# О геометрической интерпретации решений системы уравнений, обобщающей уравнение синус-Гордона

**А. В. БАДЬИН**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: andvalbadyn@mtu-net.ru

УДК 514.75

**Ключевые слова:** поверхности отрицательной кривизны, погружение, уравнения Гаусса—Петерсона—Кодацци, уравнения Ефимова—Позняка, уравнения виртуальных асимптотических кривых.

**Аннотация**

Рассматривается геометрическая интерпретация решений системы уравнений, обобщающей известное уравнение синус-Гордона. Показано, что каждому решению системы уравнений Ефимова—Позняка в односвязной области можно поставить в соответствие $C^3$-гладкую сингулярную поверхность с заданной первой билинейной формой.

**Abstract**

*A. V. Bad'in, On the geometric interpretation of solutions of a system generalizing the sine-Gordon equation*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 93—139.

We propose a geometric interpretation of solutions of the system generalizing the well-known sine-Gordon equation. We prove that to any solution of the Efimov—Poznyak system in a simply-connected domain, a $C^3$-smooth singular surface with given first fundamrntal bilinear form corresponds.

## Содержание



*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 1, с. 93—139.

## 1. Постановка задачи

В настоящей статье рассматривается геометрическая интерпретация решений системы уравнений, обобщающей известное уравнение синус-Гордона.

Пусть $D$ — двумерное $C^3$-гладкое элементарное многообразие, $F\colon D\to\mathbb{R}^3$, $F\in C^3(D)$, функция $F$ определяет регулярную поверхность с гауссовой кривизной $K$, удовлетворяющей условию $K(p)=-1$ при $p\in D$. Предположим, что на многообразии $D$ можно ввести координаты $u^1$, $u^2$ с областью изменения $\tilde{D}$, являющиеся асимптотическими координатами для поверхности $F$. Пусть $G$ — первая билинейная форма поверхности $F$, $b$ — вторая билинейная форма поверхности $F$. Так как $u^1$, $u^2$ — асимптотические координаты, то $b_{11}=0$, $b_{22}=0$ при $u\in\tilde{D}$. Используя уравнение Гаусса, нетрудно показать, что $|b_{12}|=\sqrt{G_{11}G_{22}-(G_{12})^2}$ при $u\in\tilde{D}$. Используя уравнения Петерсона—Кодацци, нетрудно показать, что можно так выбрать асимптотические координаты $u^1$, $u^2$, что $G_{11}=1$, $G_{22}=1$ при $u\in\tilde{D}$. Фиксируем точку $u\in\tilde{D}$. Так как $|G_{12}|\leqslant 1$, $|b_{12}|\leqslant 1$, то можно указать единственный угол $Z$, удовлетворяющий условиям $Z\in[-\pi,\pi)$, $G_{12}=\cos Z$, $b_{12}=-\sin Z$. Очевидно, $Z(u^1,u^2)$ — угол между асимптотическими кривыми в точке $(u^1,u^2)$. Итак, линейный элемент первой билинейной формы поверхности $F$ имеет вид

$$\mathrm{I}(u,du)=(du^1)^2+2\cos Z\,du^1\,du^2+(du^2)^2 \quad \text{при} \quad u\in\tilde{D}, \quad du\in\mathbb{R}^2.$$

Линейный элемент второй билинейной формы поверхности $F$ имеет вид

$$\mathrm{II}(u,du)=-2\sin Z\,du^1\,du^2 \quad \text{при} \quad u\in\tilde{D}, \quad du\in\mathbb{R}^2.$$

Так как $G_{11}G_{22}-(G_{12})^2\neq 0$ при $u\in\tilde{D}$, то $\sin Z\neq 0$ при $u\in\tilde{D}$. Теперь нетрудно показать, что $Z\in C^2(\tilde{D})$. Используя определение гауссовой кривизны, можно доказать, что функция $Z$ удовлетворяет уравнению

$$Z_{u^1u^2}=\sin Z \quad \text{при} \quad u\in\tilde{D}, \quad Z\in C^2(D).$$

Это уравнение часто называют уравнением синус-Гордона.

Теперь изменим точку зрения. Пусть $Z$ — некоторое решение уравнения синус-Гордона, удовлетворяющее условию $\sin Z\neq 0$ при $u\in\tilde{D}$. Рассмотрим симметричную билинейную форму $G$ с линейным элементом

$$\mathrm{I}(u,du)=(du^1)^2+2\cos Z\,du^1\,du^2+(du^2)^2 \quad \text{при} \quad u\in\tilde{D}, \quad du\in\mathbb{R}^2$$

и симметричную билинейную форму $b$ с линейным элементом

$$\mathrm{II}(u,du)=-2\sin Z\,du^1\,du^2 \quad \text{при} \quad u\in\tilde{D}, \quad du\in\mathbb{R}^2.$$

Нетрудно показать, что билинейная форма $G$ является римановой метрикой с гауссовой кривизной $K$, удовлетворяющей условию $K = -1$ при $u \in \tilde{D}$. Кроме того, билинейная форма $b$ удовлетворяет системе уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци. Пусть $\tilde{D}$ — односвязное множество. Согласно теореме Боннэ (см. [8, с. 559], [6, с. 361]) можно указать $C^3$-гладкую регулярную поверхность в $E^3$, для которой билинейная форма $G$ является первой билинейной формой, а билинейная форма $b$ является второй билинейной формой.

Э. Г. Позняк доказал, что каждому решению уравнения синус-Гордона в односвязной области $\tilde{D}$ можно поставить в соответствие $C^3$-гладкую сингулярную поверхность, для которой билинейная форма $G$ является первой билинейной формой на множестве $\tilde{D}$, а билинейная форма $b$ является второй билинейной формой на множестве $\{u \in \tilde{D}\colon \sin Z \neq 0\}$ (см. [4]).

Теперь рассмотрим поверхность переменной отрицательной кривизны. Пусть $D$ — двумерное $C^3$-гладкое элементарное многообразие, $F\colon D \to \mathbb{R}^3$, $F \in C^3(D)$, функция $F$ определяет регулярную поверхность с гауссовой кривизной $K$, удовлетворяющей условиям $K(p) < 0$ при $p \in D$, $K \in C^2(D)$. Предположим, что на многообразии $D$ можно ввести координаты $u^1$, $u^2$ с областью изменения $\tilde{D}$, являющиеся асимптотическими координатами для поверхности $F$. Пусть $G$ — первая билинейная форма поверхности $F$, $b$ — вторая билинейная форма поверхности $F$. Так как $u^1$, $u^2$ — асимптотические координаты, то $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$ при $u \in \tilde{D}$. Используя уравнение Гаусса, нетрудно показать, что $|b_{12}| = \sqrt{-K(G_{11}G_{22} - (G_{12})^2)}$ при $u \in \tilde{D}$. Обозначим $Q = \frac{1}{2}\ln\sqrt{-K}$, $e = \sqrt{G_{11}}$, $g = \sqrt{G_{22}}$ при $u \in \tilde{D}$. Тогда $e, g > 0$ при $u \in \tilde{D}$, $e, g \in C^2(\tilde{D})$. Фиксируем точку $u \in \tilde{D}$. Так как $\frac{|G_{12}|}{eg} \leqslant 1$, $\frac{|b_{12}|}{\exp(2Q)eg} \leqslant 1$, то можно указать единственный угол $Z$, удовлетворяющий условиям $Z \in [-\pi, \pi)$, $G_{12} = eg\cos Z$, $b_{12} = -\exp(2Q)eg\sin Z$. Очевидно, $Z(u^1, u^2)$ — угол между асимптотическими кривыми в точке $(u^1, u^2)$. Итак, линейный элемент первой билинейной формы поверхности $F$ имеет вид

$$\mathrm{I}(u, du) = e^2(du^1)^2 + 2eg\cos Z\, du^1\, du^2 + g^2(du^2)^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D}, \quad du \in \mathbb{R}^2.$$

Линейный элемент второй билинейной формы поверхности $F$ имеет вид

$$\mathrm{II}(u, du) = -2\exp(2Q)eg\sin Z du^1 du^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D}, \quad du \in \mathbb{R}^2.$$

Так как $G_{11}G_{22} - (G_{12})^2 \neq 0$ при $u \in \tilde{D}$, то $\sin Z \neq 0$ при $u \in \tilde{D}$. Теперь нетрудно показать, что $Z \in C^2(\tilde{D})$. В [1, 2] показано, что функции $e$, $g$, $Z$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$e_{u^2} = -\big(eQ_{u^2} + \cos Z gQ_{u^1}\big), \quad g_{u^1} = -\big(gQ_{u^1} + \cos Z eQ_{u^2}\big),$$
$$Z_{u^1u^2} - \left(\frac{g}{e}\cdot\sin Z\cdot Q_{u^1}\right)_{u^1} - \left(\frac{e}{g}\cdot\sin Z\cdot Q_{u^2}\right)_{u^2} = \exp(4Q)eg\sin Z,$$

где $e, g, Z \in C^2(\tilde{D})$, $e > 0$, $g > 0$ при $u \in \tilde{D}$. Эту систему мы далее будем называть системой уравнений Ефимова—Позняка. Очевидно, что если $Q = 0$, $e = 1$, $g = 1$ при $u \in \tilde{D}$, то система уравнений Ефимова—Позняка превращается в уравнение синус-Гордона. Таким образом, систему уравнений Ефимова—Позняка можно рассматривать как обобщение уравнения синус-Гордона на случай поверхности переменной отрицательной кривизны.

Первые два уравнения своей системы Н. В. Ефимов и Э. Г. Позняк вывели с помощью уравнений Петерсона—Кодацци, третье уравнение — с помощью формулы Гаусса—Боннэ, применённой к асимптотическому четырёхугольнику.

Следует отметить, что переход в асимптотические координаты, вообще говоря, приводит к потере гладкости. В [8] система уравнений, эквивалентная системе уравнений Ефимова—Позняка, выведена для $C^3$-гладкой поверхности, допускающей введение асимптотических координат с потерей гладкости.

Теперь изменим точку зрения. Пусть $Q \in C^2(\tilde{D})$ — некоторая функция, $e$, $g$, $Z$ — некоторое решение системы уравнений Ефимова—Позняка. Рассмотрим симметричную билинейную форму $G$ с линейным элементом

$$\mathrm{I}(u, du) = e^2(du^1)^2 + 2eg\cos Z\, du^1\, du^2 + g^2(du^2)^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D}, \quad du \in \mathbb{R}^2$$

и симметричную билинейную форму $b$ с линейным элементом

$$\mathrm{II}(u, du) = -2\exp(2Q)\sin(Z(u^1, u^2))\, du^1\, du^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D}, \quad du \in \mathbb{R}^2.$$

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, что каждому решению системы уравнений Ефимова—Позняка в односвязной области $\tilde{D}$ можно поставить в соответствие $C^3$-гладкую сингулярную поверхность, для которой билинейная форма $G$ является первой билинейной формой на множестве $\tilde{D}$, а билинейная форма $b$ является второй билинейной формой на множестве $\{u \in \tilde{D}\colon\ \sin Z \neq 0\}$.

Следует подчеркнуть, что в настоящей статье все рассмотрения проводятся не в асимптотических, а в произвольных координатах на поверхности переменной отрицательной кривизны. Поэтому вместо операторов $\frac{\partial}{\partial u^1}$ и $\frac{\partial}{\partial u^2}$ мы используем операторы $L_1$ и $L_2$ дифференцирования по направлению асимптотических векторов. Более того, мы вообще не ограничиваем себя одной заранее выбранной системой координат. Поэтому все рассмотрения проводятся не в области $\tilde{D}$ пространства $\mathbb{R}^2$, а на многообразии $D$.

Значительную часть статьи составляет изложение теории регулярных поверхностей отрицательной кривизны как теории, изучающей два векторных поля, удовлетворяющих системе уравнений виртуальных асимптотических сетей. В следующем разделе статьи мы подробно опишем используемую систему обозначений.

## 2. Некоторые вспомогательные обозначения

### 2.1. Теория функций

Будем говорить, что $I$ — промежуток на $\mathbb{R}$, если $I \subseteq \mathbb{R}$, $I$ — линейно связное, плотное в себе множество.

Обозначим $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\infty, a\}$. Будем считать, что если $r \in \mathbb{Z}$, то $r < \infty$, $r < a$; $\infty < a$; если $r \in \mathbb{Z}$, то $r + \infty = \infty$, $\infty + r = \infty$, $r + a = a$, $a + r = a$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 0$, $I$ — промежуток на $\mathbb{R}$. Будем писать, что $\varphi \in C^r_*(I)$, если $\varphi$ — кусочно $C^r$-гладкая функция на $I$.

Пусть $F$ — некоторая функция. Через $\mathrm{D}(F)$ будем обозначать область определения функции $F$, а через $\mathrm{R}(F)$ будем обозначать область значений функции $F$.

Пусть $A$, $B$ — некоторые множества. Будем писать, что $F\colon A \to B$, если $F$ — некоторая функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$.

## 2.2. Гладкие многообразия

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 0$, $M$ — некоторое непустое множество, $\mu$ — некоторый $C^r$-гладкий координатный атлас на множестве $M$, $N = \dim((M, \mu))$. Тогда $N \in \mathbb{N}$; если $h \in \mu$, то $h$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(h) \subseteq M$, $\mathrm{R}(h)$ — открытое непустое множество в пространстве $\mathbb{R}^N$. Обозначим через $\mathrm{MA}(\mu, r)$ максимальный $C^r$-гладкий атлас на множестве $M$, содержащий атлас $\mu$. Обозначим $Q(p, \mu) = \{h \in \mu\colon p \in \mathrm{D}(h)\}$ при $p \in M$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $M$ — некоторое непустое множество, $\mu$ — некоторый $C^r$-гладкий ориентированный координатный атлас на множестве $M$. Обозначим через $\mathrm{MA}_+(\mu, r)$ максимальный $C^r$-гладкий ориентированный атлас на множестве $M$, содержащий атлас $\mu$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $M$ — некоторое непустое множество, $\mu$ — некоторый $C^r$-гладкий координатный атлас на множестве $M$, $\mu_+$ — некоторый $C^r$-гладкий ориентированный координатный атлас на множестве $M$, $\mu_+ \subseteq \mu$. Пусть $p \in M$. Обозначим через $Q_r(p, \mu, \mu_+)$ множество всех $h \in \mu$, удовлетворяющих следующим условиям: $p \in \mathrm{D}(H)$, можно указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $h|_\omega \in \mu_+$. Обозначим через $Q_l(p, \mu, \mu_+)$ множество всех $h \in \mu$, удовлетворяющих следующим условиям: $p \in \mathrm{D}(H)$, нельзя указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $h|_\omega \in \mu_+$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 0$, $(M, \mu)$ — $C^r$-гладкое многообразие. Тогда $M$ — некоторое непустое множество, $\mu$ — максимальный $C^r$-гладкий координатный атлас на множестве $M$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(M, \mu, \mu_+)$ — $C^r$-гладкое ориентированное многообразие. Тогда $M$ — некоторое непустое множество, $\mu$ — максимальный $C^r$-гладкий координатный атлас на множестве $M$, $\mu_+$ — максимальный $C^r$-гладкий ориентированный координатный атлас на множестве $M$, $\mu_+ \subseteq \mu$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(M, \mu)$ — $N$-мерное $C^r$-гладкое многообразие. Пусть $p \in M$, $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$, можно указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $\varphi \in C^1(\omega)$. Фиксируем $h \in Q(p, \mu)$, $k = \overline{1, N}$. Обозначим

$$D_k(p, h; p')\varphi(p') = \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\varphi(h^{-1}(x))\right|_{x = h(p)}.$$

Здесь $p'$ — связанная переменная.

**Замечание.** Вместо полной записи $D_k(p,h;p')\varphi(p')$ мы часто будем использовать сокращённые варианты записи: $D_k(h)\varphi(p')|_{p'=p}$, $D_k\varphi(p')|_{p'=p}$, $D_k(h)\varphi(p)$, $D_k\varphi(p)$.

**Замечание.** Заметим, что происхождение функции $\varphi$ может быть весьма нетривиальным. Пусть $p \in M$, $T$ — векторное поле на многообразии $(M,\mu)$, можно указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $T \in C^1(\omega)$. Фиксируем $h, h' \in Q(p,\mu)$, $k,n = \overline{1,N}$. Вполне допустима конструкция $D_k(p,h;p')T^n(p',h')$, однако чаще мы будем рассматривать конструкции вида $D_k(p,h;p')T^n(p',h)$.

Пусть $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r_1, r_2 \geqslant 0$, $(M_1,\mu_1)$ — $C^{r_1}$-гладкое многообразие, $(M_2,\mu_2)$ — $C^{r_2}$-гладкое многообразие, $F\colon M_1 \to M_2$. Обозначим $F^k(p,H) = H^k(F(p))$ при $p \in \mathrm{D}(F)$, $H \in Q(F(p),\mu_2)$.

Пусть $r, r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $0 \leqslant r \leqslant r_1, r_2$, $(M_1,\mu_1)$ — $C^{r_1}$-гладкое многообразие, $(M_2,\mu_2)$ — $C^{r_2}$-гладкое многообразие, $F\colon M_1 \to M_2$, $F \in C^r(M_1)$. Будем говорить, что $F$ — $C^r$-гладкая сингулярная поверхность в пространстве $(M_2,\mu_2)$.

## 2.3. Римановы пространства

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 2$, $(M,\mu)$ — $N$-мерное $C^r$-гладкое многообразие. Пусть $g$ — $C^1$-гладкая риманова метрика на многообразии $(M,\mu)$. Обозначим через $\Gamma$ риманову связность на многообразии $(M,\mu)$. Пусть $p \in M$, $T$ — векторное поле на многообразии $(M,\mu)$, можно указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $T \in C^1(\omega)$. Фиксируем $h \in Q(p,\mu)$, $k = \overline{1,N}$. Обозначим

$$\nabla_k(p,h;p',h')T^n(p',h') = D_k(p,h;p')T^n(p',h) + \Gamma^n_{km}(p,h)T^m(p,h)$$

при $n = \overline{1,N}$. Здесь $p'$, $h'$ — связанные переменные.

**Замечание.** В выражении $\nabla_k(p,h;p',h')T^n(p',h')$ не допускаются подстановки вместо переменной $n$. Например, выражение $\nabla_k(p,h;p',h')T^1(p',h')$ не имеет смысла. Для указания соответствующей компоненты получившегося тензора нужно написать $\nabla_k(p,h;p',h')T^n(p',h')|_{n=1}$.

**Замечание.** Вместо полной записи $\nabla_k(p,h;p',h')T^n(p',h')$ мы часто будем использовать сокращённые варианты записи: $\nabla_k T^n(p',h)|_{p'=p}$, $\nabla_k T^n(p,h)$.

**Замечание.** Аналогичным образом нетрудно описать действие оператора $\nabla$ на произвольное тензорное поле.

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(M,\mu)$ — $N$-мерное $C^r$-гладкое многообразие, $g$ — $C^2$-гладкая риманова метрика на многообразии $(M,\mu)$. Обозначим через $R$ тензор Римана—Кристоффеля на многообразии $(M,\mu)$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(M,\mu)$ — двумерное $C^r$-гладкое многообразие, $g$ — $C^2$-гладкая риманова метрика на многообразии $(M,\mu)$. Обозначим через $K$ гауссову кривизну метрики $g$. Тогда

$$K(p) = \frac{R_{12,12}(p,h)}{\det(g(p,h))} \quad \text{при} \quad p \in M, \quad h \in Q(p,\mu).$$

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(M, \mu, \mu_+)$ — $N$-мерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $g$ — $C^0$-гладкая риманова метрика на многообразии $(M, \mu, \mu_+)$. Обозначим через $\varepsilon$ дискриминантный тензор в пространстве $(M, \mu, \mu_+, g)$ [3, с. 248]. Тогда

$$\varepsilon_{i_1,\ldots,i_N}(p,h) = \sigma_1(p) \cdot \sigma(p,h) \cdot \sqrt{\det(g(p,h))} \cdot \tilde{\varepsilon}_{i_1,\ldots,i_N}$$
$$\text{при} \quad p \in M, \quad h \in Q(p,\mu), \quad i_1, \ldots, i_N = \overline{1,N}.$$

Здесь $\sigma_1$ — скалярное поле на многообразии $(M, \mu, \mu_+)$, $\sigma_1 \in C^0(M)$, $|\sigma_1(p)| = 1$ при $p \in M$, $\sigma(p,h) = 1$ при $p \in M$, $h \in Q_r(p, \mu, \mu_+)$, $\sigma(p,h) = -1$ при $p \in M$, $h \in Q_l(p, \mu, \mu_+)$, $\tilde{\varepsilon}$ — антисимметричный по всем индексам набор вещественных чисел, удовлетворяющий условию $\tilde{\varepsilon}_{1,\ldots,N} = 1$.

## 2.4. Евклидовы пространства

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $M^{(N)}$ — некоторое непустое множество, $h^{(N)}$ — некоторая обратимая функция, $\mathrm{D}(h^{(N)}) = M^{(N)}$, $\mathrm{R}(h^{(N)}) = \mathbb{R}^N$. Тогда $\{h^{(N)}\}$ можно рассматривать как $C^a$-гладкий ориентированный координатный атлас на множестве $M^{(N)}$. Рассмотрим симметричную билинейную форму $g^{(N)}$ в пространстве $(M^{(N)}, \{h^{(N)}\})$ со следующим линейным элементом в координатной карте $h^{(N)}$:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \ldots + (dx^N)^2 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad dx \in \mathbb{R}^N.$$

Нетрудно показать, что билинейная форма $g^{(N)}$ является $C^a$-гладкой римановой метрикой с римановой связностью $\Gamma^{(N)}$, удовлетворяющей условию $\Gamma^{(N)n}_{ij}(p, h^{(N)}) = 0$ при $p \in M^{(N)}$, $n, i, j = \overline{1,N}$ и с тензором Римана—Кристоффеля $R^{(N)}$, удовлетворяющим условию $R^{(N)}_{nm,ij}(p, h^{(N)}) = 0$ при $p \in M^{(N)}$, $n, m, i, j = \overline{1,N}$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 0$. Тогда $\big(M^{(N)}, \mathrm{MA}(\{h^{(N)}\}, r)\big)$ — $C^r$-гладкое многообразие.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$. Тогда $\big(M^{(N)}, \mathrm{MA}(\{h^{(N)}\}, r), \mathrm{MA}_+(\{h^{(N)}\}, r)\big)$ — $C^r$-гладкое ориентированное многообразие. Очевидно, метрику $g^{(N)}$ можно рассматривать как $C^{r-1}$-гладкую метрику на многообразии $\big(M^{(N)}, \mathrm{MA}(\{h^{(N)}\}, r), \mathrm{MA}_+(\{h^{(N)}\}, r)\big)$.

