2(2\lambda - \cos \varphi)}{D\lambda \sin^2 \varphi}$$

и докажем, что d^* принадлежит интервалу решений неравенства (18) и не превосходит радиус круга обнаружения l . При доказательстве понадобятся следующие простые утверждения.

Утверждение 2. Функция

$$k_1(\varphi) = \frac{2\lambda - \cos \varphi}{\sin \varphi} \leq 2\lambda$$

является монотонно неубывающей на отрезке $(0, \pi/2]$ при $\lambda \leq 1/2$ и на отрезке $[\arccos(1/2\lambda), \pi/2]$ при $1/2 < \lambda \leq 1/(2 \cos \varphi)$.

Утверждение 3. Неравенство

$$k_2(\varphi) = \frac{2\lambda - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \leq 2\lambda$$

выполняется на отрезке $(0, \pi/2]$ при $\lambda \leq 1/2$ и на отрезке $[\arccos(1/2\lambda), \pi/2]$ при $1/2 < \lambda \leq 1/(2 \cos \varphi)$.

Утверждение 4. *Функция*

$$k_3(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}}$$

является монотонно невозрастающей на отрезке $(0, \pi/2]$ при $\lambda \leq 1/2$ и на отрезке $[\arccos(1/2\lambda), \pi/2]$ при $1/2 < \lambda \leq 1/2 \cos \varphi$.

Утверждение 5. *Для всех $0 < \varphi \leq \pi/2$ и $0 < \lambda \leq 1$, таких что*

$$\frac{\cos \varphi}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2 \cos \varphi},$$

выполнены неравенства

$$d_0 \leq d^* \leq d_0 + \frac{\sqrt{H}}{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2} \quad \text{и} \quad d^* \leq l.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$l_0 = \frac{D\lambda \sin \varphi}{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}$$

и перепишем выражение для d_0 следующим образом:

$$d_0 = \frac{l_0^2(2\lambda - \cos \varphi)}{D\lambda \sin^2 \varphi}.$$

Из условия неотрицательности дискриминанта (21) следует, что $l \geq l_0$, а значит, и $d^* \geq d_0$.

Докажем теперь, что

$$d^* - d_0 = \frac{(l^2 - l_0^2)(2\lambda - \cos \varphi)}{D\lambda \sin^2 \varphi} \leq \frac{\sqrt{H}}{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}.$$

Преобразуем это неравенство, учитывая, что

$$D\lambda \sin \varphi = l_0 \sqrt{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}$$

и

$$H = (l^2 - l_0^2)(1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2).$$

Получим

$$\frac{(2\lambda - \cos \varphi)\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0 \sin \varphi} \leq 1.$$

Из утверждения 2 следует неравенство

$$\frac{(2\lambda - \cos \varphi)\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0 \sin \varphi} = \frac{k_1(\varphi)\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0} \leq \frac{2\lambda\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0},$$

а из ограничения $l \leq D/2$, что

$$\frac{2\lambda\sqrt{l^2 - l_0^2}}{l_0} \leq \frac{2\lambda\sqrt{\frac{D^2}{4} - l_0^2}}{l_0}.$$

Перейдём к доказательству неравенства

$$\frac{2\lambda\sqrt{\frac{D^2}{4} - l_0^2}}{l_0} \leq 1.$$

После несложных преобразований получим

$$l_0 \geq \frac{D\lambda}{\sqrt{1+4\lambda^2}}.$$

Для завершения доказательства первой части утверждения вспомним, что согласно утверждению 4 и определению l_0

$$l_0 = D\lambda k_3(\varphi) \geq D\lambda k_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{D\lambda}{\sqrt{1+4\lambda^2}}.$$

Доказательство второй части утверждения вытекает из свойств функции $k_2(\varphi)$:

$$d^* = \frac{l^2 k_2(\varphi)}{D\lambda} \leq \frac{2l^2}{D} \leq l.$$

Замечание. Используя такую же схему доказательства, но заменяя нестрогие неравенства на строгие, нетрудно доказать, что если неравенство для дискриминанта (21) является строгим, т. е. $l > l_0$, то d^* лежит внутри интервала решений (18):

$$d_0 < d^* < d_0 + \frac{\sqrt{H}}{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}.$$

