Келерова геометрия гиперболического типа на многообразии невырожденных m-пар

В. В. КОННОВ
*Финансовая академия
при Правительстве Российской Федерации*
e-mail: vkonnov@rol.ru

УДК 514.76

Ключевые слова: келерова геометрия, проективное пространство, грассманиан.

Аннотация

Невырожденная *m-пара* (A, Ξ) в n-мерном проективном пространстве $\mathbb{R}P_n$ состоит из m-плоскости A и не пересекающей её $(n-m-1)$-плоскости Ξ в $\mathbb{R}P_n$. Совокупность $\mathfrak{N}^n_m$ всех невырожденных m-пар в $\mathbb{R}P_n$ является $2(n-m)(n-m-1)$-мерным вещественно-аналитическим многообразием. Многообразие $\mathfrak{N}^n_m$ является однородным пространством $\mathfrak{N}^n_m = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R})$, на котором внутренним образом определена келерова структура гиперболического типа. Таким образом, многообразие $\mathfrak{N}^n_m$ является гиперболическим аналогом комплексного грассманиана $\mathbb{C}G_{m,n} = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(m+1)\times\mathrm{U}(n-m)$. В частности, многообразие 0-пар $\mathfrak{N}^n_0 = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(1,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ является гиперболическим аналогом комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P_n = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1)\times\mathrm{U}(n)$. Как и $\mathbb{C}P_n$, многообразие $\mathfrak{N}^n_0$ является келеровым многообразием постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны (но относительно гиперболической метрики). В этом смысле $\mathfrak{N}^n_0$ — гиперболическая пространственная форма. Было доказано, что многообразие 0-пар $\mathfrak{N}^n_0$ глобально симплектоморфно тотальному пространству $T^*\mathbb{R}P_n$ кокасательного расслоения над проективным пространством $\mathbb{R}P_n$. Обобщение этого результата состоит в том, что многообразие невырожденных m-пар $\mathfrak{N}^n_m$ глобально симплектоморфно тотальному пространству $T^*\mathbb{R}G_{m,n}$ кокасательного расслоения над грассмановым многообразием $\mathbb{R}G_{m,n}$ m-мерных подпространств пространства $\mathbb{R}P_n$.

В настоящей работе изучается каноническая келерова структура на $\mathfrak{N}^n_m$. Даётся описание двух типов подмногообразий на $\mathfrak{N}^n_m$, являющихся естественными гиперболическими пространственными формами, которые голоморфно изометричны многообразиям 0-пар в $\mathbb{R}P_{m+1}$ и в $\mathbb{R}P_{n-m}$ соответственно. Доказано, что через каждую точку многообразия $\mathfrak{N}^n_m$ проходит $2(n-m)$-параметрическое семейство $2(m+1)$-мерных гиперболических пространственных форм первого типа и $2(m+1)$-параметрическое семейство $2(n-m)$-мерных гиперболических пространственных форм второго типа. Более того, доказано, что естественные гиперболические пространственные формы первого типа на $\mathfrak{N}^n_m$ находятся в биективном соответствии с точками многообразия $\mathfrak{N}^n_{m+1}$, а естественные гиперболические пространственные формы второго типа на $\mathfrak{N}^n_m$ находятся в биективном соответствии с точками многообразия $\mathfrak{N}^n_{m-1}$.

Abstract

V. V. Konnov, Kähler geometry of hyperbolic type on the manifold of nondegenerate m-pairs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 141—158.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 141—158.

A nondegenerate *m-pair* (A, Ξ) in an n-dimensional projective space $\mathbb{R}P_n$ consists of an m-plane A and an $(n-m-1)$-plane Ξ in $\mathbb{R}P_n$, which do not intersect. The set $\mathfrak{N}^n_m$ of all nondegenerate m-pairs $\mathbb{R}P_n$ is a $2(n-m)(n-m-1)$-dimensional, real-complex manifold. The manifold $\mathfrak{N}^n_m$ is the homogeneous space $\mathfrak{N}^n_m = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R})$ equipped with an internal Kähler structure of hyperbolic type. Therefore, the manifold $\mathfrak{N}^n_m$ is a hyperbolic analogue of the complex Grassmanian $\mathbb{C}G_{m,n} = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(m+1) \times \mathrm{U}(n-m)$. In particular, the manifold of 0-pairs $\mathfrak{N}^n_0 = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(1,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ is a hyperbolic analogue of the complex projective space $\mathbb{C}P_n = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)$. Similarly to $\mathbb{C}P_n$, the manifold $\mathfrak{N}^n_0$ is a Kähler manifold of constant nonzero holomorphic sectional curvature (relative to a hyperbolic metrics). In this sense, $\mathfrak{N}^n_0$ is a hyperbolic spatial form. It was proved that the manifold of 0-pairs $\mathfrak{N}^n_0$ is globally symplectomorphic to the total space $T^*\mathbb{R}P_n$ of the cotangent bundle over the projective space $\mathbb{R}P_n$. A generalization of this result is as follows: the manifold of nondegenerate m-pairs $\mathfrak{N}^n_m$ is globally symplectomorphic to the total space $T^*\mathbb{R}G_{m,n}$ of the cotangent bundle over the Grassman manifold $\mathbb{R}G_{m,n}$ of m-dimensional subspaces of the space $\mathbb{R}P_n$.

In this paper, we study the canonical Kähler structure on $\mathfrak{N}^n_m$. We describe two types of submanifolds in $\mathfrak{N}^n_m$, which are natural hyperbolic spatial forms holomorphically isometric to manifolds of 0-pairs in $\mathbb{R}P_{m+1}$ and in $\mathbb{R}P_{n-m}$, respectively. We prove that for any point of the manifold $\mathfrak{N}^n_m$, there exist a $2(n-m)$-parameter family of $2(m+1)$-dimensional hyperbolic spatial forms of first type and a $2(m+1)$-parameter family of $2(n-m)$-dimensional hyperbolic spatial forms of second type passing through this point. We also prove that natural hyperbolic spatial forms of first type on $\mathfrak{N}^n_m$ are in bijective correspondence with points of the manifold $\mathfrak{N}^n_{m+1}$ and natural hyperbolic spatial forms of second type on $\mathfrak{N}^n_m$ are in bijective correspondence with points of the manifolds $\mathfrak{N}^n_{m-1}$.

1. Проективная дифференциальная геометрия многообразия невырожденных m-пар

1.1. Отображение двойственности для грассмановых многообразий

Пусть $\mathbb{R}P_n = P(W)$ — n-мерное вещественно проективное пространство, порождённое векторным пространством W. Обозначим через W^* векторное пространство, сопряжённое пространству W. Тогда $\mathbb{R}P^*_n = P(W^*)$ — проективное пространство, двойственное для $P(W)$, т. е. $P(W^*)$ — пространство гиперплоскостей в $P(W)$. Как известно, $P(W)$ и $P(W^*)$ — компактные вещественно аналитические многообразия, а канонические проекции $p\colon W \setminus \{0\} \to P(W)$ и $\hat{p}\colon W^* \setminus \{0\} \to P(W^*)$ — регулярные вещественно аналитические отображения.

Пусть $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ — фиксированное число, тогда грассманово многообразие $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$ m-мерных подпространств в $P(W)$ допускает каноническое отождествление с грассмановым многообразием $\mathbb{R}G_{n-m-1,n}(W^*)$ $(n-m-1)$-мерных подпространств в $P(W^*)$. Биекция устанавливается следующим образом. Пусть $A \in \mathbb{R}G_{m,n}(W)$ — m-мерное подпространство в $P(W)$, а $\mathcal{L}$ — подпространство в W, порождающее A, т. е. $p(\mathcal{L}) = A$. Определим *отображение двойственности* $\rho\colon \mathbb{R}G_{m,n}(W) \to \mathbb{R}G_{n-m-1,n}(W^*)$ при помощи формулы

$$\rho\colon \mathbb{R}G_{m,n}(W) \ni A = p(\mathcal{L}) \mapsto \hat{p}(\operatorname{Ann}\mathcal{L}) = \rho(A) \in \mathbb{R}G_{n-m-1,n}(W^*).$$

Очевидная проверка показывает, что ρ — биекция. Пусть $\{a_0, \dots, a_m\}$ — система линейно независимых векторов, а $\{\xi^{m+1}, \dots, \xi^n\}$ — система линейно независимых ковекторов, порождающих $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} = \langle a_0, \dots, a_m\rangle = \{x \in W \mid x = \lambda^i a_i,\ \lambda^i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, m\},$$
$$\mathcal{L} = \operatorname{Ann}\{\xi^{m+1}, \dots, \xi^n\} = \{x \in W \mid \xi^\alpha(x) = 0,\ \alpha = m+1, \dots, n\}.$$

