Об ассоциативных алгебрах Шлезингера—Сташефа и определителях Вронского*

А. В. КИСЕЛЁВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: arthemy@mccme.ru

УДК 512.81

Ключевые слова: алгебры Шлезингера—Сташефа, дифференциальные операторы, определители Вронского.

Аннотация

В работе рассмотрены представления ассоциативных алгебр Шлезингера—Сташефа в дифференциальных операторах высших порядков. Показано, что W-преобразования задаваемых решениями уравнений Тоды киральных вложений комплексных кривых в келеровы многообразия наделены структурой таких алгебр. Построены обобщения определителей Вронского от функций $n \geqslant 1$ переменных, удовлетворяющие структурным уравнениям алгебр Шлезингера—Сташефа.

Abstract

A. V. Kiselev, Associative homotopy Lie algebras and Wronskians, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 159—180.

We analyze representations of Schlessinger—Stasheff associative homotopy Lie algebras by higher-order differential operators. W-transformations of chiral embeddings of a complex curve related with the Toda equations into Kähler manifolds are shown to be endowed with the homotopy Lie-algebra structures. Extensions of the Wronskian determinants preserving Schlessinger—Stasheff algebras are constructed for the case of $n \geqslant 1$ independent variables.

Введение

В последние годы мы наблюдаем интенсивное развитие раздела математической физики, изучающего N-местные аналоги алгебр Ли, т. е. N-линейные кососимметричные скобки, удовлетворяющие некоторому обобщению тождества Якоби, а также вопросы N-полевой динамики, в частности N-местные обобщения пуассоновых многообразий. Существует несколько подходов [8, 11, 16, 19, 23, 24] к тому, как именно следует трактовать и обобщать тождество Якоби; для каждого из них существуют подходящие интерпретации (см.,

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке именной стипендией Правительства Российской Федерации и грантом INTAS YS 2001/2-33.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 159—180.

например, [22]) и области применения (см. [3]). В [26] был предложен новый подход, в рамках которого все известные ранее концепции соответствуют частным случаям в 3-параметрическом семействе тождеств Якоби.

Насколько нам известно, первыми работами по данной тематике были [8] и [24], вышедшие в 1985 году. В [8] В. Т. Филиппов рассматривал N-линейные кососимметричные скобки ∇, заданные на некотором векторном пространстве $\mathcal{A}$, удовлетворяющие такому аналогу тождества Якоби:

$$\nabla(a_1, \ldots, a_{N-1}, \nabla(b_1, \ldots, b_N)) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \nabla(b_1, \ldots, b_{i-1}, \nabla(a_1, \ldots, a_{N-1}, b_i), b_{i+1}, \ldots, b_N), \quad \text{(I.1)}$$

здесь $a_i, b_j \in \mathcal{A}$; в этом случае $\mathcal{A}$ называется *N-лиевой алгеброй*. Сущность уравнения (I.1) состоит в том, что присоединённое представление $a \mapsto \nabla(a_1, \ldots, a_{N-1}, a)$ является дифференцированием при любых $a_i \in \mathcal{A}$. В [4] для N-лиевских алгебр были введены конструкции, стандартные в теории обыкновенных алгебр Ли.

Механика Намбу служит одним из примеров N-пуассоновой динамики, соответствующей тождеству (I.1). В [22] двуместная скобка Пуассона на $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^3)$ была заменена трёхместной ($N = 3$)

$$\nabla(f_1, \ldots, f_N) = \det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right\|,$$

т. е. якобианом, тем не менее факт, что такая скобка ∇ удовлетворяет тождеству (I.1), не был отмечен вплоть до работы [23]. Впоследствии Л. Тахтаджяном [25] была развита теория многообразий Намбу—Пуассона для случая $N \geqslant 2$.

Второе естественное обобщение тождества Якоби имеет вид

$$\sum_{\sigma \in S^N_{2N-1}} (-1)^\sigma \Delta(\Delta(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(N)}), a_{\sigma(N+1)}, \ldots, a_{\sigma(2N-1)}) = 0, \quad \text{(I.2)}$$

где $a_i \in \mathcal{A}$ и $S^N_{2N-1} = \{\sigma \in S_{2N-1} \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(N),\ \sigma(N+1) < \ldots < \sigma(2N-1)\}$ — множество *растасовок*. Такие скобки Δ задают структуру *N-алгебры Шлезингера—Сташефа* [24] и непосредственно связаны с SH-алгебрами [10, 19]. Алгебры указанного типа и их когомологии Кошуля изучались в [16], анализ их когомологий Хохшильда проводится, например, в [21].

В [9] были рассмотрены N-пуассоновы многообразия, связанные с тождеством Якоби вида (I.2): N-векторное поле V есть N-пуассонова структура, если его скобка Схоутена $[\![,]\!]^{\mathrm{S}}$ с самим собой удовлетворяет уравнению $[\![V, V]\!]^{\mathrm{S}} = 0$.

Оказывается, что свойства N-лиевских алгебр Филиппова и N-алгебр Шлезингера—Сташефа существенно различны. Как мы увидим, они соответствуют принципиально разным наборам параметров в схеме [26]: $(N, N-1, 0)$ и $(N, 0, 0)$ соответственно (см. определение 2). Указанные выше темы подробно обсуждаются в [26].

В данной работе мы изучаем свойства *ассоциативных* алгебр Шлезингера—Сташефа и их представлений в дифференциальных операторах высших порядков. В частности, мы устанавливаем связь между структурами таких алгебр и определителями Вронского, выделяем N-местные аналоги векторных полей на гладких многообразиях и строим определение вронскиана функций от $n \geqslant 1$ независимых переменных, удовлетворяющего тождеству Якоби (I.2). Кроме того, мы наделяем структурой алгебры Шлезингера—Сташефа пространство W-преобразований специальных W-поверхностей [13—15] в келеровых многообразиях. Рассуждения проводятся на языке пространства струй [1]. Мы надеемся, что используемый в настоящей работе подход позволит расширить применение методов гомологической алгебры в теории поля.

Материал излагается по следующей схеме. В разделе 1 введены основные понятия, связанные с N-местными структурами: определены скобка Ричардсона—Ниейенхейса $[\![\cdot,\cdot]\!]^{\mathrm{RN}}$, построены N-аналоги тождества Якоби $[\![\Delta,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}} = 0$, которым удовлетворяют N-линейные кососимметричные операторы Δ, а также обсуждаются когомологии Хохшильда и Кошуля. В качестве примера разобраны два конечномерных аналога алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$.

В разделе 2 рассматриваются представления ассоциативной структуры алгебры Шлезингера—Сташефа в дифференциальных операторах высших порядков. Используя свойства конкретной N-линейной кососимметричной скобки, мы обобщаем понятие векторного поля, соответствующего $N = 2$, и объясняем, почему определители Вронского $\partial^{\vec{\imath}} = \mathbf{1} \wedge \partial \wedge \ldots \wedge \partial^{N-1}$ при чётных N удовлетворяют уравнению $\partial^{\vec{\imath}}[\partial^{\vec{\imath}}] = 0$ и, таким образом, задают структуру алгебры Шлезингера—Сташефа. Кроме того, мы выражаем структурные константы этих алгебр через определители Вандермонда.

Далее мы устанавливаем взаимосвязь полилинейных структур с уравнениями Тоды [7]. Известно, что последние являются условием совместности в W-геометрии [13—15], описывающей киральные вложения комплексных кривых в келеровы многообразия, мы же отмечаем, что допускаемые этими вложениями деформации всегда наделены структурой ассоциативной алгебры Шлезингера—Сташефа.

В разделе 3 построены такие обобщения $D^{\vec{\sigma}} = D_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge D_{\sigma_N}$ определителей Вронского $\partial^{\vec{\imath}}$ на случай произвольного числа $n \geqslant 1$ независимых переменных $x^1, \ldots, x^n$, что N-тождества Якоби $D^{\vec{\sigma}}[D^{\vec{\sigma}}] = 0$ выполнены, если $N = \binom{n+k}{n}$ и $k \geqslant 1$ произвольно.

1. Предварительные сведения: алгебраическая теория

1.1. Основные определения

Сперва введём необходимые обозначения. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем $\Bbbk$ характеристики 0, и пусть ∂ — дифференцирование $\mathcal{A}$. Полезным в дальнейшем примером алгебры $\mathcal{A}$ служит алгебра гладких функций $f\colon M\to\mathbb{R}$ на вещественном многообразии M.