Осталось рассмотреть случай $0 < 2\lambda < \cos \varphi$. Тогда центр отрезка решений неравенства (18) попадает в область отрицательных значений. Для того чтобы отрезок решений неравенства включал в себя неотрицательные точки, необходимо, чтобы произведение коэффициентов при второй и нулевой степенях d было не больше нуля:

$$(1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2)(\lambda^2 D^2 - l^2) \leq 0.$$

Это приводит к неравенству $l \geq \lambda D$. Заметим, что в силу (19) это неравенство также означает неотрицательность дискриминанта

$$l \geq \lambda D \geq \frac{\lambda D \sin \varphi}{\sqrt{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}}.$$

Объединим результаты для всех возможных значений φ и λ и сформулируем условия, достаточные для успешного патрулирования рассматриваемого сечения области поиска с параметрами D и φ . Укажем также возможный вариант выбора смещения d .

Теорема 4 (достаточные условия патрулирования). При

$$\max \left\{ 1, \frac{1}{2 \cos \varphi} \right\} \geq \lambda \geq \frac{\cos \varphi}{2}$$

патрулирование возможно, если

$$l \geq \frac{\lambda D \sin \varphi}{\sqrt{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}}, \quad (23)$$

при этом можно выбрать значение смещения

$$d^* = \frac{l^2(2\lambda - \cos \varphi)}{D\lambda \sin^2 \varphi}. \quad (24)$$

При $0 < 2\lambda < \cos \varphi$ патрулирование возможно при

$$l \geq \lambda D \quad \text{и} \quad d^* = 0. \quad (25)$$

Следствие 1. Теорема 4 верна, если отрезки, составляющие границу области поиска в l -окрестности прямой патрулирования, образуют с горизонталью углы, равные $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и φ_4 , каждый из которых больше или равен φ .

Следствие 2. Если условия теоремы 4 выполнены для полосы шириной D , то траектория с параметром d^* является траекторией патрулирования для области с той же структурой границы, но с меньшей шириной $2d^* \leq D' \leq D$.

Надо заметить, что при $\varphi = \pi/2$ полученный результат совпадает с достаточными условиями патрулирования вертикальной полосы, сформулированными в [7].

6.3. Вытеснение уклоняющегося объекта

Пусть граница области поиска в Δ -окрестности прямой AB ($\Delta \geq l$) по-прежнему состоит из четырёх отрезков прямых, при этом левый верхний и правый нижний отрезки образуют с горизонтальной прямой углы φ , $0 < \varphi \leq \pi/2$, а правый верхний отрезок образует с горизонталью угол ψ , $0 < \psi < \pi$.

Будем считать, что уклоняющийся объект находится выше прямой AB (рис. 9а), поэтому угол между левым нижним отрезком границы Ω и горизонталью может быть произвольным. В предыдущем разделе было показано, что в условиях теоремы 4 при движении ищущего объекта от точки Z_1 до точки Z_2 уклоняющийся объект не может пересечь отрезка AB , не будучи обнаруженным.

Пусть к моменту окончания движения ищущий объект сместится по вертикали на расстояние $0 < h \leq \Delta$ и окажется в точке Z'_2 , находящейся на том же расстоянии по горизонтали от границы области поиска, что и точка Z_2 . Обозначим точки пересечения горизонтальной прямой, проходящей через Z'_2 , с границами области поиска A' и B' (рис. 9а), $Z_2B = Z'_2B' = d$.

Обозначим t'_2 момент времени, к которому ищущий объект достигнет точки Z'_2 при движении по отрезку $Z_1Z'_2$. В зависимости от величины угла ψ значение t'_2 может быть как больше, так и меньше t_2 . В этом разделе будет

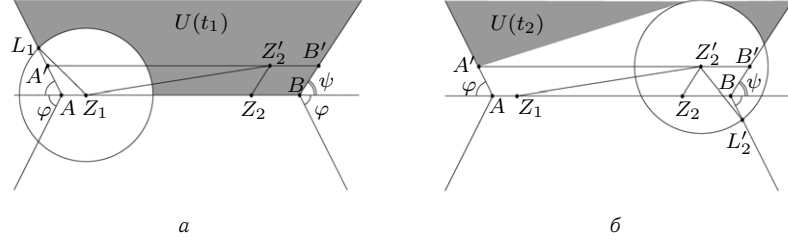


Рис. 9. Информационные множества:
 a — в момент времени $t = t_1$; b — в момент времени $t = t'_2$