Тогда

$$\operatorname{Ann}\mathcal{L} = \langle \xi^{m+1}, \dots, \xi^n\rangle = \{\xi \in W^* \mid \xi = \mu_\alpha \xi^\alpha,\ \mu_\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha = m+1, \dots, n\},$$
$$\operatorname{Ann}\mathcal{L} = \operatorname{Ann}\{a_0, \dots, a_m\} = \{\xi \in W^* \mid \xi(a_i) = 0,\ i = 0, \dots, m\}.$$

Поэтому линейно независимые системы $\{a_0, \dots, a_m\}$ и $\{\xi^{m+1}, \dots, \xi^n\}$ порождают, с одной стороны, m-мерную плоскость A в $P(W)$ и, с другой стороны, эти же системы порождают $(n-m-1)$-мерную плоскость $\rho(A)$ в $P(W^*)$. В этом смысле $a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$ — направляющий $(m+1)$-вектор, а $\xi^{m+1} \wedge \xi^{m+2} \wedge \ldots \wedge \xi^n$ — направляющий $(n-m)$-ковектор m-плоскости $A \subset P(W)$. Точно так же $a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$ — направляющий $(m+1)$-ковектор, а $\xi^{m+1} \wedge \xi^{m+2} \wedge \ldots \wedge \xi^n$ — направляющий $(n-m)$-вектор $(n-m-1)$-плоскости $\rho(A) \subset P(W^*)$.

1.2. Многообразие невырожденных m-пар в пространстве $\mathbb{R}P_n$

Определение 1. *m-парой* в n-мерном проективном пространстве $\mathbb{R}P_n$ называется пара (A, Ξ), состоящая из m-плоскости A и $(n-m-1)$-плоскости Ξ в $\mathbb{R}P^n$ [5].

В силу принципа двойственности $(n-m-1)$-плоскость Ξ в $P(W)$ можно отождествить с m-плоскостью $\rho(\Xi)$ в $P(W^*)$. Поэтому m-пара (A, Ξ) в $P(W)$ естественным образом отождествляется с парой $(A, \rho(\Xi))$, состоящей из m-плоскости A в $P(W)$ и m-плоскости $\rho(\Xi)$ в $P(W^*)$. Такой подход позволяет рассматривать многообразие всех m-пар в $P(W)$ как прямое произведение $\mathbb{R}G_{m,n}(W) \times \mathbb{R}G_{m,n}(W^*)$.

Пусть $A = \langle a_0, a_1, \dots, a_m\rangle$ и $\Xi = \operatorname{Ann}\{\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^m\}$. Тогда $a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m$ — направляющий $(m+1)$-вектор плоскости A, а $\xi^0 \wedge \xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^m$ — направляющий $(m+1)$-ковектор плоскости Ξ. В дальнейшем будем использовать обозначения

$$A = p(a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m), \quad \Xi = \hat{p}(\xi^0 \wedge \xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^m).$$

Определение 2. m-пара (A, Ξ) называется *невырожденной*, если $A \cap \Xi = \varnothing$.

Если $x = (A, \Xi)$ — некоторая m-пара, где $A = p(a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m)$ и $\Xi = \hat{p}(\xi^0 \wedge \xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^m)$, то условие невырожденности записывается в виде

$$\xi^0 \wedge \xi^1 \wedge \ldots \wedge \xi^m(a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m) = \begin{vmatrix} \xi^0(a_0) & \xi^0(a_1) & \dots & \xi^0(a_m) \\ \xi^1(a_0) & \xi^1(a_1) & \dots & \xi^1(a_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^m(a_0) & \xi^m(a_1) & \dots & \xi^m(a_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

В частности, условие невырожденности 0-пары (A, Ξ), где $A = p(a)$, $\Xi = \hat{p}(\xi)$, имеет вид $\xi(a) \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{N}_m^n$ — совокупность невырожденных m-пар в $\mathbb{R}P_n$. Очевидно, что $\mathfrak{N}_m^n$ — открытое подмногообразие в компактном аналитическом многообразии $\mathbb{R}G_{m,n}(W) \times \mathbb{R}G_{m,n}(W^*)$.

1.3. Структура однородного пространства на многообразии невырожденных m-пар

Пусть $\mathfrak{N}_m^n$ — многообразие невырожденных m-пар в $\mathbb{R}P_n = P(W)$ (здесь W — векторное пространство размерности $n+1$). Каждый вектор a из W будем рассматривать как столбец высоты $n+1$, а ковектор ξ из W^* отождествим со строкой длины $n+1$. Тогда $\xi(a) = \xi \cdot a$ есть результат матричного умножения. Пусть $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ — полная линейная группа порядка $n+1$. Определим левое действие

$$L\colon \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R}) \times \mathfrak{N}_m^n \to \mathfrak{N}_m^n$$

группы $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ на многообразии $\mathfrak{N}_m^n$ следующим образом. Для каждого $g \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ положим

$$L\colon (g, (A, \Xi)) \mapsto (A', \Xi'),$$

где

$$\begin{aligned} &A = p(a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m), \quad A' = p(ga_0 \wedge ga_1 \wedge \ldots \wedge ga_m),\\ &\Xi = \hat{p}(\xi_0 \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_m), \quad \Xi' = \hat{p}(\xi_0 g^{-1} \wedge \xi_1 g^{-1} \wedge \ldots \wedge \xi_m g^{-1}). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\xi_0 g^{-1} \wedge \xi_1 g^{-1} \wedge \ldots \wedge \xi_m g^{-1}(ga_0 \wedge ga_1 \wedge \ldots \wedge ga_m) = \\ &= \begin{vmatrix} \xi^0 g^{-1}(ga_0) & \xi^0 g^{-1}(ga_1) & \ldots & \xi^0 g^{-1}(ga_m) \\ \xi^1 g^{-1}(ga_0) & \xi^1 g^{-1}(ga_1) & \ldots & \xi^1 g^{-1}(ga_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^m g^{-1}(ga_0) & \xi^m g^{-1}(ga_1) & \ldots & \xi^m g^{-1}(ga_m) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \xi^0 g^{-1} ga_0 & \xi^0 g^{-1} ga_1 & \ldots & \xi^0 g^{-1} ga_m \\ \xi^1 g^{-1} ga_0 & \xi^1 g^{-1} ga_1 & \ldots & \xi^1 g^{-1} ga_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^m g^{-1} ga_0 & \xi^m g^{-1} ga_1 & \ldots & \xi^m g^{-1} ga_m \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \xi^0 a_0 & \xi^0 a_1 & \ldots & \xi^0 a_m \\ \xi^1 a_0 & \xi^1 a_1 & \ldots & \xi^1 a_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^m a_0 & \xi^m a_1 & \ldots & \xi^m a_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^0(a_0) & \xi^0(a_1) & \ldots & \xi^0(a_m) \\ \xi^1(a_0) & \xi^1(a_1) & \ldots & \xi^1(a_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi^m(a_0) & \xi^m(a_1) & \ldots & \xi^m(a_m) \end{vmatrix} = \\ &= \xi_0 \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_m(a_0 \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge a_m). \end{aligned}$$

Таким образом, действие L сохраняет условие невырожденности. Очевидно, что действие L транзитивно. Следовательно, $\mathfrak{N}^n_m \equiv \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{H}_0$ — однородное пространство (здесь H_0 — группа изотропии некоторой m-пары). Пусть H_0 — группа изотропии m-пары (A_0,Ξ_0), где $A_0 = p(e_0\wedge e_1\wedge\ldots\wedge e_m)$ и $\Xi_0 = \hat{p}(e^0\wedge e^1\wedge\ldots\wedge e^m)$. Здесь $\{e_u\}$ и $\{e^v\}$ — сопряжённые базисы. Легко видеть, что

$$\mathrm{H}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\middle|\; A\in \mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R}),\ B\in\mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R}) \right\}.$$

Ясно, что $\mathrm{H}_0 \cong \mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R})$. Следовательно,

$$\mathfrak{N}^n_m = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R}), \quad \dim\mathfrak{N}^n_m = 2(m+1)(n-m).$$

1.4. Главное расслоение реперов над многообразием невырожденных m-пар

Пусть $\mathcal{F}(W)$ — совокупность всех базисов пространства W. Зафиксируем базис $\{\varepsilon_u\}\in\mathcal{F}(W)$. Тогда для любого базиса $\{e_u\}\in\mathcal{F}(W)$ существует единственная матрица $(C^v_u)\in\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$, определяемая условием $e_u = C^v_u\varepsilon_v$. Биективное соответствие между $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}(W)$ позволяет внести во множество базисов $\mathcal{F}(W)$ структуру аналитической группы Ли $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$. При этом выбор начального базиса $\{\varepsilon_u\}$ можно рассматривать как фиксацию глобальной карты на $\mathcal{F}(W)$, относительно которой компоненты матрицы (C^v_u) есть координаты базиса $\{e_u\}\in\mathcal{F}(W)$. Итак, $\mathcal{F}(W)\equiv\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$.

