О восстановлении двумерной псевдоримановой метрики по заданной кривизне

Э. Р. РОЗЕНДОРН, Д. Д. СОКОЛОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: sokoloff@dds.srcc.msu.su

УДК 513.81

Ключевые слова: псевдориманово пространство, кривизна, изотропные координаты.

Аннотация

Рассмотрена задача о восстановлении двумерной псевдоримановой метрики, заданной в изотропных координатах, по её гауссовой кривизне. В частности, получены достаточные условия того, что метрику можно восстановить в координатном квадранте. Обсуждаются возможные приложения полученных результатов.

Abstract

E. R. Rozendorn, D. D. Sokoloff, Two-dimensional pseudo-Riemannian metrics reconstructed by a given curvature, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 85—92.

The problem of reconstruction of a two-dimensional, pseudo-Riemannian metric in isotropic coordinates by a given Gaussian curvature is considered. In particular, we present sufficient conditions for the possibility of reconstruction such a metric in a coordinate quadrant. Possible applications of results obtained are discussed.

1°. В теории относительности и в космологии важную роль играют метрики, допускающие в двумерном случае приведение к виду

$$ds^2 = 2F(x,y)\,dx\,dy, \quad F > 0. \tag{1}$$

В этих метриках координатными линиями псевдориманова многообразия, задающего космологическую модель, являются изотропные геодезические, так что способ задания метрики удобен для описания тех ситуаций, когда основная часть наблюдательной информации поступает из анализа наблюдаемого света, который и распространяется по изотропным геодезическим. Поскольку физической причиной отличия метрики от (псевдо)евклидовой являются различные физические взаимодействия, приводящие к возникновению кривизны метрики пространства-времени, кажется естественной задача о том, в какой степени метрику (1) можно восстановить по известной гауссовой кривизне K. Эта задача и рассматривается в настоящей работе. Мы покажем, что при выполнении

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 85—92.
© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
Издательский дом «Открытые системы»

некоторых условий это удаётся сделать в различных областях, в том числе и в некомпактной области

$$x > x_0, \quad y > y_0 \tag{2}$$

(см. теорему 3). Хотя в определённом смысле рассматриваемая задача примыкает к вопросу о разрешимости уравнений Эйнштейна и особенностях в решениях этих уравнений (см., например, [3]), в нашей постановке эта задача, по-видимому, не изучалась.

2°. Уточним математическую постановку вопроса и поясним, в частности, что понимается под гауссовой кривизной метрики (1).

В классической дифференциальной геометрии для положительно определённой метрики

$$ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2 \tag{3}$$

известна формула Гаусса для гауссовой кривизны, которую можно записать в виде [4]

$$K = -\frac{1}{4W^4}\begin{vmatrix} E & E'_u & E'_v \\ F & F'_u & F'_v \\ G & G'_u & G'_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2W}\left(\left(\frac{E'_v - F'_u}{W}\right)'_v - \left(\frac{F'_v - G'_u}{W}\right)'_u\right), \tag{4}$$

где

$$W^2 = EG - F^2 > 0. \tag{5}$$

В псевдоевклидовой геометрии неравенство (5) нарушено, можно считать W чисто мнимым числом, при этом в силу структуры (4) K остаётся действительным. Положив $E = G = 0$ и введя вспомогательную функцию

$$\phi = \ln F, \tag{6}$$

получим из (4)

$$K = -\frac{1}{F}\phi''_{xy}. \tag{7}$$

Мы будем считать выражение (7) гауссовой кривизной метрики (1) в точке (x, y). Здесь мы воспользовались стандартным рецептом обобщения на псевдориманов случай понятий классической дифференциальной геометрии (см., например, [1], где изучен также геометрический смысл вводимой так кривизны).