показано, что если соответствующее неравенство (23) или (25) является строгим, т. е. радиус круга обнаружения взят с некоторым запасом, то существует некоторое положительное вертикальное смещение $0 < h \leq h_{\max}(D, d, l, \lambda, \varphi, \psi)$, при котором происходит *вытеснение* уклоняющегося объекта. Горизонтальное смещение d необходимо выбирать из внутренних точек интервала решений неравенства (18), например, в соответствии с замечанием к утверждению 5 можно положить $d = d^*$.

Будем говорить, что ищущий объект вытесняет уклоняющегося из горизонтальной полосы между точками Z_1 и Z'_2 , если в момент времени t_1 уклоняющийся объект находится выше точки Z_1 , а к моменту времени t'_2 он должен подняться выше точки Z'_2 , чтобы избежать обнаружения (рис. 9б). Такое определение вытесняющего движения аналогично приведённому в [7] при построении поисковой траектории в прямоугольнике.

Для того чтобы обойти перемещающийся круг обнаружения слева и к моменту времени t'_2 оказаться ниже прямой $A'B'$, уклоняющийся объект должен пройти расстояние, не меньшее чем L_1A' , и затратить время, не меньшее чем L_1A'/β (рис. 9а). Если же уклоняющийся объект попытается обойти круг обнаружения справа и в момент времени t'_2 оказаться ниже прямой AB , то он должен будет пройти расстояние, не меньшее L'_2B (рис. 9б). Таким образом, для успешного вытеснения ищущего объекта в полосу шириной h должны быть выполнены следующие два неравенства:

$$\frac{L_1A'}{\beta} > \frac{Z_1Z'_2}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{L'_2B}{\beta} > \frac{Z_1Z'_2}{\alpha}. \quad (26)$$

Рассмотрим длину отрезка L_1A' как функцию от h :

$$r_1(h) = L_1A - \frac{h}{\sin \varphi} = -d \cos \varphi + \sqrt{l^2 - d^2 \sin^2 \varphi} - \frac{h}{\sin \varphi}.$$

Функция $r_1(h)$ непрерывна для всех h , монотонно убывает, и $r_1(0) = L_1A$.

Длина отрезка L'_2B также является непрерывной функцией h . Обозначим её $r_2(h)$. Нетрудно заметить, что $r_2(0) = L_2B$.

Длину отрезка $Z_1Z'_2$ обозначим

$$r_3(h) = \sqrt{h^2 + (D - 2d + h \operatorname{ctg} \varphi)^2}.$$

Функция $r_3(h)$ определена и непрерывна при любых h , причём $r_3(0) = Z_1Z_2$. В этих обозначениях неравенства (26) можно переписать следующим образом:

$$\frac{r_1(h)}{\beta} > \frac{r_3(h)}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{r_1(h)}{\beta} > \frac{r_3(h)}{\alpha}. \quad (27)$$

Если неравенство (23) или (25) строгое, а d является внутренней точкой интервала решений (18), то в соответствии с определениями функций $r_1(h)$, $r_2(h)$ и $r_3(h)$ можно записать

$$\frac{r_1(0)}{\beta} > \frac{r_3(0)}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{r_1(0)}{\beta} > \frac{r_3(0)}{\alpha}. \quad (28)$$

Но непрерывность функций $r_1(h)$, $r_2(h)$ и $r_3(h)$ означает, что в некоторой окрестности точки $h = 0$ выполняются и неравенства (27), тем самым при смещении ищущего объекта на h из этой окрестности происходит вытеснение уклоняющегося.

Обозначим через $h_{\max} = h_{\max}(D, d, l, \lambda, \varphi, \psi) > 0$ максимальное вертикальное смещение, которое входит в множество решений (27) и не позволяет ищущему объекту выйти за пределы области поиска (что возможно при углах ψ , близких к π).