Обозначим $E^N = (M^{(N)}, h^{(N)}, g^{(N)})$. Пространство $E^N$ будем называть $N$-мерным евклидовым пространством.

**Замечание.** Далее мы не будем различать пространство $E^N$ и множество $M^{(N)}$ точек этого пространства.

**Замечание.** Обозначим $\mu^{(N)} = \mathrm{MA}(\{h^{(N)}\}, \infty)$. Далее все геометрические объекты в пространстве $E^N$ мы будем рассматривать в атласе $\mu^{(N)}$.

# 3. Сингулярная поверхность в трёхмерном евклидовом пространстве. Основная система уравнений

В этом разделе мы рассмотрим сингулярную поверхность в трёхмерном евклидовом пространстве.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(D, \mu)$ — двумерное $C^r$-гладкое многообразие, $F\colon D \to E^3$, $F \in C^1(D)$. Обозначим

$$G_{\alpha\beta}(p,h) = g^{(3)}_{nm}(F(p), H) D_\alpha(p,h;p') F^n(p', H) D_\beta(p,h;p') F^m(p', H)$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in \mu^{(3)}$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$. Фиксируем $p \in D$. Геометрический объект

$$G(p) = \bigl\{\{G_{\alpha\beta}(p,h)\}_{\alpha,\beta=\overline{1,2}}\bigr\}_{h\in Q(p,\mu)}$$

является два раза ковариантным симметричным тензором в пространстве $T_pD$. Билинейную форму $G(p)$ называют первой билинейной формой поверхности $F$ в точке $p$. Очевидно, $G(p)$ — неотрицательная билинейная форма в пространстве $T_pD$. Нетрудно показать, что $p$ является регулярной точкой поверхности $F$ тогда и только тогда, когда $G(p)$ — положительная билинейная форма в пространстве $T_pD$. Очевидно, $G \in C^0(D)$.

**Замечание.** Далее мы не будем выписывать аргументов рассматриваемых функций без крайней необходимости.

Обозначим

$$\xi^k_\alpha = D_\alpha F^k$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $\alpha = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,3}$. Фиксируем $p \in D$. Геометрический объект

$$\xi(p) = \Bigl\{\{\xi^k_\alpha(p,h,H)\}^{k=\overline{1,3}}_{\alpha=\overline{1,2}}\Bigr\}_{h\in Q(p,\mu),\ H\in Q(F(p),\mu^3)}$$

является смешанным тензором на поверхности $F$ [7, с. 546], один раз ковариантным в пространстве $T_pD$ и один раз контравариантным в пространстве $T_{F(p)}E^3$. Очевидно, $\xi \in C^0(D)$, $g^{(3)}_{nm}\xi^n_\alpha\xi^m_\beta = G_{\alpha\beta}$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$.

Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Геометрические объекты

$$\xi_1(p,h) = \Bigl\{\{\xi^k_1(p,h,H)\}^{k=\overline{1,3}}\Bigr\}_{H\in Q(F(p),\mu^3)},$$

$$\xi_2(p,h) = \Bigl\{\{\xi^k_2(p,h,H)\}^{k=\overline{1,3}}\Bigr\}_{H\in Q(F(p),\mu^3)}$$

являются векторами в пространстве $T_{F(p)}E^3$. Очевидно, $p$ является регулярной точкой поверхности $F$ тогда и только тогда, когда векторы $\xi_1(p,h)$, $\xi_2(p,h)$ линейно независимы. Линейное множество $L(\xi_1, \xi_2)$ не зависит от выбора координатной карты $h \in Q(p,\mu)$ и называется касательным пространством к поверхности $F$ в точке $p$.

Теперь изменим точку зрения. Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(D, \mu)$ — двумерное $C^r$-гладкое многообразие, $G$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu)$, $G \in C^0(D)$. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$g^{(3)}_{nm} D_\alpha F^n D_\beta F^m = G_{\alpha\beta}, \quad F \in C^1(D), \tag{3.1}$$

где $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^{(3)})$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$. Пусть $G$ — риманова метрика на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $F$ — некоторое решение системы уравнений (3.1). Тогда функцию $F$ называют изометрическим погружением римановой метрики $G$ в пространство $E^3$.

Очевидно, систему уравнений (3.1) можно переписать в виде

$$D_\alpha F^k = \xi^k_\alpha, \quad g^{(3)}_{nm} \xi^n_\alpha \xi^m_\beta = G_{\alpha\beta}, \quad F \in C^1(D), \quad \xi \in C^0(D), \tag{3.2}$$

где $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^{(3)})$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,3}$.

## 4. Уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци

В этом разделе мы рассмотрим $C^3$-гладкое изометрическое погружение двумерной римановой метрики в трёхмерное евклидово пространство.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 2$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $G \in C^1(D)$, $F$ — изометрическое погружение римановой метрики $G$ в пространство $E^3$, $F \in C^2(D)$. Тогда $\xi \in C^1(D)$.

Обозначим

$$\nu^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij\cdot}{}^{k} \xi^i_\alpha \xi^j_\beta \varepsilon^{\alpha\beta}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $k = \overline{1,3}$. Фиксируем $p \in D$. Геометрический объект

$$\nu(p) = \Big\{ \{\nu^k(p, H)\}^{k=\overline{1,3}} \Big\}_{H \in Q(F(p), \mu^{3,2})}$$

является вектором в касательном пространстве $T_{F(p)}E^3$. Нетрудно показать, что

$$\nu \in C^1(D), \quad g^{(3)}_{ij} \nu^i \xi^j_\alpha = 0, \quad g^{(3)}_{ij} \nu^i \nu^j = 1$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $\alpha = \overline{1,2}$. Фиксируем $p \in D$. Очевидно, $\nu(p)$ — единичный вектор в касательном пространстве $T_{F(p)}E^3$, ортогональный касательной плоскости к поверхности $F$ в точке $p$. Такой вектор называется единичным нормальным вектором к поверхности $F$ в точке $F(p)$. Фиксируем координатную карту $h \in Q(p, \mu)$. Пусть можно указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $h|_\omega \in \mu_+$. Очевидно, векторы $\xi_1(p, h)$, $\xi_2(p, h)$, $\nu(p)$ образуют правый базис в пространстве $T_{F(p)}E^3$.

Итак, мы получили следующую систему условий:

$$D_\alpha F^k = \xi^k_\alpha, \quad g^{(3)}_{ij} \xi^i_\alpha \xi^j_\beta = G_{\alpha\beta}, \quad g^{(3)}_{ij} \nu^i \xi^j_\alpha = 0, \quad g^{(3)}_{ij} \nu^i \nu^j = 1, \tag{4.1}$$

где $F \in C^2(D)$, $\xi \in C^1(D)$, $\nu \in C^1(D)$, $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,3}$.

Обозначим

$$b_{\alpha\beta} = g^{(3)}_{ij} (\nabla_\alpha \xi^i_\beta) \nu^j$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha,\beta = \overline{1,2}$.

**Замечание.** Здесь

$$\nabla_\alpha \xi^i_\beta = D_\alpha \xi^i_\beta + \Gamma^{(3)i}_{nm} \xi^n_\alpha \xi^m_\beta - \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \xi^i_\mu$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha,\beta = \overline{1,2}$, $i = \overline{1,3}$. Мы использовали определение ковариантной производной от смешанного тензора. Ковариантные производные от смешанных тензоров подробно рассматриваются в [7, с. 546].

Фиксируем $p \in D$. Геометрический объект

$$b(p) = \big\{\{b_{\alpha\beta}(p,h)\}_{\alpha,\beta=\overline{1,2}}\big\}_{h\in Q(p,\mu)}$$

является два раза ковариантным симметричным тензором в пространстве $T_pD$. Билинейную форму $b(p)$ называют второй билинейной формой поверхности $F$ в точке $p$. Очевидно,

$$b_{\alpha\beta} = g^{(3)}_{ij} \big(D_\alpha \xi^i_\beta + \Gamma^{(3)i}_{nm} \xi^n_\alpha \xi^m_\beta\big) \nu^j, \quad b \in C^0(D),$$

где $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha,\beta = \overline{1,2}$.

Дифференцируя соотношения (4.1), можно вывести [7, с. 553] деривационные уравнения Вейнгартена:

$$D_\alpha F^k = \xi^k_\alpha, \quad \nabla_\alpha \xi^k_\beta = b_{\alpha\beta} \nu^k, \quad \nabla_\alpha \nu^k = -b_\alpha{}^\mu \xi^k_\mu, \tag{4.2}$$

где $F \in C^2(D)$, $\xi \in C^1(D)$, $\nu \in C^1(D)$, $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha,\beta = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,3}$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $G \in C^2(D)$, $F$ — изометрическое погружение римановой метрики $G$ в пространство $E^3$, $F \in C^3(D)$. Тогда $\xi \in C^2(D)$, $\nu \in C^2(D)$, $b \in C^1(D)$.

Составляя условия интегрируемости уравнений Вейнгартена, можно получить [7, с. 559] уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци:

$$b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha} = 0, \quad \det(b) = K \cdot \det(G), \quad \nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0, \tag{4.3}$$

где $b \in C^1(D)$, $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,2}$.

Теперь изменим точку зрения. Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $G \in C^2(D)$. Рассмотрим некоторое решение $b$ системы уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци. Справедлива следующая теорема (см. [8, с. 559], [6, с. 361]).

**Теорема (Боннэ).** *Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $G \in C^2(D)$. Пусть $b$ — некоторое решение системы уравнений* (4.3). *Тогда можно указать отображение $F\colon D \to E^3$, для которого справедливы следующие утверждения*:

1) *$F$ — изометрическое погружение римановой метрики $G$ в пространство $E^3$, $F \in C^3(D)$;*
2) *$b$ — вторая билинейная форма поверхности $F$.*

# 5. Некоторые вспомогательные сведения из теории векторных и тензорных полей

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения из теории векторных и тензорных полей.

**Определение.** Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(D, \mu)$ — двумерное $C^r$-гладкое многообразие. Пусть $T_1, T_2$ — векторные поля на многообразии $(D, \mu)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$. Пусть $p \in D$, $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, можно указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $\varphi \in C^1(\omega)$. Обозначим

$$\tilde{L}_1(p, h; p')\varphi(p') = T_1^\mu(p, h) D_\mu(p, h; p')\varphi(p'),$$
$$\tilde{L}_2(p, h; p')\varphi(p') = T_2^\mu(p, h) D_\mu(p, h; p')\varphi(p')$$

при $h \in Q(p, \mu)$.

**Определение.** Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 2$, $(D, \mu)$ — двумерное $C^r$-гладкое многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D, \mu)$, $G \in C^1(D)$. Пусть $T_1$, $T_2$ — векторные поля на многообразии $(D, \mu)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$. Пусть $p \in D$, $\varphi$ — тензорное поле на многообразии $(D, \mu)$, можно указать такую окрестность $\omega$ точки $p$, что $\varphi \in C^1(\omega)$. Обозначим

$$L_1(p, h; p', h')\varphi(p', h') = T_1^\mu(p, h)\nabla_\mu(p, h; p', h')\varphi(p', h'),$$
$$L_2(p, h; p', h')\varphi(p', h') = T_2^\mu(p, h)\nabla_\mu(p, h; p', h')\varphi(p', h')$$

при $h \in Q(p, \mu)$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие. Пусть $T_1$, $T_2$ — векторные поля на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$, $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$.

Фиксируем $p \in D$. Так как $\det(T) \neq 0$ при $h \in Q(p, \mu)$, то $(T_1(p), T_2(p))$ — базис в пространстве $T_pD$. Очевидно, что

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} T_1^\alpha T_2^\beta = \det(T) \neq 0$$

при $h \in Q(p, \mu)$. Обозначим

$$P_\beta^1 = -\frac{\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} T_2^\alpha}{\det(T)}, \quad P_\beta^2 = \frac{\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} T_1^\alpha}{\det(T)} \tag{5.1}$$

при $h \in Q(p, \mu)$, $\beta = \overline{1, 2}$. Тогда

$$P_\gamma^\alpha T_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha$$

при $h \in Q(p,\mu)$, $\alpha,\beta = \overline{1,2}$. Нетрудно показать, что геометрические объекты

$$P^1(p) = \bigl\{\{P^1_\alpha(p,h)\}_{\alpha=\overline{1,2}}\bigr\}_{h\in Q(p,\mu)}, \quad P^2(p) = \bigl\{\{P^2_\alpha(p,h)\}_{\alpha=\overline{1,2}}\bigr\}_{h\in Q(p,\mu)}$$

являются один раз ковариантными тензорами в пространстве $T_pD$. Очевидно, что

$$\det(P) = \frac{1}{\det(T)} \neq 0$$

при $h \in Q(p,\mu)$. Тогда $(P^1(p), P^2(p))$ — базис в пространстве $(T_pD)^*$, дуальный к базису $(T_1(p), T_2(p))$ в пространстве $T_pD$. Очевидно, $P_1, P_2 \in C^0(D)$.

**Замечание.** Пусть $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $0 \leqslant r_0 \leqslant r-1$, $T_1, T_2 \in C^{r_0}(D)$. Очевидно, $P_1, P_2 \in C^{r_0}(D)$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $G \in C^0(D)$. Пусть $T_1$, $T_2$ — векторные поля на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$, $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$ и выполнены условия

$$G_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_1 = 1, \quad G_{\alpha\beta} T^\alpha_2 T^\beta_2 = 1 \tag{5.2}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Очевидно, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_2 = \sigma \cdot \sqrt{\det(G)} \cdot \det(T) \neq 0$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Используя равенства (5.1), получаем, что

$$P^1_\beta = -\frac{\varepsilon_{\alpha\beta} T^\alpha_2}{\varepsilon_{\gamma\delta} T^\gamma_1 T^\delta_2}, \quad P^2_\beta = \frac{\varepsilon_{\alpha\beta} T^\alpha_1}{\varepsilon_{\gamma\delta} T^\gamma_1 T^\delta_2} \tag{5.3}$$

при $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$.

Обозначим

$$\overline{G}_{\gamma\delta} = G_{\alpha\beta} T^\alpha_\gamma T^\beta_\delta$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\gamma,\delta = \overline{1,2}$. Тогда $\det(\overline{G}) = \det(G) \cdot (\det(T))^2$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Так как $G_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_1 = 1$, $G_{\alpha\beta} T^\alpha_2 T^\beta_2 = 1$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, то $\det(\overline{G}) = 1 - (G_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_2)^2$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Так как $\varepsilon_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_2 = \sigma \cdot \sqrt{\det(G)} \cdot \det(T)$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, то

$$\bigl(G_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_2\bigr)^2 + \bigl(\varepsilon_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_2\bigr)^2 = 1$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Тогда существует единственное скалярное поле $Z$ на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, удовлетворяющее следующим условиям: $-\pi \leqslant Z < \pi$ при $p \in D$,

$$\cos Z = G_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_2, \quad \sin Z = \varepsilon_{\alpha\beta} T^\alpha_1 T^\beta_2 \tag{5.4}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Фиксируем точку $p_0 \in D$. Пусть

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(p_0,h) T^\alpha_1(p_0,h) T^\beta_2(p_0,h) > 0$$

при $h \in Q(p_0,\mu)$. Выберем такую окрестность $\omega$ точки $p_0$, что $\varepsilon_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_2^\beta > 0$ при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$. Тогда $Z = \arccos\big(G_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_2^\beta\big)$ при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$. Следовательно, $Z \in C^0(\omega)$. Пусть

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(p_0,h)T_1^\alpha(p_0,h)T_2^\beta(p_0,h) < 0$$

при $h \in Q(p_0,\mu)$. Выберем такую окрестность $\omega$ точки $p_0$, что $\varepsilon_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_2^\beta < 0$ при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$. Тогда $Z = -\arccos\big(G_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_2^\beta\big)$ при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$. Следовательно, $Z \in C^0(\omega)$. В силу произвольности выбора точки $p_0 \in D$ получаем, что $Z \in C^0(D)$. Итак, существует скалярное поле $Z$ на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, удовлетворяющее условию $Z \in C^0(D)$ и условиям (5.4).

Пусть $T_1$, $T_2$ — векторные поля на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$, $Z$ — скалярное поле на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $Z \in C^0(D)$ и выполнены условия (5.2), (5.4).

Фиксируем $p \in D$. Так как $G_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_1^\beta = 1$ при $h \in Q(p,\mu)$, то векторы $T_1$, $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_1^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $T_pD$. Раскладывая векторы $T_1$ и $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_1^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$ по векторам $T_2$ и $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_2^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$, получаем

$$\begin{aligned} T_1^\beta &= \cos Z T_2^\beta - \sin Z \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_2^\mu, \\ \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_1^\mu &= \sin Z T_2^\beta + \cos Z \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_2^\mu \end{aligned} \tag{5.5}$$

при $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Так как $G_{\alpha\beta}T_2^\alpha T_2^\beta = 1$ при $h \in Q(p,\mu)$, то векторы $T_2$, $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_2^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $T_pD$. Раскладывая векторы $T_2$ и $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_2^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$ по векторам $T_1$ и $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_1^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$, получаем

$$\begin{aligned} T_2^\beta &= \cos Z T_1^\beta + \sin Z \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_1^\mu, \\ \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_2^\mu &= -\sin Z T_1^\beta + \cos Z \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta}T_1^\mu \end{aligned} \tag{5.6}$$

при $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$.

Пусть $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Используя условия (5.2), (5.4), нетрудно показать, что

$$\det(G) = \Big(\frac{\sin Z}{\det(T)}\Big)^2, \tag{5.7}$$

$$G_{\alpha\beta} = P_\alpha^1 P_\beta^1 + \cos Z(P_\alpha^1 P_\beta^2 + P_\beta^1 P_\alpha^2) + P_\alpha^2 P_\beta^2, \tag{5.8}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\sin Z}{\det(T)} \cdot \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} \tag{5.9}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\alpha,\beta = \overline{1,2}$.

**Замечание.** Пусть $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $0 \leqslant r_0 \leqslant r$, $F_1$, $F_2$ — скалярные поля на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $F_1, F_2 \in C^{r_0}(D)$, $Z$ — скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Z \in C^0(D)$, $\cos Z = F_1$, $\sin Z = F_2$ при $p \in D$. Нетрудно показать, что $Z \in C^{r_0}(D)$.

Пусть $r \geqslant 2$, $G \in C^1(D)$, $T_1, T_2 \in C^1(D)$. Действуя на равенства (5.2), (5.4) операторами $L_1$, $L_2$, получаем

$$\begin{gathered} G_{\beta\gamma}\big(L_\alpha T_1^\beta\big)T_1^\gamma = 0, \\ G_{\beta\gamma}\big(L_\alpha T_1^\beta\big)T_2^\gamma + G_{\beta\gamma}T_1^\beta L_\alpha T_2^\gamma = -\sin Z L_\alpha Z, \\ G_{\beta\gamma}\big(L_\alpha T_2^\beta\big)T_2^\gamma = 0 \end{gathered} \tag{5.10}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $\alpha = \overline{1,2}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha,1} &= G_{\beta\gamma}\big(L_\alpha T_1^\beta\big)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\gamma} T_1^\mu = \varepsilon_{\mu\beta} T_1^\mu L_\alpha T_1^\beta, \\ \lambda_{\alpha,2} &= G_{\beta\gamma}\big(L_\alpha T_2^\beta\big)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\gamma} T_2^\mu = \varepsilon_{\mu\beta} T_2^\mu L_\alpha T_2^\beta \end{aligned}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $\alpha = \overline{1,2}$. Фиксируем $p \in D$. Геометрические объекты $\lambda_{1,1}(p)$, $\lambda_{2,1}(p)$, $\lambda_{1,2}(p)$, $\lambda_{2,2}(p)$ являются скалярами в пространстве $T_pD$. Очевидно, $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,2} \in C^0(D)$.

**Замечание.** Пусть $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $1 \leqslant r_0 \leqslant r - 1$, $G \in C^{r_0}$, $T_1, T_2 \in C^{r_0}(D)$. Тогда $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}, \lambda_{1,2}, \lambda_{2,2} \in C^{r_0 - 1}(D)$.

Фиксируем $p \in D$, $\alpha = \overline{1,2}$. Раскладывая вектор $\Big\{\{L_\alpha T_1^\beta\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$ по векторам $T_1$ и $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\beta} T_1^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$, получаем

$$L_\alpha T_1^\beta = \lambda_{\alpha,1} \cdot \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\beta} T_1^\mu$$

при $h \in Q(p, \mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Раскладывая вектор $\Big\{\{L_\alpha T_2^\beta\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$ по векторам $T_2$ и $\Big\{\{\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\beta} T_2^\mu\}^{\beta=\overline{1,2}}\Big\}_{h\in Q(p,\mu)}$, получаем

$$L_\alpha T_2^\beta = \lambda_{\alpha,2} \cdot \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\beta} T_2^\mu$$

при $h \in Q(p, \mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Подставляя полученные выражения во второе уравнение системы (5.10), получаем

$$\lambda_{\alpha,2} - \lambda_{\alpha,1} = L_\alpha Z.$$

Итак,

$$L_\alpha T_1^\beta = \lambda_{\alpha,1} \cdot \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\beta} T_1^\mu, \quad L_\alpha T_2^\beta = \lambda_{\alpha,2} \cdot \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \cdot\beta} T_2^\mu, \quad \lambda_{\alpha,2} - \lambda_{\alpha,1} = L_\alpha Z \tag{5.11}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$.

Пусть $p \in D$, $b$ — симметричная билинейная форма в пространстве $T_pD$. Обозначим

$$\tilde{K} = \frac{\det(b(h))}{\det(G(p,h))}$$

при $h \in Q(p,\mu)$. Геометрический объект $\tilde{K}$ является скаляром в пространстве $T_pD$.

Обозначим

$$A_1 = \{T \in T_pD \colon \forall h \in Q(p,\mu)\ (b_{\alpha\beta}T^\alpha T^\beta = 0)\}.$$

Очевидно, $\theta \in A_1$. Будем говорить, что $T$ — асимптотический вектор билинейной формы $b$, если $T \in A_1$, $T \neq \theta$.