Аналогично, фиксация базиса $\{\varepsilon^u\}\in\mathcal{F}(W^*)$ также позволяет отождествить многообразие всех базисов $\mathcal{F}(W^*)$ пространства W^* с группой Ли $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$. Таким образом, $\mathcal{F}(W^*)\equiv\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$.

Будем считать, что начальные базисы $\{\varepsilon_u\}$ и $\{\varepsilon^u\}$ являются сопряжёнными, т. е. $\varepsilon^u(\varepsilon_v) = \delta^u_v$. Тогда отображение $h\colon\mathcal{F}(W)\to\mathcal{F}(W^*)$, которое базису $\{e_u\}$ ставит в соответствие сопряжённый кобазис $\{e^u\}$, является диффеоморфизмом. Этот диффеоморфизм можно рассматривать как автоморфизм $h\colon\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ группы Ли $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$. При этом автоморфизме $h(g) = g^{-1}$. Ясно, что h — аналитический диффеоморфизм.

На многообразиях $\mathcal{F}(W)$ и $\mathcal{F}(W^*)$ правое действие группы $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})$ определяется так:

$$\begin{aligned} &(\{e_u\},(G^v_u))\mapsto\{\bar{e}_u\}, \quad \text{где}\ \ \bar{e}_u = G^v_u e_v,\\ &(\{e^u\},(G^v_u))\mapsto\{\bar{e}^u\}, \quad \text{где}\ \ \bar{e}^u = \bar{G}^u_v e^v\ \ \text{и}\ \ (\bar{G}^v_u) = (G^v_u)^{-1}. \end{aligned}$$

Снова рассмотрим группу

$$\mathrm{H}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \;\middle|\; A\in \mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R}),\ B\in\mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R}) \right\}.$$

Группа $\mathrm{H}_0\cong\mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R})\times\mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R})$ естественным образом действует справа на $\mathcal{F}(W)$ и $\mathcal{F}(W^*)$.

Рассмотрим аналитическое отображение $\pi\colon \mathcal{F}(W) \to \mathfrak{N}^n_m$, которое каждому базису $\{e_u\} \in \mathcal{F}(W)$ ставит в соответствие невырожденную m-пару $(A, \Xi) \in \mathfrak{N}^n_m$, порождённую $(m+1)$-вектором $e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_m$ и $(m+1)$-ковектором $e^0 \wedge e^1 \wedge \ldots \wedge e^m$. В силу естественных отождествлений $\mathcal{F}(W) \equiv \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ и $\mathrm{H}_0 \cong \mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-m, \mathbb{R})$ многообразие невырожденных m-пар $\mathfrak{N}^n_m$ можно рассматривать как фактор-пространство $\mathcal{F}(W)/H_0$, порождённое правым действием группы H_0 на многообразии $\mathcal{F}(W)$. С этой точки зрения m-пару $x = (A, \Xi)$ можно отождествить с совокупностью базисов $\{e_u\}$ из $\mathcal{F}(W)$, для каждого из которых $\pi(\{e_u\}) = (A, \Xi)$, где $A = p(e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_m)$ и $\Xi = p(e_{m+1} \wedge e_{m+2} \wedge \ldots \wedge e_n) = \hat{p}(e^0 \wedge e^1 \wedge \ldots \wedge e^m)$.

Таким образом, четвёрка $\mathbf{P}(\mathfrak{N}^n_m) = (\mathcal{F}(W), \mathfrak{N}^n_m, \mathrm{H}_0, \pi)$ есть главное расслоение с тотальным пространством $\mathcal{F}(W) \equiv \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$, базой $\mathfrak{N}^n_m \equiv \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})/\mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-m, \mathbb{R})$, структурной группой $\mathrm{H}_0 \cong \mathrm{GL}(m+1, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-m, \mathbb{R})$ и проекцией π.

Найдём структурные уравнения расслоения $\mathbf{P}(\mathfrak{N}^n_m)$. Каждый вектор e_u базиса $B = \{e_v\}$ можно рассматривать как гладкую W-значную функцию на $\mathcal{F}(W) \equiv \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$, определяемую равенством $e_u\colon \{e_v\} \mapsto e_u$. Тогда de_u — это W-значная 1-форма на $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$. Раскладывая форму de_u по базису B, получим так называемые *уравнения инфинитезимальных преобразований многообразия реперов* $\mathcal{F}(W)$:

$$de_u = \omega^v_u \otimes e_v. \tag{1}$$

Аналогично, для многообразия $\mathcal{F}(W^*)$ имеем $de^u = \bar{\omega}^u_v \otimes e^v$. Дифференцируя уравнения $e^u(e_v) = \delta^u_v$, найдём, что $\bar{\omega}^v_u = -\omega^v_u$. Следовательно, уравнения инфинитезимальных преобразований многообразия реперов $\mathcal{F}(W^*)$ примут вид

$$de^u = -\omega^u_v \otimes e^v. \tag{2}$$

Легко видеть, что 1-формы ω^v_u, входящие в (1) и (2), совпадают с формами Маурера—Картана группы Ли $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$, удовлетворяющими структурным уравнениям

$$d\omega^v_u = \omega^w_u \wedge \omega^v_w. \tag{3}$$

Уравнения (3) получаются после применения оператора внешнего дифференцирования либо к системе (1), либо к системе (2).

Пусть $\{x^0, x^1, \ldots, x^n\}$ — координаты на W относительно фиксированного базиса $\{\varepsilon_u\}$. Для каждого множества $p = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ таких целых чисел, что $0 \leqslant p_0 < p_1 < \ldots < p_m \leqslant n$, пусть U_p будет подмножеством в $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$, состоящим из таких $(m+1)$-мерных подпространств $A \in W$, что $x^{p_0}|_A, x^{p_1}|_A, \ldots, x^{p_m}|_A$ линейно независимы. Определим отображение φ_p из U_p в пространство $M(m+1, n-m; \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{(m+1)(n-m)}$ вещественных $(m+1) \times (n-m)$-матриц. Пусть $p' = \{p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n\}$ есть дополнение до $\{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$ в возрастающем порядке. Так как для каждого $A \in U_p$ ковекторы $x^{p_0}|_A, x^{p_1}|_A, \ldots, x^{p_m}|_A$ образуют базис дуального пространства для A, то можно записать

$$x^{p_{m+s}}|_A = \sum_{i=0}^{m} \underset{p}{y_i^s}(x^{p_i}|_A), \quad s = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Положим

$$\varphi_p(A) = (\underset{p}{y_i^s}) \in M(m+1, n-m; \mathbb{R}).$$

Очевидно, что φ_p — биекция для каждого p. Семейство из $\binom{n+1}{m+1}$ карт (U_p, φ_p) является атласом на $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$ (см. [3]).

Аналогичный атлас из семейства карт $(U_{p'}, \varphi_{p'})$ с локальными координатами $\underset{p}{y_s^i}$ определяется на $\mathbb{R}G_{m,n}(W^*) = \rho(\mathbb{R}G_{n-m-1,n}(W))$ (здесь $U_{p'}$ — подмножество в $\mathbb{R}G_{n-m-1,n}(W)$, состоящее из таких $(n-m-1)$-мерных подпространств Ξ, что $x^{p_{m+1}}|_\Xi, x^{p_{m+2}}|_\Xi, \ldots, x^{p_n}|_\Xi$ линейно независимы).

На многообразии $\mathfrak{N}_m^n$ атлас образует семейство из $\binom{n+1}{m+1} = \binom{n+1}{n-m}$ карт $((U_p \times U_{p'})|_{\mathfrak{N}_m^n}, (\varphi_p \times \varphi_{p'})|_{\mathfrak{N}_m^n)})$ с локальными координатами $\left(\left\{\underset{p}{y_i^s}\right\}, \left\{\underset{p}{y_s^i}\right\}\right)$.