Если $K(x, y)$ задана, то из (6), (7) для функции ϕ получается нелинейное гиперболическое уравнение

$$\phi''_{xy} + K(x,y)e^{\phi} = 0, \tag{8}$$

по решению которого можно построить F и метрику (1). Для выделения конкретного решения мы используем граничные условия

$$\phi(x,0) = \psi_1(x), \quad \phi(0,y) = \psi_2(y); \quad \psi_1(0) = \psi_0 = \psi_2(0) \tag{9}$$

и рассматриваем, таким образом, задачу Дарбу для уравнения (8) (не ограничивая общности, считаем здесь и далее $x_0 = y_0 = 0$). Далее считаем функцию $K(x, y)$ и граничные условия (9) непрерывными.

Отметим, что (8) можно трактовать как один из видов нелинейных волновых уравнений [6]. В частности, при $K = 0$ оно превращается в классическое волновое уравнение и наша задача решается в явном виде:

$$\phi(x, y) = \psi_1(x) + \psi_2(y) - \psi_0. \tag{10}$$

3°. По аналогии с (10) положим

$$\psi(x, y) = \psi_1(x) + \psi_2(y) - \psi_0. \tag{11}$$

Пусть в области определения функции $f(x, y)$ содержится прямоугольник $D(x, y)$ со сторонами, параллельными координатным осям, и вершинами $A_0(0, 0)$, $A_1(x, 0)$, $A(x, y)$, $A_2(0, y)$ $(x > 0,\ y > 0)$, указанными в порядке обхода. Положим

$$[f]_{D(x,y)} = f(A) - f(A_1) - f(A_2) + f(A_0). \tag{12}$$

Тогда если в $D(x, y)$ существует и непрерывна смешанная производная f''_{xy}, то

$$\iint\limits_{D(x,y)} f''_{xy}(x, y)\, dx\, dy = [f]_{D(x,y)}. \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что задача (8), (9) равносильна нелинейному интегральному уравнению

$$\phi(x, y) = \psi(x, y) - \iint\limits_{D(x,y)} K(u, v) e^{\phi(u,v)}\, du\, dv. \tag{14}$$

Нам удобно рассматривать (14) как уравнение вида

$$\phi = \psi \pm \hat{N}\phi \tag{15}$$

в банаховом пространстве Y, где ψ — заданная, а ϕ — искомая точки пространства, а оператор $\hat{N}$ отображает Y в себя.

4°. Пусть B_R — замкнутый шар радиуса R в пространстве Y с центром в нуле.

Лемма 1. *Пусть $\|\psi\| \leqslant r_1$, и пусть существует $R > r_1$, такое что*

(a) *оператор $\hat{N}$ на шаре B_R удовлетворяет условию Липшица (то есть для любых точек x и y шара $\rho(\hat{N}x, \hat{N}y) \leqslant q\rho(x, y)$) с константой $q < 1$;*

(b) *существует число r_0, такое что*

$$0 < r_0 \leqslant R - r_1 \tag{16}$$

и для любого $\phi \in B_R$

$$\|\hat{N}\phi\| \leqslant r_0; \tag{17}$$

тогда уравнения (15) имеют решения $\phi^*_\pm \in B_R$ и они единственны в B_R.

В самом деле, с помощью неравенства треугольника без труда проверяется, что операторы $\hat{H}_{\pm}$, определяемые формулой $\hat{H}_{\pm}\phi = \psi \pm \hat{N}\phi$, удовлетворяют условию Липшица с константой $q < 1$ и, следовательно, являются сжимающими.

5°. Вернёмся теперь непосредственно к уравнению (14). Зафиксируем $a > 0$, $b > 0$ и будем рассматривать (14) для $D(x, y) \subset D(a, b)$. Положим

$$k = \iint\limits_{D(a,b)} |K(u, v)|\, du\, dv. \tag{18}$$

В качестве банахова пространства Y используем пространство функций, непрерывных на $D(a, b)$, с обычной нормой и будем считать, что граничные условия (9) на соответствующих границах этого прямоугольника ограничены по норме пространства C константой A. Тогда $\|\psi\| \leqslant 3A = r_1$.

