

Теоремы исчезновения в аффинной, римановой и лоренцевой геометриях

С. Е. СТЕПАНОВ

Владимирский государственный
педагогический университет
e-mail: stepanov@vtsnet.ru

УДК 514.75

Ключевые слова: теоремы исчезновения, техника Бохнера, формула Вейценбока.

Аннотация

В обзоре освещается один из аспектов применения техники Бохнера — доказательство теорем исчезновения с использованием интегральных формул Вейценбока, которые позволяют распространять применение техники на псевдоримановы многообразия и многообразия с эквивариантной связностью.

Abstract

S. E. Stepanov, Vanishing theorems in affine, Riemannian, and Lorenz geometries, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 35–84.

In this survey, we consider one aspect of the Bochner technique, the proof of vanishing theorems by using the Weitzenböck integral formulas, which allows us to extend the technique to pseudo-Riemannian manifolds and equiaffine connection manifolds.

Содержание

Введение	36
1. Теоремы исчезновения в римановой геометрии	39
§ 1. Анализ проблематики исследований	39
§ 2. Локальная геометрия внешних дифференциальных и симметрических форм	43
§ 3. Теоремы исчезновения в геометрии дифференциальных и симметрических форм	49
§ 4. Приложение к эрмитовой геометрии	55
2. Теоремы исчезновения в лоренцевой геометрии	56
§ 1. Анализ проблематики исследований	56
§ 2. Локальная геометрия ориентированного во времени лоренцева многообразия	58
§ 3. Теоремы исчезновения в лоренцевой геометрии	60
§ 4. Теоремы исчезновения в релятивистской гидродинамике	63

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 35–84.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

3. Теоремы исчезновения в аффинной дифференциальной геометрии	65
§ 1. Анализ проблематики исследований	65
§ 2. Локальная эквиаффинная дифференциальная геометрия векторного поля	67
§ 3. Теоремы исчезновения в многообразии с $SL(n, \mathbb{R})$ -структурой . . .	70
§ 4. Приложение к лоренцевой геометрии	74
Литература	76

Введение

0.1. Настоящее исследование посвящено одному из основных аналитических методов глобальной дифференциальной геометрии. Исторически этот метод являлся общим для доказательства *теорем исчезновения* (vanishing theorems), в которых констатировалось обращение в нуль некоторых топологических или геометрических инвариантов (таких, как числа Бетти или размерность векторного пространства Киллинга) замкнутого риманова многообразия (M, g) при определённых ограничениях на его кривизну.

В основе данного аналитического метода лежит вывод *формул Вейценбока*, в которых сравниваются *грубые лапласианы*, задаваемые на сечениях векторных расслоений над римановым многообразием (M, g) , поскольку их разность выражается через кривизну многообразия (см. об этом [4, с. 77–83] и [54, с. 261–279]).

Впервые такие формулы были применены более пятидесяти лет назад Бохнером (S. Bochner) для изучения гармонических векторных полей и внешних дифференциальных форм (см. [80, 81]).

Идея этого, как было подмечено в [128], восходит к Бернштейну (Bernstein), примерно к 1900 году, когда он нашёл, что для гармонической функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Delta \frac{1}{2} \|\nabla f\|^2 = \|\nabla f\|^2 \geq 0, \quad (0.1)$$

где Δ — лапласиан.

В результате из (0.1) следовало, что энергия $\frac{1}{2} \|\nabla f\|^2$ гармонической функции f является субгармонической функцией.

Рассуждая аналогичным образом, Бохнер нашёл (см. [80]), что для гармонического векторного поля $\xi: M \rightarrow TM$ на n -мерном римановом многообразии (M, g)

$$\Delta \frac{1}{2} \|\xi\|^2 = \|\nabla \xi\|^2 + \text{Ric}(\xi, \xi) \quad (0.2)$$

для лапласиана Ходжа—де Рама. В результате из (0.2) следует, что

$$\Delta \frac{1}{2} \|\xi\|^2 \geq 0,$$

только если всюду на многообразии (M, g) его тензор Риччи удовлетворяет условию $\text{Ric} \geq 0$ (см. [7, с. 68–72, 97–99]).

Из формулы Бохнера (0.2) непосредственно следует, что

$$\Delta = \nabla^* \nabla - \text{Ric} \quad (0.3)$$

для грубого лапласиана $\nabla^* \nabla$ (см. [4, с. 77]) и связности Леви-Чивита ∇ на (M, g) . Впоследствии формула (0.3) получила название *формула Вейценбока* (R. Weitzenböck) (см. [4, с. 77–83] и [54, с. 261–279]). Это название восходит к 1923 году, когда была издана книга [166], в которой присутствовала аналогичная формула для p -форм. В современных обозначениях эта формула имеет вид (см. [4, с. 77] и [7, с. 98])

$$\Delta = \nabla^* \nabla - F_p, \quad (0.4)$$

где Δ — лапласиан Ходжа—де Рама на p -формах, $\nabla^* \nabla$ — грубый лапласиан Бохнера, ∇ — связность Леви-Чивита на (M, g) , продолженная на $\Lambda^p M$ — расслоение p -форм на (M, g) , и наконец, F_p — симметрический эндоморфизм $\Lambda^p M$, линейно выражающийся через тензор кривизны (M, g) .

На основании теоремы Стокса (G. G. Stokes) для замкнутого риманова многообразия (M, g) из (0.2) выводится интегральная формула

$$\int_M \|\nabla \xi\|^2 \eta = - \int_M \text{Ric}(\xi, \xi) \eta \quad (0.5)$$

для элемента объёма $\eta = \sqrt{(\det g)} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ многообразия (M, g) , найденного в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$. Впоследствии формула (0.5) получила название *интегральная формула Вейценбока*.

Если положить, что всюду на (M, g) тензор Риччи удовлетворяет условию $\text{Ric} \geq 0$ и хотя бы в одной точке $\text{Ric} > 0$, то из (0.3) будет следовать, что гармоническое векторное поле удовлетворяет условию $\xi = 0$. В свете теории Ходжа (W. V. D. Hodge) последнее означает равенство нулю первого числа Бетти $b_1(M)$ многообразия (M, g) , что и составляет содержание первой теоремы исчезновения Бохнера.

0.2. Благодаря работам Лихнеровича (A. Lichnerowicz), Номидзу (K. Nomizu), Чена (B.-Y. Chen), Яно (K. Yano) и других известных геометров аналитический метод Бохнера получил дальнейшее развитие и был распространён на комплексные, полные римановы и лоренцевы многообразия.

К настоящему времени известны по крайней мере пять обзоров работ (см. [72, 128, 151, 165, 168]), в которых нашли отражение результаты, полученные с использованием данного метода, получившего название *техника Бохнера*. Технике Бохнера специально посвящены четыре монографии (см. [81, 138, 169, 172]); без её описания или использования не обходится ни одна из известных зарубежных монографий по дифференциальной геометрии, опубликованная в последние два-три десятка лет.

Ещё двадцать лет назад, подчёркивая значение техники Бохнера, известный американский математик в одноимённом обзоре писал: «На сегодня эта техника завоевала статус быть неотъемлемой частью базового образования каждого геометра» (см. [168, с. 929]).

Исследования с использованием техники Бохнера ведутся постоянно. Число статей, где нашла своё применение техника Бохнера, давно исчисляется сотнями. Кроме классических областей её применения — теории дифференциальных форм и геометрии подмногообразий, — в последнее время технику стали активно использовать в глобальной аффинной дифференциальной геометрии, теории дифференциально-геометрических структур и отображений римановых многообразий. Также были намечены пути её использования в релятивистской физике. Важно отметить, что значительная часть этих результатов не вошла в опубликованные монографии и лишь некоторые из результатов были упомянуты в перечисленных выше обзорах.

У нас технику Бохнера целенаправленно стали применять с конца семидесятых годов прошлого века представители одесской школы во главе с профессором Н. С. Синюковым для изучения геодезических отображений. В дальнейшем инициатива перешла к автору настоящего обзора и двум его коллегам. Итоги их исследований содержатся в двух опубликованных за рубежом обзорах, первый из которых [151] посвящён глобальной геометрии римановых структур почти произведения и субмерсиям, а второй [152] описывает новые методы в технике Бохнера и их многочисленные приложения.

Важно подчеркнуть, что в отечественной научной литературе не было ещё обзоров работ, выполненных с использованием техники Бохнера, что позволяет считать необходимой данную публикацию и надеяться, что она будет полезна не только отечественным геометрам, но и физикам, которые проводят свои исследования в общей теории относительности.

0.3. В настоящем обзоре освещается лишь один аспект применения техники Бохнера — доказательство теорем исчезновения с использованием интегральных формул Вейценбока, которые позволяют распространять применение техники на псевдоримановы многообразия и многообразия с эквиаффинной связностью. Одновременно заметим, что в рамках техники существует и другая методика, основанная на применении принципа максимума, на чём подробнее остановимся ниже.

Данное исследование не включает результаты, полученные с помощью техники Бохнера в теории дифференциально-геометрических структур на римановых многообразиях и геометрии отображений римановых многообразий (см. [151]), а также в глобальной геометрии подмногообразий римановых и псевдоримановых многообразий, где число работ уже давно исчисляется десятками. Последнего направления исследований мы частично коснёмся в первых параграфах второго и третьего разделов.

1. Теоремы исчезновения в римановой геометрии

§ 1. Анализ проблематики исследований

1.1. О технике Бохнера как о методе доказательства *теорем исчезновения* во введении к своему обзору Берард (Р. Н. Berard) писал: «С одной стороны, нелегко объяснить технические детали доказательств, в которых используются идеи С. Бохнера. . . С другой стороны, эти идеи довольно просты. На самом деле, основная идея состоит в демонстрации того, что некоторый объект (гармоническая форма в случае чисел Бетти, векторное поле Киллинга. . .) удовлетворяет эллиптическому неравенству при условии, что выполняется некоторое условие на кривизну. Доказательства при этом сводятся к применению принципа максимума или интегрированию по многообразию» (см. [72, с. 371]).

Об использовании техникой Бохнера *принципа максимума* в римановой геометрии можно прочитать в процитированных выше обзорах и монографиях (см. также [2, с. 242–244]). Работа в этом направлении постоянно ведётся за рубежом, есть отдельные результаты и у нас в стране (см., например, [22, 24]). При этом в геометрии существуют модификации принципа максимума (см., например, [46]), которые ещё ждут своих приложений. Всё это может составить материал для отдельного исследования. Нас же будет интересовать метод доказательства теорем с помощью интегральных формул Вейценбока или, как образно выразился Берард, с помощью «интегрирования по многообразию». И начнём мы с двух классических примеров.

Первым будет пример наиболее старой теоремы исчезновения, которую позволит сформулировать формула Гаусса—Бонне (см. [13, с. 325])

$$\int_M K ds = 2\pi\chi(M), \quad (1.1)$$

имеющая место для замкнутой ориентированной поверхности M в $\mathbb{R}^3$, её гауссовой кривизны K , эйлеровой характеристики $\chi(M)$ и элемента площади ds . Из (1.1) выводим справедливость следующей теоремы исчезновения.

Теорема 1.1. Пусть M — замкнутая ориентированная поверхность. Тогда если $K \geq 0$ и $K \neq 0$, то $\chi(M) > 0$ и, следовательно, M гомеоморфна сфере S .

Для доказательства достаточно напомнить, что замкнутая поверхность M гомеоморфна сфере S с p ручками, а её топологический инвариант, эйлерова характеристика $\chi(M)$, равна $2(1 - p)$.

Второй, более современный пример теоремы исчезновения мы сформулируем, воспользовавшись формулой Стокса

$$\int_M \operatorname{div} X \eta = \int_{\partial M} g(X, \mathcal{N}) \eta', \quad (1.2)$$

которая имеет место для гладкого векторного поля X на компактном ориентированном многообразии (M, g) с ориентированным краем ∂M , оснащённым

полем направленных наружу единичных нормальных векторов $\mathcal{N}$, и элементов объёмов η и η' многообразия (M, g) и его края ∂M соответственно.

Предварительно обозначим через Ric , Q и H тензор Риччи многообразия (M, g) , вторую фундаментальную форму и среднюю кривизну его края ∂M соответственно, а через $b_1(M)$, $b_{n-1}(M)$ и $b_1(M, \partial M)$, $b_{n-1}(M, \partial M)$ обозначим соответственно абсолютные и относительные числа Бетти, равные размерностям 1-мерных и $(n-1)$ -мерных абсолютных $H^1(M)$, $H^{n-1}(M)$ и относительных $H^1(M, \partial M)$, $H^{n-1}(M, \partial M)$ групп гомологий компактного многообразия (M, g) с краем ∂M (см., например, [55, с. 51–60]). Теперь можем сформулировать теорему исчезновения (см. [172, глава 7, теоремы 1.9 и 1.10]).

Теорема 1.2 (см. [172]). Пусть (M, g) — компактное ориентированное риманово многообразие с краем ∂M . Тогда

- 1) если $\text{Ric} > 0$ и $Q \leq 0$, то $b_1(M) = b_{n-1}(M, \partial M) = 0$;
- 2) если $\text{Ric} > 0$ и $H \leq 0$, то $b_{n-1}(M) = b_1(M, \partial M) = 0$.

Для доказательства, во-первых, следует воспользоваться интегральными формулами Яно (К. Яно)

$$\begin{aligned} \int_M [\text{Ric}(\xi, \xi) + g(\nabla \xi, \nabla \xi)] \eta &= \int_{\partial M} Q(\xi, \xi) \eta', \\ \int_M [\text{Ric}(\xi, \xi) + g(\nabla \xi, \nabla \xi)] \eta &= (n-1) \int_{\partial M} g(\xi, \xi) H \eta', \end{aligned}$$

которые являются вариантами формулы Стокса (1.2) для гармонического векторного поля ξ на многообразии (M, g) , соответственно касающегося и ортогонального ∂M (см. [172, глава 7, § 1, формула (1.17)]).

Во-вторых, следует привлечь теорему Даффа и Спенсера (G. F. Duff, D. C. Spencer), согласно которой (см. [90]) первое абсолютное число Бетти $b_1(M)$ равно числу линейно независимых гармонических векторных полей многообразия (M, g) , которые касаются его края ∂M , а относительное первое число Бетти $b_1(M, \partial M)$ многообразия M по модулю ∂M равно числу линейно независимых гармонических векторных полей многообразия (M, g) , которые ортогональны его краю ∂M .

Напомним, что векторное поле ξ на замкнутом многообразии (M, g) называется *гармоническим* (см. [63, с. 34–35]), если гармонической будет дуальная ему 1-форма ω , которая по определению удовлетворяет уравнению $\Delta \omega = 0$ для лапласиана Ходжа—де Рама Δ риманова многообразия (M, g) (см., например, [4, с. 54]).

При $\partial M = 0$ любая из двух формул Вейценбока позволяет вывести в качестве следствия теорему исчезновения — родоначальницу техники Бохнера, о которой мы говорили во введении.

Теорема 1.3 (см. [80]). Пусть (M, g) — замкнутое ориентированное риманово многообразие. Тогда если $\text{Ric} \geq 0$, то $b_1(M) \leq \dim M$, и если $\text{Ric} > 0$, то $b_1(M) = 0$.

1.2. Естественным обобщением гармонических 1-форм являются *внешние дифференциальные гармонические p -формы* ω , или, по другой терминологии, ковариантные кососимметрические гармонические тензорные поля (см., например, [2, с. 240–241] и [63, с. 54–55]), определяемые по-прежнему условием $\Delta\omega = 0$. Важность для геометрии и топологии этих форм подчёркивает классическая теорема Ходжа, формулируемая для замкнутого ориентированного многообразия (M, g) , и её обобщение — теорема Даффа и Спенсера, формулируемая для компактного ориентированного многообразия (M, g) с краем ∂M , которые связывают числа Бетти многообразия (M, g) с размерностью векторного пространства гармонических p -форм на нём. При этом теорема 1.2 допускает обобщение (см. [172, глава 8, теоремы 3.4 и 3.5]), в котором определённые условия на кривизну многообразия (M, g) и его вторую фундаментальную форму края ∂M гарантируют обращение в нуль абсолютных $b_p(M)$ и относительных $b_{n-p}(M, \partial M)$ чисел Бетти для всех $0 < p < n$. При этом в доказательстве новой теоремы исчезновения ключевую роль опять играют интегральные формулы Вейценбока для гармонических p -форм на (M, g) , касающиеся или нормальные ∂M .

Исследование гармонических форм, в том числе и с помощью «техники Бохнера», велось постоянно вплоть до настоящего времени (см. [75, 95, 127, 137, 174]).

Техника Бохнера применялась для изучения не только гармонических, но и *векторных полей Киллинга* (см. [64, с. 35–36] и [2, с. 243–244]) и их обобщения — *внешних дифференциальных p -форм Киллинга* ($1 \leq p \leq n-1$), по другой терминологии, *тензоров Киллинга—Яно* (см. [35], [64, с. 55–56], [75, 76, 156, 162]). Векторные поля Киллинга, как известно, порождают локальные однопараметрические группы движений в (M, g) и по этой причине имеют многочисленные приложения (см. [3]). Интерес к киллинговым формам был вызван, в частности, потребностями релятивистской физики (см. [17, с. 339–340], [83, 88, 89]). Так, например, тензоры Киллинга—Яно валентности 2 потребовались для описания и классификации симметрий уравнений Дирака и Клейна—Гордона—Фока (см. [57, 107]).

Поле деятельности для техники Бохнера постоянно расширялось. Так, в качестве обобщения киллингова векторного поля и киллинговой формы были введены в рассмотрение *аффинно киллинговы векторные и тензорные поля*, последние также стали изучаться с помощью техники Бохнера (см. об этом в [144]).

Конформно киллинговы векторные поля, порождающие по определению однопараметрические группы конформных инфинитезимальных преобразований в (M, g) , исследовались с помощью техники Бохнера ещё в 50-х годах прошлого столетия (см. [64, с. 46–48]). Обобщающие их *конформно киллинговы p -формы*, которые были введены в рассмотрение в конце 60-х годов (см. [105, 157]) и уже тогда были подвергнутые изучению с помощью техники Бохнера, вызывают интерес геометров до настоящего времени (см. [37, 101, 109, 154]), тем более что эти формы, как и конформно киллинговы векторные поля (см. [111, 112]), нашли своё применение в релятивистской физике (см. [148, 150]).

Замкнутые конформно киллинговы p -формы получили название *плоских p -форм* (см. [32, 148]), они также нашли приложение в релятивистской физике (см. [148, 150]), и при их изучении также была применена техника Бохнера.

Кроме названных p -форм, с помощью техники Бохнера были исследованы проективно киллинговы (см. [102, 158, 159]), специальные проективно киллинговы (см. [160]) и другие p -формы и тензорные поля (см., например, [87, 145, 170]).

1.3. Параллельно с теорией внешних дифференциальных форм развивалась теория симметрических тензорных полей, или, по другой терминологии, *симметрических дифференциальных форм*. Результаты теории представлены в виде отдельных параграфов или разделов во множестве монографий (см. [4, 17, 54, 58, 63] и др.). Наиболее известными и изученными среди них являются киллинговы и кодаццевы симметрические тензоры.

