О решении систем Тоды, ассоциированных с простыми алгебрами Ли

А. В. ОВЧИННИКОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: aovch@math243.phys.msu.ru

УДК 512.81+517.95

Ключевые слова: система Тоды, киральное поле, модель Весса—Зумино, алгебра Ли, задача Гурса.

Аннотация

Описана гамильтонова редукция модели Весса—Зумино к системе Тоды, ассоциированной с полупростой алгеброй Ли, и предложен метод построения точного решения системы Тоды, основанный на этой редукции.

Abstract

A. V. Ovchinnikov, On the solution of Toda systems associated with simple Lie algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 181—193.

We describe the Hamiltonian reduction of the Wess—Zumino model to the Toda system associated with a semisimple Lie algebra and propose a method for the construction of the exact solution of the Toda system based on this reduction.

1. Гамильтонова редукция модели Весса—Зумино к системе Тоды

1.1. Определение модели

Модель Весса—Зумино [4—7] является модификацией обычной модели кирального поля. Термин «киральное поле» используется в современной литературе для функций $g(x,t)$ на пространстве-времени со значениями в нелинейном многообразии M (см. [3]). Фактически такие поля появляются в случае, когда M является однородным пространством компактной группы Ли G. Более того, будем считать, что $M = G$ (главное киральное поле).

Рассмотрим так называемые токи поля $g(x,t)$:

$$l_\mu = g^{-1}\partial_\mu g.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 181—193.

Эти величины принадлежат алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Определим функционал действия следующим образом:

$$S_0(g) = -\frac{k}{8\pi}\int dx\,dt\,\eta^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}(l_\mu l_\nu),$$

где $\eta^{\mu\nu}$ — метрика Минковского. Действие $S_0(g)$ имеет простое геометрическое происхождение. При отображении $g(x,t)$ форма Маурера—Картана $\theta = g^{-1}dg$ имеет прообразом 1-форму Θ со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$: $\Theta = l_\mu dx^\mu$. Локальное скалярное произведение таких форм задаётся формой Киллинга tr, а интеграл представляет собой скалярное произведение 1-форм по отношению к метрике Минковского на $\mathbb{R}^2$.

На компактных группах Ли существует ещё один двусторонне ad-инвариантный функционал $W(g)$, не зависящий от метрики пространства-времени. Рассмотрим на G 3-форму $\Omega = \mathrm{tr}\,\theta\wedge\theta\wedge\theta$, где $\theta = g^{-1}dg$ — форма Маурера—Картана. Форма Ω двусторонне инвариантна и замкнута ($d\Omega = 0$), но не точна. Существование такой формы Ω означает, что для компактных групп Ли G группа когомологий $H^3(G,\mathbb{R}^3)$ нетривиальна.

Пусть $g(x,t)$ — главное киральное поле, т. е. отображение $g\colon \mathbb{R}^2 \to G$. Будем считать, что его можно компактифицировать, т. е. продолжить до отображения $\mathbb{S}^2 \to G$, задав тем самым на G 2-цикл γ. Покроем этот цикл односвязной картой на G, рассмотрим в ней локальную первообразную $\omega = d^{-1}\Omega$ формы Ω и положим

$$W(g) = \int\limits_\gamma \omega.$$

По построению функционал $W(g)$ многозначен, так как ω не продолжается до 2-формы на G, однако его вариация однозначна.

Натянем на 2-цикл γ плёнку B_γ (это возможно, поскольку гомотопическая группа $\pi_2(G)$ тривиальна). По формуле Стокса

$$W(g) = \int\limits_{B_\gamma} \Omega.$$

Рассмотрим теперь функционал действия

$$S(g) = S_0(g) + \alpha W(g).$$

При выборе константы $\alpha = -2/3$ получаем действие Весса—Зумино

$$S(g) = -\frac{k}{8\pi}\int d^2\xi\,\eta^{\mu\nu}\,\mathrm{tr}\big[(g^{-1}\partial_\mu g)(g^{-1}\partial_\nu g)\big] + \frac{k}{12\pi}\int\limits_{B^3}\mathrm{tr}\Big[\big(g^{-1}dg\big)^3\Big].$$