Через $S_m^k\subset S_m$ обозначим растасовки, для которых $\sigma(1)<\sigma(2)<\ldots<\sigma(k)$ и $\sigma(k+1)<\sigma(k+2)<\ldots<\sigma(m)$ для всех $\sigma\in S_m^k$. Возьмём произвольный гомоморфизм $\Delta\in\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\bigwedge^k\mathcal{A},\mathcal{A})$ над $\Bbbk$ и выберем некоторые элементы алгебры $a_j\in\mathcal{A}$, $1\leqslant j\leqslant k$, пусть также $1\leqslant l\leqslant k$. *Внутренним произведением* (*подстановкой*) $\Delta_{a_1,\ldots,a_m}\in\mathrm{Hom}(\bigwedge^{k-m}\mathcal{A},\mathcal{A})$ называется оператор, определяемый правилом

$$\Delta_{a_1,\ldots,a_m}(a_{m+1},\ldots,a_k)\overset{\mathrm{def}}{=}\Delta(a_1,\ldots,a_k).$$

Определение 1 ([2, 26]). Пусть $\Delta\in\mathrm{Hom}(\bigwedge^k\mathcal{A},\mathcal{A})$ и $\nabla\in\mathrm{Hom}(\bigwedge^l\mathcal{A},\mathcal{A})$ — пара операторов. Их *внешнее произведение* (соответствующую операцию мы обозначаем $\wedge$), снова принадлежащее $\mathrm{Hom}(\bigwedge^*\mathcal{A},\mathcal{A})$, есть

$$(\Delta\wedge\nabla)(a_1,\ldots,a_{k+l})=\sum_{\sigma\in S_{k+l}^k}(-1)^\sigma\Delta(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(k)})\cdot\nabla(a_{\sigma(k+1)},\ldots,a_{\sigma(k+l)}),$$

где $a_1,\ldots,a_{k+l}\in\mathcal{A}$ — произвольные элементы алгебры.

Пример 1. Определители Вронского $W^{0,1,\ldots,N+1}=\partial^0\wedge\ldots\wedge\partial^{N+1}$ строятся именно в терминах определения 1, например, $W^{0,1,\ldots,N+1}=W^{0,1,\ldots,N-1}\wedge W^{N,N+1}$. В дальнейшем мы рассмотрим также более общий случай вронскианов вида $W^{\vec{\imath}}=\partial^{i_1}\wedge\ldots\wedge\partial^{i_N}\in\mathrm{Hom}(\bigwedge^N\mathcal{A},\mathcal{A})$. Пусть мультииндекс $\vec{\imath}\in\mathbb{Z}_+^N$ подчинён условию $0\leqslant i_1<\ldots<i_N$. Через $\mathrm{Hom}_t(\bigwedge^N\mathcal{A},\mathcal{A})$ мы обозначим линейную оболочку обобщённых вронскианов $W^{\vec{\imath}}$, для которых $|\vec{\imath}|\equiv\sum\limits_j i_j=t$. Положим по определению $|W^{\vec{\imath}}|=|\vec{\imath}|$.

Используя определение 1, в разделе 3 мы построим обобщения определителей Вронского на случай алгебры $\mathcal{A}=\Bbbk[[x^1,\ldots,x^n]]$ аналитических функций.

Пусть $\Delta\in\mathrm{Hom}(\bigwedge^k\mathcal{A},\mathcal{A})$ и $\nabla\in\mathrm{Hom}(\bigwedge^l\mathcal{A},\mathcal{A})$. Формулой

$$\Delta[\nabla]\in\mathrm{Hom}\Bigl(\bigwedge^{k+l-1}\mathcal{A},\mathcal{A}\Bigr)$$

обозначим *действие*

$$\Delta[\cdot]\colon\ \mathrm{Hom}\Bigl(\bigwedge^{N}\mathcal{A},\mathcal{A}\Bigr)\to\mathrm{Hom}\Bigl(\bigwedge^{N+k-1}\mathcal{A},\mathcal{A}\Bigr)$$

оператора Δ на ∇:

$$\Delta[\nabla](a_1,\ldots,a_{k+l-1})\overset{\mathrm{def}}{=}\\ =\sum_{\sigma\in S_{k+l-1}^l}(-1)^\sigma\Delta(\nabla(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(l)}),a_{\sigma(l+1)},\ldots,a_{\sigma(k+l-1)}),\quad(1)$$

где $a_j\in\mathcal{A}$.

Через $[\![\Delta,\nabla]\!]^{\mathrm{RN}} \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^{k+l-1}\mathcal{A},\mathcal{A})$ обозначим *скобку Ричардсона—Нийенхейса* операторов Δ и ∇:

$$[\![\Delta,\nabla]\!]^{\mathrm{RN}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Delta[\nabla] - (-1)^{(k-1)(l-1)}\nabla[\Delta]. \tag{2}$$

В случае, когда Δ и ∇ — поливекторы, эта скобка называется *скобкой Схоутена*.

Определение 2 ([26]). Выберем произвольную тройку целых чисел N, k и r, для которых выполнено неравенство $0 \leqslant r \leqslant k < N$, и рассмотрим набор $a_1,\ldots,a_r,b_1,\ldots,b_k \in \mathcal{A}$. Говорят, что кососимметричное отображение $\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^N\mathcal{A},\mathcal{A})$ задаёт структуру (N,k,r)*-алгебры Ли*, или, кратко, (N,k,r)-структуру, на $\Bbbk$-векторном пространстве $\mathcal{A}$, если Δ удовлетворяет (N,k,r)*-тождеству Якоби*

$$[\![\Delta_{a_1,\ldots,a_r},\Delta_{b_1,\ldots,b_k}]\!]^{\mathrm{RN}} = 0 \tag{3}$$

при любых $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Символом $\mathrm{Lie}^{(N,k,r)}(\mathcal{A})$ обозначим множество всех (N,k,r)-структур $\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^N\mathcal{A},\mathcal{A})$ на $\mathcal{A}$.

Замечание 1. Покажем, что

$$\mathrm{Lie}^{(N,0,0)}(\mathcal{A}) = \mathrm{Lie}^{(N,1,0)}(\mathcal{A}) \tag{4}$$

при всех чётных N. Это равенство является типичным примером наследования (N,k,r)-структур [26]. В самом деле, следующие два условия эквивалентны:

$$[\![\Delta,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}} = 0 \iff {[\![\Delta,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}}}_a = -2[\![\Delta,\Delta_a]\!]^{\mathrm{RN}} = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Здесь мы воспользовались следствием 1.1 из [26], согласно которому

$${[\![\Delta,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}}}_a = (-1)^{N-1}[\![\Delta,\Delta_a]\!]^{\mathrm{RN}} + [\![\Delta_a,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}}.$$

Отсюда получаем $[\![\Delta,\Delta_a]\!]^{\mathrm{RN}} = 0$ для любых $a \in \mathcal{A}$.

Предшествовавшие данной работе публикации [5, 6] следует понимать по модулю изоморфизма (4).

Пусть $\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^N\mathcal{A},\mathcal{A})$ — это N-линейная кососимметричная скобка: $\Delta(a_{\Sigma(1)},\ldots,a_{\Sigma(N)}) = (-1)^{\Sigma}\Delta(a_1,\ldots,a_N)$ при любой перестановке $\Sigma \in S_N$.

Определение 3. Алгебра $\mathcal{A}$ наделена структурой *N-алгебры Шлезингера—Сташефа* (иначе — *гомотопической N-алгебры Ли*), если выполнено N-тождество Якоби

$$\Delta[\Delta] = 0. \tag{5}$$

В координатах N-тождество Якоби имеет вид

$$\sum_{\sigma\in S^N_{2N-1}} (-1)^{\sigma}\Delta(\Delta(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(N)}),a_{\sigma(N+1)},\ldots,a_{\sigma(2N-1)}) = 0, \tag{6}$$

где $a_j \in \mathcal{A}$ и $1 \leqslant j \leqslant 2N-1$. В общем случае число слагаемых в (6) равно $\binom{2N-1}{N-1} = \binom{2N-1}{N}$ (см. [5]).

Отметим, что из тождества Якоби $[\![\Delta,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}} = 2\Delta[\Delta] = 0$ типа $(N,0,0)$ при чётных N следует тождество (6). Если же N нечётно, то равенство

$$[\![\Delta,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}} = 0 \tag{7}$$

выполнено тождественно, и потому мы будем рассматривать уравнение Якоби (5) независимо от условия (3). По этой причине в дальнейшем мы будем изучать тождество Якоби (6) в форме (5), предполагая, что $\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^N \mathcal{A},\mathcal{A})$.

1.2. Когомологии Хохшильда и Кошуля

Пусть k — чётное число и $\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k \mathcal{A},\mathcal{A})$. Используя градуированное тождество Якоби, которому удовлетворяет скобка Ричардсона—Нийенхейса, обсудим механизм возникновения d_Δ-когомологий Хохшильда пространства $\mathrm{Hom}(\bigwedge^* \mathcal{A},\mathcal{A})$.