Киллинговы симметрические p -тензоры φ , или киллинговы симметрические дифференциальные p -формы, определяются как поля ковариантных симметрических тензоров валентности p ($1 \leq p \leq n$), удовлетворяющие уравнению $\delta^* \varphi := \text{sym}(\nabla \varphi) = 0$. Локальная геометрия таких тензоров широко представлена как в зарубежной (см. [4, с. 612–614], [63, с. 157–161], [86, 117, 155, 161]), так и в отечественной литературе (см., например, [56]). Известность им принесли многочисленные приложения в геометрии и физике (см., например, [17, с. 340–342], [62, с. 157–161]). Так, например, координаты, допускающие разделение переменных для уравнения Гамильтона–Якоби в лоренцевом многообразии связаны с собственным вектором симметрического тензора Киллинга второго порядка (см. [167]).

Известны несколько теорем исчезновения для симметрических киллинговых тензоров (см. [30, 32, 41]).

Кодаццевы тензоры валентности p , или кодаццевы симметрические дифференциальные p -формы, по популярности не уступают киллинговым (см. об этом в [4, с. 590–598]). Примером их служит вторая фундаментальная форма гиперповерхности в пространстве постоянной кривизны, которая подчиняется уравнениям Кодацци, что и породило такое название тензоров.

Известно также несколько теорем исчезновения для симметрических кодаццевых тензоров (см. [4, с. 591–592], [30]).

Построена теория (см. [26, 28, 146]) *гармонических симметрических p -форм*, каждая из которых удовлетворяет уравнению $\square \varphi = 0$ для лапласиана $\square = \delta \delta^* - \delta^* \delta$, где δ — формально сопряжённый δ^* оператор. Компоненты гармонических p -форм в локально плоском римановом многообразии (M, g) являются гармоническими функциями, что характеризует и гармонические внешние дифференциальные p -формы. Найдена формула Вейценбока $\nabla^* \nabla \varphi - \square \varphi = B_p(\varphi)$. Показано, что при $p = 1$ ядром оператора $\square$ служат инфинитезимальные гармонические преобразования (см. [28, 153]). Доказана соответствующая теорема исчезновения.

Кроме упомянутых, в научной литературе встречаются ещё конформно симметрические киллинговы и относительно гармонические тензоры (см. [15, с. 339] и [84]), также исследуемые с помощью техники Бохнера.

1.4. Проведённое выше простое перечисление определений и теорем из локальной и глобальной теорий векторных полей, дифференциальных внешних и симметрических p -форм, а также сведений об их применении в физических теориях может вызвать некоторое разочарование не только в технике Бохнера, но и вообще в этом разделе геометрии.

Подобное можно было наблюдать, например, в геометрии почти эрмитовых многообразий до того момента, когда накопление фактов теории закончилось классификацией Грэйя и Хервеллы (A. Gray, L. Hervella) данного вида многообразий (см. [96]). Для этого было найдено неприводимое разложение ковариантной производной $\nabla\Omega$ фундаментальной формы Ω почти эрмитова многообразия, а затем за счёт поочередного обращения в нуль компонент неприводимого разложения было выделено шестнадцать классов почти эрмитовых многообразий, в них вошли известные до этого многообразия, а также был определён целый ряд новых.

Данный приём будет использован для изложения локальной теории внешних дифференциальных форм во втором параграфе этого раздела (см. об этом [37, 150, 154]).

В третьем параграфе будет продемонстрировано несколько универсальных интегральных формул Вейценбока, с помощью которых можно будет доказать как хорошо известные, так и новые теоремы исчезновения для внешних и симметрических форм.

В четвёртом параграфе будут даны возможные приложения к геометрии компактных почти эрмитовых многообразий.

В заключение укажем на то, что в условиях теорем исчезновения, как правило, присутствуют требования знакоопределённости секционной, Риччи или скалярной кривизн риманова многообразия. Ответы на возникающие при этом вопросы существования и геометрии такого рода многообразий можно найти в обзорной статье [44].

§ 2. Локальная геометрия внешних дифференциальных и симметрических форм

2.1. Пусть M будет C^∞ многообразием с линейной связностью ∇ без кручения. Рассмотрим $C^\infty M$ -модуль $\text{Diff}(\Lambda^p M, T^*M \otimes \Lambda^p M)$ линейных дифференциальных операторов первого порядка на пространстве $C^\infty M$ -сечений $C^\infty \Lambda^p M$ расслоения внешних дифференциальных p -форм $\Lambda^p M$.

Линейный дифференциальный оператор первого порядка D на пространстве $C^\infty M$ -сечений $C^\infty \Lambda^p M$ назовём *фундаментальным* (см. [29]), если его главный символ (относительно связности ∇ , продолженной на расслоение $\Lambda^p M$

p -форм на M) является проектором на поточечно $GL(n, \mathbb{R})$ -неприводимое под-расслоение тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^p M$. Этими операторами будут $D_1 = \frac{1}{p+1}d$ и $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}d$ для оператора внешнего дифференцирования $d: C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^{p+1} M$.

При этом для любой внешней дифференциальной p -формы ω справедливо поточечно $GL(m, \mathbb{R})$ -неприводимое разложение $\nabla \omega = D_1 \omega + D_2 \omega$, из которого выводим, что D_1 и D_2 являются обобщёнными $GL(n, \mathbb{R})$ -градиентами (см. [103, 104]). Каждый из них является $\mathbb{R}$ -линейным, но не является линейным относительно умножения на функции из кольца $C^\infty M$. Ядром первого служат замкнутые, а ядром второго — *киллинговы* p -формы (см. [36]), составляющие два векторных пространства $\mathbf{D}^p(M, \mathbb{R})$ и $\mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$, или, иначе, $\mathbb{R}$ -модули, которые, в свою очередь, являются подмодулями $\mathbb{R}$ -модуля внешних форм $\Omega^p(M, \mathbb{R})$ на многообразии M .

В [36] доказано, что $\dim \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R}) \geq \frac{n!}{p!(n-p)!}$ на n -мерном многообразии M с эквивариантной $GL(n, \mathbb{R})$ -структурой (см. также раздел 3).

В локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ на локально плоском многообразии M компоненты $\omega_{i_1 \dots i_p}$ киллинговой p -формы ω имеют вид (см. [10, 29]):

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = K_{ki_1 \dots i_p} x^k + K_{i_1 \dots i_p}$$

для произвольных кососимметричных по всем своим индексам постоянных $K_{ki_1 \dots i_p}$ и $K_{i_1 \dots i_p}$, вследствие чего на локально плоском M

$$\dim \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R}) = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}.$$

Аналогичные выражения компонент киллинговой 2-формы в евклидовом пространстве были получены в [156], а в пространстве Минковского — в [11].

2.2. Пусть $C^\infty \Lambda^p M$ — пространство C^∞ -сечений расслоения $\Lambda^p M$ внешних дифференциальных p -форм над n -мерным ($1 \leq p \leq n-1$) римановым многообразием (M, g) . Задача поиска таких фундаментальных дифференциальных операторов (в смысле определения пункта 2.1), что главный символ (относительно связности Леви-Чивита ∇ , продолженной на расслоение $\Lambda^p M$ p -форм на M) каждого является проектором на поточечно $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимое под-расслоение тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^p M$, равносильна (см. [54, с. 264]) задаче нахождения базиса пространства естественных римановых дифференциальных операторов первого порядка, определённых на пространстве $C^\infty \Lambda^p M$ и принимающих значения в пространстве однородных тензоров.

Такой базис состоит (см. [148, 150], [54, с. 264]) из трёх операторов вида

$$D_1 = \frac{1}{(p+1)}d; \quad D_2 = \frac{1}{(n-p+1)}g \wedge d^*; \quad D_3 = \nabla - \frac{1}{p+1}d - \frac{1}{n-p+1}g \wedge d^*,$$

где $d^*: C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^{p-1} M$ — оператор кодифференцирования, формально сопряжённый оператору d , и

$$(g \wedge d^* \omega)(X_0, X_1, \dots, X_p) = \sum_{a=2}^p (-1)^a g(X_0, X_a) (d^* \omega)(X_1, \dots, X_{a-1}, X_{a+1}, \dots, X_p)$$

для произвольных $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$ и $X_0, X_1, \dots, X_p \in C^\infty TM$. Каждый из операторов является $\mathbb{R}$ -линейным, но не является линейным относительно умножения на функции из кольца $C^\infty M$. Поэтому ядра операторов D_2 и D_3 образуют $\mathbb{R}$ -модули $\mathbf{F}^p(M, \mathbb{R})$ и $\mathbf{T}^p(M, \mathbb{R})$, которые являются подмодулями $\mathbb{R}$ -модуля $\Omega^p(M, \mathbb{R})$. Они состоят из козамкнутых и *конформно киллинговых* p -форм соответственно (см. [105, 157]).

При этом для любой внешней дифференциальной p -формы ω справедливо $O(n, \mathbb{R})$ -неприводимое разложение

$$\nabla \omega = D_1 \omega + D_2 \omega + D_3 \omega, \quad (2.1)$$

из которого выводим, что D_1, D_2 и D_3 являются обобщёнными $O(m, \mathbb{R})$ -градиентами (см. [103, 104]).

Условие $\omega \in \ker D_1 \cap \ker D_3$ характеризует p -форму ω как *плоскую* (см. [32, 148]), а потому для $\mathbb{R}$ -модуля плоских p -форм имеем $\mathbf{P}^p(M, \mathbb{R}) = \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{D}^p(M, \mathbb{R})$. В [148] установлено, что $\mathbf{P}^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathbf{P}^p(M, \mathbb{R})$ является косокоммутативной ассоциативной алгеброй, подалгеброй $\mathbf{D}^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathbf{D}^p(M, \mathbb{R})$.

Условие $\omega \in \ker D_3 \cap \ker D_2$ характеризует p -форму ω как *киллингову* (см. [63, с. 53]), а потому для $\mathbb{R}$ -модуля киллинговых p -форм имеем $\mathbf{K}^p(M, \mathbb{R}) = \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{F}^p(M, \mathbb{R})$.

Условие $\omega \in \ker D_1 \cap \ker D_2$ характеризует p -форму ω как *гармоническую* (см. [21, с. 167] и [64, с. 95–97]). Поэтому $\mathbf{H}^p(M, \mathbb{R}) = \mathbf{D}^p(M, \mathbb{R}) \cap \mathbf{F}^p(M, \mathbb{R})$.

Обозначим через $\mathbf{C}^p(M, \mathbb{R})$ векторное пространство ковариантно постоянных, или, иными словами, параллельных p -форм. Имеет место диаграмма (см. [37, 150, 154]):

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{D}^p(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^p(M, \mathbb{R}) \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\ \Omega^p(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R}) & & \mathbf{H}^p(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{C}^p(M, \mathbb{R}) \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow \\ & & \mathbf{F}^p(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R}) \end{array}$$

Здесь, например, запись $\mathbf{F}^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$ означает, что $\mathbb{R}$ -модуль $\mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$ является подмодулем $\mathbf{F}^p(M, \mathbb{R})$.

Зададим локальную ориентацию многообразия (M, g) и рассмотрим результат действия на выделенные векторные пространства такого оператора Ходжа (см. [18, с. 95] и [21, с. 167]), что $*$: $C^\infty \Lambda^p M \cong C^\infty \Lambda^{n-p} M$ — изоморфизм и

$$*^2 = (-1)^{p(n-p)} \text{id}_{\Lambda^p M}. \quad (2.2)$$

Очевидны изоморфизмы

$$\begin{aligned} *: \Omega^p(M, \mathbb{R}) &\cong \Omega^{n-p}(M, \mathbb{R}), \\ *: \mathbf{C}^p(M, \mathbb{R}) &\cong \mathbf{C}^{n-p}(M, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Поскольку оператор кодифференцирования $d^*: C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^{p-1} M$ определяется равенством (см. [18, с. 96] и [21, с. 167])

$$d^* = (-1)^{np+n+1} * d*, \quad (2.3)$$

то на основании свойства (2.2) оператора Ходжа устанавливается изоморфизм

$$*: \mathbf{F}^p(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{D}^{n-p}(M, \mathbb{R}), \quad (2.4)$$

из которого в качестве следствия выводится известный изоморфизм $\mathbb{R}$ -модулей гармонических форм

$$*: \mathbf{H}^p(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{H}^{n-p}(M, \mathbb{R}). \quad (2.5)$$

Известен (см. [38, 109]) изоморфизм $\mathbb{R}$ -модулей конформно киллинговых форм

$$*: \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{T}^{n-p}(M, \mathbb{R}). \quad (2.6)$$

И наконец, из (2.3) и (2.5) в качестве следствия выводится изоморфизм (см. [150])

$$*: \mathbf{P}^p(M, \mathbb{R}) \cong \mathbf{K}^{n-p}(M, \mathbb{R}) \quad (2.7)$$

$\mathbb{R}$ -модулей плоских и киллинговых форм.

На многообразии постоянной кривизны $C \neq 0$ имеет место (поточечная) сумма (см. [105]) $\mathbf{T}^p(M, \mathbb{R}) = \mathbf{P}^p(M, \mathbb{R}) \oplus \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R})$, которая с учётом изоморфизма (2.7) позволяет заключить, что

$$\dim \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R}) \geq \frac{2n!}{p!(n-p)!}.$$

На локально плоском n -мерном римановом многообразии (M, g) компоненты плоской и конформно киллинговой p -форм ω в локальной ортонормированной системе координат $x^1, \dots, x^n$ многообразия имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \omega_{i_1 \dots i_p} &= x_{[i_1} P_{i_2 \dots i_p]} + P_{i_1 \dots i_p}, \\ \omega_{i_1 \dots i_p} &= A_{kji_1 \dots i_p} x^k x^j + B_{ji_1 \dots i_p} x^j + C_{i_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

для произвольных кососимметричных по всем индексам постоянных $P_{i_2 \dots i_p}$, $P_{i_1 \dots i_p}$ и $C_{i_1 \dots i_p}$ и произвольных кососимметричных по индексам $i_1, \dots, i_p$ постоянных $A_{kji_1 \dots i_p}$ и $B_{ji_1 \dots i_p}$, которые, кроме того, подчиняются некоторым дополнительным условиям симметрии (см. [10, 148, 150]).

Доказано (см. [41]), что на n -мерном римановом многообразии (M, g) постоянной ненулевой кривизны C произвольная конформно киллингова p -форма ω допускает представление $\omega = \omega' - \frac{1}{pC} \omega''$, где ω' и ω'' — киллинговы p - и $(p-1)$ -формы соответственно. В [42] на основании этого равенства установлено, что на (M, g) существует локальная система координат $x^1, \dots, x^n$, в которой

компоненты ω имеют вид

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = e^{(p+1)\psi} (A'_{ki_1 \dots i_p} x^k + B'_{i_1 \dots i_p}) - \frac{1}{C} e^{p\psi} (\psi_{[i_1} A''_{k|i_2 \dots i_p]} x^k + \psi_{[i_1} B''_{i_2 \dots i_p]}) + \frac{1}{p} A_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

для $\psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln |\det g|$, $\psi_i = \partial_i \psi$ и произвольных кососимметричных по всем индексам постоянных $A'_{ki_1 \dots i_p}$, $A''_{i_1 \dots i_p}$, $B'_{i_1 \dots i_p}$ и $B''_{i_2 \dots i_p}$.

2.3. Пусть M будет C^∞ многообразием с линейной связностью ∇ без кручения. Рассмотрим $C^\infty M$ -модуль $\text{Diff}(S^p M, T^* M \otimes S^p M)$ линейных дифференциальных операторов первого порядка на пространстве $C^\infty M$ сечений $C^\infty S^p M$ расслоения симметричных дифференциальных p -форм $S^p M$.

Линейный дифференциальный оператор первого порядка D на пространстве $C^\infty M$ -сечений $C^\infty S^p M$ называется *фундаментальным*, если его главный символ (относительно связности ∇ , продолженной на расслоение $S^p M$) является проектором на поточечно $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимое подрасслоение тензорного расслоения $T^* M \otimes S^p M$. Этими операторами будут (см. [29]) $D_1 = \frac{1}{p+1} \delta^*$ и $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1} \delta^*$.

При этом для любой симметрической p -формы φ справедливо поточечно $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -неприводимое разложение $\nabla \varphi = D_1 \varphi + D_2 \varphi$, из которого выводим, что D_1 и D_2 являются обобщёнными $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ -градиентами (см. [103, 104]). Ядром первого служат киллинговы (см. [36]), а ядром второго — кодаццевы (см. [16, с. 169], [4, с. 589] и [30]) симметрические p -формы, составляющие два подмодуля $\mathbf{W}^p(M, \mathbb{R})$ и $\mathbf{V}^p(M, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ -модуля симметрических дифференциальных p -форм $\mathbf{S}^p(M, \mathbb{R})$ на многообразии M .

Симметрическое умножение превращает $\mathbf{W}^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathbf{W}^p(M, \mathbb{R})$ в подалгебру $\mathbf{S}^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathbf{S}^p(M, \mathbb{R})$ — градуированной коммутативной ассоциативной алгебры симметрических форм на M (см. [155]).

На n -мерном многообразии M с эквипроективной $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -структурой имеем (см. [36, 41]) $\dim \mathbf{W}^p(M, \mathbb{R}) \geq \frac{(n+p-1)!}{p!(n-p)!}$.

В локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ локально аффинного многообразия M компоненты $\varphi_{i_1 \dots i_p}$ симметрической киллинговой p -формы φ имеют вид $\varphi_{i_1 \dots i_p} = \sum_{q=0}^p A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q} x^{j_1} \dots x^{j_q}$, где $A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}$ — произвольные постоянные, которые симметричны по группам индексов $i_1, \dots, i_p$ и $j_1, \dots, j_q$, при этом симметризация их по индексам $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{q-1}$ для $q = 1, \dots, p$ должна давать нуль (см. [117]). Тогда на многообразии с эквипроективной $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -структурой (см. [29])

$$\dim \mathbf{W}^p(M, \mathbb{R}) = \frac{p(p+1)^2(p+2)^2 \dots (n+p-1)^2(n+p)^2}{p!(p+1)!}.$$

На локально аффинном многообразии M в локальной системе координат $x^1, \dots, x^n$ p -форма φ с компонентами $\varphi_{i_1 i_2 \dots i_p} = \frac{\partial^p f}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_p}}$ для произвольной $f \in C^\infty M$ является кодаццевой. Доказано (см. [16, с. 169]), что кодаццева 2-форма φ на многообразии M с эквипроективной $SL(n, \mathbb{R})$ -структурой имеет вид $\varphi = \nabla^2 f + \frac{1}{n-1} f \text{Ric}$ для произвольной $f \in C^\infty M$.