Утверждение 6. Рассмотрим горизонтальное сечение области поиска Ω' , обладающее такой же структурой границ, как и рассматриваемое в этом разделе, но с меньшей шириной $0 < D' < D$, не позволяющей тем не менее ищущему объекту выйти за пределы Ω' . Тогда движение с вертикальным смещением $0 < h < \max\{h_{\max}, (D - 2d)|\operatorname{tg} \psi|\}$ приводит к вытеснению уклоняющегося объекта в рассматриваемом сечении области Ω' .

Доказательство. Функции $r_1(h)$ и $r_2(h)$ не зависят от D , а функция $r_3(h)$ при уменьшении D убывает, и $h < (D - 2d)|\operatorname{tg} \psi|$. Поэтому множество решений неравенств (27) для области Ω' будет включать в себя решения для Ω .

Утверждение 7. Пусть в Δ -окрестности прямой AB левый участок границы области Ω' , лежащий выше прямой AB , и правый участок границы Ω' , лежащий ниже AB , расположены внутри области Ω (не пересекая отрезок $Z_1Z'_2$). Правая граница области Ω' выше прямой AB является отрезком прямой и совпадает с границей области Ω . Тогда вертикальное смещение $0 < h < h_{\max}$ приводит к вытеснению уклоняющегося объекта в рассматриваемом сечении области Ω' .

Доказательство. При сделанных предположениях $\Omega' \subset \Omega$ в l -окрестности прямой AB , а значит, любая траектория уклоняющегося объекта из Ω' является допустимой в Ω и приводит к обнаружению, если только к моменту времени t'_2 уклоняющийся объект не оказывается выше прямой $A'B'$.

6.4. Существование поисковой траектории

Пусть область поиска Ω представляет собой монотонный многоугольник. Во введённой в разделе 6.1 системе координат правая и левая границы области поиска могут быть заданы как кусочно линейные функции $x_1(y) \leq x_2(y)$, $0 \leq y \leq H$. Обозначим через $D_{\min}$ и $D_{\max}$ минимальную и максимальную ширину области поиска:

$$D_{\min}(\Omega) = \min\{x_2(y) - x_1(y)\}, \quad 0 \leq y \leq H,$$

$$D_{\max}(\Omega) = \max\{x_2(y) - x_1(y)\}, \quad 0 \leq y \leq H.$$

Найдём минимальный угол $\varphi_{\min}$, образуемый отрезками, составляющими границу Ω , и горизонтальной прямой (угол между горизонталью и левой границей отсчитывается по часовой стрелке, угол между горизонталью и правой границей — против часовой стрелки). Если найденный минимум больше $\pi/2$, то положим $\varphi_{\min} = \pi/2$:

$$\varphi_{\min}(\Omega) = \min \left\{ \frac{\pi}{2}, -\operatorname{arctg} \frac{x_{1,i+1} - x_{1,i}}{y_{i+1} - y_i}, \operatorname{arctg} \frac{x_{2,j+1} - x_{2,j}}{y_{j+1} - y_j} \right\},$$

где $(x_{1,i}, y_i)$ — вершины Ω , принадлежащие левой стороне, $1 \leq i \leq N_1 - 1$, а $(x_{2,j}, y_j)$ — вершины Ω , принадлежащие правой стороне, $1 \leq j \leq N_2 - 1$.

Теорема 5. Если соотношения

$$\frac{\cos \varphi}{2} \leq \lambda \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{2 \cos \varphi} \right\} \quad \text{и} \quad l > \frac{\lambda D \sin \varphi}{\sqrt{1 - 4\lambda \cos \varphi + 4\lambda^2}}$$

или

$$0 < \lambda < \frac{\cos \varphi}{2} \quad \text{и} \quad l > \lambda D$$

выполнены при $\varphi = \varphi_{\min}$ и $D = D_{\max}$, то в монотонном многоугольнике с параметрами $D_{\max}$ и $\varphi_{\min}$ существует поисковая траектория конечной длины.

Условия теоремы 5 аналогичны условиям теоремы 4 о патрулировании, но в соотношениях для l неравенства стали строгими.