Утверждение 1 ([26]). *Скобка Ричардсона—Нийенхейса удовлетворяет градуированному тождеству Якоби*

$$[\![\Delta,[\![\nabla,\square]\!]^{\mathrm{RN}}]\!]^{\mathrm{RN}} = [\![[\![\Delta,\nabla]\!]^{\mathrm{RN}},\square]\!]^{\mathrm{RN}} + (-1)^{(\Delta-1)(\nabla-1)}[\![\nabla,[\![\Delta,\square]\!]^{\mathrm{RN}}]\!]^{\mathrm{RN}}. \tag{8}$$

Следствие 2. *Пусть k — произвольное чётное число и оператор $\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k \mathcal{A},\mathcal{A})$ удовлетворяет уравнению $[\![\Delta,\Delta]\!]^{\mathrm{RN}} = 0$. Тогда скобка Ричардсона—Нийенхейса $\mathrm{d}_\Delta \equiv [\![\Delta,\cdot]\!]^{\mathrm{RN}}$ с этим оператором является дифференциалом*: $\mathrm{d}_\Delta^2 = 0$.

Когомологии относительно дифференциала d_Δ называются d_Δ-*когомологиями Хохшильда* пространства отображений $\mathrm{Hom}(\bigwedge^* \mathcal{A},\mathcal{A})$.

Замечание 2. Рассматриваемый в данной работе подход тесно связан с построением алгебраического гамильтонова формализма в геометрии дифференциальных уравнений [1,18]: бивектор A задаёт структуру алгебры Ли на пространстве гамильтонианов, если и только если его скобка Схоутена с самим собой удовлетворяет уравнению $[\![A,A]\!]^{\mathrm{S}} = 0$. Из тождества Якоби вида (8) следует тогда, что дифференциал $\mathrm{d}_A = [\![A,\cdot]\!]^{\mathrm{S}}$ задаёт гамильтонов комплекс, когомологии которого называются пуассоновыми когомологиями. Укажем также, что изучаемый в разделе 2.2 оператор $W^{0,1} = \mathbf{1} \wedge d/dx$ является первой гамильтоновой структурой для уравнения Кортевега—де Фриза, он же задаёт структуру алгебры Ли на пространстве инфинитезимальных конформных симметрий комплексной плоскости.

Пусть скобка $\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k \mathcal{A},\mathcal{A})$ удовлетворяет k-тождеству Якоби $\Delta[\Delta]=0$. Через ∂_Δ обозначим линейное отображение $\partial_\Delta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^r \mathcal{A},\bigwedge^{r-k+1} \mathcal{A})$, заданное правилами

$$\partial_\Delta\big|_{\bigwedge^r \mathcal{A}} = 0, \qquad \text{если } r < k;$$

$$\partial_\Delta(a_1 \wedge \ldots \wedge a_r) = \\ = \sum_{\sigma \in S_r^k} (-1)^\sigma \Delta[a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(k)}] \wedge a_{\sigma(k+1)} \wedge \ldots \wedge a_{\sigma(r)}, \quad \text{если } r \geqslant k.$$

В этом случае определены ∂_Δ-когомологии Кошуля алгебры $\bigwedge^* \mathcal{A} = \bigoplus\limits_{r\geqslant 2} \bigwedge^r \mathcal{A}$.

Утверждение 3 ([16]). *Оператор* $\partial_\Delta\colon \bigwedge^* \mathcal{A} \to \bigwedge^* \mathcal{A}$ — *дифференциал*: $\partial_\Delta^2 = 0$.

Когомологии относительно дифференциала ∂_Δ называются ∂_Δ-когомологиями Кошуля алгебры $\mathcal{A}$, обозначим их через $H^*_\Delta(\mathcal{A})$. При $N = 2$ когомологии Кошуля алгебры Ли векторных полей на окружности S^1 были найдены в [2], ∂_Δ-когомологии Кошуля свободных алгебр были получены в [16] для всех $N \geqslant 2$.

1.3. Примеры алгебр Шлезингера—Сташефа

Заданные уравнением (5) алгебраические структуры существуют по естественным геометрическим причинам, что показывает следующий пример.

Пример 2 ([16]). Пусть $\mathcal{A} = \Bbbk^{\dim \mathcal{A}}$ и $\Delta\colon \bigwedge^N \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ — произвольное кососимметричное линейное отображение $\Bbbk$-линейного пространства $\mathcal{A}$. Если $\dim \mathcal{A} < 2N - 1$, то Δ удовлетворяет тождеству Якоби (6).

Доказательство. Увеличим число слагаемых в формуле (6), для того чтобы установить её кососимметричность относительно перестановок $a_j \mapsto a_{\Sigma(j)}$, $\Sigma \in S_{2N-1}$.

Левая часть тождества Якоби (6) равна

$$\frac{1}{N!(N-1)!} \sum_{\sigma \in S_{2N-1}} (-1)^\sigma \Delta(\Delta(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(N)}), a_{\sigma(N+1)}, \ldots, a_{\sigma(2N-1)}), \tag{9}$$

здесь суммирование проводится по *всем* перестановкам $\sigma \in S_{2N-1}$ (см. [16,21]). Выражение (9) кососимметрично при перестановках Σ аргументов $a_j \in \vec{a}$:

$$(-1)^\Sigma \sum_{\sigma \in S_{2N-1}} (-1)^\sigma \Delta(\Delta(a_{(\sigma\circ\Sigma)(1)}, \ldots, a_{(\sigma\circ\Sigma)(N)}), a_{(\sigma\circ\Sigma)(N+1)}, \ldots, a_{(\sigma\circ\Sigma)(2N-1)}) = \\ = \sum_{\sigma \in S_{2N-1}} (-1)^\sigma \Delta(\Delta(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(N)}), a_{\sigma(N+1)}, \ldots, a_{\sigma(2N-1)}). \tag{10}$$

Следовательно, левая часть (9) тоже кососимметрична, т. е. мы рассматриваем $(2N-1)$-линейный кососимметричный оператор, действующий на векторном пространстве меньшей размерности. Таким образом, если размерность $\dim \mathcal{A}$ пространства $\mathcal{A}$ строго меньше числа аргументов $\sharp\vec{a} = 2N - 1$, то тождество Якоби (6) выполнено. $\square$

Общеизвестен следующий пример алгебр Шлезингера—Сташефа: пусть $\dim \mathcal{A}_1 = N + 1$, а задающие алгебру соотношения суть $[a_0, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_N] = (-1)^j \cdot a_j$. В этом случае скобка $[\cdot,\cdot]$ — это векторное произведение в евклидовом пространстве $\Bbbk^{N+1}$. Если $\Bbbk = \mathbb{R}$ и $N = 2$, то $\mathcal{A} \simeq \mathfrak{so}(3)$ есть обычная алгебра Ли группы Ли вращений трёхмерного пространства.

Ниже мы покажем, что задаваемая соотношениями

$$[a_0, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_N] = a_{N-j}, \quad 0 \leqslant j \leqslant N, \tag{11}$$

алгебра $\mathcal{A}_2$ размерности $\dim \mathcal{A}_2 = N + 1$ допускает представление в полиномах $\Bbbk_N[x]$, причём структура $[\cdot,\cdot]$ оказывается не чем иным, как определителем Вронского элементов пространства представления. Изучению свойств алгебры $\mathcal{A}_2$ посвящён следующий раздел.

1.4. О пространстве полиномов

В данном разделе мы строим конечномерные обобщения алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$. Отправной точкой рассуждений служит следующий пример.

Пример 3 ([5]). Пространство квадратных трёхчленов $\Bbbk_2[x] = \{\alpha x^2+\beta x+\gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \Bbbk\}$ можно наделить структурой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$, порождённой, как известно, тремя образующими $\langle e, h, f\rangle$, которые удовлетворяют соотношениям

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Рассмотрим базис $\langle 1, -2x, -x^2\rangle$ и выберем в качестве скобки на $\Bbbk_2[x]$ определитель Вронского:

$$[-2x, 1] = 2, \quad [-2x, -x^2] = 2x^2, \quad [1, -x^2] = -2x,$$

откуда видно, что представление $\rho\colon \mathfrak{sl}_2(\Bbbk) \to \Bbbk_2[x]$ таково:

$$\rho(e) = 1, \quad \rho(h) = -2x, \quad \rho(f) = -x^2. \tag{12}$$

Рассмотрим пространство $\Bbbk_N[x] \ni a_j$ полиномов a_j степени не выше N. На нём определена N-линейная кососимметричная скобка

$$[a_1, \ldots, a_N] = W(a_1, \ldots, a_N), \tag{13}$$

где W — определитель Вронского. В силу линейности скобки (13) по каждому из N аргументов в дальнейшем мы будем рассматривать только мономы $\mathrm{const} \cdot x^k$. В качестве базисов в пространстве $\Bbbk_N[x]$ будем использовать множества $\{a_j^0\} = \{x^k\}$ либо $\{a_j^1\} = \{x^k/k!\}$, где степени по определению лежат в пределах $0 \leqslant k \leqslant N$, а индекс j нумерует аргументы в тождестве Якоби: $1 \leqslant j \leqslant 2N - 1$. Мы обращаем внимание на схожесть обозначения степеней $x^0, \ldots, x^N$ единственной переменной x и обозначения n различных независимых переменных $x^1, \ldots, x^n$, рассматриваемых в разделе 3. Впрочем, изложение построено таким образом, что разночтений не возникает. Конкретный же выбор базиса зависит от ситуации: мономы x^k используются для того, чтобы обозначить наличие или, наоборот, отсутствие определённых степеней x среди N аргументов скобки (13), в то время как использование мономов $x^k/k!$ упрощает вычисления, так как данный набор замкнут относительно дифференцирования и, как мы вскоре увидим, относительно вычисления определителя Вронского.