Проверим, что в шаре B_R оператор

$$\hat{N}\phi = \iint\limits_{D(x,y)} K(u, v) e^{\phi(u,v)}\, du\, dv, \quad D(x, y) \subset D(a, b), \tag{19}$$

при указанных условиях удовлетворяет условию Липшица с константой $q = ke^R$. В самом деле, поскольку в этом шаре $|\phi| \leqslant R$, то, как легко проверить,

$$\|\hat{N}\phi\| \leqslant e^R \iint\limits_{D(a,b)} |K(u, v)|\, du\, dv = ke^R,$$

а для двух элементов z_1 и z_2 этого шара с использованием теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$\|\hat{N}z_2 - \hat{N}z_1\| \leqslant e^R \|z_2 - z_1\| \iint\limits_{D(x,y)} |K(u, v)|\, du\, dv \leqslant ke^R \|z_2 - z_1\|.$$

6°. **Теорема 1 (Э. Р. Розендорн).** *Если при сформулированных предположениях $3A + \frac{1}{2} \leqslant R$ и $k \leqslant e^{-(R+1)}$, то в прямоугольнике $D(a, b)$ задача* (8), (9) *разрешима и имеет решение ϕ, удовлетворяющее при $(x, y) \in D(a, b)$ оценке $|\phi(x, y)| \leqslant R$.*

Доказательство. Согласно результату предыдущего пункта постоянная Липшица q для оператора $\hat{N}$ меньше единицы, а для каждого $\phi \in B_R$ имеем $\|\hat{N}\phi\| \leqslant e^{-1} < \frac{1}{2}$. Полагая $r_0 = \frac{1}{2}$ и $r_1 = 3A \geqslant \|\psi\|$, замечаем, что к уравнению (15) с оператором (19) применима лемма 1, из которой в свою очередь и следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Из леммы 1 следует также, что решение ϕ, которое гарантируется теоремой 1, единственно в шаре B_R. Однако из этого не вытекает единственность решения задачи (8), (9), поскольку в условиях теоремы 1, увеличивая R, мы нарушим оценку для k и применимость изложенных рассуждений. Вопрос о единственности решения нашей задачи остаётся, таким образом, открытым.

Замечание 2. Проведённые в этом пункте рассуждения и выводы из них остаются в силе, если выбрать, как нам это будет удобно далее, $r_1 = 3(A + \frac{1}{4})$ и $R = 3(A + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}$, сохранив $r_0 = \frac{1}{2}$.

7°. Перейдём теперь к рассмотрению задачи (8), (9) в некомпактных областях. Пусть U_c — область на плоскости xy, ограниченная гиперболой $xy = c$ и лучами $x > 0$, $y = 0$ и $x = 0$, $y > 0$ ($c > 0$).

Теорема 2 (Д. Д. Соколов). *Пусть на указанных лучах* $\|\phi_1\| \leqslant A$, $\|\psi_2\| \leqslant A$ *и*

$$\iint\limits_{D(a,b)} |K(u,v)|\, du\, dv \leqslant k \tag{20}$$

при $ab \leqslant c$ ($a > 0$, $b > 0$). *Тогда если существует* $R > 0$, *такое что выполнены неравенства, фигурирующие в условиях теоремы* 1, *то в* U_c *существует решение* $\phi(x,y) \leqslant R$ *задачи* (8), (9), *причём* $|\phi(x,y)| \leqslant R$ *в* U_c.

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что при её предположениях остаются в силе рассуждения, приводящие к теореме 1, для каждого из прямоугольников $D(a,b)$ при $ab = c$, а значит и в U_c, представляющем собой объединение этих прямоугольников.

Отметим, что, как легко проверить, при выполнении условий на $\|\psi_1\|$ и $\|\psi_2\|$ для существования в U_c решения нашей задачи достаточно, чтобы кривизна в U_c удовлетворяла неравенству

$$|K(x,y)| \leqslant \frac{1}{c} e^{-3(A+\frac{1}{2})}. \tag{21}$$

8°. Получим условие разрешимости нашей задачи в первом квадранте. Покроем его прилегающими друг к другу квадратами со стороной $a > 0$ (условия на выбор a мы укажем ниже). Обозначим через $\bar{D}(m,n)$ тот из квадратов, верхняя правая вершина которого имеет координаты (ma, na) (здесь и далее m и n — целые числа). Величину, аналогичную k, но вычисленную для $\bar{D}(m,n)$, обозначим k_{mn}.