Пусть p и p' — подмножества индексов, определённые выше. Кроме того, пусть

$$i, j, k, l = 0, 1, \ldots, m, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = m+1, m+2, \ldots, n,$$
$$p_i, p_j, p_k, p_l \in p, \quad p_\alpha, p_\beta, p_\gamma, p_\delta \in p'.$$

Имеем

$$e_i = C_i^{p_j} \varepsilon_{p_j} + C_i^{p_\beta} \varepsilon_{p_\beta},$$
$$e_\alpha = C_\alpha^{p_j} \varepsilon_{p_j} + C_\alpha^{p_\beta} \varepsilon_{p_\beta}.$$

Обозначим через $(B_{p_i}^j)$ квадратную матрицу порядка $m+1$, обратную для $(C_i^{p_j})$. Через $(B_{p_\alpha}^\beta)$ обозначим квадратную матрицу порядка $n-m$, обратную для $(C_\alpha^{p_\beta})$. Имеем

$$B_{p_k}^j e_j = \varepsilon_{p_k} + B_{p_k}^j C_j^{p_\beta} \varepsilon_{p_\beta},$$
$$B_{p_\gamma}^\beta e_\beta = \varepsilon_{p_\gamma} + B_{p_\gamma}^\beta C_\beta^{p_j} \varepsilon_{p_j}.$$

Тогда $\underset{p}{y_i^s} = y_{p_i}^{p_{m+s}} = B_{p_i}^j C_j^{p_{m+s}}$ — локальные координаты на $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$, а $\underset{p}{y_s^i} = y_{p_{m+s}}^{p_i} = B_{p_{m+s}}^\beta C_\beta^{p_i}$ — локальные координаты на $\mathbb{R}G_{m,n}(W^*)$. Непосредственный подсчёт приводит к формулам

$$\omega_i^\alpha = C_i^{p_j} \hat{C}_{p_\beta}^\alpha dy_{p_j}^{p_\beta}, \quad dy_{p_i}^{p_\alpha} = B_{p_i}^j (C_\beta^{p_\alpha} - C_\beta^{p_k} C_l^{p_\alpha} B_{p_k}^l) \omega_j^\beta,$$
$$\omega_\alpha^i = C_\alpha^{p_\beta} \hat{C}_{p_j}^i dy_{p_\beta}^{p_j}, \quad dy_{p_\alpha}^{p_i} = B_{p_\alpha}^\beta (C_j^{p_i} - C_j^{p_\gamma} C_\delta^{p_i} B_{p_\gamma}^\delta) \omega_\beta^j.$$

Таким образом, формы $\{\omega_i^\alpha\}$ и $\{\omega_\alpha^i\}$ образуют базис горизонтальных 1-форм расслоения $\mathbf{P}(\mathfrak{N}_m^n)$. Инфинитезимальный смысл этих форм вытекает из равенств (которые следуют из (1), (2))

$$d[e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_m] = \omega_0^\alpha \otimes [e_\alpha \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_m] + \ldots +$$
$$+ \omega_m^\alpha \otimes [e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_\alpha] \mod \langle e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_m \rangle,$$
$$d[e^0 \wedge e^1 \wedge \ldots \wedge e^m] = -\omega_\alpha^0 \otimes [e^\alpha \wedge e^1 \wedge \ldots \wedge e^m] - \ldots -$$
$$- \omega_\alpha^m \otimes [e^0 \wedge e^1 \wedge \ldots \wedge e^\alpha] \mod \langle e^0 \wedge e^1 \wedge \ldots \wedge e^m \rangle.$$

Базис $\{E_\alpha^i\}$ касательного пространства к многообразию $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$, дуальный кобазису $\{\omega_i^\alpha\}$, можно отождествить с тензорным базисом

$$\{E_\alpha^i = \Pi(e_0 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge e_\alpha \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_m)\},$$

где

$$\Pi \colon \Lambda^{m+1}(W) \to \Lambda^{m+1}(W)/\langle e_0 \wedge e_1 \wedge \ldots \wedge e_m \rangle \text{ —}$$

естественная проекция на фактор-пространство [6].

Аналогично,

$$\{E_i^\alpha = \hat{\Pi}(e^0 \wedge \ldots \wedge e^{i-1} \wedge e^\alpha \wedge e^{i+1} \wedge \ldots \wedge e^m)\} \text{ —}$$

базис касательного пространства к многообразию $\mathbb{R}G_{m,n}(W^*)$, дуальный кобазису $\{\omega_\alpha^i\}$. Здесь

$$\hat{\Pi} \colon \Lambda^{m+1}(W^*) \to \Lambda^{m+1}(W^*)/\langle e^0 \wedge e^1 \wedge \ldots \wedge e^m \rangle \text{ —}$$

естественная проекция на фактор-пространство.

Замечание. Касательное пространство грассманова многообразия $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$ допускает следующую интерпретацию [6]. Пусть V — подпространство в W, порождающее точку $A \in \mathbb{R}G_{m,n}(W)$, т. е. $p(V) = A$. Тогда существует естественный изоморфизм $T_A\mathbb{R}G_{m,n}(W) \cong \mathrm{Hom}(V, W/V)$.

Из (3) находим, что первая группа структурных уравнений расслоения $\mathbf{P}(\mathfrak{N}_m^n)$ имеет вид

$$d\omega_i^\alpha = \omega_j^\beta \wedge (\delta_i^j \omega_\beta^\alpha - \omega_i^j \delta_\beta^\alpha), \quad d\omega_\alpha^i = \omega_\beta^j \wedge (\omega_j^i \delta_\alpha^\beta - \delta_j^i \omega_\alpha^\beta). \tag{4}$$

Вторая группа структурных уравнений может быть выведена из (3) после внешнего дифференцирования форм $\omega_{i\beta}^{j\alpha} = \delta_i^j \omega_\beta^\alpha - \omega_i^j \delta_\beta^\alpha$, входящих в (4). Соответствующие формулы будут приведены ниже.

Рассмотрим допустимую замену базиса над m-парой $\pi(\{e_u\})$

$$e_i' = A_i^j e_j, \quad e_\alpha' = B_\alpha^\beta e_\beta.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$e_i = \hat{A}_i^j e_j', \quad e_\alpha = \hat{B}_\alpha^\beta e_\beta'.$$

В новом базисе уравнения (1) запишутся в виде

$$de_i' = \hat{\omega}_i^j \otimes e_j' + \hat{\omega}_i^\beta \otimes e_\beta', \quad de_\alpha' = \hat{\omega}_\alpha^j \otimes e_j' + \hat{\omega}_\alpha^\beta \otimes e_\beta'.$$

Следовательно, формы ω_u^v преобразуются по закону

$$\begin{gathered} \hat{\omega}_i^j = \hat{A}_k^j dA_i^k + A_i^l \hat{A}_k^j \omega_l^k, \quad \hat{\omega}_\alpha^\beta = \hat{B}_\gamma^\beta dB_\alpha^\gamma + B_\alpha^\delta \hat{B}_\gamma^\beta \omega_\delta^\gamma, \\ \hat{\omega}_i^\alpha = A_i^j \hat{B}_\beta^\alpha \omega_j^\beta, \quad \hat{\omega}_\alpha^i = B_\alpha^\beta \hat{A}_j^i \omega_\beta^j. \end{gathered} \tag{5}$$

Формулы (5) будут использованы в дальнейшем при доказательстве H_0-инвариантности некоторых дифференциально-геометрических объектов.

2. Келерова геометрия на многообразии m-пар

2.1. Каноническая келерова структура гиперболического типа на многообразии невырожденных m-пар

Пусть всюду в дальнейшем

$$i, j, k, l, \ldots = 0, 1, \ldots, m, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots = m+1, m+2, \ldots, n.$$

Введём в рассмотрение мультииндексы, положив

$$\binom{\alpha}{i} = u, \quad \binom{i}{\alpha} = \bar{u}, \quad \binom{\beta}{j} = v, \quad \binom{j}{\beta} = \bar{v},$$
$$\binom{\gamma}{k} = w, \quad \binom{k}{\gamma} = \bar{w}, \quad \binom{\delta}{l} = p, \quad \binom{l}{\delta} = \bar{p}.$$

Кроме того, обозначим

$$\omega_i^\alpha = \theta^{\binom{\alpha}{i}} = \theta^u, \quad \omega_\alpha^i = \theta^{\binom{i}{\alpha}} = \theta^{\bar{u}}.$$

Пусть $(A, \Xi) = \pi(\{e_u\}) \in \mathfrak{N}_m^n$. Из (5) следует, что формула

$$\Omega = 2\omega_i^\alpha \wedge \omega_\alpha^i = 2\sum_{i,\alpha} \theta^{\binom{\alpha}{i}} \wedge \theta^{\binom{i}{\alpha}} = 2\sum_u \theta^u \wedge \theta^{\bar{u}} \tag{6}$$

определяет на $\mathfrak{N}_m^n$ H_0-инвариантную почти симплектическую структуру Ω. Из (3) следует, что

$$\Omega = d\omega_i^i = -d\omega_\alpha^\alpha, \quad d\Omega = 0,$$

поэтому $(\mathfrak{N}_m^n, \Omega)$ — *симплектическое многообразие*. Кроме того, на $\mathfrak{N}_m^n$ существует H_0-инвариантная псевдориманова метрика

$$\Psi = 2\omega_i^\alpha \odot \omega_\alpha^i = 2\sum_{i,\alpha} \theta^{\binom{\alpha}{i}} \odot \theta^{\binom{i}{\alpha}} = 2\sum_u \theta^u \odot \theta^{\bar{u}}. \tag{7}$$