Величины $D_{\max}(\Omega)$ и $\varphi_{\min}(\Omega)$ зависят от выбора системы координат OXY , которая, в свою очередь, зависит от выбора прямой γ из определения 5. Поисковая траектория существует в многоугольнике Ω , если условия теоремы 5 выполнены хотя бы для одного варианта выбора прямой γ . Для выпуклого многоугольника прямую γ следует выбирать так, чтобы минимизировать максимальную ширину $D_{\max}(\Omega)$, так как $\varphi_{\min}(\Omega) = \pi/2$ при любом выборе прямой γ . Решение задачи оптимального (в смысле требований к l и λ или в смысле минимизации длины траектории) выбора прямой γ в случае произвольного монотонного многоугольника выходит за пределы данной работы.

Доказательство. Выберем $d = d^*$, как указано в теореме 4:

$$d^* = \frac{l^2(2\lambda - \cos \varphi_{\min})}{D_{\max} \lambda \sin^2 \varphi_{\min}}, \quad \text{если} \quad \frac{\cos \varphi_{\min}}{2} \leq \lambda \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{2 \cos \varphi_{\min}} \right\}, \quad (29)$$

и

$$d^* = 0, \quad \text{если} \quad 0 < \lambda < \frac{\cos \varphi}{2}. \quad (30)$$

В предположениях теоремы d^* является внутренней точкой интервала решений (18) согласно замечанию к утверждению 5.

1. Любой монотонный многоугольник Ω можно разбить горизонтальными прямыми на конечное число монотонных многоугольников Ω_i , $1 \leq i \leq M$, для каждого из которых $D_{\max}(\Omega_i) \leq 2d^*$ или $2d^* \leq D_{\min}(\Omega_i)$. Пронумеруем Ω_i так, чтобы верхнее основание Ω_i являлось нижним основанием для Ω_{i+1} .

2. Докажем существование поисковой траектории в области Ω_i , для которой $D_{\min}(\Omega_i) \geq 2d$. Разобьём монотонный многоугольник Ω_i на конечное число областей Ω_{ij} , $1 \leq j \leq N_i$, горизонтальными прямыми $y = y_j$, $1 \leq j \leq N_i - 1$, проходящими через его вершины: $\Omega_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} \Omega_{ij}$. Нумерация прямых введена таким образом, что $y_j < y_{j+1}$ и области Ω_{ij} и $\Omega_{i,j+1}$ пересекаются только по прямой y_j .

Каждая область Ω_{ij} представляет собой трапецию (которая также является монотонным многоугольником), длины оснований которой не меньше $D_{\min}(\Omega_i)$ и не превосходят $D_{\max}(\Omega)$. Боковые стороны трапеций Ω_{ij} образуют с горизонталью углы φ_1 и φ_2 , не меньшие чем $\varphi_{\min}$ (рис. 10).

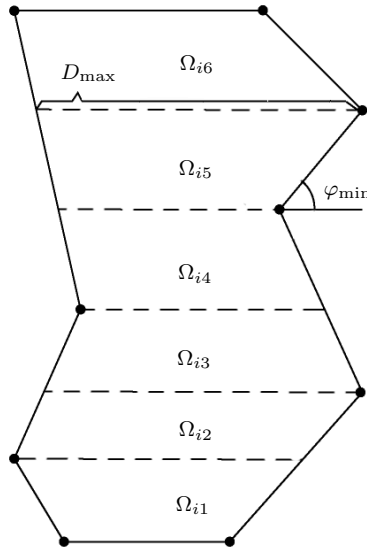
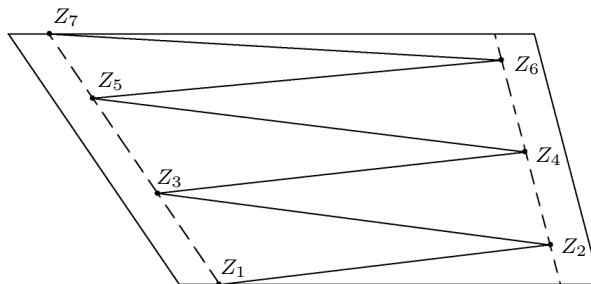


Рис. 10. Разбиение области Ω_i на трапеции

Рис. 11. Поисковая траектория в трапеции Ω_{ij}

По доказанному в предыдущем разделе вытеснение уклоняющегося возможно в любом сечении любой трапеции Ω_{ij} при движении как слева направо ($\psi = \varphi_2$), так и справа налево ($\psi = \varphi_1$). Обозначим соответствующие максимальные вертикальные смещения в сечении шириной $D_{\max}$ через $h_1 = h_{\max}(D_{\max}, d^*, l, \lambda, \varphi_{\min}, \varphi_2)$ и $h_2 = h_{\max}(D_{\max}, d^*, l, \lambda, \varphi_{\min}, \varphi_1)$.