Обозначим

$$A_2(\lambda) = \{T \in T_pD \colon \forall h \in Q(p,\mu)\ \forall \beta = \overline{1,2}\ (b_{\alpha\beta}T^\alpha = \lambda \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}T^\alpha)\}$$

при $\lambda \in \mathbb{R}$. Очевидно, $A_2(\lambda)$ — линейное множество в пространстве $T_pD$. Нетрудно показать, что если $\lambda^2 \neq -\tilde{K}$, то $A_2(\lambda) = \{\theta\}$; если $\lambda^2 = -\tilde{K}$, $b \neq \theta$, то $\dim(A_2(\lambda)) = 1$; если $\lambda^2 = -\tilde{K}$, $b = \theta$, то $A_2(\lambda) = T_pD$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Нетрудно показать, что $A_2(\lambda_1) \cap A_2(\lambda_2) = \{\theta\}$.

Пусть $T \in A_1$, $T \neq \theta$. Так как

$$T \neq \theta,$$
$$(b_{\alpha\beta}T^\alpha)T^\beta = 0 \quad \text{при} \quad h \in Q(p,\mu),$$
$$(\varepsilon_{\alpha\beta}T^\alpha)T^\beta = 0 \quad \text{при} \quad h \in Q(p,\mu),$$

то тензоры $\left\{\{b_{\alpha\beta}T^\alpha\}_{\beta=\overline{1,2}}\right\}_{h \in Q(p,\mu)}$ и $\left\{\{\varepsilon_{\alpha\beta}T^\alpha\}_{\beta=\overline{1,2}}\right\}_{h \in Q(p,\mu)}$ линейно зависимы. Так как $\left\{\{\varepsilon_{\alpha\beta}T^\alpha\}_{\beta=\overline{1,2}}\right\}_{h \in Q(p,\mu)} \neq \theta$, то можно указать такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что

$$b_{\alpha\beta}T^\alpha = \lambda \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}T^\alpha \quad \text{при} \quad h \in Q(p,\mu), \quad \beta = \overline{1,2}.$$

Итак, если $T \in A_1$, то можно указать такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что $T \in A_2(\lambda)$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in A_2(\lambda)$. Тогда

$$b_{\alpha\beta}T^\alpha T^\beta = \lambda \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}T^\alpha T^\beta = 0 \quad \text{при} \quad h \in Q(p,\mu).$$

Итак, если $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in A_2(\lambda)$, то $T \in A_1$.

Пусть $\tilde{K} < 0$. Обозначим

$$H_1 = A_2\left(-\sqrt{-\tilde{K}}\right), \quad H_2 = A_2\left(\sqrt{-\tilde{K}}\right).$$

Будем говорить, что $T$ — асимптотический вектор первого семейства билинейной формы $b$, если $T \in H_1$, $T \neq \theta$. Будем говорить, что $T$ — асимптотический вектор второго семейства билинейной формы $b$, если $T \in H_2$, $T \neq \theta$.

Пусть $Q$ — скалярное поле на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $Q \in C^0(D)$, $b$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $b \in C^0(D)$, $\det(b) = -e^{4Q} \cdot \det(G)$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$.

Фиксируем $p_0 \in D$. Так как $\det(b(p_0,h)) = -e^{4Q(p_0)} \cdot \det(G(p_0,h))$ при $h \in Q(p_0,\mu)$, то $\dim A_2(-e^{2Q(p_0)}) = 1$, $\dim A_2(e^{2Q(p_0)}) = 1$, поэтому можно указать такие векторы $T_{1,0}, T_{2,0} \in T_{p_0}D$, что

$$G_{\alpha\beta}(p_0,h)T^\alpha_{1,0}T^\alpha_{1,0} = 1, \quad G_{\alpha\beta}(p_0,h)T^\alpha_{2,0}T^\alpha_{2,0} = 1,$$
$$b_{\alpha\beta}(p_0,h)T^\alpha_{1,0} = -e^{2Q(p_0)} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}(p_0,h)T^\alpha_{1,0}, \quad b_{\alpha\beta}(p_0,h)T^\alpha_{2,0} = e^{2Q(p_0)} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}(p_0,h)T^\alpha_{2,0}$$

при $h \in Q(p_0, \mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Так как $b(p_0)$ — симметричная билинейная форма в пространстве $T_{p_0}D$, $b \in C^0(D)$, то можно указать такую координатную карту $h_0 \in Q(p_0, \mu)$, что $b_{22}(p, h_0) \neq 0$ при $p \in \mathrm{D}(h_0)$. Вычисляя в координатах, нетрудно показать, что существуют такие векторные поля $T_1$, $T_2$ на множестве $\mathrm{D}(h_0)$, что $T_1(p_0) = T_{1,0}$, $T_2(p_0) = T_{2,0}$, $T_1, T_2 \in C^0(\mathrm{D}(h_0))$ и выполнены условия

$$G_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_1^\alpha = 1, \quad G_{\alpha\beta}T_2^\alpha T_2^\alpha = 1,$$
$$b_{\alpha\beta}T_1^\alpha = -e^{2Q} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}T_1^\alpha, \quad b_{\alpha\beta}T_2^\alpha = e^{2Q} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}T_2^\alpha$$

при $p \in \mathrm{D}(h_0)$, $h \in Q(p, \mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Пусть $(D, \mu, \mu_+)$ — односвязное многообразие. Можно показать, что существуют такие векторные поля на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, что $T_1, T_2 \in C^0(D)$ и выполнены условия (5.2) и условия

$$b_{\alpha\beta}T_1^\alpha = -e^{2Q} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}T_1^\alpha, \quad b_{\alpha\beta}T_2^\alpha = e^{2Q} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta}T_2^\alpha \tag{5.12}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $\beta = \overline{1,2}$.

Пусть $Q$ — скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Q \in C^0(D)$, $b$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $b \in C^0(D)$, $T_1$, $T_2$ — векторные поля на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$ и выполнены условия (5.2), (5.12).

Так как $T_1(p) \neq \theta$ при $p \in D$, то $\det(b) = -e^{4Q} \cdot \det(G)$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Так как $T_1(p) \neq \theta$, $T_2(p) \neq \theta$, $-e^{2Q(p)} \neq e^{2Q(p)}$ при $p \in D$, то $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Пусть $Z$ — скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Z \in C^0(D)$ и выполнены условия (5.4).

Используя условия (5.4), (5.12), получаем

$$b_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_1^\beta = 0, \quad b_{\alpha\beta}T_1^\alpha T_2^\beta = -e^{2Q}\sin Z, \quad b_{\alpha\beta}T_2^\alpha T_2^\beta = 0 \tag{5.13}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Используя условия (5.13), нетрудно показать, что

$$b_{\alpha\beta} = -e^{2Q}\sin Z(P_\alpha^1 P_\beta^2 + P_\beta^1 P_\alpha^2) \tag{5.14}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$.

**Замечание.** Пусть $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $0 \leqslant r_0 \leqslant r - 1$, $G \in C^{r_0}(D)$, $b \in C^{r_0}(D)$. Нетрудно показать, что $T_1, T_2 \in C^{r_0}(D)$.

Пусть $r \geqslant 2$, $G \in C^1(D)$, $b \in C^1(D)$. Действуя на равенства (5.13) операторами $L_1$, $L_2$, получаем

$$\begin{gathered}(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_1^\gamma + 2b_{\beta\gamma}(L_2 T_1^\beta)T_1^\gamma = 0, \quad (L_1 b_{\beta\gamma})T_2^\beta T_2^\gamma + 2b_{\beta\gamma}(L_1 T_2^\beta)T_2^\gamma = 0\\
(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma + b_{\beta\gamma}(L_2 T_1^\beta)T_2^\gamma + b_{\beta\gamma}T_1^\beta L_2 T_2^\gamma = -2e^{2Q}\sin Z L_2 Q - e^{2Q}\cos Z L_2 Z,\\
(L_1 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma + b_{\beta\gamma}(L_1 T_1^\beta)T_2^\gamma + b_{\beta\gamma}T_1^\beta L_1 T_2^\gamma = -2e^{2Q}\sin Z L_1 Q - e^{2Q}\cos Z L_1 Z,\end{gathered} \tag{5.15}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Используя равенства (5.2), (5.4), (5.11), (5.12), (5.15), получаем

$$
\begin{gathered}
(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_1^\gamma - 2\lambda_{2,1}e^{2Q} = 0, \quad (L_1 b_{\beta\gamma})T_2^\beta T_2^\gamma + 2\lambda_{1,2}e^{2Q} = 0, \\
(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma = -2e^{2Q}\sin Z L_2 Q, \quad (L_1 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma = -2e^{2Q}\sin Z L_1 Q, \\
\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} = L_1 Z, \quad \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} = L_2 Z
\end{gathered} \tag{5.16}
$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$.

Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Преобразуем выражение $(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma$:

$$
\begin{aligned}
(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma &= (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma})T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma = \\
&= (\nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma + (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma = \\
&= (L_1 b_{\beta\gamma})T_2^\beta T_2^\gamma + (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma.
\end{aligned}
$$

Преобразуем выражение $(L_1 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma$:

$$
\begin{aligned}
(L_1 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_2^\gamma &= (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma})T_1^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma = (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma})T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma = \\
&= (\nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma + (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma = \\
&= (L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_1^\gamma + (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma.
\end{aligned}
$$

Теперь систему (5.16) можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_1^\gamma - 2\lambda_{2,1}e^{2Q} = 0, \quad (L_1 b_{\beta\gamma})T_2^\beta T_2^\gamma + 2\lambda_{1,2}e^{2Q} = 0, \\
(L_2 b_{\beta\gamma})T_1^\beta T_1^\gamma + (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma = -2e^{2Q}\sin Z L_1 Q, \\
(L_1 b_{\beta\gamma})T_2^\beta T_2^\gamma + (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma = -2e^{2Q}\sin Z L_2 Q, \\
\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} = L_1 Z, \quad \lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} = L_2 Z
\end{gathered} \tag{5.17}
$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Нетрудно подсчитать, что

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,1} &= \sin Z L_2 Q + \frac{1}{2}e^{-2Q}(\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma - L_1 Z, \\
\lambda_{2,1} &= -\sin Z L_1 Q - \frac{1}{2}e^{-2Q}(\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma, \\
\lambda_{1,2} &= \sin Z L_2 Q + \frac{1}{2}e^{-2Q}(\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma, \\
\lambda_{2,2} &= L_2 Z - \sin Z L_1 Q - \frac{1}{2}e^{-2Q}(\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$.

Пусть $T_1$, $T_2$ — векторные поля на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$, $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $Z$ — скалярное поле на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $Z \in C^0(D)$ и выполнены условия (5.2), (5.4). Определим геометрический объект $b$ равенствами (5.14). Очевидно, $b$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $b \in C^0(D)$. Используя равенства (5.3), (5.4), (5.14), нетрудно показать, что выполнены условия (5.12).

**Замечание.** Пусть $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $0 \leqslant r_0 \leqslant r-1$, $Q \in C^{r_0}(D)$, $T_1, T_2 \in C^{r_0}(D)$, $Z \in C^{r_0}(D)$. Очевидно, $b \in C^{r_0}(D)$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 1$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $Q$ — скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Q \in C^0(D)$, $T_1$, $T_2$ — векторные поля на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $T_1, T_2 \in C^0(D)$, $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $Z$ — скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Z \in C^0(D)$.

Определим геометрический объект $G$ равенствами (5.8). Очевидно, что $G$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $G \in C^0(D)$. Фиксируем $p \in D$. Используя равенства (5.8), нетрудно показать, что $G(p)$ — неотрицательная билинейная форма в пространстве $T_pD$, $G(p)$ является положительной билинейной формой в пространстве $T_pD$ тогда и только тогда, когда $\sin(Z(p)) \neq 0$.

**Замечание.** Обозначим $D_1 = \{p \in D\colon \sin Z \neq 0\}$, $\mu_1 = \{h \in \mu\colon \mathrm{D}(h) \subseteq D_1\}$, $\mu_{1,+} = \{h \in \mu_+\colon \mathrm{D}(h) \subseteq D_1\}$. Так как $Z \in C^0(D)$, то $D_1$ — открытое множество. Пусть $D_1 \neq \varnothing$. Очевидно, что $(D_1, \mu_1, \mu_{1,+})$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $\big\{\{G(p,h)\}_{h \in Q(p,\mu_1)}\big\}_{p \in D_1}$ — риманова метрика на многообразии $(D_1, \mu_1)$.

Используя равенства (5.8), нетрудно показать, что

$$G_{\alpha\beta} T_1^\alpha T_1^\beta = 1, \quad G_{\alpha\beta} T_1^\alpha T_2^\beta = \cos Z, \quad G_{\alpha\beta} T_2^\alpha T_2^\beta = 1 \tag{5.19}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Используя равенства (5.19), нетрудно показать, что

$$\det(G) = \left(\frac{\sin Z}{\det(T)}\right)^2 \tag{5.20}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$.

Определим геометрический объект $\varepsilon$ равенствами (5.9). Очевидно, что $\varepsilon$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $\varepsilon \in C^0(D)$.

Из равенств (5.9), (5.20) получаем, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \operatorname{sgn}\left(\frac{\sin Z}{\det(T)}\right) \cdot \sqrt{\det(G)} \cdot \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $\alpha, \beta = \overline{1, 2}$.

**Замечание.** Пусть $D_1 \neq \varnothing$. Можно показать, что существует такое подмножество $\mu_{2,+}$ множества $\mu_1$, что $(D_1, \mu_1, \mu_{2,+})$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $\big\{\{\varepsilon(p,h)\}_{h \in Q(p,\mu_1)}\big\}_{p \in D_1}$ — дискриминантный тензор метрики $\big\{\{G(p,h)\}_{h \in Q(p,\mu_1)}\big\}_{p \in D_1}$.

Используя равенства (5.9), нетрудно показать, что

$$\varepsilon_{\alpha\beta} T_1^\alpha T_2^\beta = \sin Z \tag{5.21}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$.

Определим геометрический объект $b$ равенствами (5.14). Очевидно, что $b$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $b \in C^0(D)$. Используя равенства (5.14), нетрудно показать, что справедливы равенства (5.13).

Используя равенства (5.13), нетрудно показать, что

$$\det(b) = -e^{4Q} \cdot \left(\frac{\sin Z}{\det(T)}\right)^2 \tag{5.22}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Из равенств (5.20), (5.22) получаем, что $\det(b) = -e^{4Q} \cdot \det(G)$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Используя равенства (5.1), (5.9), (5.14), нетрудно показать, что справедливы равенства (5.12).

**Замечание.** Пусть $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}$, $0 \leqslant r_0 \leqslant r - 1$, $Q \in C^{r_0}(D)$, $T_1, T_2 \in C^{r_0}(D)$, $Z \in C^{r_0}(D)$. Очевидно, $G \in C^{r_0}(D)$, $\varepsilon \in C^{r_0}(D)$, $b \in C^{r_0}(D)$.

# 6. Изометрические погружения римановых многообразий отрицательной кривизны. Уравнения виртуальных асимптотических сетей

В этом разделе мы рассмотрим уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци на двумерном римановом многообразии отрицательной кривизны.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $G \in C^2(D)$, $K \in C^1(D)$, $K(p) < 0$ при $p \in D$.

Обозначим $Q(p) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{-K(p)}$ при $p \in D$. Очевидно, уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци можно переписать в виде

$$b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha} = 0, \quad \det(b) = -e^{4Q} \cdot \det(G), \quad \nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0, \tag{6.1}$$

где $b \in C^1(D)$, $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1, 2}$.

Заметим, что систему уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци можно изучать формально, не предполагая связи между скалярным полем $Q$ и римановой метрикой $G$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 2$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $G \in C^1(D)$, $Q$ — скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Q \in C^1(D)$.

Пусть $b$ — некоторое решение системы уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци. Предположим, что можно указать векторные поля $T_1$, $T_2$ на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, удовлетворяющие условию $T_1, T_2 \in C^0(D)$ и условиям (5.2), (5.12). Как показано выше, $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Тогда можно указать скалярное поле $Z$ на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, удовлетворяющее условию $Z \in C^0(D)$ и условиям (5.4). Так как $G \in C^1(D)$, $b \in C^1(D)$, то $T_1, T_2 \in C^1(D)$, $Z \in C^1(D)$.

Так как тензорное поле $b$ удовлетворяет уравнениям Петерсона—Кодацци, то равенства (5.18) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\lambda_{1,1} = \sin Z L_2 Q - L_1 Z,\\
&\lambda_{2,1} = -\sin Z L_1 Q,\\
&\lambda_{1,2} = \sin Z L_2 Q,\\
&\lambda_{2,2} = L_2 Z - \sin Z L_1 Q
\end{aligned}\tag{6.2}$$

при $p \in D$. Используя равенства (5.11), (6.2), получаем

$$\begin{aligned}
&L_1 T_1^\beta = (\sin Z L_2 Q - L_1 Z)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\;\beta} T_1^\mu,\\
&L_2 T_1^\beta = -\sin Z (L_1 Q)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\;\beta} T_1^\mu,\\
&L_1 T_2^\beta = \sin Z (L_2 Q)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\;\beta} T_2^\mu,\\
&L_2 T_2^\beta = (L_2 Z - \sin Z L_2 Q)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\;\beta} T_2^\mu
\end{aligned}\tag{6.3}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Используя равенства (5.5), (5.6), (6.3), получаем

$$\begin{aligned}
&L_1 T_1^\beta = \frac{L_1 Z - \sin Z L_2 Q}{\sin Z}(\cos Z T_1^\beta - T_2^\beta),\\
&L_2 T_1^\beta = L_1 Q(\cos Z T_1^\beta - T_2^\beta),\\
&L_1 T_2^\beta = L_2 Q(\cos Z T_2^\beta - T_1^\beta),\\
&L_2 T_2^\beta = \frac{L_2 Z - \sin Z L_2 Q}{\sin Z}(\cos Z T_2^\beta - T_1^\beta)
\end{aligned}\tag{6.4}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Итак, векторные поля $T_1$, $T_2$ и скалярное поле $Z$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
L_1 T_1^\beta = \frac{L_1 Z - \sin Z L_2 Q}{\sin Z}(\cos Z T_1^\beta - T_2^\beta), \quad L_2 T_1^\beta = L_1 Q(\cos Z T_1^\beta - T_2^\beta),\\
L_2 T_2^\beta = \frac{L_2 Z - \sin Z L_2 Q}{\sin Z}(\cos Z T_2^\beta - T_1^\beta), \quad L_1 T_2^\beta = L_2 Q(\cos Z T_2^\beta - T_1^\beta),\\
G_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_1^\mu = 1, \quad G_{\alpha\mu} T_2^\alpha T_2^\mu = 1, \quad \det(T) \neq 0,\\
G_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_2^\mu = \cos Z, \quad \varepsilon_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_2^\mu = \sin Z,
\end{gathered}\tag{6.5}$$

где $T_1, T_2 \in C^1(D)$, $Z \in C^1(D)$, $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Из системы (6.5) непосредственно выводится система

$$\begin{gathered}
L_2 T_1^\beta = L_1 Q(\cos Z T_1^\beta - T_2^\beta), \quad L_1 T_2^\beta = L_2 Q(\cos Z T_2^\beta - T_1^\beta),\\
G_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_1^\mu = 1, \quad G_{\alpha\mu} T_2^\alpha T_2^\mu = 1, \quad \det(T) \neq 0,\\
G_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_2^\mu = \cos Z, \quad \varepsilon_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_2^\mu = \sin Z,
\end{gathered}\tag{6.6}$$

где $T_1, T_2 \in C^1(D)$, $Z \in C^0(D)$, $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Из системы (6.6) непосредственно выводится система

$$\begin{gathered}
\tilde L_1 T_2^\beta - \tilde L_2 T_1^\beta = \big(\tilde L_1 Q + \cos Z \tilde L_2 Q\big) T_2^\beta - \big(\tilde L_2 Q + \cos Z \tilde L_1 Q\big) T_1^\beta,\\
G_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_1^\mu = 1, \quad G_{\alpha\mu} T_2^\alpha T_2^\mu = 1, \quad \det(T) \neq 0,\\
G_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_2^\mu = \cos Z, \quad \varepsilon_{\alpha\mu} T_1^\alpha T_2^\mu = \sin Z,
\end{gathered}\tag{6.7}$$

где $T_1, T_2 \in C^1(D)$, $Z \in C^0(D)$, $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$.

Систему уравнений (6.7) будем называть системой уравнений виртуальных асимптотических сетей. Покажем, что системы (6.5), (6.6), (6.7) эквивалентны друг другу. Очевидно, достаточно показать, что из системы (6.7) следует система (6.5). Кроме того, покажем, что из системы (6.7) следует система уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци.

Пусть $T_1$, $T_2$, $Z$ — некоторое решение системы (6.7). Тогда $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, выполнены условия (5.2), (5.4), $T_1, T_2 \in C^1(D)$, $Z \in C^1(D)$. Используя равенства (5.11), получаем

$$\tilde{L}_1 T_2^\beta - \tilde{L}_2 T_1^\beta = \lambda_{1,2} \cdot \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta} T_2^\mu - \lambda_{2,1} \cdot \varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta} T_1^\mu \tag{6.8}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Используя равенства (5.5), (5.6), (6.7), нетрудно показать, что

$$\tilde{L}_1 T_2^\beta - \tilde{L}_2 T_1^\beta = \sin Z(L_2 Q)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta} T_2^\mu + \sin Z(L_1 Q)\varepsilon_{\mu\cdot}^{\ \beta} T_1^\mu \tag{6.9}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\beta = \overline{1,2}$. Фиксируем $p \in D$. Сравнивая равенства (6.8) и (6.9), получаем, что $\lambda_{2,1} = -\sin Z L_1 Q$, $\lambda_{1,2} = \sin Z L_2 Q$. Так как $\lambda_{1,2} - \lambda_{1,1} = L_1 Z$, $\lambda_{2,2} - \lambda_{2,1} = L_2 Z$, то $\lambda_{1,1} = \sin Z L_2 Q - L_1 Z$, $\lambda_{2,2} = L_2 Z - \sin Z L_1 Q$. Итак, имеют место равенства (6.2). Используя равенства (5.5), (5.6), (5.11), (6.2), получаем равенства (6.4). Используя условия (6.4), (6.7), $Z \in C^1(D)$, получаем систему (6.5).

Обозначим

$$b_{\alpha\beta} = -e^{2Q} \sin Z(P_\alpha^1 P_\beta^2 + P_\beta^1 P_\alpha^2)$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$. Тогда $b$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $b \in C^1(D)$, выполнены условия (5.2), (5.12), $\det(b) = -e^{4Q}\det(G)$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$.