На (псевдо)римановом многообразии (M, g) существует связь между симметрическими киллинговыми 2-формами и внешними дифференциальными киллинговыми и плоскими p -формами, которая используется в физике (см. [17, с. 339–340], [148, 150]). Если для внешней дифференциальной p -формы ω положить

$$\varphi(X, Y) = \sum_{1 \leq i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega(X, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \omega(Y, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})$$

для $X, Y \in T_x M$ и ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$, то в случае киллинговой p -формы ω ассоциированная с ней 2-форма φ будет симметрической киллинговой, а в случае плоской p -формы ω форма $\varphi' = \varphi - \frac{1}{p}(\text{trace}_g \varphi)g$ также будет симметрической киллинговой.

2.4. Аналогом лапласиана Ходжа—де Рама на расслоении симметрических форм $S^p M$ служит лапласиан $\square: C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty S^p M$, определяемый равенством $\square = \delta\delta^* - \delta^*\delta$ (см. [26, 155]). Сравним его с грубым лапласианом $\nabla^* \nabla$.

Легко видеть, что оба оператора совпадают, если (M, g) является локально евклидовым.

Далее (см. [26, 155]), дифференциальный оператор $\square - \nabla^* \nabla$ имеет нулевой порядок и задаётся при помощи симметрического эндоморфизма B_p расслоения $S^p M$, где B_p алгебраически (даже линейно) выражается через тензор кривизны на (M, g) . Это можно выразить, записав формулу Вейценбока $\square = \nabla^* \nabla + B_p$.

Выражение $\square$ для $p \geq 2$ достаточно сложно, но для $p = 1$ оно прозрачно (см. [28]). А именно, $\square = \Delta - 2Q$, где в терминах локальных координат $Q_j^k = g^{ki} R_{ij}$ для локальных компонент R_{ij} тензора Риччи Ric. В таком виде оператор $\square$ использовался Яно (см. [172, с. 40]) при изучении локальных изометрий многообразия (M, g) , сохраняющих его метрику g .

Напомним, что векторное поле ξ порождает (см. [64, с. 39–40], [13, с. 21–22]) в окрестности U каждой точки $x \in M$ 1-параметрическую группу локальных автоморфизмов $f_t: U \rightarrow M$ для $t \in (-\varepsilon; \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. В этом случае можно определить производную Ли $(L_\xi \nabla)t = \nabla'(x) - \nabla(x)$, где $\nabla'(x) = f_t^*(\nabla(f_t(x)))$.

Любой автоморфизм $f: (M, g) \rightarrow (M, g)$ является гармоническим в том и только том случае, если $\text{trace}_g(\nabla'(x) - \nabla(x)) = 0$ для всех $x \in M$. На этом основании $\text{trace}_g(L_\xi \nabla) = \Delta \xi - 2Q\xi$.

Теорема 2.1 ([28, 153]). Дифференциальный оператор Яно $\square = \Delta - 2Q$, действующий на пространстве сечений касательного расслоения многообразия (M, g) , является лапласианом вида $\square = \delta\delta^* - \delta^*\delta$, а его ядро является конечным

векторным пространством локальных гармонических автоморфизмов многообразия (M, g) .

§ 3. Теоремы исчезновения в геометрии дифференциальных и симметрических форм

3.1. Рассмотрим лапласиан Ходжа—де Рама $\Delta = dd^* + d^*d$. Известно (см. [18, с. 96] и [21, с. 167]), что на замкнутом ориентированном римановом многообразии $\ker \Delta = \mathbf{H}^p(M, \mathbb{R})$ и при этом (см. [18, с. 79 и 178]) $\dim \mathbf{H}^p(M, \mathbb{R}) = b_p(M) < \infty$. Справедлива теорема двойственности Пуанкаре (H. Poincare): $b_p(M) = b_{n-p}(M)$ для $1 \leq p \leq n-1$.

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор второго порядка

$$D_3^* D_3: C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty \Lambda^p M$$

для оператора D_3^* , формально сопряжённого с D_3 . Оператор $D_3^* D_3$ является сильно эллиптическим при всех $n \leq 2p$ и лапласианом для $n = 2p$. При этом (см. [53, 149]) на замкнутом ориентированном многообразии $\ker D_3^* D_3 = \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R})$. Вследствие этого, а также изоморфизма (2.5) заключаем, что справедливо утверждение, аналогичное теореме двойственности А. Пуанкаре для чисел Бетти: $t_p = t_{n-p}$ для $t_p = \dim \mathbf{T}^p(M, \mathbb{R})$ на n -мерном замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) . В силу изоморфизма (2.6) выводим также, что $\dim \mathbf{P}^{n-p}(M, \mathbb{R}) = \dim \mathbf{K}^p(M, \mathbb{R}) < \infty$ для всех $1 \leq p \leq n-1$.

3.2. Рассмотрим лапласианы Бохнера $\nabla^* \nabla$ (см. [7, с. 91 и 97]) и Ходжа—де Рама $\Delta = d^*d + dd^* = (d + d^*)(d^* + d)$, которые связаны между собой классической формулой Вейценбока (см. [64, с. 52] и [166, с. 393–397])

$$\Delta \omega = \nabla^* \nabla \omega + F_p(\omega), \quad (3.1)$$

где

$$F_p(\omega)(X_1, \dots, X_p) = \sum_{a=1}^p \text{Ric}(e_j, X_a) \omega(X_1, \dots, X_{a-1}, e_j, X_{a+1}, \dots, X_p) - \\ - \sum_{a < b}^{1 \dots p} R(e_j, e_k, X_a, X_b) \omega(X_1, \dots, X_{a-1}, e_j, X_{a+1}, \dots, X_{b-1}, e_k, X_{b+1}, \dots, X_p)$$

для произвольных $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$, $X_1, \dots, X_p \in C^\infty TM$, ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$, а также тензоров кривизны R и Риччи Ric многообразия (M, g) .

На основании тождества $\int_M g(\nabla \omega, \nabla \omega) \eta = \int_M g(\nabla^* \nabla \omega, \omega) \eta$ на замкнутом ориентированном многообразии (M, g) и формулы Вейценбока (3.1) выводится интегральная формула (см. [64, с. 58])

$$\int_M \left\{ \mathcal{F}_p(\omega, \omega) + \frac{1}{p} \|\nabla \omega\|^2 - \frac{1}{p(p+1)} \|d\omega\|^2 - \|d^* \omega\|^2 \right\} \eta = 0, \quad (3.2)$$

где $\mathcal{F}_p(\omega, \omega) = g(F_p(\omega), \omega)$ — квадратичная форма $\mathcal{F}_p: C^\infty \Lambda^p M \otimes C^\infty \Lambda^p M \rightarrow C^\infty M$, коэффициенты которой являются компонентами тензоров кривизны R и Риччи Ric многообразия (M, g) .

Из формулы (3.2) следует, что условием, препятствующим существованию гармонических форм ω на замкнутом римановом многообразии, служит неравенство $\mathcal{F}_p(\omega, \omega) > 0$.

Известен результат Мейера (D. Meyer), согласно которому (см. [113]) квадратичная форма $\mathcal{F}_p(\omega, \omega)$ положительно определена, если положительно определён симметрический оператор кривизны $\bar{R}: C^\infty \Lambda^2 M \rightarrow C^\infty \Lambda^2 M$, определяемый равенством $\bar{\omega}_{ij} = R_{ijkl} \omega^{kl}$ для локальных контрвариантных компонент ω^{kl} формы $\omega \in C^\infty \Lambda^2 M$ и компонент R_{ijkl} тензора кривизны R . (см. [7, с. 39, 94–97] и [14, с. 333]). В результате будет справедливой следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [168, 169]). Пусть (M, g) — замкнутое ориентированное риманово многообразие размерности n с положительно определённым оператором кривизны, тогда для всех $1 \leq p \leq n-1$ справедливо равенство $b_p(M) = \dim \mathbf{H}(M, \mathbb{R}) = 0$.

Заметим, что согласно [98] компактное четырёхмерное риманово многообразие (M, g) с положительно определённым оператором кривизны диффеоморфно сфере или вещественному проективному пространству. Результаты относительно других размерностей получены в [7, с. 39–52], [44], [8, с. 283–285].

Нетрудно установить (см. [14, с. 333]), что положительная определённость оператора кривизны $\bar{R}$ означает для (M, g) положительную определённость его секционной кривизны. Обратное, вообще говоря, неверно. В [82] доказано обратное утверждение для n -мерного риманова многообразия (M, g) , изометрически вложенного в $\mathbb{R}^{n+2}$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие (см. [82]). Пусть (M, g) — замкнутое ориентированное риманово многообразие положительной секционной кривизны размерности n — изометрически вложено в $\mathbb{R}^{n+2}$, тогда для всех $1 \leq p \leq n-1$ справедливо равенство $b_p(M) = \dim \mathbf{H}^p(M, \mathbb{R}) = 0$.

Можно также сформулировать теорему исчезновения для киллинговых форм (см. [64, с. 59]), аналогичную теореме 3.1, и аналогичное следствие, поскольку для изометрически вложенного в $\mathbb{R}^{n+2}$ многообразия (M, g) отрицательная определённость секционной кривизны влечёт отрицательную определённость оператора кривизны $\bar{R}$ (см. [82]).

Формула (3.2) была получена более пятидесяти лет назад и применяется при исследовании гармонических и киллинговых форм и в наши дни (см., например, [76, 77, 145]).

Так, например, с использованием полученного представления квадратичной формы $F_p(\omega, \omega)$ в виде (см. [64, с. 72])

$$\mathcal{F}_p(\omega, \omega) = \frac{n-2p}{n-2} R_{ij} \omega^{i i_2 \dots i_p} \omega^j_{i_2 \dots i_p} + \frac{p-1}{(n-1)(n-2)} S \omega^{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} - \\ - \frac{p-1}{2} W_{ijkl} \omega^{ij i_3 \dots i_p} \omega^{kl}_{i_3 \dots i_p}$$

для скалярной кривизны S и тензора Вейля W_{ijkl} в современной статье [91] доказываются утверждения, которые мы сформулируем в виде следствий основной теоремы 3.1.

Следствие (см. [91]). Пусть (M, g) — компактное локально неприводимое риманово многообразие неотрицательной кривизны Риччи. Если $n = 4$ и $S - 6W_2 \geq 0$ или $n > 4$ и $S - (n-2)(n-1)W_2 \geq 0$ для оператора W_2 на $\Lambda^2 M$, индуцированного тензором Вейля, то либо числа Бетти $b_p(M)$ равны нулю для $1 \leq p \leq n-1$, либо накрывающее для (M, g) пространство является компактным симметрическим.

Следствие (см. [91]). Пусть (M, g) — компактное локально неприводимое риманово многообразие, сумма двух наименьших собственных значений тензора Ric которого неотрицательная. Если $[\text{Ric} \wedge \text{Id}, W_2] = 0$ и $(n-2)(n-1)W_2 - S \geq 0$, то либо числа Бетти $b_p(M)$ равны нулю для $2 \leq p \leq n-2$, либо накрывающее для (M, g) пространство является симметрическим.

Существуют (см., например, [172]) разные аналоги формулы (3.2) для p -форм на компактном ориентированном многообразии (M, g) с краем ∂M . Например, для произвольной p -формы ω , касающейся края многообразия, соответствующая интегральная формула Вейценбока имеет вид (см. [154])

$$\int_M [\mathcal{U}_p(\omega, \omega) + \mathcal{Z}_p(\omega, \omega) + \mathcal{W}_p(\omega, \omega) - p(p+1)\|D_1\omega\|^2 - \\ - (n-p)(p+1)\|D_2\omega\|^2 + (p+1)\|D_3\omega\|^2] \eta = \int_{\partial M} Q_p(t\omega, t\omega) \eta' \quad (3.3)$$

для квадратичной формы $Q_p: C^\infty \Lambda^p \partial M \otimes C^\infty \Lambda^p \partial M \rightarrow C^\infty M$, коэффициенты которой являются компонентами второй фундаментальной формы Q края ∂M многообразия (M, g) и $F_p = U_p + Z_p + W_p$ — неприводимого относительно действия $O(n, \mathbb{R})$ разложения.

Напомним, что по аналогии с векторным полем p -форму ω называют (см. [172, с. 126]) касательной к краю ∂M , если $\omega(\mathcal{N}, X_2, \dots, X_p) = 0$ для всех $X_2, \dots, X_p \in C^\infty T\partial M$.

Интегральная формула Вейценбока (3.3) в отличие от (3.2) является универсальной для изучения сразу четырёх классов форм: гармонических, конформно киллинговых, киллинговых и плоских форм на компактных ориентированных римановых многообразиях, многообразиях нулевой скалярной кривизны, многообразиях Эйнштейна и конформно плоских многообразиях при одном ограничении: форма должна касаться края многообразия или $\partial M = \emptyset$. Так, например, справедлива следующая теорема исчезновения.

Теорема 3.2 (см. [149]). На n -мерном ($n > 3$) компактном ориентированном конформно плоском римановом многообразии (M, g) с выпуклым краем ∂M не существует касающихся ∂M конформно киллинговых p -форм ($1 \leq p \leq n-1$), если кривизна Риччи многообразия отрицательная.

Для доказательства отмечаем, что для $2p \leq n$

$$\mathcal{U}_p(\omega, \omega) + \mathcal{Z}_p(\omega, \omega) \leq -r_{\max} \|\omega\|^2 < 0, \quad (3.4)$$

где $-r_{\max}$ — наибольшее отрицательное значение кривизны Риччи на (M, g) . Также отмечаем, что при условии выпуклости края многообразия (M, g) справедливо неравенство $Q_p(t_\omega, t_\omega) \geq 0$. Последнее неравенство вместе с неравенством (3.4) и условием $\mathcal{W}_p(\omega, \omega) = 0$ вступают в противоречие с интегральной формулой Вейценбока (3.3), а это, в свою очередь, означает, что $\dim \mathbf{T}(M, \mathbb{R}) = t_p = 0$ для $2p \leq n$. Если же применить свойство $t_p = t_{n-p}$, то приходим к доказываемому результату.

Аналогичным образом с помощью интегральной формулы Вейценбока (3.3) можно доказать теоремы исчезновения для гармонических, киллинговых и плоских p -форм на компактном ориентированном многообразии с краем.

3.3. Пусть (M, g) — замкнутое ориентированное риманово многообразие и $S^p M$ — расслоение симметрических p -форм над многообразием (M, g) . Нетрудно заметить, что $D_1^* D_1 = \frac{1}{(p+1)^2} \delta \delta^*$ и $D_2^* D_2 = \frac{p}{p+1} (\nabla^* \nabla - \frac{1}{p+1} \delta \delta^*)$ для фундаментальных операторов D_1 и D_2 на пространстве $C^\infty S^p M$ сечений расслоения $S^p M$. При этом оператор $D_1^* D_1$ является эллиптическим (см. [58, с. 93]), а потому будет эллиптическим и оператор $D_2^* D_2$. Вследствие этого (см. [18, с. 176–178] и [4, с. 632]) имеем $\dim \mathbf{W}^p(M, \mathbb{R}) = w_p < \infty$ и $\dim \mathbf{V}^p(M, \mathbb{R}) = v_p < \infty$.

Для дифференциальных симметрических форм справедлива следующая аналогичная (3.2) интегральная формула Вейценбока (см. [30, 32]):

$$\int_M \left\{ B_p(\varphi, \varphi) + \frac{1}{p(p+1)} \|\delta^* \varphi\|^2 - \frac{1}{p} \|\nabla \varphi\|^2 - \|\delta \varphi\|^2 \right\} \eta = 0, \quad (3.5)$$

где $B_p(\omega, \omega)$ — квадратичная форма $B_p: C^\infty S^p M \otimes C^\infty S^p M \rightarrow C^\infty M$, коэффициенты которой являются компонентами тензоров кривизны R и Риччи Ric многообразия (M, g) . В [30] доказано, что знак квадратичной формы $B_p(\omega, \omega)$ противоположен знаку симметрического оператора кривизны второго рода $\mathring{R}: C^\infty S^2 M \rightarrow C^\infty S^2 M$, определяемого в локальных координатах равенством $\bar{\varphi}_{ij} = R_{ikjl} \varphi^{kl}$ для $\varphi^{kl} = g^{ki} g^{lj} g \varphi_{ij}$ и $g^{kl} = (g_{kl})^{-1}$ (см. [7] и [54, с. 278]). Справедлива следующая теорема исчезновения.

Теорема 3.3 (см. [30]). Пусть (M, g) — замкнутое ориентированное риманово многообразие размерности n с положительно определённым оператором кривизны второго рода, тогда справедливо равенство $w_p = \dim \mathbf{W}^p(M, \mathbb{R}) = 0$.

Аналогичное утверждение для кодацевых p -форм можно сформулировать только в частных случаях, например для форм вида $\varphi \in \ker D_2 \cap \ker \delta$ или для бесследовых кодацевых p -форм (см. [30]).

Важно отметить, что при $p = 2$ форма

$$B_2(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} K(e_i, e_j) (\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

где $\varphi(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ для символа Кронекера δ_{ij} и ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$ (см. [4, с. 529]). На этом основании можем сформулировать следствие.

Следствие (см. [32]). Пусть φ — симметрическая киллингова 2-форма на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны K , тогда $\nabla \varphi = 0$. Если, кроме того, в некоторой точке $K < 0$, то $\varphi = \lambda g$ для $\lambda = \text{const}$.

В рассматриваемом случае, когда $p = 2$, условие козамкнутости для кодацевой 2-формы равносильно требованию постоянства её следа, а потому справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4 (см. [4, с. 591]). Любая 2-форма Кодацци с постоянным следом на замкнутом ориентированном римановом многообразии (M, g) неотрицательной секционной кривизны K параллельна. Если, кроме того, в некоторой точке $K > 0$, то $\varphi = \lambda g$ для $\lambda = \text{const}$.

Пусть (M, g) — компактное ориентированное риманово многообразие с таким краем ∂M , что в каждой точке $x \in \partial M$ задан единичный ортогональный ∂M и направленный наружу вектор $\mathcal{N}_x$. Если для симметрической 2-формы φ выполняется условие $\varphi(\mathcal{N}, X) = 0$ при всех $X \in T\partial M$, говорят, что φ касается края ∂M многообразия (M, g) . В этом случае φ удовлетворяет интегральной формуле (см. [41])

$$\begin{aligned} \int_M \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i < j} K(e_i, e_j) (\lambda_i - \lambda_j)^2 + \frac{1}{p(p+1)} \|\delta^* \varphi\|^2 - \frac{1}{p} \|\nabla \varphi\|^2 - \|\delta \varphi\|^2 \right\} \eta = \\ = \int_{\partial M} Q_2(t\varphi, t\varphi) \eta', \end{aligned}$$

на основании которой доказывается следующая теорема исчезновения.

Теорема 3.5 (см. [35, 41]). Пусть n -мерное компактное ориентированное риманово многообразие (M, g) с краем ∂M несёт симметрическую киллингову 2-форму φ , касающуюся его края ∂M . Если многообразие (M, g) имеет

- 1) $K \leq 0$ и выпуклый край, то либо локально (M, g) является многообразием риманова произведения, либо $\varphi = \lambda g$ для $\lambda = \text{const}$;

- 2) $K \leq 0$, по меньшей мере в одной точке $K < 0$ и выпуклый край, то $\varphi = \lambda g$ для $\lambda = \text{const}$;
- 3) $K \leq 0$ и строго выпуклый край, то $\varphi = 0$.