Метрика Ψ имеет симметричную сигнатуру $((m+1)(n-m), (m+1)(n-m))$. В любом репере над $\mathfrak{N}_m^n$ формы Ω и Ψ имеют следующее координатное представление:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} S_{uv} & S_{u\bar{v}} \\ S_{\bar{u}v} & S_{\bar{u}\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j}} & S_{\binom{\alpha}{i}\binom{j}{\beta}} \\ S_{\binom{i}{\alpha}\binom{\beta}{j}} & S_{\binom{j}{\alpha}\binom{j}{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \delta_\beta^\alpha \\ -\delta_j^i \delta_\alpha^\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} g_{uv} & g_{u\bar{v}} \\ g_{\bar{u}v} & g_{\bar{u}\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\binom{\alpha}{i}\binom{\beta}{j}} & g_{\binom{\alpha}{i}\binom{j}{\beta}} \\ g_{\binom{i}{\alpha}\binom{\beta}{j}} & g_{\binom{j}{\alpha}\binom{j}{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \delta_\beta^\alpha \\ \delta_j^i \delta_\alpha^\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{J}\colon T_x\mathfrak{N}^m_p \to T_x\mathfrak{N}^m_p$ — инвариантный оператор почти произведения, определяемый соотношением

$$\mathbf{J}\colon \xi = \begin{pmatrix} x^\alpha_i \\ x^i_\alpha \end{pmatrix} \mapsto \mathbf{J}\xi = \begin{pmatrix} -x^\alpha_i \\ x^i_\alpha \end{pmatrix}.$$

В координатах имеем

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J^u_v & J^u_{\bar v} \\ J^{\bar u}_v & J^{\bar u}_{\bar v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}} & J^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{j}{\beta}} \\ J^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{\beta}{j}} & J^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{j}{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta^j_i\delta^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & \delta^i_j\delta^\beta_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает справедливость тождеств

$$\mathbf{J}^2 = \mathrm{id}, \quad \Psi(\mathbf{J}\xi, \mathbf{J}\eta) = -\Psi(\xi,\eta), \quad \Omega(\xi,\eta) = \Psi(\xi, \mathbf{J}\eta).$$

Следовательно, $(\mathfrak{N}^n_m, \Omega, \Psi, \mathbf{J})$ — *почти эрмитово многообразие гиперболического типа*.

Перепишем первую группу структурных уравнений (4) в несколько ином виде:

$$d\omega^\alpha_i = d\theta^{\binom{\alpha}{i}} = d\theta^u = \theta^v \wedge \theta^u_v + \theta^{\bar v} \wedge \theta^u_{\bar v} = \theta^{\binom{\beta}{j}} \wedge \theta^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}} + \theta^{\binom{j}{\beta}} \wedge \theta^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{j}{\beta}},$$
$$d\omega^i_\alpha = d\theta^{\binom{i}{\alpha}} = d\theta^{\bar u} = \theta^v \wedge \theta^{\bar u}_v + \theta^{\bar v} \wedge \theta^{\bar u}_{\bar v} = \theta^{\binom{\beta}{j}} \wedge \theta^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{\beta}{j}} + \theta^{\binom{j}{\beta}} \wedge \theta^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{j}{\beta}}.$$

Из (4) находим, что

$$\Theta \equiv \begin{pmatrix} \theta^u_v & \theta^u_{\bar v} \\ \theta^{\bar u}_v & \theta^{\bar u}_{\bar v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}} & \theta^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{j}{\beta}} \\ \theta^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{\beta}{j}} & \theta^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{j}{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^j_i\omega^\alpha_\beta - \omega^j_i\delta^\alpha_\beta & 0 \\ 0 & \omega^i_j\delta^\beta_\alpha - \delta^i_j\omega^\beta_\alpha \end{pmatrix}.$$

Так как

$$d\Theta - \Theta \wedge \Theta = \begin{pmatrix} d\theta^u_v - \theta^w_v \wedge \theta^u_w - \theta^{\bar w}_v \wedge \theta^u_{\bar w} & d\theta^u_{\bar v} - \theta^w_{\bar v} \wedge \theta^u_w - \theta^{\bar w}_{\bar v} \wedge \theta^u_{\bar w} \\ d\theta^{\bar u}_v - \theta^w_v \wedge \theta^{\bar u}_w - \theta^{\bar w}_v \wedge \theta^{\bar u}_{\bar w} & d\theta^{\bar u}_{\bar v} - \theta^w_{\bar v} \wedge \theta^{\bar u}_w - \theta^{\bar w}_{\bar v} \wedge \theta^{\bar u}_{\bar w} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} d\theta^u_v - \theta^w_v \wedge \theta^u_w & 0 \\ 0 & d\theta^{\bar u}_{\bar v} - \theta^{\bar w}_{\bar v} \wedge \theta^{\bar u}_{\bar w} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} d\theta^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}} - \theta^{\binom{\gamma}{k}}_{\binom{\beta}{j}} \wedge \theta^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\gamma}{k}} & 0 \\ 0 & d\theta^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{j}{\beta}} - \theta^{\binom{k}{\gamma}}_{\binom{j}{\beta}} \wedge \theta^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{k}{\gamma}} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \delta^j_i\theta^{\binom{k}{\beta}} \wedge \theta^{\binom{\alpha}{k}} - \delta^\alpha_\beta\theta^{\binom{\gamma}{i}} \wedge \theta^{\binom{j}{\gamma}} & 0 \\ 0 & \delta^\beta_\alpha\theta^{\binom{\gamma}{j}} \wedge \theta^{\binom{i}{\gamma}} - \delta^i_j\theta^{\binom{k}{\alpha}} \wedge \theta^{\binom{\beta}{k}} \end{pmatrix},$$

то в силу теоремы Картана—Лаптева (см., например, [2]) Θ — форма некоторой связности ∇ в расслоении $\mathbf{P}(\mathfrak{N}^n_m)$, а $d\Theta - \Theta\wedge\Theta$ — форма кривизны связности ∇.

Так как
$$\nabla\Psi = \nabla\mathbf{J} = \nabla\Omega = 0,$$
то $(\mathfrak{N}^n_m, \Omega, \Psi, \mathbf{J})$ — *келерово многообразие гиперболического типа*, а ∇ — риманова связность. Тензор кривизны этой связности имеет координаты
$$R^u_{v\bar{w}p} = R^{\binom{\alpha}{i}}_{\binom{\beta}{j}\binom{k}{\gamma}\binom{\delta}{l}} = 2(\delta^j_i\delta^l_k\delta^\gamma_\beta\delta^\alpha_\delta + \delta^l_i\delta^j_k\delta^\alpha_\beta\delta^\gamma_\delta),$$
$$R^{\bar{u}}_{\bar{v}p\bar{w}} = R^{\binom{i}{\alpha}}_{\binom{j}{\beta}\binom{\delta}{l}\binom{k}{\gamma}} = 2(\delta^i_j\delta^l_k\delta^\gamma_\alpha\delta^\beta_\delta + \delta^l_j\delta^i_k\delta^\beta_\alpha\delta^\gamma_\delta).$$
Остальные компоненты выражаются через эти при помощи известных тождеств. Опуская индекс, получим формулы
$$R_{\bar{u}v\bar{w}p} = R_{\binom{i}{\alpha}\binom{\beta}{j}\binom{k}{\gamma}\binom{\delta}{l}} = 2(\delta^j_i\delta^l_k\delta^\gamma_\beta\delta^\alpha_\delta + \delta^l_i\delta^j_k\delta^\alpha_\beta\delta^\gamma_\delta),$$
$$R_{u\bar{v}p\bar{w}} = R_{\binom{\alpha}{i}\binom{j}{\beta}\binom{\delta}{l}\binom{k}{\gamma}} = 2(\delta^i_j\delta^l_k\delta^\gamma_\alpha\delta^\beta_\delta + \delta^l_j\delta^i_k\delta^\beta_\alpha\delta^\gamma_\delta).$$
Из последних формул находим, что секционная кривизна в двумерном направлении $X \wedge Y$ вычисляется по формуле
$$k(X\wedge Y) = 4\frac{X^\alpha_i Y^i_\beta(X^\beta_j Y^j_\alpha - Y^\beta_j X^j_\alpha) - Y^\alpha_i X^j_\alpha(X^\beta_j Y^i_\beta - Y^\beta_j X^i_\beta)}{4X^\alpha_i X^i_\alpha Y^\beta_j Y^j_\beta - (X^\alpha_i Y^i_\alpha + Y^\alpha_i X^i_\alpha)(X^\beta_j Y^j_\beta + Y^\beta_j X^j_\beta)}.$$
В частности, голоморфная кривизна имеет вид
$$k(X\wedge \mathbf{J}X) = \frac{X^\alpha_i X^i_\beta X^\beta_j X^j_\alpha}{(X^\alpha_i X^i_\alpha)^2}. \tag{8}$$
Свёртка тензора кривизны с метрическим тензором показывает, что тензор Риччи пропорционален метрике с коэффициентом пропорциональности $2(n+1)$. Следовательно, $\mathfrak{N}^n_m$ — *многообразие Эйнштейна*. Скалярная кривизна метрики Ψ равна $4(n+1)(m+1)(n-m) = 2(n+1)\dim\mathfrak{N}^n_m$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Многообразие $\mathfrak{N}^n_m$ невырожденных m-пар проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ является однородным келеровым многообразием гиперболического типа и многообразием Эйнштейна с космологической постоянной $2(n+1)$.* $\square$