Теорема 4 ([6]). *Пусть* $0 \leqslant k \leqslant N$. *Тогда выполнено соотношение*

$$W\left(1, \ldots, \widehat{\frac{x^k}{k!}}, \ldots, \frac{x^N}{N!}\right) = \frac{x^{N-k}}{(N-k)!}. \tag{14}$$

Доказательство. Заметим сперва, что

$$W\left(1, \ldots, \widehat{\frac{x^k}{k!}}, \ldots, \frac{x^N}{N!}\right) = W\left(1, \ldots, \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right) \cdot W\left(x, \ldots, \frac{x^{N-k}}{(N-k)!}\right), \tag{15}$$

причём первый сомножитель в правой части (15) тождественно равен 1 и, таким образом, имеет степень 0. Второй сомножитель, определитель матрицы размера $(N-k) \times (N-k)$, обозначим через W_m, где $m \equiv N-k$. Покажем, что W_m — моном, $\deg W_m = m$. Будем доказывать это утверждение индукцией по $m \equiv N-k$. При $m=1$, действительно, $\deg \det(x) = 1 = m$. Пусть теперь $m > 1$. Раскладывая определитель W_m по последней строке, получаем

$$W_m = W\left(x, \ldots, \frac{x^m}{m!}\right) = \\ = x \cdot W\left(x, \ldots, \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\right) - W\left(x, \ldots, \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}, \frac{x^m}{m!}\right), \tag{16}$$

причём степень первого вронскиана в правой части равенства (16) равна $m-1$ по предположению индукции. Второй вронскиан в правой части (16) вновь разло́жим по последней строке и будем выполнять эту операцию далее, всякий раз используя предположение индукции. В результате мы получаем рекуррентное соотношение

$$W_m = \sum_{l=1}^{m-1} W_{m-l} \cdot (-1)^{l+1} \frac{x^l}{l!} - (-1)^m \frac{x^m}{m!}, \quad m \geqslant 1, \tag{17}$$

откуда $\deg W_m = m$. Итак, мы видим, что исходный определитель Вронского (15) является мономом степени $m = N-k$, но коэффициент при нём пока ещё не известен.

Вычислим коэффициент $W_m(x)/x^m \in \Bbbk$, возникающий в определителе Вронского (15). Рассмотрим производящую функцию

$$f(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} W_m(x), \tag{18}$$

позволяющую вычислять все $W_m(x)$ по очевидному правилу

$$W_m(x) = \frac{x^m}{m!} \frac{d^m f}{dx^m}(0), \quad 1 \leqslant m \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся определением экспоненты $\exp(x) \equiv \sum\limits_{m=0}^{\infty} x^m/m!$. Трактуя (18) как формальную сумму уравнений (17), получим соотношение

$$f(x) = f(x) \cdot (\exp(-x) - 1) - \exp(-x) + 1,$$

откуда

$$f(x) = \exp(x) - 1. \tag{19}$$

Доказательство теоремы окончено. $\square$

Выше мы показали, что пространство полиномов $\Bbbk_N[x]$ замкнуто относительно вычисления определителя Вронского. В то же время мы знаем, что всякая N-линейная кососимметричная скобка Δ на $\Bbbk^{N+1}$ удовлетворяет условию $\Delta[\Delta] = 0$, а потому утверждение, что при любом $N \geqslant 2$ полиномы $\Bbbk_N[x]$ степени не выше N образуют N-алгебру Шлезингера—Сташефа, структура которой задана полилинейной кососимметричной скобкой (13), очевидно. Однако в дальнейшем мы установим, что вронскианы $W^{0,1,\ldots,N-1} \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^N \Bbbk_N[x], \Bbbk_N[x])$ являются ограничением *нетривиальной* структуры из $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\bigwedge^N \Bbbk[[x]], \Bbbk[[x]])$, определённой на аналитических функциях.

Отметим также, что до настоящего момента число n независимых переменных в пространстве $\Bbbk \equiv \Bbbk^1 \ni x$ равнялось 1. В разделе 3 мы обобщим рассуждения на случай $\boldsymbol{x} \in \Bbbk^n$, соответствующий произвольной размерности $n \geqslant 1$.

2. Ассоциативные алгебры Шлезингера—Сташефа

Приведём ещё один естественный пример алгебр Шлезингера—Сташефа.

Утверждение 5 ([3,16]). *Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра, выберем также некоторое чётное N. Положим по определению*[1]

$$[a_1, \ldots, a_N] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_{2N-1}} (-1)^{\sigma} \cdot a_{\sigma(1)} \circ \ldots \circ a_{\sigma(2N-1)}. \tag{20}$$

Тогда скобка $[\cdot, \ldots, \cdot]$ наделяет алгебру $\mathcal{A}$ структурой алгебры Шлезингера—Сташефа.

Доказательство [16]. Наиболее существенным в доказательстве является использование тождеств (9) и (10). Пусть $a_1, \ldots, a_{2N-1}$ лежат в $\mathcal{A}$, а $\sigma \in S_{2N-1}$ — некоторая перестановка. Чтобы выделить возникающий в (6) коэффициент при $a_{\sigma(1)} \circ \ldots \circ a_{\sigma(2N-1)}$ и затем доказать, что он всегда равен 0, достаточно проделать это для слагаемого $\alpha = a_1 \circ \ldots \circ a_{2N-1}$ в силу равенств (10) и (9), последовательно применённых к (6).

[1] Отметим, что перестановки $\sigma \in S_N$ действуют *слева* на $\bigotimes^N \mathcal{A}$, в отличие от [17, § II.2.6]. Таким образом, по определению через $\sigma(j)$ мы обозначаем номер объекта в исходном наборе, который после перестановки σ оказывается на j-м месте.

Используем теперь предположение, что N чётно. Произведение α входит в тождество (6) N раз, причём оно встречается лишь в слагаемых β_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, вида

$$\beta_j = (-1)^{N(j-1)}[[a_j, \ldots, a_{N+j-1}], a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{N+j}, \ldots, a_{2N-1}]. \tag{21}$$

Коэффициент, с которым α встречается в β_j, равен $(-1)^{j-1}$, и потому общий коэффициент при α в (6) равен

$$\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} = 0.$$

Доказательство завершено. □

Из доказательства утверждения 5 видно, что основным препятствием к тому, чтобы скобка (20) задавала на $\mathcal{A}$ структуру алгебры Шлезингера—Сташефа при нечётных N, являются знаки $(-1)^\sigma$ в формулах (1) и (20), а также в определении скобки Ричардсона—Нийенхейса (2), необходимой для построения тождества Якоби $\mathrm{d}_\Delta^2 = 0$ (см. утверждение 1). Более строго, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 6 ([3]). *Пусть нижний индекс i при обозначении Δ_i скобки (20) указывает количество её аргументов: $\Delta_i \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\bigwedge^i \mathcal{A}, \mathcal{A})$, выберем также произвольные целые k и ℓ. Тогда верны соотношения*

$$\Delta_{2k}[\Delta_{2\ell}] = 0, \tag{22a}$$
$$\Delta_{2k+1}[\Delta_{2\ell}] = \Delta_{2k+2\ell}, \tag{22b}$$
$$\Delta_k[\Delta_{2\ell+1}] = k \cdot \Delta_{2\ell+k}. \tag{22c}$$

Доказательство. Проверка равенства (22a) дословно повторяет рассуждения, проведённые для формулы (21). Аналогично, в равенстве (22b) остаётся нескомпенсированным последнее слагаемое β_{2k+1}. Рассмотрим более подробно соотношение (22c). Видно, что при слагаемом $\alpha = a_1 \circ \ldots \circ a_{2\ell+k}$ возникает коэффициент

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{(2\ell+1)(j-1)} \cdot (-1)^{j-1} = k.$$

Это рассуждение завершает доказательство. □

2.1. О представлениях алгебр в дифференциальных операторах

На протяжении данного раздела $\Bbbk$ — это поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, а z — голоморфная координата в $\mathbb{C}$.