Сравнивая равенства (5.18) с равенствами (6.2), получаем

$$(\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma}) T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\gamma = 0, \quad (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma}) T_2^\alpha T_1^\beta T_2^\gamma = 0$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Тогда

$$(\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma}) T_\mu^\alpha T_\lambda^\beta T_\delta^\gamma = 0$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\mu, \lambda, \delta = \overline{1,2}$. Следовательно,

$$\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $\alpha, \beta, \gamma = \overline{1,2}$. Итак, $b$ — решение системы уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци.

## 7. Система уравнений, обобщающая уравнение синус-Гордона

В этом разделе мы получим систему уравнений, обобщающую уравнение синус-Гордона.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $G \in C^2(D)$ — риманова метрика на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Q$ — скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $Q \in C^2(D)$.

Пусть $b$ — некоторое решение системы уравнений Гаусса и Петерсона—Кодацци. Предположим, что можно указать векторные поля $T_1$, $T_2$ на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, удовлетворяющие условию $T_1, T_2 \in C^0(D)$ и условиям (5.2), (5.12). Как показано выше, $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Тогда можно указать скалярное поле $Z$ на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, удовлетворяющее условию $Z \in C^0(D)$ и условиям (5.4). Так как $G \in C^2(D)$, $b \in C^2(D)$, то $T_1, T_2 \in C^2(D)$, $Z \in C^2(D)$.

Используя равенства (5.2), (5.4), (6.4), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} &G_{\lambda\mu}(L_1 T_1^\lambda) T_2^\mu = -\sin Z (L_1 Z - L_2 Q \sin Z), \\ &G_{\lambda\mu}(L_2 T_1^\lambda) T_2^\mu = -\sin^2 Z L_1 Q \end{aligned} \tag{7.1}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Применяя к равенствам (7.1) операторы $L_1$ и $L_2$, получаем

$$\begin{aligned} &G_{\lambda\mu}(L_2 L_1 T_1^\lambda) T_2^\mu + G_{\lambda\mu}(L_1 T_1^\lambda) L_2 T_2^\mu = \\ &\quad = -\cos Z (L_2 Z) L_1 Z - \sin Z L_2 L_1 Z + L_2(\sin^2 Z L_2 Q), \\ &G_{\lambda\mu}(L_1 L_2 T_1^\lambda) T_2^\mu + G_{\lambda\mu}(L_2 T_1^\lambda) L_1 T_2^\mu = -L_1(\sin^2 Z L_1 Q) \end{aligned} \tag{7.2}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Вычитая из второго равенства (7.2) первое равенство (7.2), получаем

$$\begin{aligned} &G_{\lambda\mu}(L_1 L_2 T_1^\lambda - L_2 L_1 T_1^\lambda) T_2^\mu + G_{\lambda\mu}(L_2 T_1^\lambda) L_1 T_2^\mu - G_{\lambda\mu}(L_1 T_1^\lambda) L_2 T_2^\mu = \\ &\quad = -L_1(\sin^2 Z L_1 Q) - L_2(\sin^2 Z L_2 Q) + \cos Z (L_2 Z) L_1 Z + \sin Z L_2 L_1 Z \end{aligned} \tag{7.3}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Используя равенства (5.2), (5.4), (6.4), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} &G_{\lambda\mu}(L_1 T_1^\lambda) L_2 T_2^\mu = -(L_1 Z - \sin Z L_2 Q)(L_2 Z - \sin Z L_1 Q) \cos Z, \\ &G_{\lambda\mu}(L_2 T_1^\lambda) L_1 T_2^\mu = -(L_1 Q)(L_2 Q) \sin^2 Z \cos Z \end{aligned} \tag{7.4}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$.

Используя определение операторов $L_1$ и $L_2$, нетрудно подсчитать, что

$$\begin{aligned} &G_{\lambda\mu}(L_1 L_2 T_1^\lambda - L_2 L_1 T_1^\lambda) T_2^\mu = G_{\lambda\mu}(\nabla_\alpha \nabla_\beta T_1^\lambda - \nabla_\beta \nabla_\alpha T_1^\lambda) T_1^\alpha T_2^\beta T_2^\mu + \\ &\qquad + G_{\lambda\mu}(L_1 T_2^\beta)(\nabla_\beta T_1^\lambda) T_2^\mu - G_{\lambda\mu}(L_2 T_1^\beta)(\nabla_\beta T_1^\lambda) T_2^\mu \end{aligned} \tag{7.5}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$. Рассмотрим выражение $G_{\lambda\mu} T_1^\alpha T_2^\beta (\nabla_\alpha \nabla_\beta T_1^\lambda - \nabla_\beta \nabla_\alpha T_1^\lambda) T_2^\mu$:

$$\begin{aligned} &G_{\lambda\mu}(\nabla_\alpha \nabla_\beta T_1^\lambda - \nabla_\beta \nabla_\alpha T_1^\lambda) T_1^\alpha T_2^\beta T_2^\mu = -R_{\alpha\beta,\varkappa\mu} T_1^\alpha T_2^\beta T_1^\varkappa T_2^\mu = \\ &\quad = -R_{12,12}(T_1^1 T_2^2 - T_1^2 T_2^1)(T_1^1 T_2^2 - T_1^2 T_2^1) = -K \cdot \det(G) \cdot (\det(T))^2. \end{aligned}$$

Используя равенства (5.7), получаем

$$G_{\lambda\mu}(\nabla_\alpha\nabla_\beta T_1^\lambda - \nabla_\beta\nabla_\alpha T_1^\lambda)T_1^\alpha T_2^\beta T_2^\mu = -K\cdot\sin^2 Z \tag{7.6}$$

при $p\in D$, $h\in Q(p,\mu)$. Используя равенства (5.2), (5.4), (6.4), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} G_{\lambda\mu}(L_1T_2^\beta)(\nabla_\beta T_1^\lambda)T_2^\mu &= \big(\sin Z L_1 Z - (L_2Q + \cos Z L_1 Q)\sin^2 Z\big)L_2Q,\\ G_{\lambda\mu}(L_2T_1^\beta)(\nabla_\beta T_1^\lambda)T_2^\mu &= \big((L_1Q + \cos Z L_2 Q)\sin^2 Z - \cos Z\sin Z L_1 Z\big)L_1Q \end{aligned}\tag{7.7}$$

при $p\in D$, $h\in Q(p,\mu)$.

Используя равенства (7.3)—(7.7), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} L_2L_1Z = -K\sin Z + L_1(\sin Z L_1Q) + L_2(\sin Z L_2 Q) +\\ + (L_2Q+\cos Z L_1Q)(L_1Z - \sin Z L_2 Q) - (L_1Q + \cos Z L_2 Q)\sin Z L_1 Q \end{aligned}\tag{7.8}$$

при $p\in D$. Используя равенства (6.7), (7.8), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} L_1L_2Z = -K\sin Z + L_1(\sin Z L_1Q) + L_2(\sin Z L_2 Q) -\\ - (L_2Q+\cos Z L_1Q)\sin Z L_2 Q + (L_1Q + \cos Z L_2 Q)(L_2Z - \sin Z L_1 Q) \end{aligned}\tag{7.9}$$

при $p\in D$. Складывая равенства (7.8), (7.9) и умножая результат на $\frac{1}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(L_2L_1 + L_1L_2)Z = -K\sin Z + L_1(\sin Z L_1 Q) + L_2(\sin Z L_2 Q) +\\ + (L_2Q + \cos Z L_1 Q)\left(\frac{1}{2}L_1Z + \sin Z L_2 Q\right) -\\ - (L_1 Q + \cos Z L_2 Q)\left(\frac{1}{2}L_2 Z - \sin Z L_1 Q\right) \end{aligned}\tag{7.10}$$

при $p\in D$.

Пусть $K = -e^{4Q}$ при $p\in D$. Тогда векторные поля $T_1$, $T_2$ и скалярное поле $Z$ являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde L_1 T_2^\beta - \tilde L_2 T_1^\beta = (\tilde L_1 Q + \cos Z\tilde L_2 Q)T_2^\beta - (\tilde L_2 Q + \cos Z \tilde L_1 Q)T_1^\beta,\\ \det(T)\neq 0,\\ \frac{1}{2}(\tilde L_2\tilde L_1 + \tilde L_1\tilde L_2)Z = e^{4Q}\sin Z + \tilde L_1(\sin Z\tilde L_1 Q) + \tilde L_2(\sin Z \tilde L_2 Q) +\\ + (\tilde L_2 Q + \cos Z\tilde L_1 Q)\left(\frac{1}{2}\tilde L_1 Z + \sin Z\tilde L_2 Q\right) -\\ - (\tilde L_1 Q + \cos Z\tilde L_2 Q)\left(\frac{1}{2}\tilde L_2 Z - \sin Z\tilde L_1 Q\right) \end{aligned}\tag{7.11}$$

где $T_1, T_2\in C^2(D)$, $Z\in C^2(D)$, $p\in D$, $h\in Q(p,\mu)$, $\beta=\overline{1,2}$. Именно эту систему мы далее будем рассматривать как обобщение уравнения синус-Гордона.

Пусть $r\in\mathbb{Z}$, $r\geqslant 3$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $Q\in C^2(D)$ — некоторое скалярное поле на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$.

Пусть $T_1$, $T_2$, $Z$ — некоторое решение системы уравнений (7.11). Определим геометрические объекты $G$, $\varepsilon$, $b$ равенствами (5.8), (5.9), (5.14). Тогда $G$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $G \in C^1(D)$, $\varepsilon$ — антисимметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $b$ — симметричная билинейная форма на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$, $\det(b) = -e^{4Q} \cdot \det(G)$ при $p \in D$, $h \in Q(p, \mu)$, выполнены условия (5.2), (5.4), (5.12). Используя условия (5.2), (5.4), (7.11), получаем, что векторные поля $T_1$, $T_2$ и скалярное поле $Z$ удовлетворяют системе уравнений (6.7).

Обозначим $D_1 = \{p \in D\colon \sin Z \neq 0\}$. Пусть $D_1 \neq \varnothing$. Тогда $G$ — риманова метрика на множестве $D_1$. Так как векторные поля $T_1$, $T_2$ и скалярное поле $Z$ удовлетворяют системе уравнений (6.7) на множестве $D_1$, то векторные поля $T_1$, $T_2$ и скалярное поле $Z$ удовлетворяют системе уравнений (6.5) на множестве $D_1$, скалярное поле $Z$ удовлетворяет уравнению (7.10) на множестве $D_1$, тензорное поле $b$ удовлетворяет уравнениям Гаусса и Петерсона—Кодацци на множестве $D_1$. Сравнивая уравнения (7.10) и (7.11), получаем, что $K = -e^{4Q}$ при $p \in D_1$.

Пусть $Q(p) = 0$ при $p \in D$. Пусть, кроме того, можно указать такую координатную карту $h_0 \in \mu$, что $\mathrm{D}(h_0) = D$, $T_1^\alpha(p, h_0) = \delta_1^\alpha$, $T_2^\alpha(p, h_0) = \delta_2^\alpha$ при $p \in D$, $\alpha = \overline{1, 2}$. Обозначим $\tilde{D} = h_0[D]$. Прямой подсчёт показывает, что систему уравнений (7.11) в координатной карте $h_0$ можно переписать в виде

$$Z \in C^2(\tilde{D}), \quad Z_{u^1u^2} = \sin Z$$

при $u \in \tilde{D}$. Линейный элемент билинейной формы $G$ можно записать в виде

$$\mathrm{I}(u, du) = (du^1)^2 + 2\cos Z du^1 du^2 + (du^2)^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D}, \quad du \in \mathbb{R}^2.$$

Линейный элемент билинейной формы $b$ можно записать в виде

$$\mathrm{II}(u, du) = -2\sin Z du^1 du^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D}, \quad du \in \mathbb{R}^2.$$

Итак, систему уравнений (7.11) можно рассматривать как обобщение уравнения синус-Гордона.

Теперь рассмотрим произвольное скалярное поле $Q$. Пусть можно указать такую координатную карту $h_0 \in \mu$, что $\mathrm{D}(h_0) = D$, можно указать такие функции $e$, $g$, что $e(p) > 0$, $g(p) > 0$ при $p \in D$,

$$T_1^\alpha(p, h_0) = \frac{1}{e(p)}\delta_1^\alpha, \quad T_2^\alpha(p, h_0) = \frac{1}{g(p)}\delta_2^\alpha$$

при $p \in D$, $\alpha = \overline{1, 2}$. Обозначим $\tilde{D} = h_0[D]$. Прямой подсчёт показывает, что систему уравнений (7.11) в координатной карте $h_0$ можно переписать в виде

$$\begin{gathered} e_{u^2} = -(eQ_{u^2} + \cos Z gQ_{u^1}), \quad g_{u^1} = -(gQ_{u^1} + \cos Z eQ_{u^2}), \\ Z_{u^1u^2} - \left(\frac{g}{e} \cdot \sin Z \cdot Q_{u^1}\right)_{u^1} - \left(\frac{e}{g} \cdot \sin Z \cdot Q_{u^2}\right)_{u^2} = \exp(4Q) eg \sin Z, \end{gathered} \tag{7.12}$$

где $e > 0$, $g > 0$, $e, g, Z \in C^2(\tilde{D})$, $u \in \tilde{D}$. Линейный элемент билинейной формы $G$ можно записать в виде

$$\mathrm{I}(u,du) = e^2(du^1)^2 + 2eg\cos Z du^1du^2 + g^2(du^2)^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D}, \quad du \in \mathbb{R}^2.$$

Линейный элемент билинейной формы $b$ можно записать в виде

$$\mathrm{II}(u,du) = -2\exp(2Q)eg\sin Z du^1du^2 \quad \text{при} \quad u \in \tilde{D},\ du \in \mathbb{R}^2.$$

Далее именно систему (7.11) мы будем называть системой уравнений Ефимова—Позняка.

# 8. Геометрическая интерпретация решений системы уравнений Ефимова—Позняка

Вернёмся к изучению регулярных поверхностей.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $G$ — риманова метрика на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, $G \in C^2(D)$, $K \in C^2(D)$, $K(p) < 0$ при $p \in D$.

Пусть $F\colon D \to E^3$, $F \in C^3(D)$, $F$ — изометрическое погружение пространства $(D,\mu,\mu_+,G)$ в пространство $E^3$.

Пусть $b$ — вторая квадратичная форма поверхности $F$, $b \in C^2(D)$. Предположим, что можно указать векторные поля $T_1$, $T_2$ на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, удовлетворяющие условию $T_1,T_2 \in C^0(D)$ и условиям (5.2), (5.12). Как показано выше, $\det(T) \neq 0$ при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$. Тогда можно указать скалярное поле $Z$ на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$, удовлетворяющее условию $Z \in C^0(D)$ и условиям (5.4). Так как $G \in C^2(D)$, $b \in C^2(D)$, то $T_1,T_2 \in C^2(D)$, $Z \in C^2(D)$.

Обозначим

$$\eta_1^k = \xi_\alpha^k T_1^\alpha, \quad \eta_2^k = \xi_\beta^k \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T_1^\alpha, \quad \eta_3^k = \varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\eta_1^i\eta_2^j \tag{8.1}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $k = \overline{1,3}$.

Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $k = \overline{1,3}$. Вычислим $\tilde{L}_1F^k$:

$$\tilde{L}_1F^k = T_1^\alpha D_\alpha F^k = T_1^\alpha \xi_\alpha^k = \eta_1^k.$$

Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\beta = \overline{1,2}$, $n = \overline{1,3}$. Вычислим $L_1\xi_\beta^n$:

$$L_1\xi_\beta^n = T_1^\alpha \nabla_\alpha \xi_\beta^n = T_1^\alpha b_{\alpha\beta}\nu^n = -e^{2Q}\varepsilon_{\alpha\beta}T_1^\alpha\nu^n.$$

Вычислим $L_2\xi_\beta^n$:

$$L_2\xi_\beta^n = T_2^\alpha \nabla_\alpha \xi_\beta^n = T_2^\alpha b_{\alpha\beta}\nu^n = e^{2Q}\varepsilon_{\alpha\beta}T_2^\alpha\nu^n.$$

Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$. Нетрудно подсчитать, что

$$g_{nk}^{(3)}\eta_i^n\eta_j^k = \delta_j^i \tag{8.2}$$

при $i,j=\overline{1,3}$. Покажем, что $\eta_3=\nu$:

$$\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\eta_1^i\eta_2^j=\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\xi_\mu^iT_1^\mu\xi_\beta^j\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\xi_\mu^i\xi_\beta^jT_1^\mu\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=$$
$$=\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\xi_\mu^i\xi_\beta^jT_1^\mu(T_2^\beta-\cos ZT_1^\beta)\frac{1}{\sin Z}=\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\xi_\mu^i\xi_\beta^jT_1^\mu T_2^\beta\frac{1}{\sin Z}=$$
$$=\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\xi_1^i\xi_2^j\frac{\det(T)}{\sin Z}=\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\frac{1}{2}\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\xi_\mu^i\xi_\beta^j\frac{\det(T)}{\sin Z}\tilde{\varepsilon}_{\mu\beta}=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij\cdot}^{\;\;\,k}\xi_\mu^i\xi_\beta^j\varepsilon^{\mu\beta}=\nu^k$$

при $k=\overline{1,3}$.

Обозначим

$$\Lambda_{\alpha,ij}=g_{nk}^{(3)}(L_\alpha\eta_i^n)\eta_j^k$$

при $p\in D$, $h\in Q(p,\mu)$, $H\in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha=\overline{1,2}$, $i,j=\overline{1,3}$. Тогда

$$L_\alpha\eta_i^k=\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{\alpha,ij}\eta_j^k$$

при $p\in D$, $h\in Q(p,\mu)$, $H\in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha=\overline{1,2}$, $i=\overline{1,3}$. Используя равенства (8.2), нетрудно показать, что

$$\Lambda_{\alpha,ij}=-\Lambda_{\alpha,ji}$$

при $p\in D$, $h\in Q(p,\mu)$, $H\in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha=\overline{1,2}$, $i=\overline{1,3}$.

Фиксируем $p\in D$, $h\in Q(p,\mu)$, $H\in Q(F(p),\mu^3)$. Вычислим $\Lambda_{1,12}$:

$$\Lambda_{1,12}=g_{nk}^{(3)}L_1(\eta_1^n)\eta_2^k=g_{nk}^{(3)}L_1(\xi_\mu^nT_1^\mu)\xi_\beta^k\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=$$
$$=g_{nk}^{(3)}L_1(\xi_\mu^n)T_1^\mu\xi_\beta^k\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha+g_{nk}^{(3)}\xi_\mu^nL_1(T_1^\mu)\xi_\beta^k\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=$$
$$=G_{\mu\beta}L_1(T_1^\mu)\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=\lambda_{1,1}=-L_1Z+\sin ZL_2Q.$$

Вычислим $\Lambda_{2,12}$:

$$\Lambda_{2,12}=g_{nk}^{(3)}L_2(\eta_1^n)\eta_2^k=g_{nk}^{(3)}L_2(\xi_\mu^nT_1^\mu)\xi_\beta^k\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=$$
$$=g_{nk}^{(3)}L_2(\xi_\mu^n)T_1^\mu\xi_\beta^k\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha+g_{nk}^{(3)}\xi_\mu^nL_2(T_1^\mu)\xi_\beta^k\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=$$
$$=G_{\mu\beta}L_2(T_1^\mu)\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\;\,\beta}T_1^\alpha=\lambda_{2,1}=-\sin ZL_1Q.$$

Вычислим $\Lambda_{1,13}$:

$$\Lambda_{1,13}=g_{nk}^{(3)}L_1(\eta_1^n)\eta_3^k=g_{nk}^{(3)}L_1(\xi_\mu^nT_1^\mu)\nu^k=$$
$$=g_{nk}^{(3)}L_1(\xi_\mu^n)T_1^\mu\nu^k+g_{nk}^{(3)}\xi_\mu^nL_1(T_1^\mu)\nu^k=g_{nk}^{(3)}(-e^{2Q}\varepsilon_{\alpha\mu}T_1^\alpha\nu^n)T_1^\mu\nu^k=0.$$

Вычислим $\Lambda_{2,13}$:

$$\Lambda_{2,13}=g_{nk}^{(3)}L_2(\eta_1^n)\eta_3^k=g_{nk}^{(3)}L_2(\xi_\mu^nT_1^\mu)\nu^k=$$
$$=g_{nk}^{(3)}L_2(\xi_\mu^n)T_1^\mu\nu^k+g_{nk}^{(3)}\xi_\mu^nL_2(T_1^\mu)\nu^k=g_{nk}^{(3)}(e^{2Q}\varepsilon_{\alpha\mu}T_2^\alpha\nu^n)T_1^\mu\nu^k=-e^{2Q}\sin Z.$$

Вычислим $\Lambda_{1,23}$:

$$\begin{aligned}\Lambda_{1,23} &= g^{(3)}_{nk} L_1(\eta^n_2)\eta^k_3 = g^{(3)}_{nk} L_1(\xi^n_\beta \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1)\nu^k = \\ &= g^{(3)}_{nk} L_1(\xi^n_\beta)\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1 \nu^k + g^{(3)}_{nk}\xi^n_\beta L_1(\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1)\nu^k = \\ &= g^{(3)}_{nk}(-e^{2Q}\varepsilon_{\mu\beta}T^\mu_1\nu^n)\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1\nu^k = -e^{2Q}.\end{aligned}$$

Вычислим $\Lambda_{2,23}$:

$$\begin{aligned}\Lambda_{2,23} &= g^{(3)}_{nk} L_2(\eta^n_2)\eta^k_3 = g^{(3)}_{nk} L_2(\xi^n_\beta \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1)\nu^k = \\ &= g^{(3)}_{nk} L_2(\xi^n_\beta)\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1 \nu^k + g^{(3)}_{nk}\xi^n_\beta L_2(\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1)\nu^k = \\ &= g^{(3)}_{nk}(e^{2Q}\varepsilon_{\mu\beta}T^\mu_2\nu^n)\varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_1\nu^k = e^{2Q}\cos Z.\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{gathered}\Lambda_{\alpha,ij} = -\Lambda_{\alpha,ji}, \quad \alpha = \overline{1,2}, \quad i,j = \overline{1,3}, \\ \Lambda_{1,12} = \lambda_{1,1} = -\tilde L_1 Z + \sin Z \tilde L_2 Q, \quad \Lambda_{1,13} = 0, \quad \Lambda_{1,23} = -e^{2Q}, \\ \Lambda_{2,12} = \lambda_{2,1} = -\sin Z \tilde L_1 Q, \quad \Lambda_{2,13} = -e^{2Q}\sin Z, \quad \Lambda_{2,23} = e^{2Q}\cos Z\end{gathered} \tag{8.3}$$

при $p \in D$.