Следствие. *Многообразие $\mathfrak{N}^n_0$ невырожденных 0-пар (и двойственное ему многообразие $\mathfrak{N}^n_{n-1}$ невырожденных $(n-1)$-пар) проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ является однородным келеровым многообразием гиперболического типа постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны.*

Действительно, если $m = 0$ (или $m = n-1$), то $k(X\wedge\mathbf{J}X) = 1$, т. е. многообразие 0-пар (или $(n-1)$-пар) — *гиперболическая пространственная форма*. $\square$

Важно отметить, что любое келерово многообразие гиперболического типа постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны локально голоморфно изометрично многообразию 0-пар [7]. В общем случае при $0 < m <$ $< n-1$ келерово многообразие m-пар имеет непостоянную голоморфную секционную кривизну. Будучи однородным келеровым многообразием $\mathfrak{N}_m^n = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(m+1,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n-m,\mathbb{R})$, многообразие невырожденных m-пар $\mathfrak{N}_m^n$ является гиперболическим аналогом комплексного грассманиана $\mathbb{C}G_{m,n} = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(m+1) \times \mathrm{U}(n-m)$. В частности, многообразие 0-пар $\mathfrak{N}_0^n = \mathrm{GL}(n+1,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(1,\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ является гиперболическим аналогом комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P_n = \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(n)$. Как и $\mathbb{C}P_n$, многообразие $\mathfrak{N}_0^n$ является келеровым многообразием постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны (но относительно гиперболической метрики). Именно поэтому многообразие 0-пар $\mathfrak{N}_0^n$ названо в [7] гиперболической пространственной формой.

Замечание. Касательный вектор $X = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ на $\mathfrak{N}_m^n$ допускает естественное отождествление с парой отображений $\mathbf{X}_1 = (X_i^\alpha)\colon \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n-m}$ и $\mathbf{X}_2 = (X_i^\alpha)\colon \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{m+1}$. В такой интерпретации $\mathbf{J}\colon (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \mapsto (-\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, $\Omega(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_1\mathbf{X}_2)$, $\Psi(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{X}_2)$, а формулы для секционной кривизны примут вид

$$k(X \wedge Y) = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2 - \mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2\mathbf{Y}_1\mathbf{X}_2 - \mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_1\mathbf{X}_2)}{4\,\mathrm{tr}(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)\,\mathrm{tr}(\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2) - \mathrm{tr}(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{X}_2)\,\mathrm{tr}(\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_1\mathbf{X}_2)},$$

$$k(X \wedge \mathbf{J}X) = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)^2}{\mathrm{tr}^2(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2)}.$$

2.2. О расслоении многообразия $\mathfrak{N}_m^n$ на гиперболические пространственные формы

В общем случае при $0 < m < n-1$ келерово многообразие $\mathfrak{N}_m^n$ m-пар имеет непостоянную голоморфную секционную кривизну. Ниже будут описаны два важных класса подмногообразий M на $\mathfrak{N}_m^n$, для которых $(M, \Omega|M, \Psi|M, \mathbf{J}|M)$ — келерова структура постоянной ненулевой голоморфной секционной кривизны, т. е. M — гиперболическая пространственная форма, которая с необходимостью локально голоморфно изометрична многообразию 0-пар $\mathfrak{N}_0^N$ при некотором $N < \dim \mathfrak{N}_m^n$.

Пусть $X = X_i^\alpha E_\alpha^i + X_\alpha^i E_i^\alpha$ — касательный вектор в некоторой фиксированной точке (A, Ξ) многообразия $\mathfrak{N}_m^n$. Так как $X_i^\alpha = \omega_i^\alpha(X)$ и $X_\alpha^i = \omega_\alpha^i(X)$, то в силу (5) числа $\rho_1(X) = \mathrm{rank}(X_i^\alpha)$ и $\rho_2(X) = \mathrm{rank}(X_\alpha^i)$ являются H_0-инвариантами на $\mathfrak{N}_m^n$. Более того, ρ_1 — инвариант на $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$, а ρ_2 — инвариант на $\mathbb{R}G_{m,n}(W^*) = \rho(\mathbb{R}G_{n-m-1,n})$. Касательный вектор X назовём *ρ_1-разложимым*, если $\rho_1(X) = 1$. Точно так же если $\rho_2(X) = 1$, то вектор X назовём *ρ_2-разложимым*. Наконец, если $\rho_1(X) = \rho_2(X) = 1$, то вектор X назовём *абсолютно разложимым*. Разложимость имеет следующий геометрический смысл. Так как $T_{(A,\Xi)}\mathfrak{N}_m^n = T_A\mathbb{R}G_{m,n}(W) \oplus T_\Xi\mathbb{R}G_{m,n}(W^*)$, то вектор X имеет каноническое разложение $X = \pi_1(X) + \pi_2(X)$, где π_1 и π_2 — проекции на инвариантные подпространства. Уравнение $\rho_1(X) = \mathrm{rank}(X_i^\alpha) = 1$ определяет в касательном пространстве грассманова многообразия $\mathbb{R}G_{m,n}(W)$ в точке A *конус Сегре*

$S_A(m+1, n-m)$, имеющий параметрические уравнения $X_i^\alpha = U_i V^\alpha$. Проективизация конуса $S_A(m+1, n-m)$ есть *многообразие Сегре* $p(S_A(m+1, n-m)) = \mathbb{R}P_m \times \mathbb{R}P_{n-m-1}$. Таким образом, касательный вектор X является ρ_1-разложимым, если $\pi_1(X)$ принадлежит конусу Сегре $S_A(m+1, n-m)$. Аналогично интерпретируется ρ_2-разложимость. Вектор X является ρ_2-разложимым, если $\pi_2(X)$ принадлежит конусу Сегре $S_\Xi(m+1, n-m)$ в касательном пространстве к грассманиану $\mathbb{R}G_{m,n}(W^*)$ в точке Ξ. Заметим, что $\hat{p}(S_\Xi(m+1, n-m)) = \mathbb{R}P_m^* \times \mathbb{R}P_{n-m-1}^*$.

Из (8) следует, что *вдоль разложимых направлений голоморфная секционная кривизна равна* 1. Действительно, если $X = (X_i^\alpha, X_\beta^j) = (U_i V^\alpha, U^j V_\beta)$, то

$$k(X \wedge \mathbf{J}X) = \frac{U_i V^\alpha U^i V_\beta U_j V^\beta V_j U^j V_\alpha}{(U_i V^\alpha U^i V_\alpha)^2} = 1.$$

Каждый из конусов Сегре $S_A(m+1, n-m)$ и $S_\Xi(m+1, n-m)$ несёт по два семейства плоских образующих. Плоскости первого семейства имеют размерность $m+1$, а плоскости второго семейства — размерность $n-m$. Две плоскости из разных семейств, принадлежащие одному конусу Сегре, пересекаются по прямой. Рассмотрим два важных типа распределений на $\mathfrak{N}_m^n$.

Определение 3. $2(m+1)$-мерное распределение Δ на $\mathfrak{N}_m^n$ назовём *гиперболическим распределением первого типа*, если

1) $\pi_1(\Delta_{(A,\Xi)})$ — плоская образующая конуса Сегре $S_A(m+1, n-m)$;
2) $\pi_2(\Delta_{(A,\Xi)})$ — плоская образующая конуса Сегре $S_\Xi(m+1, n-m)$;
3) $\dim \pi_1(\Delta) = \dim \pi_2(\Delta) = (m+1)$;
4) $\operatorname{rank} \Psi|_\Delta = 2(m+1)$.