Теорема 3 (Э. Р. Розендорн). *Если при* $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ *функция* $K(x,y)$ *непрерывна и удовлетворяет условию*

$$k_{mn} \leqslant e^{-f(m,n)}, \tag{22}$$

где $f(m,n) = \frac{3}{2} + (A + \frac{1}{4}) \cdot 3^{mn}$, *а начальные данные на лучах, ограничивающих квадрант, непрерывны и по модулю ограничены числом* $A > 0$, *то задача* (8), (9) *имеет решение во всём первом квадранте.*

Отметим, что смысл условий теоремы 3 состоит в том, что по мере ухода вглубь первого квадранта кривизна K по модулю быстро убывает в среднем, хотя на множествах малой меры модуль K может быть велик. Условие (22) является достаточным, и его можно заменить на другие аналогичные условия.

Доказательство теоремы 3 основано на том, что согласно теореме 1 можно строить искомое решение ϕ на квадратах $\bar{D}(m,n)$, увеличивая номера m и n.

При этом начальные условия для очередного квадрата заимствуются с трёх соседних квадратов, граничащих с ним, где решение уже построено. Один из этих квадратов — слева, другой — снизу, третий — через нижнюю левую вершину. При переходе к квадратам с бо́льшими номерами оценки нужно проводить по индукции, разбивая индукцию на два этапа. Сначала рассматриваются последовательности квадратов, параллельных сторонам квадранта, а затем индуктивный процесс переходит на внутреннюю часть угла. Для единообразия оценок удобно ввести добавочные квадраты с $m = 0$ и $n = 0$ и рассмотреть на них «условное решение» в виде функций, зависящих от одного аргумента и равных сужению соответствующего граничного условия на сторону этого квадрата.

Опишем это индуктивное рассуждение. Начнём с квадратов $\bar{D}(m, 1)$ и выведем по индукции оценки

$$\|\psi\|_{m,1} \leqslant (2m+1)\left(A + \frac{1}{4}\right), \tag{23}$$

$$\|\phi\|_{m,1} \leqslant (2m+1)\left(A + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}, \tag{24}$$

где здесь и далее нормы вычисляются для решения и начального условия в $\bar{D}(m,n)$. Для $m = 1$ эти оценки прямо повторяют соответствующие оценки в доказательстве теоремы 1, проведённые при $b = a$. Далее нужно заметить, что

$$\|\psi\|_{m+1,1} \leqslant \|\phi\|_{m,1} + A + A \leqslant (2(m+1)+1)\left(A + \frac{1}{4}\right).$$

Вместо величины r_1 следует ввести величину $r_{mn} = (A + \frac{1}{4})3^{mn}$, а радиус шара B_R в пространстве непрерывных функций считать зависящим от m и n, полагая $R = R_{m,n} = (A + \frac{1}{4})3^{mn} + \frac{1}{2}$. При этом можно сохранить $r_0 = \frac{1}{2}$. В итоге

$$\|\phi\|_{m+1,1} \leqslant \|\psi\|_{m+1,1} + \frac{1}{2} \leqslant (2(m+1)+1)\left(A + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2},$$

что завершает эту часть индуктивного рассуждения. Оценки для $\bar{D}(1, n)$ проводятся совершенно аналогично.