Обозначим

$$\tilde\eta^k_1 = \xi^k_\alpha T^\alpha_2, \quad \tilde\eta^k_2 = \xi^k_\beta \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_2, \quad \tilde\eta^k_3 = \varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\tilde\eta^i_1\tilde\eta^j_2 \tag{8.4}$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $k = \overline{1,3}$.

Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $k = \overline{1,3}$. Вычислим $\tilde L_2 F^k$:

$$\tilde L_2 F^k = T^\alpha_2 D_\alpha F^k = T^\alpha_2 \xi^k_\alpha = \tilde\eta^k_1.$$

Фиксируем $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$. Нетрудно подсчитать, что

$$g^{(3)}_{nk}\tilde\eta^n_i\tilde\eta^k_j = \delta^i_j \tag{8.5}$$

при $i,j = \overline{1,3}$. Покажем, что $\tilde\eta_3 = \nu$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\tilde\eta^i_1\tilde\eta^j_2 &= \varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\xi^i_\mu T^\mu_2 \xi^j_\beta \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_2 = \varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\xi^i_\mu\xi^j_\beta T^\mu_2 \varepsilon_{\alpha\cdot}^{\ \beta} T^\alpha_2 = \\ &= \varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\xi^i_\mu\xi^j_\beta T^\mu_2(\cos Z T^\beta_2 - T^\beta_1)\frac{1}{\sin Z} = \varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\xi^i_\mu\xi^j_\beta T^\mu_1 T^\beta_2\frac{1}{\sin Z} = \\ &= \varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\xi^i_1\xi^j_2\frac{\det(T)}{\sin Z} = \frac12\varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\xi^i_\mu\xi^j_\beta\frac{\det(T)}{\sin Z}\tilde\varepsilon_{\mu\beta} = \frac12\varepsilon_{ij\cdot}^{\ \ k}\xi^i_\mu\xi^j_\beta\varepsilon^{\mu\beta} = \nu^k\end{aligned}$$

при $k = \overline{1,3}$.

Обозначим

$$\tilde\Lambda_{\alpha,ij} = g^{(3)}_{nk}(L_\alpha\tilde\eta^n_i)\tilde\eta^k_j$$

при $p \in D$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha = \overline{1,2}$, $i,j = \overline{1,3}$. Тогда

$$L_\alpha\tilde\eta^k_i = \sum_{j=1}^{3}\tilde\Lambda_{\alpha,ij}\tilde\eta^k_j.$$

Проводя рассуждения, аналогичные вышеприведённым, получаем

$$\begin{gathered}\tilde{\Lambda}_{\alpha,ij} = -\tilde{\Lambda}_{\alpha,ji}, \quad \alpha = \overline{1,2}, \quad i,j = \overline{1,3},\\ \tilde{\Lambda}_{1,12} = \sin Z \tilde{L}_2 Q, \quad \tilde{\Lambda}_{1,13} = \lambda_{1,2} = -e^{2Q}\sin Z, \quad \tilde{\Lambda}_{1,23} = -e^{2Q}\cos Z,\\ \tilde{\Lambda}_{2,12} = \lambda_{2,2} = \tilde{L}_2 Z - \sin Z \tilde{L}_1 Q, \quad \tilde{\Lambda}_{2,13} = 0, \quad \tilde{\Lambda}_{2,23} = e^{2Q}\end{gathered} \tag{8.6}$$

при $p \in D$.

Нетрудно показать, что

$$\begin{gathered}\tilde{\eta}_1^k = \cos Z \eta_1^k + \sin Z \eta_2^k, \quad \tilde{\eta}_2^k = -\sin Z \eta_1^k + \cos Z \eta_2^k,\\ \eta_1^k = \cos Z \tilde{\eta}_1^k - \sin Z \tilde{\eta}_2^k, \quad \eta_2^k = \sin Z \tilde{\eta}_1^k + \cos Z \tilde{\eta}_2^k\end{gathered}$$

при $p \in D$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $k = \overline{1,3}$.

Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $Q \in C^2(D)$ — некоторое скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$.

Пусть $T_1$, $T_2$, $Z$ — некоторое решение системы уравнений Ефимова—Позняка. Определим тензорные поля $G$, $\varepsilon$, $b$ равенствами (5.8), (5.9), (5.14). Определим скалярные поля $\Lambda_{\alpha,ij}$ (здесь $\alpha = \overline{1,2}$, $i,j = \overline{1,3}$) соотношениями (8.3).

Пусть $\omega$ — некоторое открытое непустое множество в пространстве $(D, \mu, \mu_+)$. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\tilde{L}_1 F^k = \eta_1^k, \quad \tilde{L}_2 F^k = \cos Z \eta_1^k + \sin Z \eta_2^k,\\ \tilde{L}_1 \eta_i^k = -\Gamma^{(3)k}_{nm} \eta_1^n \eta_i^m + \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{1,ij} \eta_j^k,\\ \tilde{L}_2 \eta_i^k = -\Gamma^{(3)k}_{nm} (\cos Z \eta_1^n + \sin Z \eta_2^n) \eta_i^m + \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{2,ij} \eta_j^k,\end{gathered} \tag{8.7}$$

где $F \colon \omega \to E^3$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ — некоторые функции из класса $C^1(\omega)$, такие что $\mathrm{D}(\eta_1), \mathrm{D}(\eta_2), \mathrm{D}(\eta_3) = \omega$, $\eta_1(p), \eta_2(p), \eta_3(p) \in T_{F(p)}E^3$ при $p \in \omega$, $h \in Q(p, \mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $k, i = \overline{1,3}$.

Очевидно, систему уравнений (8.7) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}D_\alpha F^k = (P^1_\alpha + \cos Z P^2_\alpha)\eta_1^k + \sin Z P^2_\alpha \eta_2^k,\\ D_\alpha \eta_i^k = -\Gamma^{(3)k}_{nm}\big((P^1_\alpha + \cos Z P^2_\alpha)\eta_1^n + \sin Z P^2_\alpha \eta_2^n\big)\eta_i^m + \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{\mu,ij} P^\mu_\alpha \eta_j^k,\end{gathered} \tag{8.8}$$

где $F, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in C^1(\omega)$, $p \in \omega$, $h \in Q(p, \mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $k, i = \overline{1,3}$, $\alpha = \overline{1,2}$.

**Замечание.** Пусть $\omega$ — некоторое открытое непустое множество в пространстве $(D, \mu, \mu_+)$, $F$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ — решение системы уравнений (8.8). Так как $P^1, P^2, Z \in C^2(D)$, $\Lambda_{\mu,ij} \in C^1(D)$ (здесь $\mu = \overline{1,2}$, $i,j = \overline{1,3}$), то $F \in C^3(\omega)$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in C^2(\omega)$.

Пусть $p_0 \in \omega$, $q_0 \in E^3$, $\eta_{1,0}, \eta_{2,0}, \eta_{3,0} \in T_{q_0}E^3$. Рассмотрим следующие начальные условия:

$$F(p_0) = q_0, \quad \eta_i(p_0) = \eta_{i,0} \tag{8.9}$$

при $i = \overline{1,3}$.

Выберем координатную карту $H_0 \in \mu^3$ так, что $\mathrm{D}(H_0) = E^3$, $\mathrm{R}(H_0) = \mathbb{R}^3$, $\Gamma^{(3)k}_{ij}(q, H_0) = 0$ при $q \in E^3$, $k, i, j = \overline{1,3}$. Используя координатную карту $H_0$, перенесём рассмотрение из пространства $E^3$ в пространство $\mathbb{R}^3$.

Очевидно, система уравнений (8.7) примет вид

$$\tilde{L}_1 F^k = \eta_1^k, \quad \tilde{L}_2 F^k = \cos Z \eta_1^k + \sin Z \eta_2^k, \quad \tilde{L}_\alpha \eta_i^k = \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{\alpha,ij} \eta_j^k, \tag{8.10}$$

где $F, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in C^1(\omega)$, $p \in \omega$, $h \in Q(p, \mu)$, $k, i = \overline{1,3}$, $\alpha = \overline{1,2}$.

Очевидно, система уравнений (8.8) примет вид

$$\begin{gathered} D_\alpha F^k = (P_\alpha^1 + \cos Z P_\alpha^2)\eta_1^k + \sin Z P_\alpha^2 \eta_2^k, \\ D_\alpha \eta_i^k = \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{\mu,ij} P_\alpha^\mu \eta_j^k, \end{gathered} \tag{8.11}$$

где $F, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in C^1(\omega)$, $p \in \omega$, $h \in Q(p, \mu)$, $k, i = \overline{1,3}$, $\alpha = \overline{1,2}$.

Обозначим $x_0 = H_0(q_0)$. Очевидно, начальные условия (8.9) примут вид

$$F(p_0) = x_0, \quad \eta_i(p_0) = \eta_{i,0} \tag{8.12}$$

при $i = \overline{1,3}$.

Пусть $I$ — некоторый промежуток на $\mathbb{R}$, $\varphi\colon I \to D$, $\varphi \in C^1(I)$. Фиксируем $t \in I$. Обозначим

$$K^1(t) = P_\alpha^1(\varphi(t), h)\, \frac{d}{d\tau}\varphi^\alpha(\tau, h)\bigg|_{\tau=t}, \quad K^2(t) = P_\alpha^2(\varphi(t), h)\, \frac{d}{d\tau}\varphi^\alpha(\tau, h)\bigg|_{\tau=t}$$

при $h \in Q(\varphi(t), \mu)$. Геометрические объекты $K^1(t)$, $K^2(t)$ являются скалярами в пространстве $T_{\varphi(t)}D$.

**Замечание.** Пусть $\varphi \in C^1_*(I) \cap C^0(I)$. Тогда можно указать такое дискретное подмножество $I_0$ множества $I$, что $\varphi \in C^1(I \backslash I_0)$. В этом случае функции $K^1$, $K^2$ можно определить на множестве $I \setminus I_0$.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\overline{F}^k(t, H) = (K^1 + \cos Z K^2)\overline{\eta}_1^k + \sin Z K^2 \overline{\eta}_2^k, \\ \frac{d}{dt}\overline{\eta}_i^k(t, H) = -\Gamma^{(3)k}_{nm}\big((K^1 + \cos Z K^2)\overline{\eta}_1^n + \sin Z K^2 \overline{\eta}_2^n\big)\overline{\eta}_i^m + \sum_{j=1}^{3} \Lambda_{\mu,ij} K^\mu \overline{\eta}_j^k \end{gathered} \tag{8.13}$$

где $\overline{F}\colon I \to E^3$, $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$, $\overline{\eta}_3$ — некоторые функции из класса $C^1(I)$, такие что $\mathrm{D}(\overline{\eta}_1), \mathrm{D}(\overline{\eta}_2), \mathrm{D}(\overline{\eta}_3) = I$, $\overline{\eta}_1(t), \overline{\eta}_2(t), \overline{\eta}_3(t) \in T_{\overline{F}(t)}E^3$ при $t \in I$, $H \in Q\big(\overline{F}(t), \mu^3\big)$, $k, i = \overline{1,3}$.

**Замечание.** Пусть $\varphi \in C^1_*(I) \cap C^0(I)$. Тогда можно указать такое дискретное подмножество $I_0$ множества $I$, что $\varphi \in C^1(I \setminus I_0)$. В этом случае вместо системы (8.13) можно рассмотреть систему

$$\frac{d}{dt}\overline{F}^k(t,H) = (K^1 + \cos ZK^2)\overline{\eta}_1^k + \sin ZK^2\overline{\eta}_2^k,$$

$$\frac{d}{dt}\overline{\eta}_i^k(t,H) = -\Gamma^{(3)k}_{nm}\big((K^1 + \cos ZK^2)\overline{\eta}_1^n + \sin ZK^2\overline{\eta}_2^n\big)\overline{\eta}_i^m + \sum_{j=1}^{3}\Lambda_{\mu,ij}K^\mu\overline{\eta}_j^k,$$

где $\overline{F}, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2, \overline{\eta}_3 \in C^1(I \setminus I_0) \cap C^0(I)$, $t \in I \setminus I_0$, $H \in Q\big(\overline{F}(t), \mu^3\big)$, $k, i = \overline{1,3}$.

**Замечание.** Пусть $\omega$ — некоторое открытое непустое множество в пространстве $(D, \mu, \mu_+)$, $F$, $\eta_1$, $\eta_3$, $\eta_3$ — некоторое решение системы уравнений (8.8). Пусть $I$ — некоторый промежуток на $\mathbb{R}$, $\varphi\colon I \to \omega$, $\varphi \in C^1(I)$. Нетрудно показать, что функции $F \circ \varphi$, $\eta_1 \circ \varphi$, $\eta_2 \circ \varphi$, $\eta_3 \circ \varphi$ удовлетворяют системе уравнений (8.13).

Пусть $t_0 \in I$, $q_0 \in E^3$, $\eta_{1,0}, \eta_{2,0}, \eta_{3,0} \in T_{q_0}E^3$. Рассмотрим следующие начальные условия:

$$\overline{F}(t_0) = q_0, \quad \overline{\eta}_i(t_0) = \eta_{i,0} \tag{8.14}$$

при $i = \overline{1,3}$.

**Замечание.** Пусть $\omega$ — некоторое открытое непустое множество в пространстве $(D, \mu, \mu_+)$, $F$, $\eta_1$, $\eta_3$, $\eta_3$ — некоторое решение задачи (8.8), (8.9). Пусть $I$ — некоторый промежуток на $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $\varphi\colon I \to \omega$, $\varphi \in C^1(I)$, $\varphi(t_0) = p_0$. Нетрудно показать, что функции $F \circ \varphi$, $\eta_1 \circ \varphi$, $\eta_2 \circ \varphi$, $\eta_3 \circ \varphi$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14).

Выберем координатную карту $H_0 \in \mu^3$ так, что $\mathrm{D}(H_0) = E^3$, $\mathrm{D}(H_0) = \mathbb{R}^3$, $\Gamma^{(3)k}_{ij}(q, H_0) = 0$ при $q \in E^3$, $k, i, j = \overline{1,3}$. Используя координатную карту $H_0$, перенесём рассмотрение из пространства $E^3$ в пространство $\mathbb{R}^3$.

Очевидно, система уравнений (8.13) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\overline{F}^k(t) = (K^1 + \cos ZK^2)\overline{\eta}_1^k + \sin ZK^2\overline{\eta}_2^k,\\ \frac{d}{dt}\overline{\eta}_i^k(t) = \sum_{j=1}^{3}\Lambda_{\mu,ij}K^\mu\overline{\eta}_j^k,\end{gathered} \tag{8.15}$$

где $\overline{F}, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2, \overline{\eta}_3 \in C^1(I)$, $t \in I$, $k, i = \overline{1,3}$.

Обозначим $x_0 = H_0(q_0)$. Очевидно, начальные условия (8.14) примут вид

$$\overline{F}(t_0) = x_0, \quad \overline{\eta}_i(t_0) = \eta_{i,0} \tag{8.16}$$

при $i = \overline{1,3}$. Так как (8.15) — система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, то задача (8.15), (8.16) имеет, и притом единственное, решение. Соответственно, задача (8.13), 8.14 имеет, и притом единственное, решение.

**Замечание.** Пусть $\omega$ — некоторое открытое непустое множество в пространстве $(D, \mu, \mu_+)$, $F$, $\eta_1$, $\eta_3$, $\eta_3$ — некоторое решение системы уравнений (8.8).

Пусть $I$ — некоторый промежуток на $\mathbb{R}$, $\varphi\colon I \to \omega$, $\varphi \in C^1(I)$, $\overline{F}$, $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_3$, $\overline{\eta}_3$ — некоторое решение системы уравнений (8.13). Пусть $t_0 \in I$,

$$F(\varphi(t_0)) = \overline{F}(t_0), \quad \eta_1(\varphi(t_0)) = \overline{\eta}_1(t_0), \quad \eta_2(\varphi(t_0)) = \overline{\eta}_2(t_0), \quad \eta_3(\varphi(t_0)) = \overline{\eta}_3(t_0).$$

Очевидно, функции $F\circ\varphi$, $\eta_1\circ\varphi$, $\eta_2\circ\varphi$, $\eta_3\circ\varphi$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при замене $I \to I$, $t_0 \to t_0$, $q_0 \to \overline{F}(t_0)$, $\eta_{1,0} \to \overline{\eta}_1(t_0)$, $\eta_{2,0} \to \overline{\eta}_2(t_0)$, $\eta_{3,0} \to \overline{\eta}_3(t_0)$. Очевидно, функции $\overline{F}$, $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$, $\overline{\eta}_3$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при замене $I \to I$, $t_0 \to t_0$, $q_0 \to \overline{F}(t_0)$, $\eta_{1,0} \to \overline{\eta}_1(t_0)$, $\eta_{2,0} \to \overline{\eta}_2(t_0)$, $\eta_{3,0} \to \overline{\eta}_3(t_0)$. В силу единственности решения задачи (8.13), (8.14)

$$F(\varphi(t)) = \overline{F}(t), \quad \eta_1(\varphi(t)) = \overline{\eta}_1(t), \quad \eta_2(\varphi(t)) = \overline{\eta}_2(t), \quad \eta_3(\varphi(t)) = \overline{\eta}_3(t)$$

при $t \in I$.

Теперь сформулируем и докажем несколько теорем о геометрической интерпретации решений системы уравнений Ефимова—Позняка.

**Теорема 8.1.** *Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $Q \in C^2(D)$ — некоторое скалярное поле на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$. Пусть $T_1$, $T_2$, $Z$ — некоторое решение системы уравнений Ефимова—Позняка. Пусть $p_0 \in D$, $\omega$ — некоторая линейно связная окрестность точки $p_0$, $q_0 \in E^3$, $\eta_{1,0},\eta_{2,0},\eta_{3,0} \in T_{q_0}E^3$,*

$$g^{(3)}_{nm}(q_0,H)\eta^n_{i,0}(H)\eta^m_{j,0}(H) = \delta^i_j \ \text{ при } \ H \in Q(q_0,\mu^3), \quad i,j = \overline{1,3},$$
$$\varepsilon_{nmk}(q_0,H)\eta^n_{1,0}(H)\eta^m_{2,0}(H)\eta^k_{3,0}(H) \geqslant 0 \ \text{ при } \ H \in Q(q_0,\mu^3).$$

*Пусть $F$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ — решение задачи* (8.7), (8.9). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $g^{(3)}_{nm}\eta^n_i\eta^m_j = \delta^i_j$ *при* $p\in\omega$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $i,j=\overline{1,3}$;
2) $\varepsilon_{nmk}\eta^n_1\eta^m_2\eta^k_3 \geqslant 0$ *при* $p\in\omega$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$;
3) $g^{(3)}_{nm}(D_\alpha F^n)D_\beta F^m = G_{\alpha\beta}$ *при* $p\in\omega$, $h\in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha,\beta=\overline{1,2}$;
4) $g^{(3)}_{nm}(D_\alpha D_\beta F^n)\eta^m_3 = b_{\alpha\beta}$ *при* $p\in\omega$, $h\in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $\alpha,\beta=\overline{1,2}$.

**Доказательство.** Покажем, что $g^{(3)}_{nm}\eta^n_i\eta^m_j = \delta^i_j$ при $p\in\omega$, $H \in Q(F(p),\mu^3)$, $i,j=\overline{1,3}$. Фиксируем точку $p\in\omega$. Так как $\omega$ — линейно связное множество, то можно указать такую функцию $\varphi\colon[0,1]\to\omega$, $\varphi\in C^1([0,1])$, что $\varphi(0)=p_0$, $\varphi(1)=p$. Как показано выше, функции $F\circ\varphi$, $\eta_1\circ\varphi$, $\eta_2\circ\varphi$, $\eta_3\circ\varphi$ удовлетворяют системе уравнений (8.13).

Фиксируем $t\in[0,1]$. Обозначим

$$\overline{\varkappa}_{ij}(t) = g^{(3)}_{nm}(F(p'),H)\eta^n_i(p',H)\eta^m_j(p',H)\big|_{p'=\varphi(t)}$$

при $H \in Q\big(F(\varphi(t)),\mu^3\big)$, $i,j=\overline{1,3}$. Геометрические объекты $\overline{\varkappa}_{ij}(t)$ (здесь $i,j=\overline{1,3}$) являются скалярами в пространстве $T_{F(\varphi(t))}E^3$.

Согласно уравнениям (8.13)

$$\frac{d}{dt}\overline{\varkappa}_{ij}(t) = g^{(3)}_{nm}\frac{D}{dt}(\eta^n_i)\eta^m_j + g^{(3)}_{nm}\eta^n_i\frac{D}{dt}\eta^m_j =$$

$$= g^{(3)}_{nm}\biggl(\sum_{k=1}^{3}\Lambda_{\mu,ik}K^\mu\eta^n_k\biggr)\eta^m_j + g^{(3)}_{nm}\eta^n_i\sum_{k=1}^{3}\Lambda_{\mu,jk}K^\mu\eta^m_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\Lambda_{\mu,ik}K^\mu\overline{\varkappa}_{kj} + \sum_{k=1}^{3}\Lambda_{\mu,jk}K^\mu\overline{\varkappa}_{ik}$$

при $t\in[0,1]$, $H\in Q\bigl(F(\varphi(t)),\mu^3\bigr)$, $i,j=\overline{1,3}$,

$$\frac{D}{dt}\eta^n_i = \frac{d}{dt}\eta^n_i + \Gamma^{(3)n}_{kr}\frac{d}{dt}(F^k)\eta^r_i.$$

Так как $\varphi(0)=p_0$, то

$$\overline{\varkappa}_{ij}(0) = g^{(3)}_{nm}(F(p'),H)\eta^n_i(p',H)\eta^m_j(p',H)\big|_{p'=\varphi(0)} =$$

$$= g^{(3)}_{nm}(F(p_0),H)\eta^n_i(p_0,H)\eta^m_j(p_0,H) = \delta^i_j$$

при $H\in Q\bigl(F(\varphi(0)),\mu^3\bigr)$, $i,j=\overline{1,3}$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{d}{dt}\varkappa_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{3}\Lambda_{\mu,ik}K^\mu\varkappa_{kj} + \sum_{k=1}^{3}\Lambda_{\mu,jk}K^\mu\varkappa_{ik} \quad \text{при} \quad t\in[0,1], \quad i,j=\overline{1,3}, \tag{8.17}$$

$$\varkappa_{ij}(0) = \delta^i_j \quad \text{при} \quad i,j=\overline{1,3}. \tag{8.18}$$

Очевидно, функции $\overline{\varkappa}_{ij}$ (здесь $i,j=\overline{1,3}$) являются решением задачи (8.17), (8.18). Нетрудно показать, что функции $\{\delta^i_j\}_{t\in[0,1]}$ (здесь $i,j=\overline{1,3}$) также являются решением задачи (8.17), (8.18). В силу теоремы о единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\overline{\varkappa}_{ij}(t)=\delta^i_j$ при $t\in[0,1]$, $i,j=\overline{1,3}$. Так как $\varphi(1)=p$, то

$$g^{(3)}_{nm}(F(p))\eta^n_i(p)\eta^m_j(p) = g^{(3)}_{nm}(F(p'),H)\eta^n_i(p',H)\eta^m_j(p',H)\big|_{p'=\varphi(1)} = \overline{\varkappa}_{ij}(1) = \delta^i_j$$

при $H\in Q\bigl(F(p),\mu^3\bigr)$, $i,j=\overline{1,3}$.