Определение 4. $2(n-m)$-мерное распределение Δ на $\mathfrak{N}_m^n$ назовём *гиперболическим распределением второго типа*, если

1) $\pi_1(\Delta_{(A,\Xi)})$ — плоская образующая конуса Сегре $S_A(m+1, n-m)$;
2) $\pi_2(\Delta_{(A,\Xi)})$ — плоская образующая конуса Сегре $S_\Xi(m+1, n-m)$;
3) $\dim \pi_1(\Delta) = \dim \pi_2(\Delta) = (n-m)$;
4) $\operatorname{rank} \Psi|_\Delta = 2(n-m)$.

Ясно, что любое гиперболическое распределение первого типа задаётся на $\mathfrak{N}_m^n$ системой Пфаффа вида

$$\omega_i^\alpha = b^\alpha \theta_i, \quad \omega_\alpha^i = b_\alpha \theta^i, \tag{9}$$

где $\{\theta_i, \theta^j\}$ — линейно независимые 1-формы, а $\{b^\alpha, b_\alpha\}$ — гладкие функции на $\mathcal{F}(W)$ (здесь $i, j = 0, 1, \ldots, m$, $\alpha, \beta = m+1, m+2, \ldots, n$). Аналогично, любое гиперболическое распределение второго типа задаётся на $\mathfrak{N}_m^n$ системой Пфаффа вида

$$\omega_i^\alpha = a_i \theta^\alpha, \quad \omega_\alpha^i = a^i \theta_\alpha, \tag{10}$$

где $\{\theta_\alpha, \theta^\beta\}$ — линейно независимые 1-формы, а $\{a^i, a_j\}$ — гладкие функции на $\mathcal{F}(W)$.

Определение 5. Гиперболическое распределение первого (второго) типа называется *невырожденным*, если $b \equiv b^\alpha b_\alpha \neq 0$ ($a \equiv a^i a_i \neq 0$).

Теорема 2. *Пусть Δ — гладкое невырожденное гиперболическое распределение первого (второго) типа на $\mathfrak{N}^n_m$. Тогда Δ — инволютивное распределение. Его максимальные интегральные многообразия вполне геодезичны на $\mathfrak{N}^n_m$ и являются гиперболическими пространственными формами, локально голоморфно изометричными многообразию 0-пар в пространстве $\mathbb{R}P_{m+1}$ (в пространстве $\mathbb{R}P_{n-m}$).*

Доказательство. Пусть система (9) задаёт на $\mathfrak{N}^n_m$ гиперболическое распределение первого типа. Систему (9) можно переписать в виде

$$b\omega^\alpha_i = b^\alpha b_\beta \omega^\beta_i, \quad b\omega^i_\alpha = b_\alpha b^\beta \omega^i_\beta, \tag{9a}$$

что равносильно

$$(b\delta^\alpha_\beta - b^\alpha b_\beta)\omega^\beta_i = 0, \quad (b\delta^\beta_\alpha - b_\alpha b^\beta)\omega^i_\beta = 0. \tag{9b}$$

Дифференцируя (9a), найдём, что

$$(b\delta^\alpha_\beta - b^\alpha b_\beta)(db^\beta - b^\gamma \omega^\beta_\gamma) = 0, \quad (b\delta^\beta_\alpha - b_\alpha b^\beta)(db_\beta - b_\gamma \omega^\gamma_\beta) = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим допустимое преобразование из группы H_0, переводящее произвольный репер из $\mathcal{F}(W)$ в такой репер $\{e_u\}$, относительно которого $b^\alpha = \delta^\alpha_n$ и $b_\alpha = \delta^n_\alpha$, т. е. $\omega^n_i = \theta_i$ и $\omega^i_n = \theta^i$. Ясно, что такое преобразование реперов является допустимым. В новом базисе система (9a) и её следствие (11) запишутся в виде

$$\omega^a_i = 0, \quad \omega^i_a = 0, \tag{12}$$

$$\omega^a_n = 0, \quad \omega^n_a = 0, \tag{13}$$

где $i = 0, 1, \ldots, n$, $a = m{+}1, m{+}2, \ldots, n{-}1$. В силу (13) система (12) вполне интегрируема, следовательно, Δ — инволютивное распределение. Пусть $\mathfrak{N}(b_\alpha, b^\beta)$ — его максимальное интегральное многообразие. Тогда на $\mathfrak{N}(b_\alpha, b^\beta)$ выполняются соотношения

$$\Omega = b\theta_i \wedge \theta^i = \omega^n_i \wedge \omega^i_n,$$
$$\Psi = b\theta_i \odot \theta^i = \omega^n_i \odot \omega^i_n,$$
$$k(X \wedge \mathbf{J}X) = 1 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(N(b_\alpha, b^\beta)).$$

Следовательно, $\mathfrak{N}(b_\alpha, b^\beta)$ — гиперболическая пространственная форма, которая локально голоморфно изометрична многообразию $\mathfrak{N}^{m+1}_0$ невырожденных 0-пар в $\mathbb{R}P^{m+1}$. Кроме того, из (13) следует, что вторая фундаментальная форма подмногообразия $\mathfrak{N}(b_\alpha, b^\beta)$ равна нулю. Но это равносильно тому, что $\mathfrak{N}(b_\alpha, b^\beta)$ — вполне геодезическое подмногообразие на $\mathfrak{N}^n_m$.

Аналогичные рассуждения справедливы для гиперболических распределений второго типа. □

Максимальные интегральные многообразия гиперболических распределений второго типа, определяемые системой (10), будем обозначать через $\mathfrak{N}(a_i, a^j)$.

Определение 6. Гиперболическую пространственную форму, являющуюся максимальным интегральным многообразием гиперболического распределения первого (второго) типа, назовём *естественной гиперболической пространственной формой* первого (второго) типа на $\mathfrak{N}_m^n$.

Из теоремы 2 следует, что через каждую точку на $\mathfrak{N}_m^n$ в любом гиперболическом направлении первого (второго) типа проходит единственная естественная гиперболическая пространственная форма первого (второго) типа. Таким образом, через каждую точку многообразия $\mathfrak{N}_m^n$ проходит $2(n-m)$-параметрическое семейство естественных гиперболических пространственных форм $\mathfrak{N}(b_\alpha, b^\beta)$ первого типа и $2(m+1)$-параметрическое семейство естественных гиперболических пространственных форм $\mathfrak{N}(a_i, a^j)$ второго типа.

Теорема 3. *Естественные гиперболические пространственные формы первого (второго) типа на $\mathfrak{N}_m^n$ находятся в биективном соответствии с точками многообразия $\mathfrak{N}_{m+1}^n$ ($\mathfrak{N}_{m-1}^n$).*

Доказательство. Пусть в $\mathbb{R}P_n = P(W)$ фиксированы две непересекающиеся плоскости Π_{m+1} и Π_{n-m-2} размерностей $m+1$ и $n-m-2$ соответственно, т. е. $(\Pi_{m+1}, \Pi_{n-m-2}) \in \mathfrak{N}_{m+1}^n$ — некоторая точка на многообразии невырожденных $(m+1)$-пар в $\mathbb{R}P_n$.

Обозначим через M_1 совокупность всех m-мерных плоскостей в Π_{m+1}. Тогда M_1 является $(m+1)$-мерным проективным пространством, дуальным для Π_{m+1}, т. е. $M_1 = \Pi_{m+1}^* = \mathbb{R}P_{m+1}^*$. С другой стороны, совокупность M_2 всех $(n-m-1)$-мерных плоскостей в $\mathbb{R}P_n$, содержащих плоскость Π_{n-m-2}, является также $(m+1)$-мерным многообразием, несущим естественную структуру проективного пространства, $M_2 = \mathbb{R}P_{m+1}$. Следовательно, $M_1 \times M_2 = \mathbb{R}P_{m+1}^* \times \mathbb{R}P_{m+1}$ — подмногообразие размерности $2(m+1)$ в многообразии m-пар $\mathfrak{N}_m^n$. Пусть M_0 — подмножество в $M_1 \times M_2$, состоящее из вырожденных m-пар:

$$M_0 = \{(A, \Xi) \in M_1 \times M_2 \mid A \cap \Xi \neq \varnothing\}.$$

Тогда $\mathcal{L} = (M_1 \times M_2) \setminus M_0$ — $2(m+1)$-мерное подмногообразие в $\mathfrak{N}_m^n$. Пусть

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}} = \big\{\{e_u\} \in \mathcal{F}(W) \,|\, &\{e_0, e_1, \ldots, e_m, e_n\} \text{ — базис, порождающий } \Pi_{m+1},\\ &\{e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_{n-1}\} \text{ — базис, порождающий } \Pi_{n-m-2},\\ &\{e_0, e_1, \ldots, e_m\} \text{ — базис, порождающий } A,\\ &\{e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n\} \text{ — базис, порождающий } \Xi\big\}.\end{aligned}$$