Уточним, что под *строго выпуклым краем* принято понимать край ∂M многообразия (M, g) , вторая квадратичная форма которого строго положительная.

Без труда можно сформулировать аналогичную теорему для кодацевых 2-форм с постоянным следом, обобщающую сформулированную выше теорему 3.4.

С учётом установленной выше связи между симметрическими и внешними дифференциальными киллинговыми формами можно сформулировать следствие.

Следствие (см. [32, 41]). Пусть n -мерное компактное ориентированное риманово многообразие (M, g) с краем ∂M несёт касающуюся ∂M внешнюю киллингову p -форму для $1 \leq p \leq n - 1$. Если многообразие (M, g) имеет

- 1) $K \leq 0$ и выпуклый край, то $\|\omega\| = \text{const}$ и либо локально (M, g) является многообразием риманова произведения, либо ω удовлетворяет равенству (*);
- 2) $K \leq 0$, по меньшей мере в одной точке $K < 0$ и выпуклый край, то ω удовлетворяет равенству (*);
- 3) $K \leq 0$ и строго выпуклый край, то $\omega = 0$.

Равенство (*), о котором идёт речь в следствии, имеет вид

$$\sum_{1 \leq i_2 < \dots < i_p \leq n} \omega(X, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \omega(Y, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) = \frac{p!}{n} \|\omega\|^2 g(X, Y) \quad (*)$$

для $X, Y \in T_x M$ и ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$.

Заметим, что аналогичную теорему можно доказать и для плоских p -форм.

3.4. На пространстве $C^\infty S^p M$ был определён (см. [26, 146]) лапласиан $\square$ следующей формулой: $\square = \delta\delta^* - \delta^*\delta$. Формула Вейценбока $\square = \nabla^* \nabla + F_p$ имеет вид

$$\begin{aligned} & (\nabla^* \nabla \varphi)_{i_1 \dots i_p} - (\square(\varphi))_{i_1 \dots i_p} = \\ & = \sum_{a=1}^p R_{i_a}^k \varphi_{i_1 \dots i_{a-1} k i_{a+1} \dots i_p} - g^{kj} g^{lm} \sum_{a < b}^{1 \dots p} R_{i_a j i_b m} \varphi_{i_1 \dots i_{a-1} k i_{a+1} \dots i_{b-1} j i_{b+1} \dots i_p}. \end{aligned}$$

На локально плоском многообразии (M, g) равенство $\square \varphi = 0$ переписывается так: $\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_{i_1 \dots i_p}}{(\partial x^k)^2} = 0$, вследствие чего все компоненты симметрической p -формы — гармонические функции. На основании этого факта и по аналогии с внешними дифференциальными гармоническими формами симметрические формы, принадлежащие ядру лапласиана $\square$, были названы *гармоническими* (см. [146]). Если

векторное пространство симметрических гармонических p -форм обозначить через $\mathbf{U}^p(M, \mathbb{R})$, то можно сформулировать теорему исчезновения, доказываемую на основе формулы Вейценбока.

Теорема 3.6 (см. [26, 146]). Пусть (M, g) — замкнутое ориентированное риманово многообразие размерности n с положительно определённым оператором кривизны второго рода, тогда справедливо равенство $u_p = \dim \mathbf{U}^p(M, \mathbb{R}) = 0$.

Теорема 3.7 (см. [28, 153]). На замкнутом римановом многообразии (M, g) векторное пространство локальных гармонических автоморфизмов имеет конечную размерность, а при $\text{Ric} < 0$ размерность пространства равна нулю.

§ 4. Приложение к эрмитовой геометрии

4.1. Рассмотрим внешние дифференциальные киллинговы и плоские 2-формы максимальных рангов на $2n$ -мерном замкнутом римановом многообразии (M, g) . Наличие на таком многообразии 2-формы ω максимального ранга предполагает его ориентацию.

Напомним, что почти эрмитово многообразие (M, J, g) с киллинговой фундаментальной формой $\Omega = (\sqrt{2n}\|\omega\|)^{-1}\omega$ называется *приближённо келеровым* (см., например, [96]).

Теорема 4.1 (см. [32]). Пусть $2n$ -мерное замкнутое риманово многообразие (M, g) несёт киллингову 2-форму ω максимального ранга. Если выполняется одно из следующих двух условий: либо $K < 0$, либо $K > 0$ и само (M, g) не является многообразием риманова произведения, то (M, g) будет приближённо келеровым многообразием с фундаментальной формой $\Omega = (\sqrt{2n}\|\omega\|)^{-1}\omega$.

Плоская 2-форма ω при тех же условиях на многообразии (M, g) превращает его в почти эрмитово многообразие с фундаментальной формой $\Omega = (\sqrt{2n}\|\omega\|)^{-1}\omega$. Но при этом плоская 2-форма ω , кроме условия замкнутости, обращает в нуль тензор Нейенхейса $N(X, Y) = [wX, wY] + w^2[X, Y] - w[X, wY] + w[wX, Y]$ для $g(wX, Y) = \omega(X, Y)$ и всех $X, Y \in C^\infty TM$ (см. [13, с. 44]). Вследствие этого почти эрмитово многообразие становится келеровым (см. [14, с. 141–142]).

Теорема 4.2 (см. [32]). Пусть $2n$ -мерное замкнутое риманово многообразие (M, g) несёт плоскую 2-форму ω максимального ранга. Если выполняется одно из следующих двух условий: либо $K < 0$, либо $K \leq 0$ и само (M, g) не является многообразием риманова произведения, то (M, g) будет келеровым многообразием с фундаментальной формой $\Omega = (\sqrt{2n}\|\omega\|)^{-1}\omega$.

Если же 2-форма ω является рекуррентной, т. е. $\nabla\omega = \theta \otimes \omega$ для $\theta \in C^\infty T^*M$, то будет справедливой следующая теорема.

Теорема 4.3 (см. [25, 27]). Каждое $2n$ -мерное риманово многообразие (M, g) знакоопределённой секционной кривизны, несущее рекуррентную 2-форму максимального ранга, является келеровым.

Все сформулированные утверждения являются обобщениями ставшего классическим результата П. А. Широкова (см. [59, с. 256—280]), согласно которому риманово многообразие чётной размерности с ковариантно постоянной внешней дифференциальной 2-формой является келеровым.

2. Теоремы исчезновения в лоренцевой геометрии

§ 1. Анализ проблематики исследований

1.1. Достижения в теории причинности, теории сингулярностей, а также в изучении чёрных дыр в общей теории относительности породили в последние десятилетия активный интерес физиков и математиков к глобальной лоренцевой геометрии. В связи с этим их внимание, как правило, обращалось на хорошо известную монографию Дж. Бима и П. Эрлиха [5], цель которой — перекинуть мост между современной дифференциальной геометрией «в целом» и математической физикой общей теории относительности. Отличительной особенностью данной книги и многочисленных статей по указанной тематике являются используемые авторами синтетические методы от «древних» элементарных до современных топологических. Именно поэтому в указанной монографии каждая глава (и даже каждый раздел главы) содержит обстоятельную вводную часть, где авторы вынуждены объяснять необходимость выбора того или иного подхода к изложению рассматриваемых вопросов и подбора доказательств.

Желание получить ответы на возникающие вопросы с помощью некоего универсального метода побудило учёных обратить внимание на успешно применяемый более пятидесяти лет в глобальной римановой геометрии *аналитический метод* — «технику Бохнера». Но уже в начале пришлось столкнуться с препятствием (см. [132]): лапласиан $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$ для функции $f \in C^\infty M$ на лоренцевом многообразии (M, g) не является эллиптическим оператором. В результате лежащий в основе классической «техники Бохнера» принцип максимума применять было нельзя. В подтверждение достаточно напомнить, что «гармонические функции» на компактном лоренцевом многообразии (в отличие от риманова) не являются постоянными, а потому усилия были направлены на выведение интегральных формул для сечений тех или иных векторных расслоений над лоренцевым многообразием, чтобы с их помощью получить результаты, аналогичные римановым. При этом условно можно выделить два направления исследований.

Представители первого направления изучают (см., например, [66—69, 71, 114, 171]) при помощи традиционной техники Бохнера (см. [172]) геометрию замкнутого $(n - 1)$ -мерного пространственноподобного подмногообразия (M', g') лоренцева многообразия (M, g) , метрика которого g' по определению является положительно определённой (см. [5, 126]). Как правило, здесь изучается подмногообразие постоянной или даже нулевой средней кривизны (максимальные подмногообразия), поскольку тема эта для случая риманова многообразия хорошо

разработана. Так, например, в монографии Яно [172] изучению геометрии такого подмногообразия посвящена целая глава. Проводимые исследования важны ещё и потому, что сходные проблемы интересуют физиков, ведущих свои изыскания в общей теории относительности и космологии (см., например, [61, 92, 99, 110]).

В свою очередь, представители второго направления изучают (см., например, [79, 116, 131–133]) векторные поля и инфинитезимальные преобразования замкнутого лоренцева многообразия (M, g) с использованием интегральных формул, полученных более полусотни лет назад С. Бохнером (см. [80]). В этом разделе нас будут интересовать результаты, относящиеся именно ко второму направлению исследований.

1.2. Остановимся на некоторых особенностях описываемого в этом разделе варианта техники Бохнера.

Получение глобальных результатов с условием на замкнутость многообразия и знакоопределённость кривизны Риччи, как это принято в классической технике Бохнера и применялось в цитируемых выше работах, для лоренцевых многообразий осложнено целым рядом обстоятельств. Примером этого может служить известный результат Галовэя [94], согласно которому замкнутое n -мерное ($n \geq 3$) лоренцево многообразие, удовлетворяющее условию $\text{Ric}(X, X) > 0$ для всех единичных времениподобных $X \in C^\infty TM$, не допускает замкнутых пространственноподобных гиперповерхностей. Если при этом учесть, что «те многообразия, которые допускают такую гиперповерхность, имеют большее отношение к физике» (см. [16, с. 207]), то было бы разумнее отказаться от условия замкнутости лоренцева многообразия. Поэтому было принято решение принять за образец ставшую классической в общей теории относительности теорему исчезновения С. Хоккинга (см. [19, с. 164]).

Теорема 1.1. *Следующие требования на пространство-время (M, g) несовместимы:*

- 1) *существует замкнутая пространственноподобная гиперповерхность M ;*
- 2) *$\text{div } \mathcal{N} \geq 0$ для единичного векторного поля $\mathcal{N}$ нормалей M ;*
- 3) *$\text{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ для каждого времениподобного вектора ξ ;*
- 4) *(M, g) полно относительно времениподобных геодезических, направленных в прошлое.*

Чтобы «вписаться» в схему, предписываемую данной теоремой, при исследовании «в целом» объектов на многообразиях с лоренцевой метрикой необходимо было воспользоваться теоремой Стокса (см. [16, с. 136, 170–171]), которая позволяет игнорировать сигнатуру метрики. Кроме того, потребовалось усовершенствовать за счёт использования теории представлений групп полученные интегральные формулы. Результатом этого стали многочисленные утверждения, принадлежащие обоим направлениям исследований и имеющие прикладное значение (см. [19, 31, 39, 40, 43]).

1.3. Настоящий раздел состоит из четырёх параграфов. В первом параграфе проведён анализ проблематики исследований лоренцевой геометрии «в целом».

Во втором параграфе излагаются необходимые сведения из локальной лоренцевой геометрии

В третьем параграфе приводятся аналоги формул Вейценбока на лоренцевых многообразиях и на их основе формулируются теоремы исчезновения для конформно киллинговых векторных полей, вполне омбилических и максимальных пространственноподобных гиперраспределений на лоренцевом многообразии.

В четвёртом параграфе указаны возможные приложения в релятивистских гидродинамике и электродинамике.

§ 2. Локальная геометрия ориентированного во времени лоренцева многообразия

2.1. Рассмотрим n -мерное лоренцево многообразие (M, g) с метрикой g сигнатуры $(- + + \dots +)$ и связностью Леви-Чивита ∇ .

Пусть в некоторой области U многообразия задано непрерывное, нигде не обращающееся в нуль мнимое единичное векторное поле. При $U = M$ говорят, что (M, g) — это *ориентированное во времени лоренцево многообразие* или, по другой терминологии, *n -мерное пространство-время* (см. [5, с. 13]).

Каждое касательное векторное пространство $\mathbf{E} = T_x M$ в области задания U векторного поля представляет собой ортогональную сумму подпространств $\mathbf{V} = \text{span}\{\xi_x\}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{V}^\perp$, состоящего из векторов, ортогональных ξ_x . Если обозначить через $v_x: T_x M \rightarrow \mathbf{V}$ и $h_x: T_x M \rightarrow \mathbf{H}$ операторы ортогонального проектирования, тогда метрика $q = g_x$ пространства $\mathbf{E} = T_x M$ примет вид $q = q^h \oplus q^v$ для $q^h = q(h, h)$ и $q^v = q(v, v)$, при этом q^h будет положительно определённой квадратичной формой на $(n-1)$ -мерном векторном пространстве $\mathbf{H}$.

Ортогональная группа $O(q)$, задаваемая формой q и действующая на векторном пространстве $\mathbf{E}$, распадается в произведение $O(q) = O(q^h) \times O(q^v)$ ортогональных групп, действующих на $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}$ соответственно.

Мнимое единичное векторное поле ξ порождает на лоренцевом многообразии (M, g) такое тензорное поле $A_\xi = -\nabla \xi$ типа $(1, 1)$, что в каждой точке $x \in M$ тензор $A_{\xi||x}$ поля A_ξ принадлежит пространству $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{H}$. Согласно [31, 34] для пространства $\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{H}$ справедливо следующее его $O(q^h) \times O(q^v)$ -неприводимое разложение:

$$\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{H} = \Lambda^2 \mathbf{H} \oplus S_0^2 \mathbf{H} \oplus \mathbf{R} q^h \oplus (\mathbf{V}^* \otimes \mathbf{H}^*).$$

В соответствии с этим тензорное поле A_ξ представимо в виде следующей суммы из четырёх поточечно $O(q^h) \times O(q^v)$ -неприводимых тензорных компонент:

$$g(A_\xi X, Y) = \omega(X, Y) + \sigma(X, Y) + \frac{1}{n-1} \theta g(hX, hY) + g(\xi, X) g(A_\xi \xi, Y), \quad (2.1)$$

где, в частности, $\omega_x \in \Lambda^2 \mathbf{H}$; $\sigma_x \in S_0^2 \mathbf{H}$ и $(n-1)^{-1} \theta_x g_x^h \in \mathbf{R} q^h$ в каждой точке $x \in U$. При этом справедливы равенства

$$\omega(X, Y) = \frac{1}{2}[g(hX, A_\xi hY) - g(A_\xi hX, hY)], \quad (2.2)$$

$$\sigma(X, Y) = -\frac{1}{n-1}\theta g^h(X, Y) - \frac{1}{2}[g(hX, A_\xi hY) + g(A_\xi hX, hY)], \quad (2.3)$$

$$\theta = -\operatorname{trace} A_\xi \quad (2.4)$$

для любых векторных полей $X, Y \in C^\infty TM$.

2.2. С мнимоединичным векторным полем ξ на n -мерном лоренцевом многообразии (M, g) ассоциируется пространственноподобное гиперраспределение $H: x \in U \rightarrow \mathbf{H} \subset T_x M$ для всех точек x области U , где задано векторное поле ξ . Тензор интегрируемости A распределения H (см. [130, с. 148]) определяется следующим равенством (см. [147]):

$$A(X, Y) = \frac{1}{2}v[\nabla_{hX} hY - \nabla_{hY} hX]$$

для всех $X, Y \in C^\infty TM$. Установлено (см. [31, 39]), что $A = -\omega \otimes \xi$ и, следовательно, $\|A\|^2 \leq 0$.

Вторая фундаментальная форма G распределения H (см. [40, с. 148]) определяется следующим равенством (см. [31, 39]):

$$G(X, Y) = \frac{1}{2}v[\nabla_{hX} hY + \nabla_{nY} hX]$$

для всех $X, Y \in C^\infty TM$. При этом $H^h = (n-1)^{-1} \operatorname{trace}_{g^h} G$ называют (см. [130, с. 149]) *вектором средней кривизны распределения H* . Если всюду в области задания H одновременно $A = 0$ и $H^h = 0$, то распределение H становится интегрируемым с $(n-1)$ -мерными *максимальными подмногообразиями* лоренцева многообразия (M, g) . Максимальность (вместо минимальности) связана с тем, что метрика объемлющего пространства является лоренцевой (см., например, [61, 114]). На этом основании, если всюду в области задания H вектор средней кривизны H^h равен 0, распределение H назовём *максимальным распределением*, а не минимальным, как это принято в римановом случае (см. [25, с. 149]).

Распределение H называется *омбилическим* (см. [25, с. 151]), если всюду в области его задания $G = g^h \otimes H$. Интегрируемое омбилическое распределение H задаёт на (M, g) слоение из $(n-1)$ -мерных омбилических интегральных многообразий. Метрика такого многообразия (M, g) описана в литературе (см., например, [62, с. 219]).

Заметим, что бесследовая часть G_0 второй фундаментальной формы G гиперраспределения H определяется равенством

$$G_0 = G - \frac{1}{n-1}g^h \otimes \operatorname{trace}_{g^h} G.$$

Установлено (см. [39, 40]), что $G_0 = -\sigma \otimes \xi$ и, следовательно, $\|G_0\|^2 \leq 0$. Кроме того, как нетрудно проверить, $\theta^2 = -\|\operatorname{trace}_{g^h} G\|^2 \leq 0$.