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathrm{Diff}_*(\mathbb{C})$ голоморфных дифференциальных операторов по z

$$\nabla_{\vec{w}} = \sum_{j=0}^{p} w_j(z) \cdot \partial^j. \tag{23}$$

Как будет показано ниже, кроме того, что на $\mathrm{Diff}_*(\mathbb{C})$ определена структура алгебры Шлезингера—Сташефа, при всяком p в ней можно выделить $2p$-подалгебру Шлезингера—Сташефа операторов порядка p аналогично тому, как алгебра всех дифференциальных операторов на многообразии содержит в себе подалгебру векторных полей.

Пусть $a_j \in \mathrm{Diff}_*(\mathbb{C})$ имеет вид $a_j = w_j(z)\partial^{k_j}$ при $1 \leqslant j \leqslant N$. Аналогично (20) рассмотрим скобку

$$[w_1 \cdot \partial^{k_1}, \ldots, w_N \cdot \partial^{k_N}] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma w_{\sigma(1)} \partial^{k_{\sigma(1)}} \circ \ldots \circ w_{\sigma(N)} \cdot \partial^{k_{\sigma(N)}}. \tag{24}$$

Эта скобка N-линейна над $\mathbb{C}$ и кососимметрична при перестановках её аргументов.

Займёмся сперва подсчётом производных: ограничимся ситуацией, когда $k_j \equiv p = \mathrm{const}$ при любом j, и разрешим уравнение

$$Np = \frac{N(N-1)}{2} + p \tag{25}$$

относительно p: $p = N/2$. Обратим внимание на тот факт, что $N(N-1)/2 = |W^{0,1,\ldots,N-1}|$.

Сделаем техническое ограничение: будем в дальнейшем рассматривать лишь чётные N. Оказывается, что при нечётных N необходимо строить теорию, использующую полуцелые степени оператора дифференцирования ∂: $\partial^0, \partial^{1/2}, \partial, \ldots$.

Теорема 7. *Пусть N чётно и $w_j \in \mathbb{C}[[z]]$ при всех j, $0 \leqslant j \leqslant N$. Положим $p = N/2$. В этом случае выполнено соотношение*

$$[w_1\partial^p, \ldots, w_N\partial^p] = W^{0,1,\ldots,N-1}(w_1, \ldots, w_N) \cdot \partial^p.$$

Доказательство. Поскольку все $k_j \equiv p$ неразличимы, то подразумеваемые определением скобки (24) перестановки аргументов сводятся к перестановкам коэффициентов w_j. Пусть $\sigma \in S_N$ — одна из этих перестановок, а $\vec{\jmath} \in \mathbb{Z}^N \cap [0, Np]^N$ — вектор целочисленной решётки. Раскроем все дифференцирования, возникающие из определения скобки (24), и рассмотрим появляющиеся при этом слагаемые вида

$$S_{\sigma,\vec{\jmath}} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\sigma \partial^{j_1}(w_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot \partial^{j_N}(w_{\sigma(N)}).$$

Подчеркнём, что *не все* наборы $\vec{\jmath} \in \mathbb{Z}^N \cap [0, Np]^N$ могут быть реализованы: в частности, должно быть выполнено соотношение $|\vec{\jmath}| \leqslant Np$. Тем не менее множество реализуемых наборов $J = \{\vec{\jmath}\} \subset \mathbb{Z}^N \cap [0, Np]^N$ не зависит от перестановки σ. Предположим, что некоторому вектору $\vec{\jmath} \in J$ соответствует слагаемое, содержащее равное число дифференцирований при коэффициентах w_a и w_b. Тогда тому же самому распределению производных и транспозиции τ_{ab}

соответствует также перестановка $\tau_{ab} \circ \sigma$, которая задаёт обратный порядок следования w_a и w_b, а потому $S_{\sigma,\vec{\jmath}} + S_{\tau_{ab}\circ\sigma,\vec{\jmath}} = 0$. Таким образом, благодаря уравнению (25) остаётся лишь вронскиан, порядки дифференцирования внутри слагаемых которого различны. □

Теорема 7 является обобщением хорошо известного факта: коммутатор двух векторных полей снова векторное поле. Подчеркнём, что теорема 7 запрещает наивную попытку комбинировать N векторных полей (например, симметрий некоторого дифференциального уравнения) в надежде снова получить некоторое векторное поле.

Замечание 3. К сожалению, в случае произвольных операторов (23) порядка $p = N/2$ такой механизм взаимных уничтожений не работает. Действительно, предположим, что степени дифференцирований $k_j \leqslant p$ произвольны. Тогда множества $J \subset \mathbb{Z}^N \cap [0, Np]^N$ *зависят* от перестановок σ, причём, вообще говоря, $J(\sigma) \neq J(\tau_{ab} \circ \sigma)$, если какие-то две функции w_a и w_b дифференцируются по z в одном из слагаемых $S_{\sigma,\vec{\jmath}(\sigma)}$ одинаковое число раз. Безусловно, определитель Вронского может возникнуть при соответствующей степени дифференцирования ∂, но результат также может содержать много дополнительных слагаемых, даже и при степенях $\ell \geqslant p$.

Аналогичная трудность возникает в случае оценки $k_j \geqslant p$ степеней дифференцирования снизу, когда мы рассматриваем формальные дифференциальные операторы $\nabla = \sum\limits_{j \geqslant p} w_j(z) \cdot \partial^j$.

Отметим всё же, что в случае произвольных целых $p' \geqslant (N-1)/2$ выполнено равенство

$$[w_1\partial^{p'}, \ldots, w_N\partial^{p'}] = W^{0,1,\ldots,N-1}(w_1, \ldots, w_N) \cdot \partial^{Np' - N(N-1)/2}.$$

Рассматривая пары чисел $(N, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, можно сделать весьма занятные наблюдения. В частности, в [12] доказано такое утверждение: при $p = 1$ векторные поля $\mathrm{D}(M^n)$ на гладком n-мерном многообразии M^n замкнуты относительно N-местной скобки (24) и образуют N-алгебру, если $N = n^2 + 2n - 2$.

Из утверждения 5 следует теорема 8.

Теорема 8. *Пусть N чётно. Рассмотрим $\mathbb{C}[[z]]$-модуль*

$$W_{N/2} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\langle w(z)\partial^{N/2}\rangle$$

голоморфных операторов порядка $N/2$. Тогда скобка (24) *наделяет $W_{N/2}$ структурой N-алгебры Шлезингера—Сташефа.*

К счастью, трудности, возникающие в задаче явного описания координатной записи слагаемых в скобке (24), не препятствуют выявлению структуры N-алгебр Шлезингера—Сташефа на всём пространстве операторов (23). В самом деле, переформулировкой утверждения 5 является следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть N чётно, тогда дифференциальные операторы* (23) *произвольных порядков образуют N-алгебру Шлезингера—Сташефа со скобкой* (24).

2.2. Об определителях Вронского

Утверждение 10 ([11]). *Пусть k и l — натуральные числа, тогда верно тождество*

$$W^{0,1,\dots,k}[W^{0,1,\dots,l}] = 0.$$

Замечание 4. Произведя незначительную модификацию теоремы 8 и воспользовавшись утверждением 6, легко доказать утверждение 10 в случае, когда числа k и l чётные. Тем не менее в следующем разделе мы обобщим утверждение 10 на случай определителей Вронского $D^{\vec{\sigma}}$ от функций нескольких независимых переменных $x^1, \dots, x^n$. Доказательство утверждения 10 для произвольных натуральных k и l будет получено как частный случай при $n = 1$.

Из утверждения 10 следует теорема 11.

Теорема 11. *Пусть k и l — натуральные числа, тогда выполнено соотношение*

$$[\![W^{0,1,\dots,k}, W^{0,1,\dots,l}]\!]^{\mathrm{RN}} = 0.$$

Следствие 12. *Мы видим, что d_W-когомологии Хохшильда пространства вронскианов изоморфны ему самому: $H^*_{\mathrm{d}_W} = \mathrm{span}_{\Bbbk}\langle W^{0,\dots,l},\ l \geqslant 1\rangle$, поскольку задающий их дифференциал $\mathrm{d}_{W^{0,\dots,k}} = [\![W^{0,\dots,k}, \cdot]\!]^{\mathrm{RN}}$ тривиален.*

Приступим теперь к изучению обобщений алгебры Витта, заданной соотношениями $[a_i, a_j] = (j - i)a_{i+j}$. Принимая во внимание обсуждавшиеся выше свойства определителей Вронского, в случае $N = 2$ рассмотрим полиномиальные образующие $a_i = x^{i+1}$, где $x \in \Bbbk$ и $i \in \mathbb{Z}$. Общему случаю $N \geqslant 2$ вронскианов $W^{0,1,\dots,N-1}$ соответствуют соотношения

$$[a_{i_1}, \dots, a_{i_N}] = \Omega(i_1, \dots, i_N)a_{i_1+\dots+i_N}, \tag{26}$$

причём структурные константы $\Omega(i_1, \dots, i_N)$ с необходимостью кососимметричны по аргументам, а образующие алгебры таковы: $a_i = x^{i+N/2}$. Покажем, что функции Ω — это определители Вандермонда.