Покажем, что $\varepsilon_{nmk}\eta^n_1\eta^m_2\eta^k_3 \geqslant 0$ при $p\in\omega$, $H\in Q(F(p),\mu^3)$. Фиксируем точку $p\in\omega$. Так как $\omega$ — линейно связное множество, то можно указать такую функцию $\varphi\colon[0,1]\to\omega$, $\varphi\in C^1([0,1])$, что $\varphi(0)=p_0$, $\varphi(1)=p$.

Фиксируем $t\in[0,1]$. Обозначим

$$\Delta(t) = \varepsilon_{nmk}(F(p'),H)\eta^n_1(p',H)\eta^m_2(p',H)\eta^k(p',H)\big|_{p'=\varphi(t)}$$

при $H\in Q\bigl(F(\varphi(t)),\mu^3\bigr)$, $i,j=\overline{1,3}$. Геометрический объект $\Delta(t)$ является скаляром в пространстве $T_{F(\varphi(t))}E^3$.

Рассмотрим выражение

$$g^{(3)}_{nm}(F(p'),H)\eta^n_i(p',H)\eta^m_j(p',H)\big|_{p'=\varphi(t)}$$

при $t \in [0,1]$, $H \in Q\big(F(\varphi(t)), \mu^3\big)$, $i, j = \overline{1,3}$. Так как $g^{(3)}_{nm}\eta^n_i\eta^m_j = \delta^i_j$ при $t \in [0,1]$, $H \in Q\big(F(\varphi(t)), \mu^3\big)$, $i, j = \overline{1,3}$, то $|\Delta(t)| = 1$ при $t \in [0,1]$. Так как $\varphi(0) = p_0$, то $\Delta(0) \geqslant 0$. Тогда $\Delta(0) = 1$.

Так как $\Delta \in C([0,1])$, $|\Delta(t)| = 1$ при $t \in [0,1]$, $\Delta(0) = 1$, то $\Delta(t) = 1$ при $t \in [0,1]$.

Так как $\varphi(1) = p$, то

$$\varepsilon_{nmk}(F(p), H)\eta^n_1(p, H)\eta^m_2(p, H)\eta^k_3(p, H) \geqslant 0$$

при $H \in Q(F(p), \mu^3)$.

Покажем, что $g^{(3)}_{nm}(D_\alpha F^n)D_\beta F^m = G_{\alpha\beta}$ при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$. Согласно уравнениям (8.11)

$$\begin{aligned}
g^{(3)}_{nm}&(D_\alpha F^n)D_\beta F^m = \\
&= g^{(3)}_{nm}\big((P^1_\alpha + \cos Z P^2_\alpha)\eta^n_1 + \sin Z P^2_\alpha \eta^n_2\big)\big((P^1_\beta + \cos Z P^2_\beta)\eta^m_1 + \sin Z P^2_\beta \eta^m_2\big) = \\
&= P^1_\alpha P^1_\beta + \cos Z(P^1_\alpha P^2_\beta + P^2_\alpha P^1_\beta) + P^2_\alpha P^2_\beta = G_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$.

Покажем, что $g^{(3)}_{nm}(D_\alpha D_\beta F^n)\eta^m_3 = b_{\alpha\beta}$ при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$. Дифференцируя уравнения (8.11) и используя равенства (8.11), получаем

$$\begin{aligned}
D_\alpha D_\beta F^k = D_\alpha(P^1_\beta + \cos Z P^2_\beta)\eta^k_1 + (P^1_\beta + \cos Z P^2_\beta)\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{\mu,1j}P^\mu_\alpha\eta^k_j + \\
+ D_\alpha(\sin Z P^2_\beta)\eta^k_2 + \sin Z P^2_\beta\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{\mu,2j}P^\mu_\alpha\eta^k_j
\end{aligned}$$

при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $k = \overline{1,3}$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$. Тогда

$$\begin{aligned}
g^{(3)}_{nm}&(D_\alpha D_\beta F^n)\eta^m_3 = (P^1_\beta + \cos Z P^2_\beta)\Lambda_{\mu,13}P^\mu_\alpha + \sin Z P^2_\beta \Lambda_{\mu,23}P^\mu_\alpha = \\
&= -(P^1_\beta + \cos Z P^2_\beta)e^{2Q}\sin Z P^2_\alpha - \sin Z P^2_\beta e^{2Q} P^1_\alpha + \sin Z P^2_\beta e^{2Q}\cos Z P^2_\alpha = \\
&= -e^{2Q}\sin Z(P^1_\alpha P^2_\beta + P^1_\beta P^2_\alpha) = b_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

при $p \in \omega$, $h \in Q(p,\mu)$, $H \in Q(F(p), \mu^3)$, $\alpha, \beta = \overline{1,2}$. □

**Теорема 8.2.** *Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $Q \in C^2(D)$ — некоторое скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$. Пусть $T_1$, $T_2$, $Z$ — некоторое решение системы уравнений Ефимова—Позняка. Пусть $p_0 \in D$, $\omega$ — некоторая линейно связная окрестность точки $p_0$, $q_0 \in E^3$, $\eta_{1,0}, \eta_{2,0}, \eta_{3,0} \in T_{q_0}E^3$. Пусть $F_{(1)}$, $\eta_{1(1)}$, $\eta_{2(1)}$, $\eta_{3(1)}$ — решение задачи* (8.7), (8.9), *$F_{(2)}$, $\eta_{1(2)}$, $\eta_{2(2)}$, $\eta_{3(2)}$ — решение задачи* (8.7), (8.9). *Тогда $F_{(2)}(p) = F_{(1)}(p)$, $\eta_{1(2)}(p) = \eta_{1(1)}(p)$, $\eta_{2(2)}(p) = \eta_{2(1)}(p)$, $\eta_{3(2)}(p) = \eta_{3(1)}(p)$ при $p \in \omega$.*

**Доказательство.** Фиксируем точку $p \in \omega$. Так как $\omega$ — линейно связное множество, то можно указать такую функцию $\varphi\colon [0,1] \to \omega$, $\varphi \in C^1([0,1])$, что $\varphi(0) = p_0$, $\varphi(1) = p$.

Как показано выше, функции $F_{(1)}\circ\varphi$, $\eta_{1(1)}\circ\varphi$, $\eta_{2(1)}\circ\varphi$, $\eta_{3(1)}\circ\varphi$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при $I=[0,1]$, $t_0=0$. Функции $F_{(2)}\circ\varphi$, $\eta_{1(2)}\circ\varphi$, $\eta_{2(2)}\circ\varphi$, $\eta_{3(2)}\circ\varphi$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при $I=[0,1]$, $t_0=0$. В силу единственности решения задачи (8.13), (8.14) имеем

$$F_{(2)}(\varphi(t))=F_{(1)}(\varphi(t)),\quad \eta_{1(2)}(\varphi(t))=\eta_{1(1)}(\varphi(t)),$$
$$\eta_{2(2)}(\varphi(t))=\eta_{2(1)}(\varphi(t)),\quad \eta_{3(2)}(\varphi(t))=\eta_{3(1)}(\varphi(t))$$

при $t\in[0,1]$. Так как $\varphi(1)=p$, то

$$F_{(2)}(p)=F_{(1)}(p),\quad \eta_{1(2)}(p)=\eta_{1(1)}(p),\quad \eta_{2(2)}(p)=\eta_{2(1)}(p),\quad \eta_{3(2)}(p)=\eta_{3(1)}(p).$$

Теорема доказана. □

**Теорема 8.3.** *Пусть $r\in\overline{\mathbb{Z}}$, $r\geqslant 3$, $(D,\mu,\mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $Q\in C^2(D)$ — некоторое скалярное поле на многообразии $(D,\mu,\mu_+)$. Пусть $T_1$, $T_2$, $Z$ — некоторое решение системы уравнений Ефимова—Позняка. Пусть $p_0\in D$, $q_0\in E^3$, $\eta_{1,0},\eta_{2,0},\eta_{3,0}\in T_{q_0}E^3$. Тогда можно указать такую окрестность $\omega_0$ точки $p_0$, что при $\omega=\omega_0$ существует решение $F$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ задачи* (8.7), (8.9).

**Доказательство.** Выберем координатную карту $h_0\in Q(p_0,\mu)$. Пусть $\omega$ — некоторая окрестность точки $p_0$, $\omega\subseteq \mathrm{D}(h_0)$. Рассмотрим задачу (8.7), (8.9).

Выберем координатную карту $H_0\in\mu^{(3)}$ так, что $\mathrm{D}(H_0)=E^3$, $\mathrm{D}(H_0)=\mathbb{R}^3$, $\Gamma^{(3)k}_{ij}(q,H_0)=0$ при $q\in E^3$, $k,i,j=\overline{1,3}$. Обозначим $x_0=H_0(q_0)$. Используя координатную карту $H_0$, перенесём рассмотрение из пространства $E^3$ в пространство $\mathbb{R}^3$.

Обозначим $u_0=h_0(p_0)$, $\tilde\omega=h_0[\omega]$, $\tilde D=\mathrm{D}(h_0)$. Используя координатную карту $h_0$, перенесём рассмотрение с множества $\omega$ на множество $\tilde\omega$.

Очевидно, система уравнений (8.10) примет вид

$$\tilde L_1F^k=\eta_1^k,\quad \tilde L_2F^k=\cos Z\eta_1^k+\sin Z\eta_2^k,\quad \tilde L_\alpha\eta_i^k=\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{\alpha,ij}\eta_j^k, \tag{8.19}$$

где $F,\eta_1,\eta_2,\eta_3\in C^1(\tilde\omega)$, $u\in\tilde\omega$, $k,i=\overline{1,3}$, $\alpha=\overline{1,2}$. Очевидно, система уравнений (8.11) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}F^k=(P^1_\alpha+\cos ZP^2_\alpha)\eta_1^k+\sin ZP^2_\alpha\eta_2^k,\quad \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\eta_i^k=\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{\mu,ij}P^\mu_\alpha\eta_j^k, \tag{8.20}$$

где $F,\eta_1,\eta_2,\eta_3\in C^1(\tilde\omega)$, $u\in\tilde\omega$, $k,i=\overline{1,3}$, $\alpha=\overline{1,2}$. Очевидно, начальные условия (8.12) примут вид

$$F(u_0)=x_0,\quad \eta_i(u_0)=\eta_{i,0} \tag{8.21}$$

при $i=\overline{1,3}$.

Очевидно, что, выбирая подходящие обозначения, задачу (8.19), (8.21) можно переписать в виде

$$\tilde{L}_\alpha Y^k = \Phi^k_\alpha(u, Y(u)), \tag{8.22}$$

$$Y(u_0) = Y_0, \tag{8.23}$$

где $Y \in C^1(\tilde{\omega})$, $u \in \tilde{\omega}$, $k = \overline{1,12}$, $\alpha = \overline{1,2}$, $\Phi^k_\alpha \in C^1(\tilde{D} \times \mathbb{R}^{12})$ при $k = \overline{1,12}$, $\alpha = \overline{1,2}$. В тех же обозначениях система уравнений (8.20) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} Y^k = \Phi^k_\mu(u, Y(u)) P^\mu_\alpha, \tag{8.24}$$

где $Y \in C^1(\tilde{\omega})$, $u \in \tilde{\omega}$, $\alpha = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,12}$.

Составим условия интегрируемости для системы уравнений (8.24). Очевидно, $Y \in C^2(\tilde{\omega})$. Дифференцируя уравнения (8.24) и используя равенства (8.24), получаем

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Phi^k_\mu + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_\mu)\Phi^n_2\right) P^\mu_1 + \Phi^k_\mu \frac{\partial}{\partial u^2} P^\mu_1 - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\Phi^k_\mu + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_\mu)\Phi^n_1\right) P^\mu_2 - \Phi^k_\mu \frac{\partial}{\partial u^1} P^\mu_2$$

при $u \in \tilde{\omega}$, $y = Y(u)$, $k = \overline{1,12}$. Фиксируем $u \in \tilde{D}$, $y \in \mathbb{R}^{12}$. Рассмотрим условия

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Phi^k_\mu + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_\mu)\Phi^n_2\right) P^\mu_1 + \Phi^k_\mu \frac{\partial}{\partial u^2} P^\mu_1 - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\Phi^k_\mu + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_\mu)\Phi^n_1\right) P^\mu_2 - \Phi^k_\mu \frac{\partial}{\partial u^1} P^\mu_2 \tag{8.25}$$

при $k = \overline{1,12}$. Пусть условия (8.25) выполнены при всех $u \in \tilde{D}$, $y \in \mathbb{R}^{12}$. Тогда можно указать такую окрестность $\tilde{\omega}_0 \subseteq \tilde{D}$ точки $u_0$, что при $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$ существует решение $F$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ задачи (8.24), (8.23).

Однако проверка того факта, что условия (8.25) выполнены при всех $u \in \tilde{D}$, $y \in \mathbb{R}^{12}$, технически довольна сложна. Поэтому мы составим аналог условий интегрируемости непосредственно для системы уравнений (8.22). Обозначим

$$C^1 = \tilde{L}_2 Q + \cos Z \tilde{L}_1 Q, \quad C^2 = \tilde{L}_1 Q + \cos Z \tilde{L}_2 Q$$

при $u \in \tilde{D}$. Согласно уравнениям Ефимова—Позняка

$$\tilde{L}_2 T^\beta_1 - \tilde{L}_1 T^\beta_2 = C^1 T^\beta_1 - C^2 T^\beta_2 \tag{8.26}$$

при $u \in \tilde{D}$, $\beta = \overline{1,2}$. Пусть $u \in \tilde{D}$, $\varphi\colon \tilde{D} \to \mathbb{R}$, можно указать такую окрестность $\tilde{\omega}_0 \subseteq \tilde{D}$ точки $u$, что $\varphi \in C^1(\tilde{\omega}_0)$. Тогда

$$[\tilde{L}_2, \tilde{L}_1]\varphi = C^1 \tilde{L}_1 \varphi - C^2 \tilde{L}_2 \varphi \tag{8.27}$$

при $u \in \tilde{\omega}_0$. Действуя на уравнения (8.22) операторами $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ и используя равенства (8.22), (8.27), получаем

$$C^1\Phi^k_1 - C^2\Phi^k_2 = T^\mu_2\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\Phi^k_1 + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_1)\Phi^n_\mu\right) - T^\mu_1\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\Phi^k_2 + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_2)\Phi^n_\mu\right)$$

при $u \in \tilde{\omega}$, $y = Y(u)$, $k = \overline{1,12}$. Фиксируем $u \in \tilde{D}$, $y \in \mathbb{R}^{12}$. Рассмотрим условия

$$C^1\Phi_1^k - C^2\Phi_2^k = \\ = T_2^\mu\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\Phi_1^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_1^k)\Phi_\mu^n\right) - T_1^\mu\left(\frac{\partial}{\partial u^\mu}\Phi_2^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_2^k)\Phi_\mu^n\right) \quad (8.28)$$

при $k = \overline{1,12}$.

Фиксируем $u \in \tilde{D}$, $y \in \mathbb{R}^{12}$. Покажем, что условия (8.28) эквивалентны условиям (8.25). Сначала покажем, что из условий (8.28) следуют условия (8.25). Пусть выполнены условия (8.28). Тогда

$$C^1\Phi_1^k - C^2\Phi_2^k = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_1^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_1^k)\Phi_\delta^n\right)T_2^\delta - \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_2^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_2^k)\Phi_\delta^n\right)T_1^\delta,$$

$$\Phi_\mu^k P_\gamma^\mu(C^1T_1^\gamma - C^2T_2^\gamma) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_1^\gamma T_2^\delta - \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_2^\gamma T_1^\delta$$

при $k = \overline{1,12}$. Используя равенства (8.26), получаем

$$\Phi_\mu^k P_\gamma^\mu\left(T_2^\delta\frac{\partial}{\partial u^\delta}T_1^\gamma - T_1^\delta\frac{\partial}{\partial u^\delta}T_2^\gamma\right) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_1^\gamma T_2^\delta - \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_2^\gamma T_1^\delta,$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_1^\gamma T_2^\delta - \Phi_\mu^k P_\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial u^\delta}(T_1^\gamma)T_2^\delta - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_2^\gamma T_1^\delta + \Phi_\mu^k P_\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial u^\delta}(T_2^\gamma)T_1^\delta,$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_1^\gamma T_2^\delta + \Phi_\mu^k\frac{\partial}{\partial u^\delta}(P_\gamma^\mu)T_1^\gamma T_2^\delta - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_2^\gamma T_1^\delta - \Phi_\mu^k\frac{\partial}{\partial u^\delta}(P_\gamma^\mu)T_2^\gamma T_1^\delta,$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_\alpha^\gamma T_\beta^\delta + \Phi_\mu^k\frac{\partial}{\partial u^\delta}(P_\gamma^\mu)T_\alpha^\gamma T_\beta^\delta - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial u^\delta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\delta^n\right)P_\gamma^\mu T_\beta^\gamma T_\alpha^\delta - \Phi_\mu^k\frac{\partial}{\partial u^\delta}(P_\gamma^\mu)T_\beta^\gamma T_\alpha^\delta,$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial u^\beta}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\beta^n\right)P_\alpha^\mu + \Phi_\mu^k\frac{\partial}{\partial u^\beta}(P_\alpha^\mu) - \\ - \left(\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\Phi_\mu^k + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi_\mu^k)\Phi_\alpha^n\right)P_\beta^\mu - \Phi_\mu^k\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(P_\beta^\mu),$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Phi^k_\mu + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_\mu)\Phi^n_2\right) P^\mu_1 + \Phi^k_\mu \frac{\partial}{\partial u^2}(P^\mu_1) -$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial u^2}\Phi^k_\mu + \frac{\partial}{\partial y^n}(\Phi^k_\mu)\Phi^n_2\right) P^\mu_1 - \Phi^k_\mu \frac{\partial}{\partial u^2}(P^\mu_1)$$

при $\alpha, \beta = \overline{1,2}$, $k = \overline{1,12}$. Обращая вышеприведённые рассуждения, нетрудно показать, что из условий (8.25) следуют условия (8.28).

Покажем, что условия (8.28) выполнены при всех $u \in \tilde{D}$, $y \in \mathbb{R}^{12}$. Прежде всего получим более подробную запись условий (8.28). Обозначим

$$k_1 = \Lambda_{1,12} = -\tilde{L}_1 Z + \sin Z \tilde{L}_2 Q,$$
$$A = \{\Lambda_{1,ij}\}^{i=\overline{1,3}}_{j=\overline{1,3}} = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -e^{2Q} \\ 0 & e^{2Q} & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \{\Lambda_{2,ij}\}^{i=\overline{1,3}}_{j=\overline{1,3}} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin Z \tilde{L}_1 Q & -\sin Z e^{2Q} \\ \sin Z \tilde{L}_1 Q & 0 & \cos Z e^{2Q} \\ \sin Z e^{2Q} & -\cos Z e^{2Q} & 0 \end{pmatrix}$$

при $u \in \tilde{D}$. Тогда систему уравнений (8.19) можно переписать в виде

$$\tilde{L}_1 F^k = \eta^k_1, \quad \tilde{L}_2 F^k = \cos Z \eta^k_1 + \sin Z \eta^k_2,$$
$$\tilde{L}_1 \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_2 \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

где $F, \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in C^1(\tilde{\omega})$, $u \in \tilde{\omega}$, $k = \overline{1,3}$.

Действуя на уравнения (8.29) операторами $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ и используя равенства (8.29), (8.27), получаем

$$(C^1 - C^2 \cos Z)\eta^k_1 - C^2 \sin Z \eta^k_2 =$$
$$= (-\tilde{L}_1(\cos Z) + \sin Z k_1)\eta^k_1 + (-\sin Z \tilde{L}_1 Q - \cos Z k_1 - \tilde{L}_1(\sin Z))\eta^k_2,$$
$$(C^1 A - C^2 B) \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix} = (\tilde{L}_2 A - \tilde{L}_1 B + [A, B]) \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix} \tag{8.30}$$

при $u \in \tilde{\omega}$, $k = \overline{1,3}$. Фиксируем $u \in \tilde{D}$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим условия

$$(C^1 - C^2 \cos Z)\eta^k_1 - C^2 \sin Z \eta^k_2 =$$
$$= (-\tilde{L}_1(\cos Z) + \sin Z k_1)\eta^k_1 + (-\sin Z \tilde{L}_1 Q - \cos Z k_1 - \tilde{L}_1(\sin Z))\eta^k_2,$$
$$(C^1 A - C^2 B) \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix} = (\tilde{L}_2 A - \tilde{L}_1 B + [A, B]) \begin{pmatrix} \eta^k_1 \\ \eta^k_2 \\ \eta^k_3 \end{pmatrix} \tag{8.31}$$

при $k = \overline{1,3}$. Очевидно, условия (8.31) представляют собой более подробную запись условий (8.28).

Фиксируем $u \in \tilde{D}$. Рассмотрим условия

$$\begin{gathered} C^1 - C^2\cos Z = -\tilde{L}_1(\cos Z) + \sin Z k_1, \\ -C^2\sin Z = -\sin Z\tilde{L}_1 Q - \cos Z k_1 - \tilde{L}_1(\sin Z), \\ C^1 A - C^2 B = \tilde{L}_2 A - \tilde{L}_1 B + [A, B] \end{gathered} \tag{8.32}$$

при $k = \overline{1,3}$. Очевидно, условия (8.31) выполнены при всех $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (8.32).