§ 3. Теоремы исчезновения в лоренцевой геометрии

3.1. Для мнимоединичного векторного поля ξ на n -мерном лоренцевом многообразии (M, g) справедливо уравнение (см. [39, 40])

$$-\operatorname{div}(A_\xi \xi) = \operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 + \frac{1}{n-1}\theta^2 + \xi(\theta), \quad (3.1)$$

известное для случая $n = 4$ как уравнение Ландау—Райчаудхури (см. [45, с. 97]). В свою очередь, для векторного поля $\theta\xi$ будем иметь $\operatorname{div}(\theta\xi) = \xi(\theta) + \theta^2$, тогда

$$\operatorname{div}(A_\xi \xi - \theta\xi) = \operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2. \quad (3.2)$$

Рассмотрим ориентированную область U лоренцева многообразия (M, g) . Обозначим через $\frac{\partial U}{\partial U}$ границу области U . Элемент объёма (M, g) задаётся равенством $\eta = \sqrt{|\det(g)|}$. При этом задание трансверсального $\frac{\partial U}{\partial U}$ поля N направленных наружу векторов определяет не только ориентацию границы $\frac{\partial U}{\partial U}$, но задаёт её элемент объёма η' (см. [36]). При $\Omega = \operatorname{trace}[(A_\xi \xi - \theta\xi) \otimes \eta]$ на основании (3.2) теорема Стокса

$$\int_U d\Omega = \int_{\frac{\partial U}{\partial U}} \Omega$$

принимает следующий вид (см. [31, 39, 40]):

$$\int_U \left[\operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2 \right] \eta = \int_{\frac{\partial U}{\partial U}} \operatorname{trace}[(A_\xi \xi - \theta\xi) \otimes \eta]. \quad (3.3)$$

В случае, если границей $\frac{\partial U}{\partial U}$ служит связное $(n-1)$ -мерное времениподобное подмногообразие (см. [5, с. 55]) с ортогональными в каждой её точке единичными векторами поля N , а мнимоединичное векторное поле ξ касается границы $\frac{\partial U}{\partial U}$ во всех её точках, интегральная формула (3.3) представима в следующем виде (см. [31, 39, 40]):

$$\int_U \left[\operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2 \right] \eta = \int_{\frac{\partial U}{\partial U}} Q'(\xi, \xi) \eta'. \quad (3.4)$$

Здесь Q' — вторая фундаментальная форма границы $\frac{\partial U}{\partial U}$ (см. [5, с. 56]), определяемая из уравнения Гаусса $Q'(X', Y') = g(\nabla_{X'} Y', N)$ для $X', Y' \in C^\infty T \frac{\partial U}{\partial U}$.

Пусть теперь область U лоренцева многообразия (M, g) , границей $\frac{\partial U}{\partial U}$ которой служит связное $(n-1)$ -мерное пространственноподобное подмногообразие (см. [5, с. 55]). Полагаем также, что в области U задано времениподобное единичное векторное поле ξ , ортогональное границе $\frac{\partial U}{\partial U}$ области U во всех её точках. Тогда формулу (3.3) можно записать в следующем виде (см. [31, 39, 40]):

$$\int_U \left[\operatorname{Ric}(\xi, \xi) - \|\omega\|^2 + \|\sigma\|^2 - \frac{n-2}{n-1}\theta^2 \right] \eta = (n-1) \int_{\frac{\partial U}{\partial U}} H' \eta', \quad (3.5)$$

где $H' = (n-1)^{-1} \operatorname{trace}_g Q'$ — средняя кривизна границы $\frac{\partial U}{\partial U}$.

3.2. Векторное поле ζ , заданное на псевдоримановом многообразии (M, g) , называется *конформно киллинговым*, если порождаемая им однопараметрическая группа диффеоморфизмов состоит из локальных конформных преобразований (см. [13, с. 277–281]). Последнее означает, что

$$(L_\zeta g)(X, Y) = g(A_\zeta X, Y) + g(X, A_\zeta Y) = 2\lambda g(X, Y)$$

для производной Ли L_ζ по направлению векторного поля ζ , тензорного поля $A_\zeta = -\nabla\zeta$, $\lambda = -n^{-1} \text{tr} A_\zeta$ и произвольных $X, Y \in C^\infty TM$. Если $\lambda = 0$ всюду в области U , то группа диффеоморфизмов состоит из локальных изометрий, а векторное поле ζ является киллинговым (см. [13, с. 281–284]).

Предположим, что в области U времениподобное конформно киллингово векторное поле ζ не обращается в нуль, и обозначим через ξ его орт. Будем полагать также, что область U имеет времениподобную границу ∂U , которой векторное поле ξ касается во всех её точках. Обратимся тогда к интегральной формуле (3.4), которая в нашем случае позволит сформулировать следующую теорему исчезновения.

Теорема 3.1 (см. [39, 40]). *Не существует n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия (M, g) с времениподобным конформно киллинговым векторным полем ζ , удовлетворяющих следующим условиям:*

- 1) существует в (M, g) такая область U с времениподобной границей ∂U ;
- 2) где векторное поле ζ не обращается в нуль и касается границы во всех её точках;
- 3) $\text{Ric}(\zeta, \zeta) \leq 0$ в области U ;
- 4) вторая фундаментальная форма границы удовлетворяет условию $Q'(\zeta, \zeta) \geq 0$, за исключением хотя бы одной точки $x \in \partial U$, где $Q'(\zeta, \zeta) > 0$.

Если ослабить условия теоремы, потребовав в пункте 3, чтобы вторая фундаментальная форма границы во всех времениподобных направлениях принимала неотрицательные значения, тогда, как это можно установить, векторное поле ζ будет рекуррентным.

Предположим теперь, что область U имеет пространственноподобную границу ∂U , которой времениподобное конформно киллингово векторное поле ζ ортогонально. Так же, как и прежде, обозначим через ξ его орт и воспользуемся интегральной формулой (3.5), которая позволит утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2 (см. [39, 40]). *Не существует n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия (M, g) с времениподобным конформно киллинговым векторным полем ζ , удовлетворяющих следующим условиям:*

- 1) существует в (M, g) область U с пространственноподобной границей ∂U , где векторное поле не обращается в нуль и ортогонально границе во всех её точках;
- 2) $\text{Ric}(\zeta, \zeta) \leq 0$ в области U ;

- 3) средняя кривизна границы неотрицательная, за исключением хотя бы одной точки, где она больше нуля.

Если в теореме условие 2 заменить более слабым условием — средняя кривизна границы неотрицательная, — то векторное поле ζ будет рекуррентным [74].

Времениподобное векторное поле ζ на лоренцевом многообразии (M, g) называется гармоническим (см. [9]), если тензорное поле A_ζ удовлетворяет следующим условиям: $g(A_\zeta X, Y) - g(X, A_\zeta Y) = 0$ и $\operatorname{tr} A_\zeta = 0$ для произвольных векторных полей $X, Y \in C^\infty TM$. Предположим, что в области U времениподобное гармоническое векторное поле ζ не обращается в нуль. Рассуждения, аналогичные проведённым в случае конформно киллингова векторного поля, позволяют утверждать, что справедлива следующая теорема исчезновения.

Теорема 3.3 (см. [39, 40]). Не существует n -мерного ($n \geq 3$) лоренцева многообразия (M, g) с времениподобным гармоническим векторным полем ζ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) в (M, g) существует такая область U с времениподобной границей ∂U , где векторное поле ζ не обращается в нуль и касается границы во всех её точках;
- 2) $\operatorname{Ric}(\zeta, \zeta) \geq 0$ в области U ;
- 3) вторая фундаментальная форма границы $Q'(\zeta, \zeta)$ удовлетворяет условию $Q'(\zeta, \zeta) > 0$, за исключением хотя бы одной точки $x \in \partial U$, где $Q'(\zeta, \zeta) < 0$.

3.3. На основании установленного выше равенства $G_0 = -\sigma \otimes \xi$ интегральной формуле (3.5) придадим следующий вид:

$$\int_U [\operatorname{Ric}(\xi, \xi) + \|A\|^2 - \|g_0\|^2 - (n-1)(n-2)\|H^h\|^2]\eta = (n-1) \int_{\partial U} H' \eta'$$

для пространственноподобного распределения H , заданного в области U с пространственноподобной границей ∂U , которой H касается в каждой её точке. В последнем случае граница ∂U является замкнутым интегральным многообразием распределения H . Предположим, что H вполне омбилическое распределение, тогда справедлива следующая теорема исчезновения.

Теорема 3.4 (см. [31, 39, 40]). Не существует в n -мерном ($n \geq 3$) лоренцевом многообразии такой области с пространственноподобной границей, что

- 1) времениподобная кривизна Риччи в области неположительная;
- 2) граница области имеет неотрицательную среднюю кривизну, за исключением хотя бы одной точки, где эта кривизна больше нуля;
- 3) в области существует омбилическое пространственноподобное распределение, интегральным многообразием которого служит граница области.

Во втором случае рассмотрим интегрируемое максимальное распределение H в области U . Предположим, что одно из интегральных многообразий (M, g) является замкнутым односвязным подмногообразием (M', h') лоренцева многообразия (M, g) . Тогда будет выполняться уравнение (см. [39])

$$\int_{M'} [\text{Ric}(\xi, \xi) - \|G_0\|^2] \eta' = 0,$$

анализ которого позволяет заключить, что справедлива следующая теорема исчезновения.

Теорема 3.5 (см. [39]). *Ни одно слоение из максимальных сечений не имеет замкнутого слоя в области n -мерного ($n \geq 0$) лоренцева многообразия, если во всех её точках времениподобная кривизна Риччи неотрицательная, за исключением хотя бы одной точки, где она принимает положительное значение.*

§ 4. Теоремы исчезновения в релятивистской гидродинамике

4.1. Опишем результаты о динамике релятивистской жидкости в области U четырёхмерного пространства-времени (M, g) , полагая, что заданное в этой области мнимоеединичное векторное поле ξ образовано времениподобными касательными векторами к линиям тока релятивистской жидкости. Кинематика бесконечно малого объёма жидкости описывается следующими величинами (см. [16, с. 219], [15, с. 58]): *тензором завихрённости или вращения* (2.2), *тензором (поперечного) сдвига* (2.3), *расширением жидких мировых линий* (2.4) и полем $\xi' = -A_\xi \xi$ *векторов 4-ускорения*. Напомним, что движение релятивистской жидкости в четырёхмерном пространстве-времени при $\omega = 0$ будет *невращательным*, при $\sigma = 0$ *бессдвиговым*, при $\theta = 0$ *без расширения (несжимаемым)* и, наконец, при $\sigma = \theta = 0$ *жёстким по Борну* (см. [22, с. 106, 153]).

Согласно уравнению Эйнштейна $\text{Ric} - 2^{-1}sg = T$ для скалярной кривизны s лоренцева многообразия (M, g) и тензора энергии импульса материи T найдём $\text{Ric}(\xi, \xi) = \rho - 2^{-1}s$, где $\rho = T(\xi, \xi)$ — плотность массы-энергии жидкости (см. [16, с. 219]). Назовём величину $\rho(U) = \int_U \rho \eta$ *суммарной плотностью массы-энергии релятивистской жидкости* в области U , а величину $s(U) = \int_U s \eta$ в соответствии с общей теорией назовём *полной скалярной кривизной* области U пространства-времени (M, g) .

Тогда для жидкости, текущей через область U и пересекающей ортогонально её пространственноподобную границу ∂U , имеет место следующая интегральная формула (см. [39]):

$$\rho(U) - \frac{1}{2}s(U) = \int_U \left[\|\omega\|^2 - \|\sigma\|^2 + \frac{3}{2}\theta^2 \right] \eta + (n-1) \int_{\partial U} H' \eta', \quad (4.1)$$

которая равносильна формуле (3.5).

Если же предположить, что область U имеет времениподобную границу ∂U , то для жидкости, заполняющей эту область и текущей по её границе ∂U , без труда выводится следующая интегральная формула (см. [39]):

$$\rho(U) - \frac{1}{2}s(U) = \int_U \left[\|\omega\|^2 - \|\sigma\|^2 + \frac{3}{2}\theta^2 \right] \eta + \int_{\partial U} Q'(\xi, \xi) \eta', \quad (4.2)$$

которая равносильна формуле (3.4).

4.2. Задача о жёстком по Борну движении жидкости давно привлекала внимание специалистов (см. об этом [19, с. 153]), но ввиду параболического характера системы дифференциальных уравнений оказалась сложной. С помощью «техники» были найдены условия, препятствующие существованию бессдвигового движения, включающее жёсткое по Борну движение.

Рассмотрим бессдвиговый поток жидкости через область U , линии тока которого ортогонально пересекают её пространственноподобную границу ∂U . В этом случае согласно (4.1) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1 (см. [31, 39, 40]). Следующие требования для четырёхмерного пространства-времени (M, g) несовместимы:

- 1) имеется область U с пространственноподобной границей ∂U неотрицательной средней кривизны;
- 2) существует бессдвиговый поток релятивистской жидкости, заполняющий область U и ортогонально пересекающий её границу;
- 3) удвоенная суммарная плотность массы-энергии релятивистской жидкости в области U больше полной скалярной кривизны этой области.

Требование на знакоопределённость средней кривизны H^h границы ∂U области U можно заменить в утверждении более жёстким требованием быть максимальным подмногообразием (M, g) .

Рассмотрим бессдвиговый поток релятивистской жидкости, который заполняет область U и течёт по её времениподобной границе ∂U . Тогда на основании (4.1) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2 ([31, 39, 40]). Следующие требования для четырёхмерного пространства-времени (M, g) несовместимы:

- 1) существует бессдвиговый поток релятивистской жидкости, заполняющий некоторую область U и текущий по её времениподобной границе ∂U ;
- 2) $N \geq 0$ для векторного поля нормалей N границы ∂U и давления p релятивистской жидкости;
- 3) удвоенная суммарная плотность массы-энергии релятивистской жидкости в области U больше полной скалярной кривизны этой области.

Был также изучен невращательный без расширения поток релятивистской жидкости через область U . Принимая во внимание теорему 3.3, можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 4.3 ([39]). Не существует в четырёхмерном пространстве-времени невращательного без расширения (или сжатия) потока релятивистской жидкости, который бы ортогональным образом пересекал наперёд заданное трёхмерное замкнутое односвязное пространственноподобное сечение, в точках которого времениподобная кривизна Риччи неотрицательная.

4.3. Пусть имеется поток релятивистской жидкости в области U пространства-времени (M, g) , линии тока которого ортогональным образом пересекают замкнутое односвязное омбилическое сечение (M', g') . Полагаем при этом, что релятивистская жидкость заряженная и электромагнитное поле описывается «специальными уравнениями Максвелла» (см. [33, 34]), которые имеют следующий вид:

$$(\nabla_X F)(Y, Z) = \frac{4\pi}{3}[g(X, Z)g(J, Y) - g(X, Y)g(J, Z)]$$

для тензора электромагнитного поля F , 4-вектора тока J и $X, Y \in C^\infty TM$. При этом $F^h = F(h, h)$ будет тензором магнитной напряжённости поля. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4.4 (см. [39]). Пусть в области пространства-времени, где сеченные кривизны по всем пространственноподобным 2-направлениям неположительные, поток заряженной жидкости пересекает ортогонально замкнутое односвязное вполне омбилическое сечение. Если электромагнитное поле жидкости описывается специальными уравнениями Максвелла, то норма тензора магнитной напряжённости поля будет постоянной вдоль данного сечения.

Если положить поток бессдвиговым, то сечение (M', g') с необходимостью станет вполне омбилическим, а потому это требование в условии теоремы можно снять.

3. Теоремы исчезновения в аффинной дифференциальной геометрии

§ 1. Анализ проблематики исследований

1.1. Аффинная дифференциальная геометрия является одним из важных разделов геометрии. Начиная с первых работ Бляшке (W. Blaschke) первой четверти прошлого века, она постоянно привлекала к себе внимание геометров. В 1923 году в Германии, в 1959, 1960 и 1977 годах в Советском Союзе, в 1991 году в Японии и в 1994 году в США были изданы монографии [1], [36], [60], [62], [78] и [124], специально посвящённые аффинной дифференциальной геометрии. Начиная с 1986 года (конференция в Обервольфахе, см. [65]) стали проводиться международные конференции по аффинной дифференциальной геометрии.

Следует констатировать, что если для отечественных геометров аффинная дифференциальная геометрия была традиционным объектом изучения, интерес к которой к концу прошлого века постепенно сошёл на нет, то у зарубежных геометров, наоборот, с конца прошлого века активность исследований в этой области резко возросла.

Толчком для возрождения их интереса послужила лекция [118], прочитанная одним из классиков геометрии Номидзу (K. Nomizu) в Мюнстерском университете в 1982 году с «грандиозным», как об этом пишет Клингенберг

(W. Klingenberg) в [106], названием «Что такое аффинная дифференциальная геометрия?».

В лекции Номидзу выдвинул концепцию, согласно которой под аффинной дифференциальной геометрией следует понимать геометрию n -мерного гладкого многообразия M с такими не обращающейся на M в нуль n -формой η и аффинной связностью ∇ без кручения, что $\nabla\eta = 0$.

За лекцией последовал цикл статей Номидзу (см., например, [119—123]), который завершила его монография [124]. В пропаганде нового направления исследований приняли участие такие известные геометры, как Яу (Ch.-T. Yau), Калаби (E. Calabi), Саймон (U. Simon) и др. Первые итоги проведённых исследований были подведены уже в 1988 году в лекции Саймона [140], а спустя два года в 1990 году это сделал уже сам Номидзу (см. [120]). К настоящему времени число работ «новой волны» по аффинной дифференциальной геометрии исчисляется уже десятками.

Параллельно с локальной аффинной дифференциальной геометрией получила развитие за рубежом и дифференциальная геометрия «в целом» подмногообразий M_n аффинного пространства A_m (см., например, [135, 136, 141, 142, 173]). Здесь, как правило, рассматривались гиперповерхности $M_n \subset A_{n+1}$, которые имеют метрику, например, Бервальда—Бляшке, а потому геометрия их строится по аналогии с геометрией гиперповерхностей евклидова пространства.

Нельзя сказать, что эти события не нашли отклика у нас в стране. В качестве примера приведём статью А. В. Погорелова [20], где он ответил на вопрос из доклада Калаби на первой конференции по аффинной дифференциальной геометрии в Обервольфахе «Что представляет собою полная строго выпуклая аффинно-минимальная гиперповерхность $M_n \subset A_{n+1}$?». Заметим, что минимальные поверхности трёхмерного аффинного пространства были уже изучены (см., например, [60, с. 227—231]). Известен их классический пример — эллиптический параболоид. Интересно, что ответом на вопрос Калаби стала та же поверхность, но уже для случая $n \geq 2$. Другие результаты по геометрии такого рода поверхностей можно найти в обзоре [164].

В данном разделе нами будет проведён обзор результатов по глобальной дифференциальной геометрии многообразия M со структурой Номидзу (η, ∇) . Освещаемые результаты имеют одну отличительную особенность: они получены с помощью аффинного аналога техники Бохнера, использующего интегральные формулы, которые связывают кривизну многообразия с результатами действий дифференциальных операторов. Подобные интегральные формулы были выведены на основании формулы Стокса и не предполагают наличия на многообразии метрики.

В аффинной дифференциальной геометрии этим методом воспользовался впервые в 1952 году Гротемейер (K. Grottemeyer), который прибег к формуле Стокса для векторного поля ξ , заданного в области U поверхности $M_2 \subset A_3$, ограниченной гладкой кривой γ . Выведенные на её основе интегральные формулы потребовались для нахождения признаков двумерных аффинных сфер (см. [97]). В дальнейшем формулу Стокса для векторного поля ξ на компактном

ориентированном многообразии M с краем ∂M , снабжённом аффинной связностью с кручением, использовал Исихара (Sh. Ishihara). На её основе были получены формулы, которые использовались для изучения «в целом» инфинитезимальных аффинных преобразований многообразия и специальных конциркулярных векторных полей (см. [100]). Как в первом, так и во втором случаях это были аффинные аналоги интегральных формул Вейценбока, поскольку их интегранты включали кривизны поверхности и тензор Риччи многообразия соответственно.