Для перехода к случаю произвольных m и n воспользуемся неравенством $2m + 1 \leqslant 3^m$ и заменим оценки (23), (24) на вытекающие из них неравенства

$$\|\psi\|_{m,n} \leqslant \left(A + \frac{1}{4}\right)3^{mn}, \tag{25}$$

$$\|\phi\|_{m,n} \leqslant \left(A + \frac{1}{4}\right)3^{mn} + \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Пока эти оценки получены лишь для $n = 1$ (а их аналоги и для $m = 1$). Для получения их в общем случае положим $\mu = \min\{m,n\}$, $\nu = \max\{m,n\}$. Заметим, что $m + n = \mu + \nu$, а $3^m + 3^n = 3^\mu + 3^\nu$. Имеем

$$\|\psi\|_{m+1,n+1} \leqslant \|\phi\|_{m,n} + \|\phi\|_{m+1,n} + \|\phi\|_{m,n+1} \leqslant$$
$$\leqslant (3^{mn} + 3^{(m+1)n} + 3^{m(n+1)}) \left(A + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2} \leqslant \left(A + \frac{1}{4}\right) 3^{mn+\nu+1}. \quad (27)$$

Отметим также, что
$$(m+1)(n+1) > mn + \nu + 1, \quad (28)$$
откуда и следует, что оценка (25) воспроизводится при переходе к $m+1$ и $n+1$.

Ввиду постоянства $r_0 = \frac{1}{2}$ оценка (26) тоже воспроизводится при индуктивном переходе. Одновременно обоснован и наш выбор $R_{m,n}$. Итак, применимость теоремы 1 к каждому из квадратов $\bar{D}(m,n)$ обоснована, тем самым доказана и сама теорема 3.

9°. Мы уже приводили мотивировки для рассмотрения нашей задачи. Теперь, когда ответ получен, мы можем расширить круг этих мотивировок.

Теорема 2 представляется интересной в связи с изучением многообразий со случайной кривизной [2]. В этих исследованиях кривизна на некоторой геодезической рассматривается как случайный процесс и удаётся выявить ряд общих свойств полей Якоби на такой геодезической. Однако при этом остаётся неясным, как перенести результаты с одной геодезической на конечный кусок многообразия. При этом перенесении необходимо обеспечить, чтобы точки, удалённые друг от друга в смысле расстояния на геодезической, были бы удалены друг от друга и в смысле (псевдо)риманова пространства, что, очевидно, справедливо далеко не всегда. Рассмотренная нами конструкция позволяет разрешить этот вопрос, по крайней мере для псевдориманова случая. В самом деле, мы можем рассматривать кривизны в различных квадратах $\bar{D}(m,n)$ как независимые случайные поля. При этом вид метрики (1) обеспечивает, что изотропные геодезические, образующие первый квадрант, никогда не возвращаются в окрестность каждой своей точки, а теорема 2 утверждает, что по этому распределению можно восстановить метрику (1) по крайней мере в некомпактной области U_c.

Теорему 3 можно рассматривать как геометрическое обоснование убеждённости специалистов по теории гравитации (см., например, [3]) в том, что рассмотрение островных гравитирующих систем, для которых порождаемая ими кривизна в определённом смысле спадает на бесконечности, не приводит к появлению особенностей пространства-времени. Теорема 3 очерчивает (по крайней мере в двумерном случае) достаточные условия того, чтобы систему можно было считать островной.

Наконец, доказательства полученных теорем обнаруживают родство с методами изучения задачи Дарбу для уравнения синус-Гордона и погружения метрик постоянной отрицательной кривизны в трёхмерное евклидово пространство [5] и ещё раз подчёркивают родство интересовавшей нас задачи с нелинейным волновым уравнением.

Работа поддержана проектом РФФИ 02-01-00297.

Литература

[1] Артыкбаев А., Соколов Д. Д. Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. — Ташкент: Фан, 1991.

[2] Ламбурт В. Г., Розендорн Э. Р., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Геодезические со случайной кривизной на римановых и псевдоримановых многообразиях // Труды геометр. семинара. Вып. 24. — Казань: КГУ, 2003. — С. 99—106.

[3] Пенроуз Р. Структура пространства-времени. — Череповец: Меркурий, 2000.

[4] Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. — Харьков: ХГУ, 1967.

[5] Позняк Э. Г. Геометрические исследования, связанные с уравнением $z_{xy} = \sin z$ // Пробл. геом. — 1977. — Т. 8. — С. 51—72.

[6] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Наука, 1977.