Покажем, что условия (8.32) выполнены при всех $u \in \tilde{D}$. Используя уравнения Ефимова—Позняка, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} &\tilde{L}_2 k_1 = -e^{4Q}\sin Z - \tilde{L}_1(\sin Z\tilde{L}_1 Q) + \\ &+ (\tilde{L}_2 Q + \cos Z\tilde{L}_1 Q)(-\tilde{L}_1 Z + \sin Z\tilde{L}_2 Q) + (\tilde{L}_1 Q + \cos Z\tilde{L}_2 Q)\sin Z\tilde{L}_1 Q \end{aligned} \tag{8.33}$$

при $u \in \tilde{D}$. Фиксируем $u \in \tilde{D}$. Используя равенство (8.33), а также определения $C^1$, $C^2$, $k_1$, $A$, $B$, проведём следующие выкладки:

$$\begin{aligned} &C^1 - C^2\cos Z + \tilde{L}_1(\cos Z) - \sin Z k_1 = \tilde{L}_2 Q + \cos Z\tilde{L}_1 Q - \\ &\quad - (\tilde{L}_1 Q + \cos Z\tilde{L}_2 Q)\cos Z + \tilde{L}_1(\cos Z) - \sin Z(-\tilde{L}_1 Z + \sin Z\tilde{L}_2 Q) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- C^2\sin Z + \sin Z\tilde{L}_1 Q + \cos Z k_1 + \tilde{L}_1(\sin Z) = -(\tilde{L}_1 Q + \cos Z\tilde{L}_2 Q)\sin Z + \\ &\quad + \sin Z\tilde{L}_1 Q + \cos Z(-\tilde{L}_1 Z + \sin Z\tilde{L}_2 Q) + \tilde{L}_1(\sin Z) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(C^1 A - C^2 B - \tilde{L}_2 A + \tilde{L}_1 B - [A, B]\,)^1_2 = \\ &\quad = (\tilde{L}_2 Q + \cos Z\tilde{L}_1 Q)(-\tilde{L}_1 Z + \sin Z\tilde{L}_2 Q) + (\tilde{L}_1 Q + \cos Z\tilde{L}_2 Q)\sin Z\tilde{L}_1 Q - \\ &\quad - \bigl(-e^{4Q}\sin Z - \tilde{L}_1(\sin Z\tilde{L}_1 Q) + (\tilde{L}_2 Q + \cos Z\tilde{L}_1 Q)(-\tilde{L}_1 Z + \sin Z\tilde{L}_2 Q) + \\ &\quad + (\tilde{L}_1 Q + \cos Z\tilde{L}_2 Q)\sin Z\tilde{L}_1 Q\bigr) - \tilde{L}_1(\sin Z\tilde{L}_1 Q) - e^{4Q}\sin Z = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(C^1 A - C^2 B - \tilde{L}_2 A + \tilde{L}_1 B - [A, B]\,)^1_3 = (\tilde{L}_1 Q + \cos Z\tilde{L}_2 Q)\sin Z e^{2Q} - \\ &\quad - \tilde{L}_1(\sin Z e^{2Q}) - \bigl((-\tilde{L}_1 Z + \sin Z\tilde{L}_2 Q)\cos Z e^{2Q} - e^{2Q}\sin Z\tilde{L}_1 Q\bigr) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(C^1 A - C^2 B - \tilde{L}_2 A + \tilde{L}_1 B - [A, B]\,)^2_3 = -(\tilde{L}_2 Q + \cos Z\tilde{L}_1 Q)e^{2Q} - \\ &\quad - (\tilde{L}_1 Q + \cos Z\tilde{L}_2 Q)\cos Z e^{2Q} + \tilde{L}_2 e^{2Q} + \tilde{L}_1(\cos Z e^{2Q}) - \\ &\quad - (-\tilde{L}_1 Z + \sin Z\tilde{L}_2 Q)\sin Z e^{2Q} = 0. \end{aligned}$$

Так как $A^\top = -A$, $B^\top = -B$, то

$$(C^1 A - C^2 B - \tilde{L}_2 A + \tilde{L}_1 B - [A, B])^\top = -(C^1 A - C^2 B - \tilde{L}_2 A + \tilde{L}_1 B - [A, B]).$$

Так как

$$(C^1A - C^2B - \tilde{L}_2A + \tilde{L}_1B - [A,B])^1_2 = 0,$$
$$(C^1A - C^2B - \tilde{L}_2A + \tilde{L}_1B - [A,B])^1_3 = 0,$$
$$(C^1A - C^2B - \tilde{L}_2A + \tilde{L}_1B - [A,B])^2_3 = 0,$$

то

$$C^1A - C^2B - \tilde{L}_2A + \tilde{L}_1B - [A,B] = \Theta.$$

Итак, условия (8.32) выполнены при всех $u \in \tilde{\omega}$. Тогда условия (8.31) выполнены при всех $u \in \tilde{D}$, $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{R}^3$. Следовательно, условия (8.28) выполнены при всех $u \in \tilde{D}$, $y \in \mathbb{R}^{12}$. □

Далее нам потребуется следующая лемма.

**Лемма (о покрытии сегмента интервалами).** *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $Q$ — некоторое множество интервалов на $\mathbb{R}$. Пусть $[a,b] \subseteq \bigcup\limits_{I \in Q} I$. Тогда можно указать такие числа $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$, $t_0, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$, что $(\alpha_m, \beta_m) \in Q$ при $m = \overline{1, N}$, $a = t_0 < \ldots < t_N = b$, $[t_{m-1}, t_m] \subseteq (\alpha_m, \beta_m)$ при $m = \overline{1, N}$.*

**Доказательство.** Так как $[a,b]$ — замкнутое и ограниченное множество, то можно указать такие числа $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{\tilde{N}} \in \mathbb{R}$, $\tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{\tilde{N}} \in \mathbb{R}$, что $(\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k) \in Q$ при $k = \overline{1, \tilde{N}}$, $[a,b] \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\tilde{N}} (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k)$.

Покажем, что можно указать такое число $N \in \mathbb{N}$ и такие числа $k_1, \ldots, k_N = \overline{1, \tilde{N}}$, что

1) если $N = 1$, то $a \in (\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\beta}_{k_1})$, $b \in (\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\beta}_{k_1})$;
2) если $N \geqslant 2$, то $a \in (\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\beta}_{k_1})$, $\tilde{\beta}_{k_{m-1}} \in (\tilde{\alpha}_{k_m}, \tilde{\beta}_{k_m})$ при $m = \overline{2, N}$, $b \in (\tilde{\alpha}_{k_N}, \tilde{\beta}_{k_N})$.

Так как $[a,b] \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\tilde{N}} (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k)$, то можно указать такое число $k_1 = \overline{1, \tilde{N}}$, что $a \in (\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\beta}_{k_1})$. Пусть $\tilde{\beta}_{k_1} > b$. Тогда $b \in (\tilde{\alpha}_{k_1}, \tilde{\beta}_{k_1})$. Остановим процесс и положим $N = 1$. Пусть $\tilde{\beta}_{k_1} \leqslant b$. Тогда $a < \tilde{\beta}_{k_1} \leqslant b$.

Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 2$. Пусть уже построены числа $k_1, \ldots, k_{m-1} = \overline{1, \tilde{N}}$, но процесс ещё не остановлен. Тогда $a < \tilde{\beta}_{k_1} < \ldots < \tilde{\beta}_{k_{m-1}} \leqslant b$. Так как $[a,b] \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\tilde{N}} (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k)$, то можно указать такое число $k_m = \overline{1, \tilde{N}}$, что $\tilde{\beta}_{k_{m-1}} \in (\tilde{\alpha}_{k_m}, \tilde{\beta}_{k_m})$. Так как $k_1, \ldots, k_m$ — различные числа, то $m \leqslant \tilde{N}$. Пусть $\tilde{\beta}_{k_m} > b$. Тогда $b \in (\tilde{\alpha}_{k_m}, \tilde{\beta}_{k_m})$. Остановим процесс и положим $N = m$. Пусть $\tilde{\beta}_{k_m} \leqslant b$. Тогда $a < \tilde{\beta}_{k_1} < \ldots < \tilde{\beta}_{k_m} \leqslant b$.

Рассуждая от противного, нетрудно показать, что процесс должен остановиться. После остановки процесса получаем искомое число $N \in \mathbb{N}$ и искомые числа $k_1, \ldots, k_N$.

Положим $\alpha_m = \tilde{\alpha}_{k_m}$, $\beta_m = \tilde{\beta}_{k_m}$ при $m = \overline{1, N}$. Тогда $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$, $(\alpha_m, \beta_m) \in Q$ при $m = \overline{1, N}$,

1) если $N = 1$, то $a \in (\alpha_1, \beta_1)$, $b \in (\alpha_1, \beta_1)$;
2) если $N \geqslant 2$, то $a \in (\alpha_1, \beta_1)$, $\beta_{m-1} \in (\alpha_m, \beta_m)$ при $m = \overline{2, N}$, $b \in (\alpha_N, \beta_N)$.

Пусть $N = 1$. Положим $t_0 = a$, $t_1 = b$. Тогда $a = t_0 < t_1 = b$, $[t_0, t_1] \subseteq (\alpha_1, \beta_1)$.

Пусть $N \geqslant 2$. Положим $t_0 = a$, $t_N = b$. Тогда $t_0 < \beta_1$. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant m \leqslant N - 1$. Пусть уже построено число $t_{m-1}$. Тогда $t_{m-1} < \beta_m$. Так как $\max\{t_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}\} < \beta_m$, то можно указать такое число $t_m \in \mathbb{R}$, что $\max\{t_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}\} < t_m < \beta_m$. Тогда $t_m < \beta_{m+1}$.

За конечное число шагов получаем числа $t_0, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям $t_0 = a$, $t_N = b$, $\max\{t_{m-1}, \alpha_m, \alpha_{m+1}\} < t_m < \beta_m$ при $m = \overline{1, N-1}$. Тогда $a = t_0 < \ldots < t_N = b$, $\alpha_m < t_{m-1} < t_m < \beta_m$ при $m = \overline{1, N}$. $\square$

**Теорема 8.4.** *Пусть $r \in \overline{\mathbb{Z}}$, $r \geqslant 3$, $(D, \mu, \mu_+)$ — двумерное $C^r$-гладкое ориентированное многообразие без края, $(D, \mu, \mu_+)$ — линейно связное, односвязное многообразие, $Q \in C^2(D)$ — некоторое скалярное поле на многообразии $(D, \mu, \mu_+)$. Пусть $T_1$, $T_2$, $Z$ — некоторое решение системы уравнений Ефимова—Позняка. Пусть $p_0 \in D$, $q_0 \in E^3$, $\eta_{1,0}, \eta_{2,0}, \eta_{3,0} \in T_{q_0}E^3$. Тогда при $\omega = D$ существует решение $F$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$ задачи* (8.7), (8.9).

**Доказательство.** Фиксируем точку $p_1 \in D$. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$, $\varphi\colon [a, b] \times [c, d] \to D$, $\varphi \in C([a, b] \times [c, d])$, $\{\varphi(t, \tau)\}_{t \in [a,b]} \in C^1_*([a, b])$ при $\tau \in [c, d]$, $\varphi(a, \tau) = p_0$ при $\tau \in [c, d]$, $\varphi(b, \tau) = p_0$ при $\tau \in [c, d]$.

Фиксируем $\tau \in [c, d]$. Рассмотрим задачу (8.13), (8.14) при замене $I \to [a, b]$, $t_0 \to a$, $\varphi \to \{\varphi(t, \tau)\}_{t \in [a,b]}$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$. Как показано выше, существует решение

$$\big\{\overline{F}(t, \tau)\big\}_{t \in [a,b]},\ \big\{\overline{\eta}_1(t, \tau)\big\}_{t \in [a,b]},\ \big\{\overline{\eta}_2(t, \tau)\big\}_{t \in [a,b]},\ \big\{\overline{\eta}_3(t, \tau)\big\}_{t \in [a,b]}$$

задачи (8.13), (8.14).

Фиксируем $\tau_0 \in [c, d]$. Покажем, что можно указать такое число $\delta > 0$, что

$$\overline{F}(b, \tau) = \overline{F}(b, \tau_0), \quad \overline{\eta}_1(b, \tau) = \overline{\eta}_1(b, \tau_0),$$
$$\overline{\eta}_2(b, \tau) = \overline{\eta}_2(b, \tau_0), \quad \overline{\eta}_3(b, \tau) = \overline{\eta}_3(b, \tau_0)$$

при $\tau \in [c, d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$.

Фиксируем $t \in [a, b]$. Согласно теореме 8.3 можно указать такую окрестность $\omega(t)$ точки $\varphi(t, \tau_0)$, что существует решение $F_{[t]}$, $\eta_{1[t]}$, $\eta_{2[t]}$, $\eta_{3[t]}$ задачи (8.7), (8.9) при замене $p_0 \to \varphi(t, \tau_0)$, $\omega \to \omega(t)$, $q_0 \to \overline{F}(t, \tau_0)$, $\eta_{1,0} \to \overline{\eta}_1(t, \tau_0)$, $\eta_{2,0} \to \overline{\eta}_2(t, \tau_0)$, $\eta_{3,0} \to \overline{\eta}_3(t, \tau_0)$. Так как $\{\varphi(t, \tau_0)\}_{t \in [a,b]} \in C([a, b])$, то можно указать такое число $\alpha(t) < t$ и такое число $\beta(t) > t$, что $\varphi(\xi, \tau_0) \in \omega(t)$ при $\xi \in (\alpha(t), \beta(t)) \cap [a, b]$. Так как

$$F_{[t]}(\varphi(t, \tau_0)) = \overline{F}(t, \tau_0), \quad \eta_{1[t]}(\varphi(t, \tau_0)) = \overline{\eta}_1(t, \tau_0),$$
$$\eta_{2[t]}(\varphi(t, \tau_0)) = \overline{\eta}_2(t, \tau_0), \quad \eta_{3[t]}(\varphi(t, \tau_0)) = \overline{\eta}_3(t, \tau_0),$$

то

$$F_{[t]}(\varphi(\xi,\tau_0)) = \overline{F}(\xi,\tau_0), \quad \eta_{1[t]}(\varphi(\xi,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(\xi,\tau_0),$$
$$\eta_{2[t]}(\varphi(\xi,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(\xi,\tau_0), \quad \eta_{3[t]}(\varphi(\xi,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(\xi,\tau_0)$$

при $\xi \in (\alpha(t),\beta(t)) \cap [a,b]$.

В силу леммы о покрытии сегмента интервалами можно указать такие числа $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \mathbb{R}$, $\beta_1,\ldots,\beta_N \in \mathbb{R}$, $t_0,\ldots,t_N \in \mathbb{R}$, $\tilde{t}_1,\ldots,\tilde{t}_N \in [a,b]$, что $\alpha_m = \alpha(\tilde{t}_m)$, $\beta_m = \beta(\tilde{t}_m)$ при $m = \overline{1,N}$, $a = t_0 < \ldots < t_N = b$, $[t_{m-1},t_m] \subseteq \subseteq (\alpha_m,\beta_m)$ при $m = \overline{1,N}$.

Обозначим $\omega_m = \omega(\tilde{t}_m)$, $F_{(m)} = F_{[\tilde{t}_m]}$, $\eta_{1(m)} = \eta_{1[\tilde{t}_m]}$, $\eta_{2(m)} = \eta_{2[\tilde{t}_m]}$, $\eta_{3(m)} = = \eta_{3[\tilde{t}_m]}$ при $m = \overline{1,N}$. Тогда $\varphi(t,\tau_0) \in \omega_m$ при $m = \overline{1,N}$, $t \in (\alpha_m,\beta_m) \cap [a,b]$,

$$F_{(m)}(\varphi(t,\tau_0)) = \overline{F}(t,\tau_0), \quad \eta_{1(m)}(\varphi(t,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(t,\tau_0),$$
$$\eta_{2(m)}(\varphi(t,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(t,\tau_0), \quad \eta_{3(m)}(\varphi(t,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(t,\tau_0)$$

при $m = \overline{1,N}$, $t \in (\alpha_m,\beta_m) \cap [a,b]$.

Пусть $N = 1$. Так как $\varphi(t,\tau_0) \in \omega_1$ при $t \in [a,b]$, $\varphi \in C([a,b] \times [c,d])$, то можно указать такое число $\delta > 0$, что $\varphi(t,\tau) \in \omega_1$ при $t \in [a,b]$, $\tau \in [c,d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$. Так как

$$F_{(1)}(\varphi(a,\tau)) = F_{(1)}(p_0) = F_{(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{F}(a,\tau_0) = q_0 = \overline{F}(a,\tau),$$
$$\eta_{1(1)}(\varphi(a,\tau)) = \eta_{1(1)}(p_0) = \eta_{1(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(a,\tau_0) = \eta_{1,0} = \overline{\eta}_1(a,\tau),$$
$$\eta_{2(1)}(\varphi(a,\tau)) = \eta_{2(1)}(p_0) = \eta_{2(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(a,\tau_0) = \eta_{2,0} = \overline{\eta}_2(a,\tau),$$
$$\eta_{3(1)}(\varphi(a,\tau)) = \eta_{3(1)}(p_0) = \eta_{3(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(a,\tau_0) = \eta_{3,0} = \overline{\eta}_3(a,\tau)$$

при $\tau \in [c,d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$, то

$$F_{(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{F}(t,\tau), \quad \eta_{1(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_1(t,\tau),$$
$$\eta_{2(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_2(t,\tau), \quad \eta_{3(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_3(t,\tau)$$

при $t \in [a,b]$, $\tau \in [c,d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$. Тогда

$$\overline{F}(b,\tau) = F_{(1)}(\varphi(b,\tau)) = F_{(1)}(p_1) = F_{(1)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{F}(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_1(b,\tau) = \eta_{1(1)}(\varphi(b,\tau)) = \eta_{1(1)}(p_1) = \eta_{1(1)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau) = \eta_{2(1)}(\varphi(b,\tau)) = \eta_{2(1)}(p_1) = \eta_{2(1)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_3(b,\tau) = \eta_{3(1)}(\varphi(b,\tau)) = \eta_{3(1)}(p_1) = \eta_{3(1)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(b,\tau_0)$$

при $\tau \in [c,d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$.

Пусть $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Фиксируем $m = \overline{1,N-1}$. Так как $\varphi(t_m,\tau_0) \in \omega_m$, $\varphi(t_m,\tau_0) \in \omega_{m+1}$, то можно указать такую линейно связную окрестность $\tilde{\omega}_m$ точки $\varphi(t_m,\tau_0)$, что $\tilde{\omega}_m \subseteq \omega_m$, $\tilde{\omega}_m \subseteq \omega_{m+1}$.

Так как

$$F_{(m)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{F}(t_m,\tau_0), \quad \eta_{1(m)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(t_m,\tau_0),$$
$$\eta_{2(m)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(t_m,\tau_0), \quad \eta_{3(m)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(t_m,\tau_0),$$

то функции $F_{(m)}$, $\eta_{1(m)}$, $\eta_{2(m)}$, $\eta_{3(m)}$ удовлетворяют задаче (8.7), (8.9) при замене $p_0 \to \varphi(t_m,\tau_0)$, $\omega \to \tilde{\omega}_m$, $q_0 \to \overline{F}(t_m,\tau_0)$, $\eta_{1,0} \to \overline{\eta}_1(t_m,\tau_0)$, $\eta_{2,0} \to \overline{\eta}_2(t_m,\tau_0)$, $\eta_{3,0} \to \overline{\eta}_3(t_m,\tau_0)$.

Так как

$$F_{(m+1)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{F}(t_m,\tau_0), \quad \eta_{1(m+1)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(t_m,\tau_0),$$
$$\eta_{2(m+1)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(t_m,\tau_0), \quad \eta_{3(m+1)}(\varphi(t_m,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(t_m,\tau_0),$$

то функции $F_{(m+1)}$, $\eta_{1(m+1)}$, $\eta_{2(m+1)}$, $\eta_{3(m+1)}$ удовлетворяют задаче (8.7), (8.9) при замене $p_0 \to \varphi(t_m,\tau_0)$, $\omega \to \tilde{\omega}_m$, $q_0 \to \overline{F}(t_m,\tau_0)$, $\eta_{1,0} \to \overline{\eta}_1(t_m,\tau_0)$, $\eta_{2,0} \to \overline{\eta}_2(t_m,\tau_0)$, $\eta_{3,0} \to \overline{\eta}_3(t_m,\tau_0)$.

Согласно теореме 8.2

$$F_{(m)}(p) = F_{(m+1)}(p), \quad \eta_{1(m)}(p) = \eta_{1(m+1)}(p),$$
$$\eta_{2(m)}(p) = \eta_{2(m+1)}(p), \quad \eta_{3(m)}(p) = \eta_{3(m+1)}(p)$$

при $p \in \tilde{\omega}_m$.