История применения аффинного аналога техники Бохнера получила продолжение в работах Саймона [141] и Швенка [136], которые в $(n+1)$ -мерном ($n \geq 2$) аффинном пространстве A_{n+1} изучали глобальную геометрию гиперповерхности M_n с метрикой Бляшке с помощью лапласиана. После этого последовал цикл работ отечественных геометров по аффинному аналогу техники Бохнера (см. [36, 47, 48, 50—52, 163]), которые и будут здесь освещены.

1.2. Настоящий раздел состоит из четырёх параграфов. В первом параграфе проведён анализ проблематики исследований аффинной дифференциальной геометрии «в целом».

Во втором параграфе излагаются необходимые сведения из локальной аффинной дифференциальной геометрии.

В третьем параграфе приводятся аффинные аналоги интегральных формул Вейценбока и доказываются на их основе теоремы исчезновения.

В четвёртом параграфе освещаются приложения полученных результатов в лоренцевой геометрии.

§ 2. Локальная эквиаффинная дифференциальная геометрия векторного поля

2.1. Пусть M будет связным дифференцируемым C^∞ -многообразием размерности n , и пусть $L(M)$ будет его расслоением линейных реперов со структурной группой $GL(n, \mathbb{R})$. Мы определим $SL(n, \mathbb{R})$ -структуру на M как главное $SL(n, \mathbb{R})$ -подрасслоение расслоения $L(M)$. Хорошо известно, что $SL(n, \mathbb{R})$ -структура есть не что иное, как элемент объёма η на M , т. е. n -форма η , всюду отличная от нуля (см. [12, с. 13]).

Известна проблема сопоставления с каждой G -структурой на многообразии M однозначно определённой сводимой к G линейной связности ∇ (см. [85, с. 213]).

Линейная связность ∇ без кручения, сводимая к $SL(n, \mathbb{R})$, называется *эквиаффинной* (см. [17, с. 150]) и может быть охарактеризована условием $\nabla \eta = 0$. В этом случае пара (∇, η) называется *эквиаффинной структурой* на M , а геометрия многообразия M с эквиаффинной структурой (∇, η) называется *аффинной дифференциальной геометрией* (см. [118]).

В каждой точке $x \in M$ тензор кривизны R эквиаффинной связности ∇ допускает $SL(n, \mathbb{R})$ -инвариантное разложение в форме

$$R = \frac{1}{n-1} \text{Ric} \wedge \text{id}_{TM} + W,$$

где Ric — известный тензор Риччи и W — тензор проективной кривизны Вейля связности ∇ (см., например, [163]).

В соответствии с данным разложением выделяются два класса эквиаффинных структур: *Риччи-плоские структуры*, для которых $\text{Ric} \equiv 0$, и *эквипроективные структуры*, для которых $W \equiv 0$ (см. [17, с. 169]). В последнем случае, как известно (см. [23, с. 74]), многообразие M является проективно плоским, т. е. допускает диффеоморфизм на n -мерное аффинное пространство, который геодезические M переводит в соответствующие прямые линии. Такой диффеоморфизм носит название *проективного*, или *геодезического, отображения*. Вследствие группового свойства проективных отображений (см. [23, с. 73]) любые два проективно плоских многообразия допускают проективное отображение друг на друга. Значит, все многообразия с эквипроективными структурами принадлежат одному проективному классу пространств (см. [23, с. 73]).

2.2. Автодиффеоморфизм многообразия M тогда и только тогда является автоморфизмом $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -структуры, когда он сохраняет элемент объёма η . Пусть X будет векторным полем на M . Функция $\text{div } X$, определённая формулой $(\text{div } X)_\eta = L_X \eta$, где L_X — дифференцирование Ли в направлении векторного поля X , называется дивергенцией X относительно n -формы η (см. [13, с. 259]). Очевидно, что X тогда и только тогда является инфинитезимальным автоморфизмом $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -структуры, когда $\text{div } X = 0$. Такое векторное поле X называется *соленоидальным*.

Определим для векторного поля X тензорное поле $A_X = L_X - \nabla_X$ как поле эндоморфизмов касательного расслоения TM (см. [13, с. 221]). Формула $\text{trase } A_X = -\text{div } X$ проверяется непосредственно (см. [1, с. 260]).

В каждой точке $x \in M$ мы имеем $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -инвариантное разложение

$$A_X = \left(-\frac{1}{n} \text{div } X \right) \text{id}_{TM} + \dot{A}_X$$

(см. [163]), в соответствии с которым выделяются два класса векторных полей на M : соленоидальные векторные поля, образующие подалгебру $\mathbb{R}$ -алгебры Ли векторных полей на M (см. [163]), и специальные конциркулярные векторные поля, для каждого из которых согласно определению (см., например, [139, с. 322]) имеем

$$A_X = \left(-\frac{1}{n} \text{div } X \right) \text{id}_{TM}.$$

Непосредственно проверяется, что специальные конциркулярные векторные поля на многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) образуют $\mathbb{R}$ -модуль $\mathcal{S}(M, \mathbb{R})$. При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1 (см. [163]). *Экваффинная структура (η, ∇) на n -мерном многообразии M является эквипроективной тогда и только тогда, когда на M существуют n линейно независимых специальных конциркулярных векторных полей.*

Сформулированное утверждение обобщает факт, хорошо известный для риманова многообразия постоянной секционной кривизны (см. [93]).

В заключение этого пункта мы введём одно полезное для будущего понятие. А именно, назовём главными кривизнами векторного поля X в точке $x \in M$ корни $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ характеристического многочлена

$$P[\lambda(x)] = \det[\lambda \operatorname{id}_{TM} - A_X](x).$$

В случае специального конциркулярного векторного поля X справедливо равенство

$$\lambda_1(x) = \dots = \lambda_n(x) = -\frac{1}{n} \operatorname{trace} A_X,$$

а для соленоидального векторного поля X — равенство

$$\lambda_1(x) + \dots + \lambda_n(x) = 0$$

в каждой точке $x \in M$.

Интегральные кривые векторного поля Y , определяющего в каждой точке $x \in M$ направление кривизны поля X , т. е. $A_X Y_x = \lambda(x) Y_x$, называются *аффинными линиями кривизны поля X* . При этом прямые, определяемые векторным полем X и проходящие через точки развёртки любой его аффинной линии кривизны на касательное пространство, образуют торс (см. [49]).

2.3. Рассмотрим n -мерное C^∞ -многообразие M с эквиаффинной структурой (η, ∇) и произвольную геодезическую $\gamma: J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ на M , отнесённую к аффинному параметру t . В этом случае имеем $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$ для касательного векторного поля $\frac{d\gamma}{dt}$ геодезической γ .

Дифференциальную p -форму ω на M назовём по аналогии с римановым случаем (см. [36]) *киллинговой формой*, если $(p-1)$ -форма $i_{\frac{d\gamma}{dt}} \omega = \operatorname{trace}(\frac{d\gamma}{dt} \otimes \omega)$ является ковариантно постоянной вдоль любой геодезической γ . Это означает, что $d\omega = (p+1)\nabla\omega$, последнее эквивалентно условию $\nabla\omega \in C^\infty \Lambda^{p+1}M$, где $C^\infty \Lambda^{p+1}M$ — пространство сечений расслоения $\Lambda^{p+1}M$ дифференциальных $(p+1)$ -форм над M . Очевидно, что множество киллинговых p -форм образует $\mathbb{R}$ -модуль, обозначаемый $\mathbb{K}^p(M, \mathbb{R})$.

На многообразии M с $\operatorname{SL}(n, \mathbb{R})$ -структурой можно задать аффинный аналог риманова оператора Ходжа — изоморфизм $*$: $C^\infty \Lambda^p TM \rightarrow C^\infty \Lambda^{n-p} M$ векторного расслоения $\Lambda^p TM$ кососимметрических p -тензоров в расслоение $\Lambda^{n-p} M$ внешних дифференциальных $(n-p)$ -форм. Так, в частности, мы имеем $\omega = *(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p) = \operatorname{alt}(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_p)$, т. е. $\omega = i_{\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p} \eta$. Ковариантным образом дифференцируя p -форму ω в направлении произвольного векторного поля, мы получим $\nabla\omega \in C^\infty \Lambda^{n-p+1}M$, если все $\xi_1, \dots, \xi_p$ специальные конциркулярные.

Теорема 2.2 (см. [36]). Пусть M будет n -мерным многообразием с эквиаффинной структурой (η, ∇) и $\xi_1, \dots, \xi_p$ суть p линейно независимых специальных конциркулярных векторных полей на M для $0 < p < n$. Тогда $(n-p)$ -форма ω , дуальная тензорному полю $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_p$ относительно n -формы объёма η , будет киллинговой.

Следовательно, $\dim \mathbb{K}^p(M, \mathbb{R}) \geq \frac{n!}{p!(n-p)!}$ на произвольном n -мерном многообразии M с эквипроективной структурой (η, ∇) .

Как уже говорилось, если M является n -мерным многообразием с плоской аффинной связностью ∇ , то в окрестности произвольной его точки $x \in M$ всегда найдётся локальная система координат $x^1, \dots, x^n$, в которой компоненты $\omega_{i_1 \dots i_p}$ киллинговой p -формы ω имеют вид

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = K_{ki_1 \dots i_p} x^k + K_{i_1 \dots i_p} \quad (2.1)$$

для произвольных кососимметричных по всем своим индексам постоянным $K_{ki_1 \dots i_p}$ и $K_{i_1 \dots i_p}$ (см. [24, 26]).

Пусть $f: M \rightarrow \bar{M}$ — проективный диффеоморфизм n -мерных многообразий с эквипроективными $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ -структурами и $\bar{\omega}$ — киллингова p -форма на многообразии $\bar{M}$. Тогда непосредственно проверяется, что p -форма $\omega = e^{-(p+1)\psi}(f^*\bar{\omega})$ для $\psi = (n+1)^{-1} \ln(\frac{\bar{\eta}}{\eta})$ будет киллинговой. С учётом же (2.1) заключаем, что произвольная киллингова p -форма на многообразии M с эквипроективной $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ -структурой, т. е. на многообразии, допускающем проективное отображение на N -мерное аффинное пространство, имеет компоненты

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = e^{(p+1)\psi}(K_{ki_1 \dots i_p} x^k + K_{i_1 \dots i_p}).$$

Вследствие этого

$$\dim \mathbb{K}^p(M, \mathbb{R}) = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}.$$

Нетрудно проверить, что оператор $*$ устанавливает изоморфизм между пространствами специальных конциркулярных векторных полей и киллинговых $(n-1)$ -форм.

Теорема 2.3 (см. [36]). Для n -мерного многообразия M с эквиаффинной структурой (η, ∇) пространства $\mathbb{S}(M, \mathbb{R})$ и $\mathbb{K}^{n-1}(M, \mathbb{R})$ являются $*$ -изоморфными.

§ 3. Теоремы исчезновения в многообразии с $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ -структурой

3.1. Пусть M будет компактным n -мерным многообразием с краем. Край ∂M представляет собой замкнутое $(n-1)$ -мерное подмногообразие M , касательное пространство $T_x \partial M$ которого является подпространством $T_x M$ в каждой точке $x \in \partial M$.

Зададим векторное поле $\mathcal{N}$ вдоль ∂M как такое сечение касательного расслоения TM , что в каждой точке $x \in \partial M$ вектор $\mathcal{N}_x$ трансверсален $T_x \partial M$.

Задание $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ -структуры на n -мерном многообразии M влечёт задание $\mathrm{SL}(n-1, \mathbb{R})$ -структуры на ∂M . Действительно, пусть η обозначает n -форму объёма многообразия M . Тогда мы можем задать форму объёма η' на ∂M , полагая $\eta'(e_2, \dots, e_n) = \eta(\mathcal{N}_x, e_2, \dots, e_n)$ для таких ориентированных адаптированных реперов $\{\mathcal{N}_x, e_2, \dots, e_n\}$, что $T_x \partial M = \mathrm{span}\{e_2, \dots, e_n\}$ во всех точках $x \in \partial M$.

Пусть ∇ будет эквивариантной связностью на M . Тогда для произвольных векторных полей X' и Y' , касательных к ∂M , их ковариантная производная разлагается в прямую сумму $\nabla_{X'}Y' = \nabla'_{X'}Y' + Q(X', Y')\mathcal{N}$, где отображение $(X', Y') \rightarrow \nabla'_{X'}Y' = \text{Pr}_{T\partial M}\nabla_{X'}Y'$ задаёт линейную связность ∇' без кручения на ∂M (см. [17, с. 139–144], [119]), а отображение $(X', Y') \rightarrow Q(X', Y')\mathcal{N}$ определяет в каждой точке $x \in \partial M$ билинейную симметрическую форму $Q_x: T_x\partial M \times T_x\partial M \rightarrow \mathbb{R}$. В соответствии с общей теорией (см. [17, с. 217], [14, с. 21]) мы назовём Q_x *второй фундаментальной формой* ∂M в точке x .

Заметим, что связность ∇' и форма Q зависят от выбора поля $\mathcal{N}$. Например, заменяя его другим векторным полем $\tilde{\mathcal{N}} = Z + f\mathcal{N}$, оснащающим край многообразия ∂M , для любой отличной от нуля $f \in C^\infty\partial M$ и произвольных $X', Y', Z' \in C^\infty T\partial M$ получим $Q = f\tilde{Q}$ и $\nabla'_{X'}Y' = \tilde{\nabla}'_{X'}Y' + \tilde{Q}(X', Y')\tilde{\mathcal{N}}$. Если, более того, край ∂M является *невырожденным* относительно $\mathcal{N}$, т. е. $\det[Q] \neq 0$, тогда ∂M будет невырожденным и относительно поля $\tilde{\mathcal{N}} = Z + f\mathcal{N}$. Если Q_x тождественно равна нулю в каждой точке $x \in \partial M$, то край является *вполне геодезическим подмногообразием* M (см. [14, с. 57]). Это свойство, как видно из предыдущего, не зависит от выбора поля $\mathcal{N}$. Следующая теорема доказывается на основании теоремы Стокса.

Теорема 3.1 (см. [36]). Пусть M — компактное n -мерное многообразие с краем ∂M и эквивариантной структурой (η, ∇) , тогда имеет место интегральное уравнение

$$\int_M \{\text{Ric}(\xi, \xi) + \text{trace}(A_\xi)^2 - (\text{trace } A_\xi)^2\} \eta = \int_{\partial M} i_{(\text{trace } A_\xi)\xi - A_\xi\xi} \eta \quad (3.1)$$

для $\xi \in C^\infty TM$.

Пусть ξ будет касательным векторным полем для ∂M , тогда из (3.1) можно вывести следующее интегральное уравнение:

$$\int_M \{\text{Ric}(\xi, \xi) + \text{trace}(A_\xi)^2 - (\text{trace } A_\xi)^2\} \eta = \int_{\partial M} Q(\xi, \xi) \eta'. \quad (3.2)$$

В частности, если ξ — специальное конциркулярное векторное поле, определённое на M и касающееся ∂M , мы будем иметь

$$\int_M \left\{ \text{Ric}(\xi, \xi) - \frac{n-1}{n} (\text{div } \xi)^2 \right\} \eta = \int_{\partial M} Q(\xi, \xi) \eta'. \quad (3.3)$$

С другой стороны, если ξ будет специальным конциркулярным векторным полем, заданным на M и трансверсальным ∂M в каждой точке ∂M , тогда из (3.1) можно вывести следующее интегральное уравнение:

$$\int_M \left\{ \text{Ric}(\xi, \xi) - \frac{n-1}{n} (\text{div } \xi)^2 \right\} \eta = -\frac{n-1}{n} \int_{\partial M} f(\text{div } \xi) \eta', \quad (3.4)$$

где $\xi = Z' + f\mathcal{N}$ для некоторых $Z' \in C^\infty T\partial M$ и $f \in C^\infty\partial M$.

3.2. Пусть M будет компактным n -мерным многообразием, ω — $(n-1)$ -формой на M , $\mathcal{N}$ — векторным полем вдоль ∂M , направленным наружу. Для произвольной точки $x \in \partial M$ края полагаем $X_2, \dots, X_n$ линейно независимыми векторами из $T_x M$. Тогда $X_a = e_a + \lambda_a \mathcal{N}_x$ для $a = 2, \dots, n$. В результате будем иметь

$$\omega(X_2, \dots, X_n) = t\omega + \sum_{a=2}^n (-1)^{a+1} \lambda_a (n\omega)(e_2, \dots, \hat{e}_a, \dots, e_n),$$

где через $t\omega = \omega(e_2, \dots, e_n)$ обозначена касательная составляющая формы ω и

$$(n\omega)(e_2, \dots, \hat{e}_a, \dots, e_n) = \omega(\mathcal{N}, e_2, \dots, \hat{e}_a, \dots, e_n) -$$

компоненты её нормальной составляющей. Форму $\omega \in C^\infty \Lambda^{n-1} M$ назовём нормальной (касательной) к границе ∂M , если $t\omega = 0$ (соответственно $n\omega = 0$) в каждой точке ∂M .

Рассмотрим специальное конциркулярное векторное поле $\xi = *\omega$ для киллинговой $(n-1)$ -формы ω , нормальной границе ∂M . В этом случае справедливо интегральное уравнение (3.3), а потому будет справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2 (см. [36]). Пусть M будет компактным n -мерным многообразием ($n \geq 2$) с эквиаффинной структурой (η, ∇) , и пусть ω будет киллинговой $(n-1)$ -формой, определённой на M и нормальной краю ∂M .

1. Если для произвольных $X \in C^\infty TM$ и $X' \in C^\infty T\partial M$ выполняется неравенство $\text{Ric}(X, X) \leq 0$ и $Q(X', X') \leq 0$, тогда $\nabla \omega = 0$.
2. Если для произвольных $X \in C^\infty TM$ и $X' \in C^\infty T\partial M$ мы имеем $\text{Ric}(X, X) \geq 0$ и $Q(X', X') \leq 0$ и хотя бы в одной точке $x \in M$ выполняется неравенство $\text{Ric}(X, X) < 0$, тогда ω должна быть только нуль-формой.

Условие $\text{Ric}(X, X) \leq 0$ в пункте 1 теоремы 3.2 можно заменить более жёстким, потребовав, чтобы структура (η, ∇) была Риччи-плоской. Условие $Q(X', X') \geq 0$ в пунктах 1 и 2 можно снять, потребовав, чтобы край ∂M являлся вполне геодезическим подмногообразием в M или даже $\partial M = \emptyset$.

Прежде чем рассматривать киллингову форму $\omega \in C^\infty \Lambda^{n-1} M$, касающуюся края многообразия, сформулируем следующую лемму.

Лемма (см. [36]). Пусть M будет компактным n -мерным многообразием ($n \geq 2$) с эквиаффинной структурой (η, ∇) , и пусть ξ будет специальным конциркулярным векторным полем, трансверсальным ∂M . Пусть, далее, $\text{div } \xi \leq 0$ во всех точках $x \in \partial M$, где ξ_x направлен наружу, и $\text{div } \xi \geq 0$, если ξ_x направлен вовнутрь.