Пусть в момент времени t_1 ищущий объект находится на нижнем основании трапеции Ω_{i1} в точке Z_1 на расстоянии d^* от левой вершины трапеции. Нижнее основание Ω_{i1} является границей области поиска, поэтому уклоняющийся объект может находиться только выше ищущего.

Ширина любого сечения трапеции Ω_{i1} не превосходит $D_{\max}$, поэтому по утверждению 6 к моменту достижения точки Z_2 , находящейся на расстоянии d^* по горизонтали от левой грани трапеции, ищущий объект может подняться по вертикали на расстояние, большее или равное h_1 , и вытеснить уклоняющийся объект из горизонтальной полосы между Z_1 и Z_2 . Аналогичным образом ищущий объект из точки Z_2 может подняться на расстояние, большее или равное h_2 , до точки Z_3 , отстоящей от левой границы на d^* .

Чередую таким образом движения справа налево и слева направо (и поднимаясь каждый раз на расстояние, не меньшее h_1 и h_2 соответственно), ищущий объект за конечное число шагов окажется в точке Z_{2k} (или Z_{2k+1}), находящейся на расстоянии, меньшем h_2 (или h_1), от верхнего основания трапеции Ω_{i1} . На последнем сегменте траектории уменьшим высоту подъема так, чтобы к моменту достижения верхнего основания Ω_{i1} ищущий объект оказался на расстоянии d^* по горизонтали от боковой грани Ω_{i1} (рис. 11). Тем самым уклоняющийся объект оказывается вытесненным из Ω_{i1} за конечное время, а ищущий объект оказался на нижнем основании трапеции Ω_{i2} в точке, соответствующей горизонтальному смещению d^* .

Оценки для значений h_1 и h_2 можно найти аналитически, основываясь на таких параметрах области поиска, как $D_{\max}$, $\varphi_{\min}$ и максимальное значение ψ .

Далее производим вытеснение уклоняющегося объекта из трапеций $\Omega_{i2}, \Omega_{i3}, \dots, \Omega_{i,N_i}$. К моменту достижения верхнего основания трапеции Ω_{i,N_i} ищущий объект будет гарантированно обнаружен. Конечное число областей Ω_{ij} означает ограниченность времени поиска и конечную длину траектории в каждом монотонном многоугольнике Ω_i .

3. В области Ω_i , для которой $D_{\max}(\Omega_i) \leq 2d^*$, в качестве поисковой траектории можно взять непрерывную кривую $(x_1(y) + x_2(y))/2$, $0 \leq y \leq h$. В самом деле, для каждого фиксированного y круг обнаружения будет полностью перекрывать горизонтальное сечение Ω_i . Если верхнее или нижнее основание области Ω_i имеет ширину, равную $2d^*$, то ищущий объект оказывается по горизонтали на расстоянии d^* от боковой границы Ω_i .

4. Поисковая траектория в каждой области Ω_i существует согласно пунктам 2 и 3, причём по построению конечная точка траектории в Ω_i совпадает с начальной точкой траектории в Ω_{i+1} . Движение по объединённой траектории приводит к последовательному вытеснению уклоняющегося объекта из областей $\Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_M$, а значит, из всего многоугольника Ω .

Замечание. Если область поиска представляет собой прямоугольник, то $\varphi_{\min} = \pi/2$ и формулировка теоремы 5 совпадает с достаточными условиями успешного поиска в прямоугольнике, приведёнными в [7].

6.5. Построение поисковой траектории методом эвристического перебора

Достаточно интересным подходом к нахождению близких к максимальным значений вертикального смещения h для каждого сечения Ω_{ij} может оказаться моделирование информационных множеств. В разделах 4 и 5 приведён метод построения компьютерных аппроксимаций информационных множеств, в том числе области неопределённости.