Так как $\varphi(t,\tau_0) \in \omega_m$ при $m = \overline{1,N}$, $t \in [t_{m-1},t_m]$, $\varphi(t_m,\tau_0) \in \tilde{\omega}_m$ при $m = \overline{1,N-1}$, $\varphi \in C([a,b] \times [c,d])$, то можно указать такое число $\delta > 0$, что $\varphi(t,\tau) \in \omega_m$ при $m = \overline{1,N}$, $t \in [t_{m-1},t_m]$, $\tau \in [c,d]$, $|\tau-\tau_0| < \delta$, $\varphi(t_m,\tau) \in \tilde{\omega}_m$ при $m = \overline{1,N-1}$, $\tau \in [c,d]$, $|\tau-\tau_0| < \delta$. Так как

$$F_{(1)}(\varphi(a,\tau)) = F_{(1)}(p_0) = F_{(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{F}(a,\tau_0) = q_0 = \overline{F}(a,\tau),$$
$$\eta_{1(1)}(\varphi(a,\tau)) = \eta_{1(1)}(p_0) = \eta_{1(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(a,\tau_0) = \eta_{1,0} = \overline{\eta}_1(a,\tau),$$
$$\eta_{2(1)}(\varphi(a,\tau)) = \eta_{2(1)}(p_0) = \eta_{2(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(a,\tau_0) = \eta_{2,0} = \overline{\eta}_2(a,\tau),$$
$$\eta_{3(1)}(\varphi(a,\tau)) = \eta_{3(1)}(p_0) = \eta_{3(1)}(\varphi(a,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(a,\tau_0) = \eta_{3,0} = \overline{\eta}_3(a,\tau)$$

при $\tau \in [c,d]$, $|\tau-\tau_0| < \delta$, то

$$F_{(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{F}(t,\tau), \quad \eta_{1(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_1(t,\tau),$$
$$\eta_{2(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_2(t,\tau), \quad \eta_{3(1)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_3(t,\tau)$$

при $t \in [t_0,t_1]$, $\tau \in [c,d]$, $|\tau-\tau_0| < \delta$. Так как

$$F_{(2)}(\varphi(t_1,\tau)) = F_{(1)}(\varphi(t_1,\tau)) = \overline{F}(t_1,\tau),$$
$$\eta_{1(2)}(\varphi(t_1,\tau)) = \eta_{1(1)}(\varphi(t_1,\tau)) = \overline{\eta}_1(t_1,\tau),$$
$$\eta_{2(2)}(\varphi(t_1,\tau)) = \eta_{2(1)}(\varphi(t_1,\tau)) = \overline{\eta}_2(t_1,\tau),$$
$$\eta_{3(2)}(\varphi(t_1,\tau)) = \eta_{3(1)}(\varphi(t_1,\tau)) = \overline{\eta}_3(t_1,\tau)$$

при $\tau \in [c,d]$, $|\tau-\tau_0| < \delta$, то

$$F_{(2)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{F}(t,\tau),$$
$$\eta_{1(2)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_1(t,\tau),$$
$$\eta_{2(2)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_2(t,\tau),$$
$$\eta_{3(2)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_3(t,\tau)$$

при $t \in [t_1, t_2]$, $\tau \in [c, d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$. Продолжая рассуждения, получаем, что

$$F_{(N)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{F}(t,\tau), \quad \eta_{1(N)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_1(t,\tau),$$
$$\eta_{2(N)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_2(t,\tau), \quad \eta_{3(N)}(\varphi(t,\tau)) = \overline{\eta}_3(t,\tau)$$

при $t \in [t_{N-1}, t_N]$, $\tau \in [c, d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$. Тогда

$$\overline{F}(b,\tau) = F_{(N)}(\varphi(b,\tau)) = F_{(N)}(p_1) = F_{(N)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{F}(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_1(b,\tau) = \eta_{1(N)}(\varphi(b,\tau)) = \eta_{1(N)}(p_1) = \eta_{1(N)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{\eta}_1(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau) = \eta_{2(N)}(\varphi(b,\tau)) = \eta_{2(N)}(p_1) = \eta_{2(N)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{\eta}_2(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_3(b,\tau) = \eta_{3(N)}(\varphi(b,\tau)) = \eta_{3(N)}(p_1) = \eta_{3(N)}(\varphi(b,\tau_0)) = \overline{\eta}_3(b,\tau_0)$$

при $\tau \in [c, d]$, $|\tau - \tau_0| < \delta$.

Покажем, что

$$\overline{F}(b,\tau) = \overline{F}(b,c), \quad \overline{\eta}_1(b,\tau) = \overline{\eta}_1(b,c),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau) = \overline{\eta}_2(b,c), \quad \overline{\eta}_3(b,\tau) = \overline{\eta}_3(b,c)$$

при $\tau \in [c, d]$. Обозначим через $I$ множество всех таких $\tau \in [c, d]$, что

$$\overline{F}(b,\xi) = \overline{F}(b,c), \quad \overline{\eta}_1(b,\xi) = \overline{\eta}_1(b,c),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\xi) = \overline{\eta}_2(b,c), \quad \overline{\eta}_3(b,\xi) = \overline{\eta}_3(b,c)$$

при $\xi \in [c, \tau]$. Очевидно, $c \in I$, $I \subseteq [c, d]$. Обозначим $\tau_0 = \sup I$. Очевидно, $\tau_0 \in [c, d]$.

Покажем, что $\tau_0 \in I$. Пусть $\tau_0 = c$, тогда $\tau_0 \in I$. Пусть $\tau_0 > c$. Нетрудно показать, что

$$\overline{F}(b,\tau) = \overline{F}(b,c), \quad \overline{\eta}_1(b,\tau) = \overline{\eta}_1(b,c),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau) = \overline{\eta}_2(b,c), \quad \overline{\eta}_3(b,\tau) = \overline{\eta}_3(b,c)$$

при $\tau \in [c, \tau_0)$. По доказанному выше можно указать такое число $\tau_1 \in [c, \tau_0)$, что

$$\overline{F}(b,\tau_1) = \overline{F}(b,\tau_0), \quad \overline{\eta}_1(b,\tau_1) = \overline{\eta}_1(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau_1) = \overline{\eta}_2(b,\tau_0), \quad \overline{\eta}_3(b,\tau_1) = \overline{\eta}_3(b,\tau_0).$$

Так как $\tau_1 \in [c, \tau_0)$, то

$$\overline{F}(b,\tau_0) = \overline{F}(b,\tau_1) = \overline{F}(b,c),$$
$$\overline{\eta}_1(b,\tau_0) = \overline{\eta}_1(b,\tau_1) = \overline{\eta}_1(b,c),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau_0) = \overline{\eta}_2(b,\tau_1) = \overline{\eta}_2(b,c),$$
$$\overline{\eta}_3(b,\tau_0) = \overline{\eta}_3(b,\tau_1) = \overline{\eta}_3(b,c).$$

Тогда $\tau_0 \in I$.

Покажем, что $\tau_0 = d$. Пусть $\tau_0 < d$. По доказанному выше можно указать такое число $\tau_1 \in (\tau_0, d]$, что

$$\overline{F}(b,\tau) = \overline{F}(b,\tau_0), \quad \overline{\eta}_1(b,\tau) = \overline{\eta}_1(b,\tau_0),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau) = \overline{\eta}_2(b,\tau_0), \quad \overline{\eta}_3(b,\tau) = \overline{\eta}_3(b,\tau_0)$$

при $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$. Так как $\tau_0 \in I$, то $\tau_1 \in I$. Тогда $\tau_1 \leqslant \tau_0 < \tau_1$. Полученное противоречие означает, что $\tau_0 = d$. Так как $\tau_0 \in I$, то

$$\overline{F}(b,\tau) = \overline{F}(b,c), \quad \overline{\eta}_1(b,\tau) = \overline{\eta}_1(b,c),$$
$$\overline{\eta}_2(b,\tau) = \overline{\eta}_2(b,c), \quad \overline{\eta}_3(b,\tau) = \overline{\eta}_3(b,c)$$

при $\tau \in [c,d]$.

Фиксируем точку $p_1 \in D$. Пусть $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, $a_0 < b_0$, $\varphi_0\colon [a_0,b_0] \to D$, $\varphi_0 \in C^1_*([a_0,b_0]) \cap C^0([a_0,b_0])$, $\varphi_0(a_0) = p_0$, $\varphi_0(b_0) = p_1$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1$, $\varphi_1\colon [a_1,b_1] \to D$, $\varphi_1 \in C^1_*([a_1,b_1]) \cap C^0([a_1,b_1])$, $\varphi_1(a_1) = p_0$, $\varphi_1(b_1) = p_1$.

Рассмотрим задачу (8.13), (8.14) при замене $I \to [a_0,b_0]$, $t_0 \to a_0$, $\varphi \to \varphi_0$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$. Как показано выше, существует решение $\overline{F}_{(0)}$, $\overline{\eta}_{1(0)}$, $\overline{\eta}_{2(0)}$, $\overline{\eta}_{3(0)}$ задачи (8.13), (8.14).

Рассмотрим задачу (8.13), (8.14) при замене $I \to [a_1,b_1]$, $t_0 \to a_1$, $\varphi \to \varphi_1$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$. Как показано выше, существует решение $\overline{F}_{(1)}$, $\overline{\eta}_{1(1)}$, $\overline{\eta}_{2(1)}$, $\overline{\eta}_{3(1)}$ задачи (8.13), (8.14).

Покажем, что

$$\overline{F}_{(0)}(b_0) = \overline{F}_{(1)}(b_1), \quad \overline{\eta}_{1(0)}(b_0) = \overline{\eta}_{1(1)}(b_1),$$
$$\overline{\eta}_{2(0)}(b_0) = \overline{\eta}_{2(1)}(b_1), \quad \overline{\eta}_{3(0)}(b_0) = \overline{\eta}_{3(1)}(b_1).$$

Обозначим

$$\tilde{\varphi}_0(t) = \varphi_0(a_0 + (b_0 - a_0)t), \quad \tilde{F}_{(0)} = \overline{F}_{(0)}(a_0 + (b_0 - a_0)t),$$
$$\tilde{\eta}_{1(0)}(t) = \overline{\eta}_{1(0)}(a_0 + (b_0 - a_0)t),$$
$$\tilde{\eta}_{2(0)}(t) = \overline{\eta}_{2(0)}(a_0 + (b_0 - a_0)t),$$
$$\tilde{\eta}_{3(0)}(t) = \overline{\eta}_{3(0)}(a_0 + (b_0 - a_0)t)$$

при $t \in [0,1]$. Очевидно, функции $\tilde{F}_{(0)}$, $\tilde{\eta}_{1(0)}$, $\tilde{\eta}_{2(0)}$, $\tilde{\eta}_{3(0)}$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при замене $I \to [0,1]$, $t_0 \to 0$, $\varphi \to \tilde{\varphi}_0$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$.

Обозначим

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \varphi_1(a_1 + (b_1 - a_1)t), \quad \tilde{F}_{(1)} = \overline{F}_{(1)}(a_1 + (b_1 - a_1)t),$$
$$\tilde{\eta}_{1(1)}(t) = \overline{\eta}_{1(1)}(a_1 + (b_1 - a_1)t),$$
$$\tilde{\eta}_{2(1)}(t) = \overline{\eta}_{2(1)}(a_1 + (b_1 - a_1)t),$$
$$\tilde{\eta}_{3(1)}(t) = \overline{\eta}_{3(1)}(a_1 + (b_1 - a_1)t)$$

при $t \in [0,1]$. Очевидно, функции $\tilde{F}_{(1)}$, $\tilde{\eta}_{1(1)}$, $\tilde{\eta}_{2(1)}$, $\tilde{\eta}_{3(1)}$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при замене $I \to [0,1]$, $t_0 \to 0$, $\varphi \to \tilde{\varphi}_1$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$.

Так как $(D, \mu, \mu_+)$ — односвязное многообразие, то можно указать такую функцию $\varphi\colon [0,1] \times [0,1] \to D$, что $\varphi \in C([0,1] \times [0,1])$, $\{\varphi(t,\tau)\}_{t \in [0,1]} \in C^1_*([0,1])$ при $\tau \in [0,1]$, $\varphi(0,\tau) = p_0$ при $\tau \in [0,1]$, $\varphi(1,\tau) = p_1$ при $\tau \in [0,1]$, $\varphi(t,0) = \tilde{\varphi}_0(t)$ при $t \in [0,1]$, $\varphi(t,1) = \tilde{\varphi}_1(t)$ при $t \in [0,1]$.

Фиксируем $\tau \in [0,1]$. Рассмотрим задачу (8.13), (8.14) при замене $I \to [0,1]$, $t_0 \to 0$, $\varphi \to \{\varphi(t,\tau)\}_{t\in[0,1]}$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$. Как показано выше, существует решение

$$\{\overline{F}(t,\tau)\}_{t\in[0,1]},\ \{\overline{\eta}_1(t,\tau)\}_{t\in[0,1]},\ \{\overline{\eta}_2(t,\tau)\}_{t\in[0,1]},\ \{\overline{\eta}_3(t,\tau)\}_{t\in[0,1]}$$

задачи (8.13), (8.14).

Очевидно,

$$\begin{aligned} \overline{F}(t,0) &= \tilde{F}_{(0)}(t), & \overline{\eta}_1(t,0) &= \tilde{\eta}_{1(0)}(t),\\ \overline{\eta}_2(t,0) &= \tilde{\eta}_{2(0)}(t), & \overline{\eta}_3(t,0) &= \tilde{\eta}_{3(0)}(t),\\ \overline{F}(t,1) &= \tilde{F}_{(1)}(t), & \overline{\eta}_1(t,1) &= \tilde{\eta}_{1(1)}(t),\\ \overline{\eta}_2(t,1) &= \tilde{\eta}_{2(1)}(t), & \overline{\eta}_3(t,1) &= \tilde{\eta}_{3(1)}(t) \end{aligned}$$

при $t \in [0,1]$.

В силу доказанного выше

$$\begin{aligned} \overline{F}_{(0)}(b_0) &= \tilde{F}_{(0)}(1) = \overline{F}(1,0) = \overline{F}(1,1) = \tilde{F}_{(1)}(1) = \overline{F}_{(1)}(b_1),\\ \overline{\eta}_{1(0)}(b_0) &= \tilde{\eta}_{1(0)}(1) = \overline{\eta}_1(1,0) = \overline{\eta}_1(1,1) = \tilde{\eta}_{1(1)}(1) = \overline{\eta}_{1(1)}(b_1),\\ \overline{\eta}_{2(0)}(b_0) &= \tilde{\eta}_{2(0)}(1) = \overline{\eta}_2(1,0) = \overline{\eta}_2(1,1) = \tilde{\eta}_{2(1)}(1) = \overline{\eta}_{2(1)}(b_1),\\ \overline{\eta}_{3(0)}(b_0) &= \tilde{\eta}_{3(0)}(1) = \overline{\eta}_3(1,0) = \overline{\eta}_3(1,1) = \tilde{\eta}_{3(1)}(1) = \overline{\eta}_{3(1)}(b_1). \end{aligned}$$

Фиксируем точку $p_1 \in D$. Так как $(D,\mu,\mu_+)$ — линейно связное многообразие, то можно указать такую функцию $\{\varphi(t,p_1)\}_{t\in[0,1]}\colon [0,1] \to D$, что $\{\varphi(t,p_1)\}_{t\in[0,1]} \in C^1([0,1])$, $\varphi(0,p_1) = p_0$, $\varphi(1,p_1) = p_1$. Рассмотрим задачу (8.13), (8.14) при замене $I \to [0,1]$, $t_0 \to 0$, $\varphi \to \{\varphi(t,p_1)\}_{t\in[0,1]}$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$. Как показано выше, существует решение

$$\{\overline{F}(t,p_1)\}_{t\in[0,1]},\ \{\overline{\eta}_1(t,p_1)\}_{t\in[0,1]},\ \{\overline{\eta}_2(t,p_1)\}_{t\in[0,1]},\ \{\overline{\eta}_3(t,p_1)\}_{t\in[0,1]}$$

задачи (8.13), (8.14).

Покажем, что $\{\overline{F}(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_1(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_2(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_3(1,p)\}_{p\in D}$ — решение задачи (8.7), (8.9) при $\omega = D$.

Рассмотрим точку $p_0$. Согласно теореме 8.3 можно указать такую линейно связную окрестность $\omega_0$ точки $p_0$, что существует решение $F_{(0)}$, $\eta_{1(0)}$, $\eta_{2(0)}$, $\eta_{3(0)}$ задачи (8.7), (8.9) при $\omega = \omega_0$.

Покажем, что

$$\overline{F}(1,p) = F_{(0)}(p), \quad \overline{\eta}_1(1,p) = \eta_{1(0)}(p), \quad \overline{\eta}_2(1,p) = \eta_{2(0)}(p), \quad \overline{\eta}_3(1,p) = \eta_{3(0)}(p)$$

при $p \in \omega_0$. Фиксируем точку $p \in \omega_0$. Так как $\omega_0$ — линейно связное множество, то можно указать такую функцию $\psi\colon [0,1] \to \omega_0$, что $\psi \in C^1([0,1])$, $\psi(0) = p_0$, $\psi(1) = p$. Как показано выше, функции $F_{(0)} \circ \psi$, $\eta_{1(0)} \circ \psi$, $\eta_{2(0)} \circ \psi$, $\eta_{3(0)} \circ \psi$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при замене $I \to [0,1]$, $t_0 \to 0$, $\varphi \to \psi$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$. В силу доказанного выше

$$\begin{aligned}
\overline{F}(1,p) &= F_{(0)}(\psi(1)) = F_{(0)}(p),\\
\overline{\eta}_1(1,p) &= \eta_{1(0)}(\psi(1)) = \eta_{1(0)}(p),\\
\overline{\eta}_2(1,p) &= \eta_{2(0)}(\psi(1)) = \eta_{2(0)}(p),\\
\overline{\eta}_3(1,p) &= \eta_{3(0)}(\psi(1)) = \eta_{3(0)}(p).
\end{aligned}$$

Так как

$$\overline{F}(1,p) = F_{(0)}(p),\quad \overline{\eta}_1(1,p) = \eta_{1(0)}(p),\quad \overline{\eta}_2(1,p) = \eta_{2(0)}(p),\quad \overline{\eta}_3(1,p) = \eta_{3(0)}(p)$$

при $p \in \omega_0$, то функции $\{\overline{F}(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_1(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_2(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_3(1,p)\}_{p\in D}$ удовлетворяют задаче (8.7), (8.9) при $\omega = \omega_0$.

Фиксируем точку $p_1 \in D$, $p_1 \neq p_0$. Согласно теореме 8.3 можно указать такую линейно связную окрестность $\omega_1$ точки $p_1$, что существует решение $F_{(1)}$, $\eta_{1(1)}$, $\eta_{2(1)}$, $\eta_{3(1)}$ задачи (8.7), (8.9) при замене $p_0 \to p_1$, $\omega \to \omega_1$, $q_0 \to \overline{F}(1,p_1)$, $\eta_{1,0} \to \overline{\eta}_1(1,p_1)$, $\eta_{2,0} \to \overline{\eta}_2(1,p_1)$, $\eta_{3,0} \to \overline{\eta}_3(1,p_1)$.

Покажем, что:

$$\overline{F}(1,p) = F_{(1)}(p),\quad \overline{\eta}_1(1,p) = \eta_{1(1)}(p),\quad \overline{\eta}_2(1,p) = \eta_{2(1)}(p),\quad \overline{\eta}_3(1,p) = \eta_{3(1)}(p)$$

при $p \in \omega_1$. Фиксируем точку $p \in \omega_1$. Так как $\omega_1$ — линейно связное множество, то можно указать такую функцию $\psi\colon [0,1] \to \omega_1$, что $\psi \in C^1([0,1])$, $\psi(0) = p_0$, $\psi(1) = p$. Как показано выше, функции $F_{(1)} \circ \psi$, $\eta_{1(1)} \circ \psi$, $\eta_{2(1)} \circ \psi$, $\eta_{3(1)} \circ \psi$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при замене $I \to [0,1]$, $t_0 \to 0$, $\varphi \to \psi$, $q_0 \to \overline{F}(1,p_1)$, $\eta_{1,0} \to \overline{\eta}_1(1,p_1)$, $\eta_{2,0} \to \overline{\eta}_2(1,p_1)$, $\eta_{3,0} \to \overline{\eta}_3(1,p_1)$. Обозначим

$$\chi(t) = \varphi(t,p_1),\quad \overline{\overline{F}}(t) = \overline{F}(t,p_1),$$
$$\overline{\overline{\eta}}_1(t) = \overline{\eta}_1(t,p_1),\quad \overline{\overline{\eta}}_2(t) = \overline{\eta}_2(t,p_1),\quad \overline{\overline{\eta}}_3(t) = \overline{\eta}_3(t,p_1)$$

при $t \in [0,1]$,

$$\chi(t) = \psi(t-1),\quad \overline{\overline{F}}(t) = F_{(1)}(\psi(t-1)),$$
$$\overline{\overline{\eta}}_1(t) = \eta_{1(1)}(\psi(t-1)),\quad \overline{\overline{\eta}}_2(t) = \eta_{2(1)}(\psi(t-1)),\quad \overline{\overline{\eta}}_3(t) = \eta_{3(1)}(\psi(t-1))$$

при $t \in [1,2]$. Очевидно, функции $\overline{\overline{F}}$, $\overline{\overline{\eta}}_1$, $\overline{\overline{\eta}}_2$, $\overline{\overline{\eta}}_3$ удовлетворяют задаче (8.13), (8.14) при замене $I \to [0,2]$, $t_0 \to 0$, $\varphi \to \chi$, $q_0 \to q_0$, $\eta_{1,0} \to \eta_{1,0}$, $\eta_{2,0} \to \eta_{2,0}$, $\eta_{3,0} \to \eta_{3,0}$. Согласно доказанному выше

$$\begin{aligned}
\overline{F}(1,p) &= \overline{\overline{F}}(1) = F_{(1)}(\psi(1)) = F_{(1)}(p),\\
\overline{\eta}_1(1,p) &= \overline{\overline{\eta}}_1(1) = \eta_{1(1)}(\psi(1)) = \eta_{1(1)}(p),\\
\overline{\eta}_2(1,p) &= \overline{\overline{\eta}}_2(1) = \eta_{2(1)}(\psi(1)) = \eta_{2(1)}(p),\\
\overline{\eta}_3(1,p) &= \overline{\overline{\eta}}_3(1) = \eta_{3(1)}(\psi(1)) = \eta_{3(1)}(p).
\end{aligned}$$

Так как

$$\overline{F}(1,p) = F_{(1)}(p),\quad \overline{\eta}_1(1,p) = \eta_{1(1)}(p),\quad \overline{\eta}_2(1,p) = \eta_{2(1)}(p),\quad \overline{\eta}_3(1,p) = \eta_{3(1)}(p)$$

при $p \in \omega_1$, то функции $\{\overline{F}(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_1(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_2(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_3(1,p)\}_{p\in D}$ удовлетворяют системе уравнений (8.7) при $\omega = \omega_1$.

В силу произвольности выбора точки $p_1 \in D$, $p_1 \neq p_0$, получаем, что функции $\{\overline{F}(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_1(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_2(1,p)\}_{p\in D}$, $\{\overline{\eta}_3(1,p)\}_{p\in D}$ удовлетворяют задаче (8.7), (8.9) при $\omega = D$. $\square$

## Литература


[1] Ефимов Н. В., Позняк Э. Г. Некоторые преобразования основных уравнений теории поверхностей // ДАН СССР. — 1961. — Т. 137, № 1. — С. 25—27.

[2] Ефимов Н. В., Позняк Э. Г. Поверхности с медленно изменяющейся отрицательной кривизной // Успехи мат. наук. — 1966. — Т. 21, № 5. — С. 3—58.

[3] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1984.

[4] Позняк Э. Г. Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения $Z_{xy} = \sin Z$ // Дифференц. уравн. — 1979. — Т. 15, № 7. — С. 1332—1336.

[5] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.

[6] Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. — М.: Факториал, 1998.

[7] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. — М: ГИТТЛ, 1953.

[8] Розендорн Э. Р. Исследование основных уравнений теории поверхностей в асимптотических координатах // Мат. сб. — 1966. — Т. 70, № 4. — С. 490—507.