1. Если для всех $X \in C^\infty TM$ мы имеем $\text{Ric}(X, X) \leq 0$, то $\nabla \xi = 0$.
2. Если для всех $X \in C^\infty TM$ мы имеем $\text{Ric}(X, X) \leq 0$, за исключением хотя бы одной точки $x \in M$, где $\text{Ric}(X, X) < 0$, тогда ξ может быть только нулевым векторным полем.

Пусть $\omega \in C^\infty \Lambda^{n-1} M$ будет формой, касающейся границы ∂M многообразия M , т. е. $\omega = t\omega$ вдоль ∂M . Тогда для векторного поля $\xi = *\omega$ справедливо равенство $\eta(\xi_x, e_2, \dots, e_n) = \omega(e_2, \dots, e_n)$ в каждой точке $x \in M$. Если при этом форма ω не обращается в нуль на ∂M , то во всех точках края векторы ξ будут ему трансверсальны. Принимая во внимание сказанное, из сформулированной выше леммы выводим справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.3 (см. [36]). Пусть M будет компактным n -мерным многообразием ($n \geq 2$) с эквиаффинной структурой (η, ∇) , и пусть ω будет киллинговой $(n-1)$ -формой, определённой на M и касающейся его края ∂M . Пусть, далее, для векторного поля $\xi = *\omega$, трансверсального ∂M , $\operatorname{div} \xi \leq 0$ во всех точках $x \in \partial M$, где ξ_x направлен наружу, и $\operatorname{div} \xi \geq 0$, если ξ_x направлен вовнутрь. Если для всех $X \in C^\infty TM$ мы имеем $\operatorname{Ric}(X, X) \leq 0$, за исключением одной точки $x \in M$, где $\operatorname{Ric}(X, X) < 0$, то ω может быть только нуль-формой.

В заключение мы сформулируем одно теперь уже очевидное следствие.

Следствие. Пусть M будет замкнутым n -мерным многообразием ($n \geq 2$) с эквиаффинной структурой (η, ∇) .

1. Если для всех $X \in C^\infty TM$ мы имеем $\operatorname{Ric}(X, X) \leq 0$ на M , тогда каждая киллингова $(n-1)$ -форма на M является ковариантно постоянной.
2. Если для всех $X \in C^\infty TM$ мы имеем $\operatorname{Ric}(X, X) \leq 0$ на M и $\operatorname{Ric}(X, X) < 0$ хотя бы в одной точке, тогда $\dim \mathbb{K}^{n-1}(M, \mathbb{R}) = 0$.

Для соленоидального векторного поля ξ на компактном многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) в случае его касания края ∂M многообразия M интегральная формула (3.2) запишется в виде

$$\int_M \left\{ \operatorname{Ric}(\xi, \xi) + \sum_{i=1}^n (\lambda)^2 \right\} \eta = \int_{\partial M} Q(\xi, \xi) \eta'. \quad (3.5)$$

Опираясь на анализ формулы (3.5), мы можем сформулировать следующие теоремы.

Теорема 3.4 (см. [36]). Пусть M — компактное многообразие с эквиаффинной структурой (η, ∇) , а ξ — соленоидальное векторное поле, касающееся его края ∂M . Полагаем, что выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) $\operatorname{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ на M , $Q(\xi, \xi) \leq 0$ вдоль ∂M и главные кривизны поля ξ являются вещественными в каждой точке многообразия M ;
- 2) $\operatorname{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$ на M , $Q(\xi, \xi) \geq 0$ вдоль ∂M и главные кривизны поля ξ являются мнимыми в каждой точке многообразия M .

Тогда $\operatorname{Ric}(\xi, \xi) = 0$ на M , $Q(\xi, \xi) = 0$ вдоль ∂M и ξ порождает нильпотентное поле эндоморфизмов A_ξ касательного расслоения TM .

Теорема 3.5 (см. [36]). На компактном многообразии M с эквиаффинной структурой (η, ∇) не существует соленоидального векторного поля ξ , касающегося его края ∂M , для которого выполняется одно из следующих двух условий:

- 1) главные кривизны векторного поля ξ вещественные в каждой точке M , $\text{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ на M , за исключением хотя бы одной точки, где $\text{Ric}(\xi, \xi) > 0$, и при этом $Q(\xi, \xi) \leq 0$ вдоль ∂M ;
- 2) главные кривизны векторного поля ξ мнимые в каждой точке M , $\text{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$ на M , за исключением хотя бы одной точки, где $\text{Ric}(\xi, \xi) < 0$, и при этом $Q(\xi, \xi) \geq 0$ вдоль ∂M .

Условия $Q(\xi, \xi) \leq 0$ and $Q(\xi, \xi) \geq 0$ в обоих утверждениях можно заменить более жёстким требованием к краю ∂M быть вполне геодезическим подмногообразием или, более того, требованием $\partial M = \emptyset$. В свою очередь, условия $\text{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ или $\text{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$ в первом утверждении можно заменить одним более жёстким требованием к структуре (η, ∇) быть Риччи-плоской.

§ 4. Приложение к лоренцевой геометрии

4.1. Рассмотрим псевдориманово n -мерное многообразие M с метрикой g индекса k . Многообразие M имеет эквиаффинную структуру (η, ∇) с $\eta = \sqrt{|\det(g)|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ — формой объёма относительно локальной системы координат $x^1, \dots, x^n$ на M — и связностью Леви-Чивита ∇ , которая, очевидно, является эквиаффинной связностью.

Полагаем, что многообразие M лоренцево ([13, с. 267]), а его метрика g имеет диагональную форму $(- + \dots +)$. Мы будем рассматривать компактное многообразие M' , которое является замыканием открытого n -мерного подмногообразия лоренцева многообразия M . В частности, мы будем полагать, что $M' = M$.

Пусть ξ — времениподобное единичное векторное поле на M' . В этом случае каждое касательное пространство $T_x M'$ есть ортогональная сумма «вертикального пространства» $V = \text{span}\{\xi_x\}$ и «горизонтального пространства» H , состоящего из векторов, ортогональных ξ_x .

Обозначим через $\nu: T_x M \rightarrow V$ и $h: T_x M \rightarrow H$, как и прежде, ортогональные проекторы. Тогда $q = q^h + q^\nu$ для $q = g_x$, $q^h = g_x^h = g_x(h, h)$ и $q^\nu = g_x^\nu = g_x(\nu, \nu)$, где q^h — положительно определённая квадратичная форма на $(n-1)$ -мерном пространстве H .

4.2. Автодиффеоморфизм псевдориманова многообразия M является автоморфизмом $O(n, k)$ -структуры тогда и только тогда, когда он сохраняет метрику g . Имеем

$$(L_\zeta g)(X, Y) = -[g(A_\zeta X, Y) + g(X, A_\zeta Y)]$$

для любых векторных полей X и Y на M . Очевидно, что ζ будет инфинитезимальным автоморфизмом $O(n, k)$ -структуры тогда и только тогда, когда

$$g(A_\zeta X, Y) + g(X, A_\zeta Y) = 0 \quad (4.1)$$

(см. [13, с. 223]). В этом случае ζ называют *киллинговым векторным полем* на M .

Пусть ζ будет времениподобным киллинговым векторным полем, а ξ — его ортом. Тогда $g(A_\xi X, \xi) = 0$, $g(A_\xi hX, hY) + g(hX, A_\xi hY) = 0$, $\text{trace } A_\xi = 0$ для любых $X, Y \in C^\infty TM$. Анализ интегральной формулы (4.1) позволяет заключить, что в этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1 (см. [36]). *Лоренцево n -мерное многообразие M не допускает времениподобного векторного поля Киллинга ξ , если в M существует такое ориентируемое n -мерное подмногообразие M' с пространственноподобным ортогональным ξ краем $\partial M'$, что во всех его точках $\text{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$, за исключением хотя бы одной, где $\text{Ric}(\xi, \xi) < 0$.*

Заметим, что вопрос о том, в какой мере кривизна лоренцева многообразия препятствует заданию на нём векторных полей Киллинга, постоянно привлекает внимание геометров. Так, в работе [70] доказано, что на пространстве-времени неотрицательной времениподобной секционной кривизны времениподобное векторное поле Киллинга ξ параллельно (т. е. $\nabla \xi = 0$), ибо в противном случае пространство-время должно быть одновременно времениподобно и изотропно геодезически неполно. В другой статье [130] доказывается, что времениподобное векторное поле Киллинга ξ на замкнутом многообразии с Риччи-плоской лоренцевой метрикой должно быть параллельным.

Пусть теперь времениподобное векторное поле ξ на лоренцевом многообразии M будет гармоническим (см. [9]). В этом случае для орта ξ поля ξ будут справедливы равенства

$$g(A_\xi X, \xi) = 0, \quad g(A_\xi hX, hY) - g(hX, A_\xi hY) = 0, \quad \text{trace } A_\xi = 0$$

для любых $X, Y \in C^\infty TM$. Анализ интегральной формулы (2.1) позволяет заключить, что в этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2 (см. [36]). *Лоренцево n -мерное многообразие M не допускает гармонического векторного поля ξ , если в M существует такое ориентируемое n -мерное подмногообразие M' с пространственноподобным ортогональным ξ краем $\partial M'$, что во всех его точках $\text{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$, за исключением хотя бы одной, где $\text{Ric}(\xi, \xi) > 0$.*

Заметим, что несмотря на большое количество работ, посвящённых изучению вопроса существования «в целом» гармонических векторных полей на римановом многообразии, практически нет статей, посвящённых этому же вопросу для случая лоренцевых многообразий.

4.3. Рассмотрим топологическое произведение $M = M_1 \times M_2$ одномерного риманова многообразия M_1 с метрическим тензором g_1 и $(n-1)$ -мерного риманова многообразия M_2 с метрическим тензором g_2 . Зададим метрический тензор g многообразия M в форме $g = -g_1 \otimes f g_2$, где $f: M_1 \rightarrow (0, \infty)$ — некоторая положительная функция, такая что $f \in C^\infty M_1$. Такое многообразие называется *искривлённым лоренцевым произведением* (см. [5, с. 22, 57–58]). Метрики подобного вида изучаются в общей теории относительности. Частным

видом их, когда отсутствует условие замкнутости для M_1 , являются метрики Робертсона—Уокера модели «большого взрыва» и статической модели Вселенной Эйнштейна (см. [5, с. 117—122]). Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3 (см. [36]). *На топологическом произведении $M = M_1 \times M_2$ одномерного и $(n - 1)$ -мерного замкнутых многообразий не существует метрики искривлённого лоренцева произведения, такой что во всех времениподобных направлениях кривизна Риччи многообразия M будет неположительной и хотя бы в одной его точке — строго отрицательной.*

Литература

- [1] Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. — Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1977.
- [2] Алексеевский В. Д., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 28. — М.: ВИНТИ, 1988. — С. 5—289.
- [3] Аминова А. В. Группы преобразований римановых многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 22. — М.: ВИНТИ, 1990. — С. 97—165.
- [4] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. — М.: Наука, 1990.
- [5] Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. — М.: Мир, 1985.
- [6] Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. — М.: Наука, 1982.
- [7] Громов М. Знак и геометрический смысл кривизны. — Ижевск: Удмуртский ун-т, 1999.
- [8] Громол Д., Клинберг В., Мейр В. Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
- [9] Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. — М.: Наука, 1972.
- [10] Исаев В. М., Степанов С. Е. Примеры киллинговой и конформно киллинговой форм // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2001. — Вып. 32. — С. 52—57.
- [11] Клишевич В. В., Тюменцев В. А. Векторное поле К. Яно и тензорное поле Яно—Киллинга в плоском пространстве и пространстве де Ситтера // Вестн. Омского ун-та. — 2000. — № 3. — С. 20—21.
- [12] Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.
- [13] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
- [14] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1981.
- [15] Крамер Д. и др. Точные решения уравнений Эйнштейна. — М.: Энергоиздат, 1982.
- [16] Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация. Т. 2. — М.: Мир, 1977.
- [17] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.
- [18] Пале Р. Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.

- [19] Пенроуз Р. Структура пространства-времени. — М.: Мир, 1972.
- [20] Погорелов А. В. Полные аффинно-минимальные гиперповерхности // ДАН СССР. — 1988. — Т. 301, № 6. — С. 1314—1316.
- [21] Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М.: ИЛ, 1956.
- [22] Родионов Е. Д., Славский В. В. Конформные и одноранговые деформации римановых метрик с площадками нулевой кривизны на компактном многообразии // Труды конференции «Геометрия и приложения», 13—16 марта 2000 г., Новосибирск. — Новосибирск: Изд-во Новосибирского гос. ун-та, 2000. — С. 171—182.
- [23] Синг Дж. Общая теория относительности. — М.: ИЛ, 1963.
- [24] Синюкова Е. Н. О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств // Мат. заметки. — 1981. — Т. 30, вып. 6. — С. 889—894.
- [25] Смольникова М. В. Об одном свойстве римановых многообразий знакоопределённой секционной кривизны // Новейшие проблемы теории поля. 1999—2000. — Казань: Изд-во КГУ, 2000. — С. 365—367.
- [26] Смольникова М. В. О глобальной геометрии гармонических симметрических билинейных дифференциальных форм // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2002. — Т. 236. — С. 328—331.
- [27] Смольникова М. В. Обобщённо рекуррентное симметрическое тензорное поле // Изв. высш. учебн. завед. Сер. Математика. — 2002. — № 5. — С. 48—51.
- [28] Смольникова М. В., Степанов С. Е. Об одном дифференциальном операторе К. Яно // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 1—6 июля 2002 г., Суздаль. — Владимир: Изд-во ВлГУ, 2002. — С. 129—131.
- [29] Смольникова М. В., Степанов С. Е. Фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка на внешних и симметрических формах // Изв. высш. учебн. завед. Сер. Математика. — 2002. — № 11. — С. 55—60.
- [30] Степанов С. Е. Поля симметрических тензоров на компактном римановом многообразии // Мат. заметки. — 1992. — Т. 52, № 4. — С. 85—88.
- [31] Степанов С. Е. Техника Бохнера и космологические модели // Изв. высш. учебн. завед. Сер. Физика. — 1993. — № 6. — С. 82—86.
- [32] Степанов С. Е. О применении одной теоремы П. А. Широкова в технике Бохнера // Изв. высш. учебн. завед. Сер. Математика. — 1996. — № 9. — С. 53—59.
- [33] Степанов С. Е. Об одном применении теории представлений групп в релятивистской электродинамике // Изв. высш. учебн. завед. Сер. Физика. — 1996. — № 5. — С. 90—93.
- [34] Степанов С. Е. О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла // Теор. и матем. физ. — 1997. — Т. 111, № 1. — С. 32—43.
- [35] Степанов С. Е. Формы Киллинга на компактном многообразии с краем // Тезисы докладов Международного геометрического семинара им. Н. И. Лобачевского «Современная геометрия и теория физических полей», 4—8 февраля 1997 г., Казань. — Казань: Изд-во Казанского мат. об-ва, 1997. — С. 114.
- [36] Степанов С. Е. Техника Бохнера для m -мерных компактных многообразий с $SL(m, \mathbb{R})$ -структурой // Алгебра и анализ. — 1998. — Т. 10, № 4. — С. 703—714.

- [37] Степанов С. Е. Векторное пространство конформно киллинговых форм на римановом многообразии // Геометрия и топология. Зап. научн. семин. ПОМИ РАН. — 1999. — Т. 261. — С. 240—265.
- [38] Степанов С. Е. Об изоморфизме пространств конформно киллинговых форм // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 2000. — Вып. 31. — С. 81—84.
- [39] Степанов С. Е. Об одном аналитическом методе общей теории относительности // Теор. и матем. физ. — 2000. — Т. 122, № 3. — С. 482—496.
- [40] Степанов С. Е. Техника Бохнера для физиков. Векторные поля // Лекционные заметки по теоретической и математической физике. Т. 2, часть 2. — Казань: Изд-во КГУ, 2000. — С. 245—277.
- [41] Степанов С. Е. Об одном применении теоремы Стокса в глобальной римановой геометрии // Фундам. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 1. — С. 245—262.
- [42] Степанов С. Е. О тензоре Киллинга—Яно // Теор. и матем. физ. — Т. 134, № 3. — С. 380—385.
- [43] Степанов С. Е., Цыганок И. И. Векторное поле на лоренцевом многообразии // Изв. высш. учебн. завед. Сер. Математика. — 1994. — № 3. — С. 81—83.
- [44] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Риманова геометрия // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Т. 76. — М.: ВИНТИ, 2002. — С. 5—262.
- [45] Хоккинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.
- [46] Хохлов А. Ю. О принципе максимума в смысле L_p // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348, № 4. — С. 452—454.
- [47] Цыганок И. И. Торсообразующее векторное поле и группа аффинных гомотетий // Ткани и квазигруппы. — Калинин: Изд-во Калининского гос. ун-та, 1988. — С. 114—119.
- [48] Цыганок И. И. Аффинный аналог метода Яно—Бохнера // Тезисы докладов Республиканской конференции, 21—22 сентября 1990 г., Тарту. — Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1990. — С. 76—78.
- [49] Цыганок И. И. Аффинная геометрия векторных полей. — Автореферат дисс... канд. физ.-мат. наук. — М.: Изд-во МГПИ, 1990.
- [50] Цыганок И. И. Соленоидальные векторные поля на компактном многообразии // Тезисы докладов VI Международной конференции женщин-математиков, 25—30 мая 1998 г., Чебоксары. — Чебоксары: Изд-во Чебоксарского гос. ун-та, 1998. — С. 68.
- [51] Цыганок И. И., Степанов С. Е. Техника Бохнера в аффинной дифференциальной геометрии // Алгебраические методы в геометрии. — М.: Изд-во Российского ун-та дружбы народов, 1992. — С. 50—55.
- [52] Цыганок И. И., Степанов С. Е. Оператор Ходжа на многообразии с эквиаффинной структурой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. — 1996. — Вып. 27. — С. 114—117.
- [53] Цыганок И. И., Степанов С. Е. Об одном естественном дифференциальном операторе второго порядка на внешних дифференциальных формах // Труды российской ассоциации «Женщины-математики». — 2001. — Т. 9, вып. 1. — С. 68—71.