Теорема 13. *Пусть $\nu_1, \dots, \nu_N \in \Bbbk$ — некоторые константы. Положим $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$. Тогда имеет место равенство*

$$W^{0,1,\dots,N-1}(x^{\nu_1}, \dots, x^{\nu_N}) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} (\nu_j - \nu_i) \cdot x^{\nu - N(N-1)/2}, \tag{27}$$

т. е. определитель Вронского мономов вновь является мономом, а коэффициент в нём — определитель Вандермонда.

Доказательство. Рассмотрим определитель (27) $A = \det \|a_{ij}x^{\nu_j - i+1}\|$. Вынесем из j-го столбца моном $x^{\nu_j - N+1}$:

$$A = x^{\nu - N(N-1)} \cdot \det \|a_{ij}\, x^{N-i}\|.$$

Все строки станут однородными по x: все элементы i-й строки имеют степень $N-i$. Из i-й строки вынесем общий множитель x^{N-i}:

$$A = x^{\nu - N(N-1)/2} \cdot \det \|a_{ij}\|,$$

причём соотношения на коэффициенты a_{ij} таковы: при любом i в диапазоне $2 \leqslant i \leqslant N$ выполнены равенства

$$a_{1j} = 1 \quad \text{и} \quad a_{ij} = (\nu_j \underline{-\, i + 2}) \cdot a_{i-1,j} \quad \text{при} \quad 1 < i \leqslant N.$$

Подчёркнутое слагаемое не зависит от j, а потому при каждом $k = N, \ldots, 2$ определитель $\det \|a_{ij}\|$ распадается в сумму

$$\det \|a_{ij}\| = \det \|a'_{kj} = \nu_j \cdot a_{k-1,j};\ a'_{ij} = a_{ij},\ \text{если}\ i \neq k\| + \\ + \det \|a''_{kj} = (2-i) \cdot a_{k-1,j};\ a''_{ij} = a_{ij},\ \text{если}\ i \neq k\|,$$

в которой последний определитель равен 0.

Решая рекуррентное соотношение $a_{ij} = \nu_j \cdot a_{i-1,j}$, получаем

$$\det \|a_{ij}\| = \det \|\nu_j^{i-1}\| = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant N} (\nu_l - \nu_k).$$

Доказательство окончено. □

Замечание 5. Для вычисления структурных констант в (26) мы использовали базис $a'_i = x^i$, так что в результате степень монома отличалась от $\sum\limits_{k=1}^{N} \deg a'_k$. Константы, однако, получились правильные, так как определитель Вандермонда трансляционно инвариантен:

$$\Omega(i_1, \ldots, i_N) = \Omega\left(i_1 + \frac{N}{2}, \ldots, i_N + \frac{N}{2}\right).$$

Обсудим теперь поведение скобки (13) при заменах координат $y = y(x)$.

Теорема 14. *Пусть $\phi^i(y)$ — функции, т. е. скалярные поля веса 0, преобразуемые при заменах $y = y(x)$ по правилу $\phi^i(y) \mapsto \phi^i(y(x))$ (здесь $1 \leqslant i \leqslant N$). Имеет место равенство*

$$\det \left\| \frac{d^j \phi^i}{dx^j} \right\|_{\substack{i=1,\ldots,N \\ j=0,\ldots,N-1 \\ \phi^i = \phi^i(y(x))}} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} \det \left\| \frac{d^j \phi^i}{dy^j} \right\|_{\substack{\phi^i = \phi^i(y) \\ y = y(x)}}.$$

Таким образом, конформный вес $\Delta(N)$ определителя Вронского N скалярных полей ϕ^i веса 0 есть $\Delta(N) = N(N-1)/2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\phi^i(y(x))$ и подействуем на неё полной производной D_x^j, используя правило дифференцирования сложной функции. В результате получим

$$\frac{d^j \phi^i}{dy^j} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^j + \text{слагаемые, содержащие производные } \frac{d^{j'}}{dy^{j'}} \text{ порядков } j' < j.$$

Эти слагаемые с производными меньших порядков отличаются от старших членов в $D_x^{j'}\phi^i(y(x))$, $0 \leqslant j' < j$, множителями, общими при всех i. Следовательно, вклад этих слагаемых нулевой, так как всякий определитель с равными (или пропорциональными) строками равен 0. Из i-й строки определителя Вронского вынесем возведённую в степень $(i-1)$ производную dy/dx, общее количество таких множителей составит $N(N-1)/2$. Эта степень производной dy/dx функции перехода $y(x)$ перед определителем и есть конформный вес — по определению. □

Теперь мы можем заключить, что определитель Вронского N функций сам *не* является функцией (полем веса 0). Это и не удивительно: дело в том, что инвариантными являются голоморфные дифференциальные операторы высших порядков, а функции — их коэффициенты при разложении по базису $\langle \mathbf{1}, \partial, \ldots \rangle$.

Теорему 14 можно распространить на случай $n \geqslant 1$: $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$. Видно также, что её утверждение, вообще говоря, не обобщается на аналоги определителей Вронского $\partial^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \partial^{\sigma_N} \neq \mathrm{const} \cdot \mathbf{1} \wedge \partial \wedge \ldots \wedge \partial^{N-1}$.

2.3. Приложения в W-геометрии

Отметим весьма примечательное появление структуры алгебры Шлезингера—Сташефа дифференциальных операторов (23) в W-геометрии. Под A_ℓ-W-геометрией [13—15] мы понимаем геометрию комплексных кривых Σ, $\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma) = 1$, $\dim_{\bar{\mathbb{C}}}(\Sigma) = 1$, кирально вложенных в келерово многообразие $\mathbb{CP}^\ell$. Через $f^A(z)$ и $\bar{f}^{\bar{A}}(\bar{z})$ обозначим функции вложения, их индексы пробегают множества $0 \leqslant A \leqslant \ell$ и $0 \leqslant \bar{A} \leqslant \ell$. Известно, что условиями совместности этих вложений являются уравнения Тоды [7], ассоциированные с полупростыми алгебрами Ли серии A_ℓ.

Определение 4 ([14, § 3.2]). Инфинитезимальным *W-преобразованием* δ_W называется бесконечно малая замена функций вложения f^A, $\bar{f}^{\bar{A}}$, имеющая вид

$$\delta_W f^A(z) = \sum_{j=0}^{k} w_j(z) \partial^j f^A(z), \quad \delta_W \bar{f}^{\bar{A}}(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{k} \bar{w}_j(\bar{z}) \bar{\partial}^j \bar{f}^{\bar{A}}(\bar{z}), \tag{28}$$

где $w_j \in \mathbb{C}[[z]]$ и $\bar{w}_j \in \bar{\mathbb{C}}[[\bar{z}]]$ — соответственно голоморфные и антиголоморфные функции.

Итак, W-преобразование однозначно определено дифференциальным оператором $\sum\limits_j w_j(z) \cdot \partial^j \in \mathrm{Diff}_*(\mathbb{C})$. В терминах [13—15] из теоремы 9 мы получаем следствие 15.

Следствие 15. *W-преобразования образуют N-алгебру Шлезингера—Сташефа при любом натуральном N.*

3. Построение вронскианов функций многих переменных: $n \geqslant 1$

В данном разделе мы расширим определение вронскианов на случай многих независимых переменных $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Ниже мы предполагаем, что $\Bbbk = \mathbb{R}$. Рассуждения основаны на понятии пространства $J^k(n,1)$ k-струй [1] расслоения $\pi\colon \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ над базой — евклидовым пространством размерности $n \geqslant 1$. В качестве алгебры $\mathcal{A}$ выступает ассоциативная коммутативная алгебра $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ гладких функций.

Чтобы построить естественное обобщение определителей Вронского при $n \geqslant 1$, мы, во-первых, перейдём от алгебраической точки зрения к геометрической [1] и, во-вторых, сделаем полезное экспериментальное наблюдение.

Обозначим через $\mathcal{F}(\pi)$ алгебру гладких функций $C^\infty(J^\infty(\pi))$ и рассмотрим $\mathcal{F}(\pi)$-модуль $\varkappa(\pi)$ эволюционных дифференцирований $\mathrm{Э}_a = \sum\limits_{j,\sigma} D_\sigma(a^j) \cdot \partial/\partial u^j_\sigma$, в которых $a^j \in \mathcal{F}(\pi)$. Каждой картановской N-форме $\omega \in \mathcal{C}^N\Lambda(\pi)$ мы поставим в соответствие оператор $\nabla_\omega \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(N)}(\varkappa(\pi),\, \mathcal{F}(\pi))$ согласно правилу

$$\nabla_\omega(a_1,\ldots,a_N) = \mathrm{Э}_{a_N} \lrcorner\, (\ldots(\mathrm{Э}_{a_1} \lrcorner\, \omega)\ldots), \tag{29}$$

где $a_i \in \varkappa(\pi)$.