Ясно, что $\hat{\mathcal{F}}$ — подмногообразие в $\mathcal{F}(W)$, а $\pi(\hat{\mathcal{F}}) = \mathcal{L}$. Ограничение системы (1) на $\hat{\mathcal{F}}$ примет вид

$$\begin{pmatrix} de_i \\ de_a \\ de_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_i^j & 0 & \omega_i^n \\ 0 & \omega_a^b & 0 \\ \omega_n^j & 0 & \omega_n^n \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e_j \\ e_b \\ e_n \end{pmatrix},$$

$$i, j = 0, 1, \ldots, m, \quad a, b = m+1, m+2, \ldots, n-1.$$

Следовательно, подмногообразие $\mathcal{L}$ определяется на $\mathfrak{N}_m^n$ системой дифференциальных уравнений $\omega_i^a = \omega_a^i = \omega_a^n = \omega_n^a = 0$. Таким образом, мы приходим к системе (12), (13), определяющей естественную гиперболическую пространственную форму первого типа. Очевидно, что отображение, которое невырожденной $(m+1)$-паре (Π_{m+1}, Π_{n-m-2}) ставит в соответствие естественную гиперболическую пространственную форму $\mathcal{L}$, является биективным.

Используя двойственность, аналогичный результат можно доказать для естественных гиперболических пространственных форм второго типа на $\mathfrak{N}_m^n$. Соответствующая биекция строится так. Пусть в $\mathbb{R}P_n = P(W)$ фиксированы две непересекающиеся плоскости Π_{m-1} и Π_{n-m} размерностей $m-1$ и $n-m$ соответственно, т. е. $(\Pi_{m-1}, \Pi_{n-m}) \in \mathfrak{N}_{m-1}^n$ — некоторая точка на многообразии невырожденных $(m-1)$-пар в $\mathbb{R}P_n$. Обозначим через M_1 совокупность всех m-мерных плоскостей, содержащих Π_{m-1}, а через M_2 — совокупность всех $(n-m-1)$-мерных плоскостей в $\mathbb{R}P_n$, содержащихся в Π_{n-m}. Тогда $M_2 = \mathbb{R}P_{n-m}^* = \Pi_{n-m}^*$, а $M_1 = \mathbb{R}P_{n-m}$. Следовательно, $M_1 \times M_2$ — подмногообразие размерности $2(n-m)$ в многообразии всех m-пар. Пусть M_0 — подмножество в $M_1 \times M_2$, состоящее из вырожденных m-пар. Тогда $\mathcal{L} = (M_1 \times M_2) \setminus M_0$ — $2(n-m)$-мерное подмногообразие в $\mathfrak{N}_m^n$, которое является естественной гиперболической пространственной формой второго типа на $\mathfrak{N}_m^n$.

Несложно показать, что естественная гиперболическая форма первого типа $\mathfrak{N}(b_\alpha, b^\beta)$, определяемая на $\mathfrak{N}_m^n$ системой (9), состоит из таких невырожденных m-пар (A, Ξ), что

$$A \subset \Pi_{m+1} = p(\langle e_0, e_1, \ldots, e_m, b^\alpha e_\alpha \rangle),$$
$$\Xi \supset \Pi_{n-m-2} = p(\operatorname{Ann}\{e^0, e^1, \ldots, e^m, b_\alpha e^\alpha\}).$$

При этом система (11) является не чем иным, как условием постоянства плоскостей Π_{m+1} и Π_{n-m-2}, а неравенство $b_\alpha b^\alpha \neq 0$ гарантирует, что эти плоскости не пересекаются. Аналогично, естественная гиперболическая форма второго типа $\mathfrak{N}(a_i, a^j)$, определяемая на $\mathfrak{N}_m^n$ системой (10), состоит из таких невырожденных m-пар (A, Ξ), что

$$A \supset \Pi_{m-1} = p(\operatorname{Ann}\{e^{m+1}, e^{m+2}, \ldots, e^n, a_i e^i\}),$$
$$\Xi \subset \Pi_{n-m} = p(\langle e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots, e_n, a^i e_i \rangle).$$

Итак, *естественные гиперболические пространственные формы первого типа на $\mathfrak{N}_m^n$ находятся в биективном соответствии с точками многообразия $\mathfrak{N}_{m+1}^n$, а естественные гиперболические пространственные формы второго типа на $\mathfrak{N}_m^n$ находятся в биективном соответствии с точками многообразия $\mathfrak{N}_{m-1}^n$.* □

Как отмечалось ранее, многообразие $\mathfrak{N}_m^n$ невырожденных m-пар в $\mathbb{R}P_n$ является гиперболическим аналогом комплексного грассманиана $\mathbb{C}G_{m,n}$. Напомним свойства многообразия $\mathbb{C}G_{m,n}$, являющиеся классическим аналогом теоремы 3.

Комплексный грассманиан $\mathbb{C}G_{m,n}$ является келеровым многообразием вещественной размерности $2(m+1)(n-m)$. При $0 < m < n-1$ многообразие

$\mathbb{C}G_{m,n}$ имеет непостоянную голоморфную секционную кривизну. Однако через каждую его точку проходят два семейства подмногообразий, являющихся келеровыми многообразиями постоянной положительной голоморфной кривизны (*естественные пространственные формы* первого и второго типа). При стандартном вложении Плюккера $\sigma\colon \mathbb{C}G_{m,n} \to \mathbb{C}P_N$ $(N = \binom{n+1}{m+1} - 1)$ естественные пространственные формы отображаются на плоские образующие грассманиана $\sigma(\mathbb{C}G_{m,n})$. Первому семейству плоских образующих на $\sigma(\mathbb{C}G_{m,n})$ соответствуют естественные пространственные формы первого типа, а второму семейству плоских образующих соответствуют естественные пространственные формы второго типа. Естественные пространственные формы первого типа голоморфно изометричны $\mathbb{C}P_{m+1}$, а естественные пространственные формы второго типа голоморфно изометричны $\mathbb{C}P_{n-m}$. Заметим, что $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}P_{m+1} = 2(m+1)$, а $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}P_{n-m} = 2(n-m)$. Первое семейство естественных пространственных форм, проходящих через фиксированную точку, зависит от $2(n-m)$ вещественных параметров, а второе — от $2(m+1)$ вещественных параметров.

Геометрически естественные пространственные формы первого и второго типа на $\mathbb{C}G_{m,n}$ конструируются следующим образом. Пусть $\Pi_{m+1} \in \mathbb{C}G_{m+1,n}$ — фиксированная $(m+1)$-плоскость в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P_n$. Обозначим через $\mathcal{L}$ подмножество в $\mathbb{C}G_{m,n}$, состоящее из m-плоскостей, содержащихся в Π_{m+1}. Тогда $\mathcal{L}$ — естественная пространственная форма первого типа на $\mathbb{C}G_{m,n}$. Пусть теперь $\Pi_{m-1} \in \mathbb{C}G_{m-1,n}$ — фиксированная $(m-1)$-плоскость в $\mathbb{C}P_n$. Обозначим через $\mathcal{L}$ подмножество в $\mathbb{C}G_{m,n}$, состоящее из m-плоскостей, содержащих Π_{m-1}. Тогда $\mathcal{L}$ — естественная пространственная форма второго типа на $\mathbb{C}G_{m,n}$.

Таким образом, *естественные пространственные формы первого типа на $\mathbb{C}G_{m,n}$ находятся в биективном соответствии с точками многообразия $\mathbb{C}G_{m+1,n}$, а естественные пространственные формы второго типа на $\mathbb{C}G_{m,n}$ находятся в биективном соответствии с точками многообразия $\mathbb{C}G_{m-1,n}$*. Как мы видим из теоремы 3, аналогичный результат остаётся в силе и в гиперболическом случае.

Литература

[1] Акивис М. А. К дифференциальной геометрии грассманова многообразия // Tensor. — 1982. — Vol. 38. — P. 179—187.

[2] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Проблемы геометрии. Т. 9. — М.: ВИНИТИ, 1979.

[3] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. — М.: Наука, 1981.

[4] Коннов В. В. Кокасательное расслоение проективного пространства и многообразие невырожденных нуль-пар // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, вып. 5. — С. 718—735.

[5] Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.

[6] Griffiths P., Harris J. Algebraic geometry and local differential geometry // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4 serie. — 1979. — Vol. 12. — P. 355—452.

[7] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. II // Geom. Dedicata. — 1994. — Vol. 52. — P. 53—85.

[8] Konnov V. V. Symplectic geometry on the manifold of nondegenerate m-pairs // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 113, no. 3. — P. 489—513.