- [54] Четырёхмерная риманова геометрия. Семинар Артура Бессе 1978/79. — М.: Мир, 1985.
- [55] Шапиро И. С., Ольшанецкий М. А. Лекции по топологии для физиков. — Ижевск: Удмуртский ун-т, 1999.
- [56] Шапиро Я. Л. Об одном классе римановых пространств // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. XII. — М.: МГУ, 1963. — С. 203—212.
- [57] Шаповалов В. И. Симметрия уравнений Дирака—Фока // Изв. высш. учебн. завед. Сер. Физика. — 1975. — № 6. — С. 57—63.
- [58] Шарафутдинов В. А. Интегральная геометрия тензорных полей. — Новосибирск: ВО Наука, 1993.
- [59] Широков П. А. Избранные работы по геометрии. — Казань: Изд-во КГУ, 1996. — С. 265—280.
- [60] Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1959.
- [61] Шоке-Брюа И. Математические вопросы общей теории относительности // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, вып. 6. — С. 3—39.
- [62] Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1960.
- [63] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ИЛ, 1948.
- [64] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. — М.: ИЛ, 1957.
- [65] Affine Differentialgeometrie. No. 48. — Oberwolfach: Tagungsber. Math. Forschungsinst., 1986. — S. 1—24.
- [66] Akutagawa K. On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space // Math. Z. — 1987. — Vol. 196. — P. 13—19.
- [67] Aledo J. A., Alias L. J. Curvature properties of compact spacelike hypersurfaces in de Sitter space // Differential Geom. Appl. — 2001. — Vol. 14, no. 2. — P. 137—149.
- [68] Alias L. J., Pastor J. A. Spacelike hypersurfaces with constant scalar curvature in the Loretz—Minkowski space // Annals of Global Analysis and Geometry. — 2000. — Vol. 18. — P. 75—83.
- [69] Bahn H., Hong S. Geometric inequalities for spacelike hypersurfaces in the Minkowski spacetime // Geometry and Physics. — 2001. — Vol. 37. — P. 94—99.
- [70] Beem J. K., Erlich P. E., Markvorsen S. Time-like isometries of space-times with nonnegative sectional curvature // Top. Diff. Geom.: Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Debrecen, Aug. 26—Sept. 1, 1984. Vol. 1. — Amsterdam, 1988. — P. 153—165.
- [71] Bektash M., Ergut M. Compact spacetime hypersurfaces in the de Sitter space // Proc. Inst. Math. and Mech. of Azerbaijan AS. — 1999. — No. 10. — P. 20—24.
- [72] Berard P. H. From vanishing theorem to estimating theorem: the Bochner technique revisited // Bull. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 19, no. 2. — P. 371—402.
- [73] Berard P. A note on Bochner type theorems for complete manifolds // Manuscripta Math. — 1990. — Vol. 69, no. 3. — P. 261—266.
- [74] Bishop R. L., O'Neill B. Manifolds of negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 1—49.
- [75] Bitis Gr. Riemannian manifolds which admit a unique harmonic or Killing tensor field // Tensor. — 1989. — Vol. 48, no. 1. — P. 1—10.

- [76] Bitis G. Harmonic forms and Killing tensor fields // Tensor. — 1994. — Vol. 55, no. 3. — P. 215—222.
- [77] Bitis Gr., Tsagas Gr. On the harmonic and Killing tensor field on a compact Riemannian manifolds // Balkan J. Geom. Appl. — 2001. — Vol. 6, no. 2. — P. 99—108.
- [78] Blashke W., Reidemeister K. Vorlesungen über Differential Geometrie II. Affine Differential Geometrie. — Berlin: Springer, 1923.
- [79] Blau M. Symmetries and pseudo-Riemannian manifold // Rep. Math. Phys. — 1988. — Vol. 25, no. 1. — P. 109—116.
- [80] Bochner S. Vector fields and Ricci curvature // Bull. Amer. Math. Soc. — 1946. — Vol. 52. — P. 776—797.
- [81] Bochner S., Yano K. Curvature and Betti Numbers. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1953.
- [82] Brock B. W., Steinke J. M. Local restrictions on nonpositively curved n -manifolds in $\mathbb{R}^{n+p}$ // Pacific J. Math. — 2000. — Vol. 196, no. 2. — P. 271—281.
- [83] Buleanu D., Codoban S. Killing tensor and separable coordinates in $(1+1)$ -dimensions // Rom. J. Phys. — 1999. — Vol. 44, no. 9—10. — P. 933—938.
- [84] Chen B.-Y., Nagano T. Harmonic metric, harmonic tensors and Gauss maps // J. Math. Soc. Japan. — 1984. — Vol. 36, no. 2. — P. 295—313.
- [85] Chen S. S. The geometry of G-structure // Bull. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 72. — P. 167—219.
- [86] Colinson C. D. The existence of Killing tensors in empty space-times // Tensor. — 1974. — Vol. 28. — P. 173—176.
- [87] Collinson C. D., Howarth L. Generalized Killing tensor // Gen. Relativ. Gravit. — 2000. — Vol. 32, no. 9. — P. 1767—1776.
- [88] Dietz W., Rudiger R. Space-times admitting Killing—Yano tensor. I // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1981. — Vol. 375, no. 1762. — P. 361—378.
- [89] Dietz W., Rudiger R. Space-times admitting Killing—Yano tensor. II // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1982. — Vol. 381, No. 1781. — P. 315—322.
- [90] Duff G. F. D., Spencer D. C. Harmonic tensor on Riemannian with boundary // Ann. Math. — 1952. — Vol. 56, no. 1. — P. 128—156.
- [91] Dussan M. P., Noronha M. H. Manifolds with 2-nonnegative Ricci operator // Pacific J. Math. — 2002. — No. 2. — P. 319—334.
- [92] Fagundes H. V. Closed spaces in cosmology // Gen. Relativ. Gravit. — 1992. — Vol. 24, no. 2. — P. 199—217.
- [93] Fulton C. M. Parallel vector fields // Proc. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 16. — P. 136—137.
- [94] Galloway G. J. Some global aspect of compact space-time // Arch. Math. — 1984. — Vol. 42, no. 2. — P. 168—172.
- [95] Ganchev G., Ivanov S. Harmonic and holomorphic 1-forms on compact balanced Hermitian manifold // Differential Geom. Appl. — 2001. — Vol. 14, no. 1. — P. 79—93.
- [96] Gray A., Hervella L. The sixteen class of almost Hermitean manifolds // Ann. Mat. Pura Appl. — 1980. — No. 123. — P. 35—58.
- [97] Grotmeyer K. Die Integralsätze der affinen Flächentheorie // Arch. Math. — 1952. — Vol. 3. — P. 38—43.

- [98] Hamilton R. S. Four-manifolds with positive curvature operator // *J. Differ. Geom.* — 1986. — Vol. 24. — P. 153–179.
- [99] Harris S. G. What is the shape of space in spacetime? // *Diff. Geom.: Geom. Math. Phys. and Relat. Top.: Proc. Summ. Res. Inst. Differ. Geom., Los Angeles, July 8–28, 1990.* — Providence, 1993. — P. 287–296.
- [100] Ishihara Sh. The integral formulas and their applications in some affinely connected manifolds // *Kodai Math. Sem. Rep.* — 1961. — Vol. 13, no. 2. — P. 93–108.
- [101] Jun J.-B., Ayabe Sh., Yamaguchi S. On conformal Killing p -form in compact Kaehlerian manifolds // *Tensor.* — 1985. — Vol. 42, no. 3. — P. 258–271.
- [102] Jun J.-B., Yamaguchi S. On projective Killing p -forms in Riemannian manifolds // *Tensor.* — 1986. — Vol. 43. — P. 157–166.
- [103] Kalina J., Orsted B., Pierzchalski A., Walczak P., Zhang F. Elliptic gradients and highest weights // *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.* — 1996. — Vol. 44. — P. 511–519.
- [104] Kalina J., Pierzchalski A., Walczak P. Only one of generalized gradients can be elliptic // *Ann. Polon. Math.* — 1997. — Vol. LXVII, no. 2. — P. 111–120.
- [105] Kashiwada T. On conformal Killing tensor // *Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ.* — 1968. — Vol. 19. — P. 67–74.
- [106] Klingenberg W. P. A. *Affine Differential Geometry*, by Katsumi Nomizu and Takeshi Sasaki. Book reviews // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1996. — Vol. 33, no. 1. — P. 75–76.
- [107] Klishevich V. V. Exact solution of Dirac and Klein–Gordon–Fock equations in a curved space admitting a second Dirac operator // *Classical Quantum Gravity.* — 2001. — Vol. 18. — P. 3735–3752.
- [108] Kolai I., Michor P. W., Slovak J. *Natural Operators in Differential Geometry.* — Berlin, New York: Springer, 1993.
- [109] Kora M. On conformal Killing forms and the proper space of for p -forms // *Math. J. Okayama Univ.* — 1980. — Vol. 22. — P. 195–204.
- [110] Marsden J. E., Tipler F. J. Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity // *Phys. Rep.* — 1980. — Vol. 66, no. 3. — P. 109–139.
- [111] Martens R., Mason D. P. Kinematics and dynamic properties of conformal Killing vectors in anisotropic fluids // *J. Math. Phys.* — 1986. — Vol. 27, no. 12. — P. 2987–2994.
- [112] Mason D. P., Tsamparlis M. Spacelike conformal Killing vector and spacelike congruences // *J. Math. Phys.* — 1985. — Vol. 26, no. 11. — P. 2881–2901.
- [113] Meyer D. Sur les variétés riemanniennes a opérateur de courbure positif // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1971. — Vol. 272. — P. 482–485.
- [114] Montiel S. An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in de Sitter space and applications to the case of constant mean curvature // *Indiana Univ. Math. J.* — 1988. — Vol. 37, no. 4. — P. 909–917.
- [115] Mustafa M. T. A Bochner technique for harmonic morphisms // *J. London Math. Soc.* — 1998. — Vol. 57, no. 3. — P. 746–756.
- [116] Muzinich I. J. Differential geometry in the large and compactification of higher-dimensional gravity // *J. Math. Phys.* — 1986. — Vol. 27, no. 5. — P. 1393–1397.

- [117] Nijenhuis A. A note on first integrals of geodesics // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. — 1967. — Vol. LXX, no. 2. — P. 141–145.
- [118] Nomizu K. What is affine differential geometry? // Proc. Conf. on Differential Geometry. — Muster, 1982. — P. 42–43.
- [119] Nomizu K. On completeness in affine differential geometry // Geom. Dedicata. — 1986. — Vol. 20, no. 1. — P. 43–49.
- [120] Nomizu K. A survey of recent result in affine differential geometry // L. Verstraelen, A. West. Geometry and Topology of Submanifolds III, Conf. Leeds, 1990. — London, Singapore: Word Scientific, 1991. — P. 227–256.
- [121] Nomizu K. On affine hypersurfaces with parallel nullity // J. Math. Soc. Japan. — 1992. — Vol. 44, no. 4. — P. 693–699.
- [122] Nomizu K., Magid M. A. On affine surfaces whose cubic forms are parallel relative to affine metric // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1989. — Vol. 65, no. 7. — P. 215–222.
- [123] Nomizu K., Pinkall U. On the geometry of affine immersions // Math. Z. — 1987. — Vol. 195, no. 2. — P. 165–178.
- [124] Nomizu K., Sasaki T. Affine Differential Geometry. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.
- [125] Ogiue K., Tachibana S. Les variétés riemanniennes dont l'opérateur de courbure restreint est positif sont des sphères d'homologie réelle // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1979. — Vol. 289. — P. 29–30.
- [126] O'Neill B. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. — New York, London: Academic Press, 1983.
- [127] Pak H. K., Takahashi T. Harmonic forms in a compact contact manifold // Proc. Fifth Pacific Ric Geometry Conf., July 25–28, 2000. — Japan: Tohoku Univ. Press, 2000. — P. 125–129.
- [128] Petersen P. Aspects of global Riemannian geometry // Bull. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 36, no. 3. — P. 297–344.
- [129] Polombo A. De nouvelles formules de Weitzenbock pour des endomorphismes harmoniques. Applications géométriques // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1992. — Vol. 25, no. 4. — P. 393–428.
- [130] Reinhart B. L. Differential Geometry of Foliation. — Berlin: Springer, 1983.
- [131] Romero A., Sanchez M. An integral inequality on compact Lorentz manifolds and its applications // Bull. London Math. Soc. — 1996. — Vol. 28. — P. 509–513.
- [132] Romero A., Sanchez M. An introduction to Bochner's technique on Lorentzian manifolds // Proc. V Fall Workshop: Differential Geometry and its Applications to Mathematical Physics. — Jaca, Spain, 1996. — P. 56–67.
- [133] Romero A., Sanchez M. Bochner's technique on Lorentz manifolds and infinitesimal conformal symmetries // Pacific J. Math. — 1998. — Vol. 186, no. 1. — P. 141–148.
- [134] Romero A., Sanchez M. Projective vector fields on Lorentzian manifolds // Geom. Dedicata. — 2002. — Vol. 93. — P. 95–105.
- [135] Santaly L. A. Affine integral geometry and convex bodies // J. Microsc. — 1988. — Vol. 151, no. 3. — P. 229–233.

- [136] Schwenk A. Affinsphären mit ebenen Schattengrenzen // D. Ferus, R. B. Gardner, S. Helgason, U. Simon. Global Differential Geometry and Global Analysis 1984. — Berlin: Springer, 1985. — Lecture Notes Math. Vol. 1156. — P. 296—315.
- [137] Seamon W. Harmonic 2-forms in four dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 112, no. 2. — P. 545—548.
- [138] Shiffman B., Sommese A.-J. Vanishing theorems in complex manifolds. — Boston: Birkhäuser, 1985. — Progress in Math. Vol. 56.
- [139] Shouten J. A. Ricci-calculus. — Berlin: Springer, 1954. — Grundlehren Math. Wiss. Bd. 10.
- [140] Simon U. Recent developments in affine differential geometry // Proc. Int. Conf.: Diff. Geom. and Its Appl., Dubrovnik, June 26 — July 3, 1988. — Novi Sad: Inst. Math. Univ. Novi Sad, 1989. — P. 327—347.
- [141] Simon U. Directly Problems and the Laplacian in Affine Hypersurface Theory. — Berlin: Springer, 1989. — P. 243—260. — Lecture Notes Math. Vol. 1369.
- [142] Simon U., Schwenk A. Hypersurfaces with constant equiaffine mean curvature // Arch. Math. — 1986. — Vol. 46, no. 1. — P. 85—90.
- [143] Simon U., Schwenk-Schellshmidt A., Viesel H. Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces. — Tokyo: Science Univ. Tokyo Press, 1991. — Lecture Notes.
- [144] Singh K. D. Affine 2-Killing vector and tensor field // Comp. Red. Acad. Bulg. Sci. — 1983. — Vol. 36, no. 11. — P. 1375—1378.
- [145] Slysarska W. On devaluation from ample flatness // Demonstratio Math. — 1988. — Vol. 21, no. 2. — P. 505—511.
- [146] Smolnikova M. V. On global geometry harmonic symmetric bilinear differential forms // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, 21—26 августа 2000 г., Суздаль. — Владимир: Изд-во ВлГУ, 2000. — С. 87—88.
- [147] Stepanov S. E. An integral formula for a Riemannian almost-product manifold // Tensor. — 1994. — Vol. 55. — P. 209—214.
- [148] Stepanov S. E. A class of closed forms and special Maxwell's equations // Tensor. — 1997. — Vol. 58. — P. 233—242.
- [149] Stepanov S. E. New theorem of duality and its applications // Новейшие проблемы теории поля. 1999—2000. — Казань: Изд-во КГУ, 2000. — С. 373—376.
- [150] Stepanov S. E. On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field // J. Geom. Phys. — 2000. — Vol. 33. — P. 191—209.
- [151] Stepanov S. E. Riemannian almost product manifolds and submersions // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 99, no. 6. — P. 1788—1831.
- [152] Stepanov S. E. New methods of the Bochner technique and their applications // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 113, no. 3. — P. 514—535.
- [153] Stepanov S. E., Shandra I. G. Geometry of infinitesimal harmonic transformations // Ann. Global Anal. Geom. — 2003. — Vol. 24, no. 3. — P. 291—299.
- [154] Stepanov S. E., Tsyganok I. I. On a generalization of Kashiwada's theorem // Webs and Quasigroups. 1998—1999. — Tver: Tver State Univ. Press, 1999. — P. 162—167.

- [155] Sumitomo T., Tandai K. Killing tensor fields on the standard sphere and spectra of $SO(n+1)/SO(n-1) \times SO(2)$ and $O(n+1)/O(n-1) \times O(2)$ // Osaka J. Math. — 1983. — Vol. 20. — P. 51–78.
- [156] Tachibana Sh. On Killing tensor in a Riemannian space // Tohoku Math. J. — 1968. — Vol. 20. — P. 257–264.
- [157] Tachibana Sh. On conformal Killing tensor in a Riemannian space // Tohoku Math. J. — 1969. — Vol. 21. — P. 56–64.
- [158] Tachibana Sh. On projective Killing tensor // Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. — 1970. — Vol. 21. — P. 67–80.
- [159] Takano K. On projective Killing p -form in a Sasakian manifold // Tensor. — 1998. — Vol. 60. — P. 274–292.
- [160] Takano K., Yamaguchi S. On a special projective Killing p -form with constant k in a Sasakian manifold // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1996. — Vol. 62. — P. 299–317.
- [161] Thompson G. Killing tensor in spaces of constant curvature // J. Math. Phys. — 1986. — Vol. 27, no. 11. — P. 2693–2699.
- [162] Tsagas Gr. On the Killing tensor fields on a compact Riemannian manifold // Balkan J. Geom. Appl. — 1996. — Vol. 1, no. 2. — P. 91–97.
- [163] Tsyganok I. I., Stepanov S. E. Vector fields in manifold with equiaffine connection // Webs and Quasigroups. — Tver: Tver State Univ. Press, 1993. — P. 70–77.
- [164] Wang X.-J. Affine maximal hypersurfaces // Proc. of ICM. Vol. III. — Beijing: Higher Educ. Press, 2000. — P. 221–231.
- [165] Weber M. Die Bochner-methode und Sius starrheitssatz // Bonn Math. Schr. — 1989. — No. 198. — P. 1–58.
- [166] Weitzenböck R. Invariantentheorie. — Groningen: Noordhoff, 1923.
- [167] Woodhouse N. M. J. Killing tensor and the separation of the Hamilton–Jacobi equation // Comm. Math. Phys. — 1975. — Vol. 44, no. 9. — P. 1159–1167.
- [168] Wu H. The Bochner technique // Proc. Beijinng Symp. Diff. Geom. and Diff. Equat., Aug. 18 – Sept. 21, 1980, Beijing. Vol. 2. — Beijing: Science Press. New York: Gordon and Breach, 1982. — P. 929–1071.
- [169] Wu H. The Bochner Technique in Differential Geometry. — London, Paris, New York: Hardwood Academic Publishers, 1988. — Mathematical Reports. Vol. 3, Part 2.
- [170] Xiaochun R. A Bochner theorem and applications // Duke Math. J. — 1998. — Vol. 91, no. 2. — P. 381–392.
- [171] Ximin L. Integral inequalities for maximal space-like submanifolds in the indefinite space form // Balkan J. Geom. Appl. — 2001. — Vol. 6, no. 1. — P. 109–114.
- [172] Yano K. Integral Formulas in Riemannian Geometry. — New York: Marcel Dekker, 1970.
- [173] Yau Ch.-T., Cheng Ch.-Y. Complete affine hypersurfaces. Part I. The completeness of affine metrics // Comm. Pure Appl. Math. — 1986. — Vol. 39, no. 6. — P. 839–866.
- [174] Yun G. Total scalar curvature and L^2 -harmonic 1-forms on minimal hypersurface in Euclidean space // Geom. Dedicata. — 2002. — Vol. 89. — P. 135–141.