Утверждение 16 ([1, глава 5]). *Соответствие* (29) *есть изоморфизм $\mathcal{F}(\pi)$-модулей*

$$\mathcal{C}^N\Lambda(\pi) \simeq \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(N)}(\varkappa(\pi), \mathcal{F}(\pi)).$$

В дальнейшем мы будем использовать запись

$$\omega(\mathrm{Э}_{a_1},\ldots,\mathrm{Э}_{a_N}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Э}_{a_N} \lrcorner\, (\ldots(\mathrm{Э}_{a_1} \lrcorner\, \omega)\ldots),$$

если $\omega \in \mathcal{C}^N\Lambda(\pi)$ и $a_i \in \varkappa(\pi)$.

Замечание 6 ([5]). Рассмотрим пространство бесконечных струй $J^\infty(\pi)$ расслоения $\pi\colon \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть $x \in \mathbb{R}$ — независимая переменная, u — координата вдоль слоя расслоения π, D_x — полная производная по x, а $u^{(k)} \equiv D_x^k u$ — координаты в $J^\infty(\pi)$, соответствующие производным порядка $k \geqslant 0$. Через $d_{\mathcal{C}}$ мы обозначим картановский дифференциал, т. е. отображение $d_{\mathcal{C}}\colon C^\infty(J^\infty(\pi)) \to \mathcal{C}\Lambda(J^\infty(\pi))$, которое производной $u^{(k)}$ ставит в соответствие форму $du^{(k)} - D_x u^{(k)}\, dx$. В этом случае определители Вронского (13) допускают интерпретацию в терминах действия N-форм $d_{\mathcal{C}}u \wedge \ldots \wedge d_{\mathcal{C}}u^{(N-1)} \in \mathcal{C}\Lambda^*(J^{N-1}(\pi)) \subset \mathcal{C}\Lambda^*(J^\infty(\pi))$ на эволюционные векторные поля $\mathrm{Э}_{a_j} \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty} D_x^k(a_j)\, \partial/\partial u^{(k)}$:

$$[a_1,a_2] = d_{\mathcal{C}}u \wedge d_{\mathcal{C}}(u')(\mathrm{Э}_{a_1},\mathrm{Э}_{a_2}),$$
$$[a_1,a_2,a_3] = d_{\mathcal{C}}u \wedge d_{\mathcal{C}}(u') \wedge d_{\mathcal{C}}(u'')(\mathrm{Э}_{a_1},\mathrm{Э}_{a_2},\mathrm{Э}_{a_3}),\ldots$$

при любых $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$. Подчеркнём, что мы рассматриваем подмодуль $C^\infty(\mathbb{R}) \subset \varkappa(\pi)$, ограничиваясь функциями $a_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, заданными на базе расслоения π.

Замечание 7. Рассмотрим в качестве примера трёхместную скобку $\square_3 \in \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^3 C^\infty(\mathbb{R}^2), C^\infty(\mathbb{R}^2))$:

$$\square_3(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) = d_{\mathcal{C}} u \wedge d_{\mathcal{C}} u_x \wedge d_{\mathcal{C}} u_y(\mathcal{Э}_{a_1}, \mathcal{Э}_{a_2}, \mathcal{Э}_{a_3}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ D_x(a_1) & D_x(a_2) & D_x(a_3) \\ D_y(a_1) & D_y(a_2) & D_y(a_3) \end{vmatrix}.$$

Оказывается, что скобка $\square_3$ удовлетворяет 3-тождеству Якоби $\square_3[\square_3] = 0$ (см. уравнение (5)). Этот факт мы устанавливаем непосредственным вычислением, используя пакет Jet [20].

Утверждение 17 ([1]). *Размерность слоя $J^k(n,1)/\mathbb{R}^n$ пространства k-струй $J^k(n, 1)$ расслоения π такова*:

$$\dim J^k(n,1)/\mathbb{R}^n = \dim J^k(n,1) - n = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i-1}{n-1} = \binom{n+k}{n}. \tag{30}$$

В дальнейшем мы воспользуемся тем, что эта размерность $N \equiv \binom{n+k}{n}$ удовлетворяет неравенству

$$\dim J^{k_1+k_2}(n,1) - n - 1 \geqslant \dim J^{k_1}(n,1) + \dim J^{k_2}(n,1) - 2(n+1)$$

при любых k_1 и k_2. Мы вычитаем размерность $\dim J^0(n,1) = n+1$, поскольку нас будут интересовать лишь нетривиальные мультииндексы σ с $|\sigma| > 0$.

Итак, выберем некоторые положительные целые n и k. Тогда $N = \binom{n+k}{n}$ есть размерность $\dim(J^k(n,1)/\mathbb{R}^n)$. Пусть $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — алгебра гладких функций на базе и $a_j \in \mathcal{A}$, где $1 \leqslant j \leqslant N$. Определим N-линейную кососимметричную скобку $\square \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^N \mathcal{A}, \mathcal{A})$ следующим образом:

$$\square(a_1, \ldots, a_N) = \bigwedge_{l=0}^{k} \Big(\bigwedge_{|\sigma|=l} d_{\mathcal{C}} \cdot D_\sigma u \Big)(\mathcal{Э}_{a_1}, \ldots, \mathcal{Э}_{a_N}). \tag{31}$$

Покажем, что N-линейная кососимметричная скобка $\square \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^N \mathcal{A}, \mathcal{A})$, определённая формулой (31), удовлетворяет N-тождеству Якоби

$$\square_N[\square_N] = 0. \tag{32}$$

Для этого мы воспользуемся существенно более общим фактом.

Теорема 18. *Пусть $N_{\text{in}} = \binom{n+k_{\text{in}}}{n}$ и $N_{\text{out}} = \binom{n+k_{\text{out}}}{n}$ — это размерности, найденные по формуле* (30) *для некоторых натуральных чисел k_{in} и k_{out}. Через $\square_{\text{in}}$ и $\square_{\text{out}}$ обозначим полилинейные кососимметричные скобки, определённые в* (31). *Тогда верно тождество*

$$\square_{\text{out}}[\square_{\text{in}}] = 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $k_{\text{in}} \geqslant k_{\text{out}}$, в противном случае в формуле (33) следует поменять индексы in и out.

В отличие от раздела 2.2, рассматриваемые теперь операторы $D^{\vec{\sigma}} = D_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge D_{\sigma_N}$ имеют более сложную природу: при каждом j, лежащем в диапазоне $1 \leqslant j \leqslant N = \binom{n+k}{n}$, соответствующий показатель σ_j является мультииндексом $(\sharp x^1, \ldots, \sharp x^n) \in \mathbb{Z}_+^n$, указывающим число дифференцирований $\sharp x^\alpha$ по переменной x^α. Определим для таких операторов норму $|D^{\vec{\sigma}}| = |\vec{\sigma}| = \sum\limits_{j=1}^{N} |\sigma_j|$. Из определения следует, что $|\square_{\text{out}}[\square_{\text{in}}]| = |\square_{\text{in}}| + |\square_{\text{out}}|$.

Заметим теперь, что из всех отличных от нуля $(N_{\text{in}}+N_{\text{out}}-1)$-линейных кососимметричных операторов из пространства $\operatorname{Hom}(\bigwedge^{N_{\text{in}}+N_{\text{out}}-1} \mathcal{A}, \mathcal{A})$ минимальную норму имеет оператор $\square_{\min}$ вида

$$\square_{\min} = \square_{\text{in}} \wedge \Biggl(\sum_{\bar{\jmath} \in \Lambda^{N_{\text{out}}-1}(J^{k_{\text{in}}+k_{\text{out}}}(n,1)/J^{k_{\text{in}}}(n,1))} \operatorname{const}(\bar{\jmath}) \cdot D^{\sigma_{\bar{\jmath}}} \Biggr), \qquad (33)$$

где $\operatorname{const}(\bar{\jmath}) \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные коэффициенты.