Теорема 1 позволяет считать, что если аппроксимация области неопределённости целиком лежит выше ищущего объекта в момент достижения очередной вершины ломаной траектории, то происходит вытеснение уклоняющегося объекта. Осуществляя эвристический перебор возможных вертикальных смещений, возможно приближённо найти максимальное вертикальное смещение, приводящее к вытеснению уклоняющегося объекта. Такой подход позволяет находить в том числе и значения h , приводящие к пересечению одним звеном траектории оснований одной или нескольких трапеций Ω_{ij} .

Пример построенной таким образом поисковой траектории в монотонном многоугольнике приведён на рис. 12.

Литература

- [1] Аджиев В., Пасько А., Савченко В., Сурин А. Моделирование форм с использованием вещественных функций // Открытые системы. — 1996. — № 5. — С. 14—18.

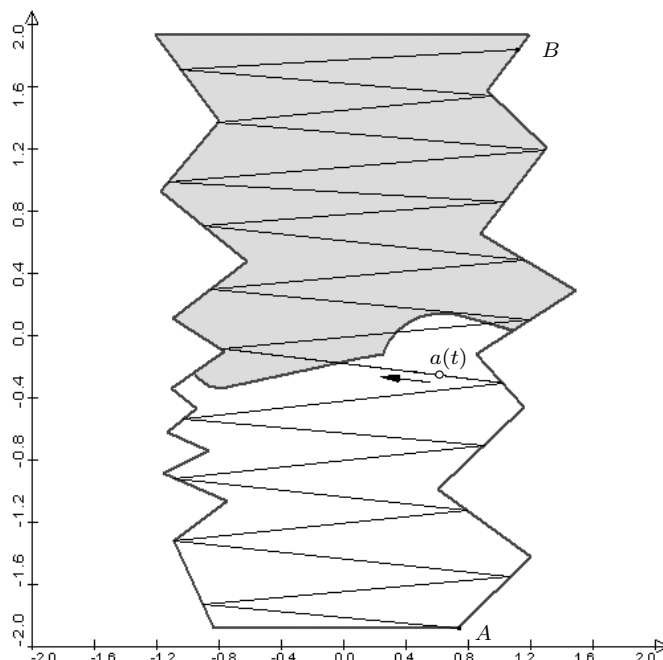


Рис. 12. Поисковая траектория в монотонном многоугольнике

- [2] Березин С. Б. Теоретико-множественные операции в задаче визуализации переменных информационных множеств. — Деп. в ВИНТИ, 2000, № 127-B00.
- [3] Березин С. Б. Информационные множества в задаче динамического поиска объектов с несколькими ищущими // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычислительная математика и кибернетика. — 2001. — № 3. — С. 14—18.
- [4] Березин С. Б. Решение задачи динамического поиска в монотонном многоугольнике. — Деп. в ВИНТИ, 2002, № 1330-B2002.
- [5] Дебелов В. А., Мацокин А. М. Алгоритм реализации теоретико-множественных операций // Труды 8-й международной конференции по компьютерной графике и визуализации Графикон'98 (7—11 сентября 1998, Москва). — ВМК МГУ, 1998. — С. 174—181.
- [6] Дебелов В. А., Мацокин А. М., Упольников С. А. Разбиение плоскости и теоретико-множественные операции // Сибирский журнал вычислительной математики. РАН. Сибирское отделение, Новосибирск. — 1998. — Т. 1, № 3. — С. 227—247.
- [7] Скворцов А. А. Динамический поиск в плоской выпуклой области. — Деп. в ВИНТИ 10 ноября 1995 г., № 2985-B95.
- [8] Чхартишвили А. Г., Шикин Е. В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундам. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 827—862.
- [9] Saeed S. E. O., de Pennington A., Dodsworth J. R. Offsetting in geometric modelling // Comput. Aided Design. — 1988. — Vol. 20, no. 2. — P. 67—74.

- [10] Sugihara K., Iri M. A solid modelling system free from topological inconsistency // J. Inform. Process. — 1989. — Vol. 12, no. 4. — P. 380—393.