Покажем, что $|\square_{\min}| > |\square_{\text{in}} + \square_{\text{out}}|$, а потому $\square_{\text{out}}[\square_{\text{in}}] = 0$. В самом деле, рассмотрим правую часть (33) и воспользуемся тем, что $|\Delta \wedge \nabla| = |\Delta| + |\nabla|$ (определение внешнего умножения $\wedge$ операторов было дано на с. 162). Соответствующее $\square_{\text{out}}$ множество, содержащее N_{out} различных дифференцирований, допускает каноническое разложение

$$\square_{\text{out}} = D^{\vec{\tau}^{\,\text{out}}} = \mathbf{1} \wedge \underbrace{D_{\tau_2^{\text{out}}} \wedge \ldots \wedge D_{\tau_{N_{\text{out}}}^{\text{out}}}}_{N_{\text{out}}-1 \text{ множителей}},$$

где $\vec{\tau}^{\,\text{out}}$ содержит все возникающие в пространстве $J^{k_{\text{out}}}(n,1)$ мультииндексы. Легко видеть, что подчёркнутые в предыдущей формуле множители находятся во взаимно-однозначном соответствии с $N_{\text{out}}-1$ различными дифференцированиями, входящими в каждое из слагаемых второго сомножителя в (33), — просто в силу равного количества этих дифференцирований. Одновременно с этим

$$1 \leqslant |D_{\tau_i^{\text{out}}}| = |\tau_i^{\text{out}}| \leqslant k_{\text{out}} < k_{\text{in}} + 1 \leqslant |\sigma_{\bar{\jmath},i}| = |D^{\sigma_{\bar{\jmath},i}}| \leqslant k_{\text{in}} + k_{\text{out}} \quad \forall i \neq 1 \quad \forall \bar{\jmath}.$$

Действительно, если мультииндекс $\sigma_{\bar{\jmath},i}$ соответствует координате $u_{\sigma_{\bar{\jmath},i}}$ на той части $J^{k_{\text{in}}+k_{\text{out}}}(n,1)/J^{k_{\text{in}}}(n,1)$ линейного пространства струй, которая содержит лишь производные высоких порядков, то $\sigma_{\bar{\jmath},i}$ *длиннее* любого из мультииндексов τ_i^{out}, задающих координаты $u_{\tau_i^{\text{out}}}$ на $J^{k_{\text{out}}}(n,1)$. Следовательно, норма второго сомножителя в формуле (33) строго больше, чем $|\square_{\text{out}}|$, и потому выражение $\square_{\text{out}}[\square_{\text{in}}]$ тождественно равно 0, что и требовалось. $\square$

Замечание 8. Поскольку чётность числа $N = \binom{n+k}{n}$ аргументов скобки (31) может быть произвольной, утверждение теоремы 18 сильнее, чем формулировка утверждения 5 для ассоциативных алгебр. Отметим также, что в частном случае $n = 1$ и чётных N мы доказали утверждение 10, как было указано в замечании 4.

Приведём пример 3-алгебры Шлезингера—Сташефа полиномов от двух переменных.

Пример 4. Пространство полиномов $\mathrm{span}_{\Bbbk}\langle 1, x, y, xy\rangle \subset \Bbbk_2[x, y]$, наделённое трёхместной скобкой $\mathbf{1} \wedge D_x \wedge D_y$, приобретает структуру 3-алгебры Шлезингера—Сташефа. Коммутационные соотношения в этой алгебре

$$[1, x, y] = 1, \quad [1, x, xy] = x, \quad [1, y, xy] = -y, \quad [x, y, xy] = -xy$$

несколько отличны от рассмотренных в примере 3 для алгебры $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$: при коммутировании генераторы x и y смешиваются.

В данной работе мы произвели серию расширений области определения N-местной скобки $W^{0,1,\ldots,N-1}$, рассматривая последовательно цепочку $\Bbbk$-алгебр

$$\Bbbk_N[x] \hookrightarrow \Bbbk[[x]] \hookrightarrow \left[\begin{array}{c} \Bbbk[[x^1, \ldots, x^n]] \\ \Big\{\sum\limits_{\alpha} c_\alpha \cdot x^\alpha \ \Big|\ \alpha \in \Bbbk,\ c_\alpha \in \Bbbk\Big\}. \end{array}\right.$$

Множества показателей степеней в них соответственно конечные, счётные, счётные по каждой из n переменных и, наконец, непрерывные при каждом допустимом N.

Подчеркнём, что определение ∂_Δ-когомологий Кошуля не зависит от числа дифференцирований $\partial_i\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$, и поэтому все когомологические конструкции сохраняются при $n \geqslant 1$ для построенных выше определителей Вронского (31) без изменений. Таким образом, дальнейший анализ построенных структур может носить чисто алгебраический характер, без обращения к геометрии пространства струй. Упомянем ещё о существовании такого механизма, порождающего структуры ассоциативных алгебр, как уравнение Янга—Бакстера [17].

В заключение мы выражаем надежду на то, что рассмотренные в статье математические конструкции найдут нетривиальные приложения в моделях математической физики.

Автор благодарен А. М. Вербовецкому и А. В. Овчинникову за многочисленные обсуждения и советы, а также А. А. Белавину, В. Г. Кацу, Б. Г. Конопельченко, А. К. Погребкову и Б. Л. Фейгину за полезные замечания.

Литература

[1] Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. и др. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А. М. Виноградов и И. С. Красильщик. — М.: Факториал, 1997. — 464 с.

[2] Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности // Функцион. анализ и его прил. — 1968. — Т. 2, № 4. — С. 92—93.

[3] Джумадильдаев А. С. Целочисленные и mod p-когомологии алгебры Ли W_1 // Функцион. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 3. — С. 226—228.

[4] Касымов Ш. М. Сопряжённость подалгебр Картана в n-лиевых алгебрах // Докл. РАН. — 1996. — Т. 345, № 1. — С. 15—18.

[5] Киселёв А. В. О $(3,1,0)$-алгебре Ли гладких функций // Труды XXIII Конференции молодых учёных. Механико-математический ф-т МГУ им. М. В. Ломоносова. Москва, 9—14 апреля 2001 г. — М., 2001. — С. 157—158.

[6] Киселёв А. В. Об n-арных обобщениях алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ // Труды XXIV Конференции молодых учёных. Механико-математический ф-т МГУ им. М. В. Ломоносова. Москва, 8—13 апреля 2002 г. — М., 2002. — С. 78—81.

[7] Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1985. — 278 с.

[8] Филиппов В. Т. О лиевых n-алгебрах // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 24. — С. 126—140.

[9] De Azcárraga J. A., Perelomov A. M., Pérez Bueno J. C. The Schouten—Nijenhuis bracket, cohomology, and generalized Poisson structure // J. Phys. A: Math. Gen. — 1996. — Vol. 29. — P. 7993—8009.

[10] Barnich G., Fulp R., Lada T., Stasheff J. The sh Lie structure of Poisson brackets in field theory // Comm. Math. Phys. — 1998. — Vol. 191. — P. 585—601.

[11] Dzhumadil'daev A. S. Wronskians as n-Lie multiplications. — Preprint `arXiv: math.RA/0202043`, 5 Feb 2002.

[12] Dzhumadil'daev A. S. N-commutators of vector fields. — Preprint `arXiv: math.RA/0203036`, 18 Mar 2002.

[13] Gervais J.-L., Matsuo Y. W-geometries // Phys. Lett. — 1992. — Vol. B274. — P. 309—316.

[14] Gervais J.-L., Matsuo Y. Classical A_n-W-geometries // Comm. Math. Phys. — 1993. — Vol. 152. — P. 317—368.

[15] Gervais J.-L., Saveliev M. V. W-geometry of the Toda systems associated with non-exceptional Lie algebras // Comm. Math. Phys. — 1996. — Vol. 180, no. 2. — P. 265—296.

[16] Hanlon P., Wachs M. L. On Lie k-algebras // Adv. in Math. — 1995. — Vol. 113. — P. 206—236.

[17] Kassel Ch. Quantum Groups. — Springer, 1995.

[18] Kersten P., Krasil'shchik I., Verbovetsky A. Hamiltonian operators and ℓ^*-coverings. — Diffiety Institute. Preprint DIPS-06/2002. `diffiety.ac.ru`. — 25 p.

[19] Lada T., Stasheff J. D. Introduction to SH Lie algebras for physicists // Int. J. Theor. Phys. — 1993. — Vol. 32. — P. 1087—1103.

[20] Marvan M. Jet. A software for diferential calculus on jet spaces and diffieties, ver. 3.9 (August 1997) for Maple V Release 4. — `diffiety.ac.ru`.

[21] Michor P., Vinogradov A. M. n-ary Lie and associative algebras // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. — 1996. — Vol. 53, no. 4. — P. 373—392.

[22] Nambu Y. Generalized Hamiltonian dynamics // Phys. Rev. D. — 1973. — Vol. 7. — P. 2405—2412.

[23] Sahoo D., Valsakumar M. C. Nambu mechanics and its quantization // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 46. — P. 4410—4412.

[24] Schlessinger M., Stasheff J. D. The Lie algebra structure of tangent cohomology and deformation theory // J. Pure Appl. Algebra. — 1985. — Vol. 38. — P. 313—322.

[25] Takhtajan L. On foundations of generalized Nambu mechanics // Comm. Math. Phys. — 1994. — Vol. 160. — P. 295—315.

[26] Vinogradov A., Vinogradov M. On multiple generalizations of Lie algebras and Poisson manifolds // Contemp. Math. — 1998. — Vol. 219. — P. 273—287.