Уравнения поля для этой модели имеют вид

$$\bar\partial J = 0, \quad \partial \bar J = 0,$$

где ∂, $\bar\partial$ — операторы дифференцирования по $z = t + x$, $\bar z = t - x$, а

$$J = \partial g\cdot g^{-1}, \quad \bar J = g^{-1}\bar\partial g.$$

Сохраняющиеся нётеровы токи, ассоциированные с произвольным элементом $\lambda \in \mathfrak{g}$, даются выражениями

$$J(\lambda) = \mathrm{tr}(\lambda J), \quad \bar{J}(\lambda) = \mathrm{tr}(\lambda \bar{J}).$$

1.2. Редукция модели Весса—Зумино к системе Тоды

В [7] было показано, что уравнения движения модели Весса—Зумино сводятся к системе Тоды при наложении связей вида

$$\begin{aligned} &J(E_i) = \mu^i, \;\; \bar{J}(F_i) = \nu^i, \quad i = 1, \ldots, r, \\ &J(E_\beta) = 0, \quad \bar{J}(F_\beta) = 0, \quad \beta \in \Phi^+ \setminus \Delta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где E_i, F_i — образующие Шевалле, Δ — множество простых корней, Φ^+ — множество положительных корней, r — ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Если рассмотреть гауссово разложение $g = ABC$ функции $g(x,t)$, где

$$A = \exp\biggl(\sum_{\beta\in\Phi^+} a^\beta E_\beta\biggr), \quad B = \exp\biggl(\sum_{\alpha\in\Delta} \varphi^\alpha H_\alpha\biggr), \quad C = \exp\biggl(\sum_{\beta\in\Phi^+} c^\beta F_\beta\biggr)$$

(здесь H_α — базис картановской подалгебры алгебры Ли), то указанные связи примут вид

$$\begin{aligned} A^{-1}\bar{\partial}A &= \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i|^2 \nu_i E_i \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij}\varphi_j\biggr), \\ \partial C \cdot C^{-1} &= \sum_{i=1}^{r} |\alpha_i|^2 \nu_i E_i \exp\biggl(\sum_{j=1}^{r} k_{ij}\varphi_j\biggr). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Подставляя последние соотношения в уравнения поля Весса—Зумино, получаем уравнение движения системы Тоды.

Тот факт, что ток J ($\bar{J}$) является киральным, т. е. зависит только от переменной z (соответственно $\bar{z}$), позволяет найти калибровочно инвариантные величины, полиномиальные по компонентам этого тока. Вычисление скобок Пуассона этих величин показывает, что они образуют алгебру симметрии (вообще говоря, не являющуюся алгеброй Ли, но имеющую квадратичные соотношения) редуцированной модели Весса—Зумино, т. е. системы Тоды.

2. Решение задачи Гурса для систем Тоды, ассоциированных с алгебрами Ли A_1 и A_2

В этом разделе мы получим решение задачи Гурса для систем Тоды, ассоциированных с алгебрами Ли A_1 и A_2, на основе редукции соответствующей модели Весса—Зумино к этой системе Тоды.

Процесс построения решения складывается из следующих основных этапов:

1) разложение общего решения модели Весса—Зумино в гауссово произведение;
2) наложение связей на матричные элементы сомножителей гауссова произведения;
3) исключение подчинённых связям переменных и запись окончательного решения.

2.1. Решение задачи Гурса для уравнения Лиувилля

Уравнение Лиувилля

$$\partial\bar{\partial}\varphi = e^{2\varphi}$$

представляет собой простейшую систему Тоды, ассоциированную с алгеброй Ли A_1 (т. е. $\mathfrak{sl}(2)$).

Общее решение модели Весса—Зумино хорошо известно:

$$\tilde{g}(z, \bar{z}) = g(z) \cdot \bar{g}(\bar{z}), \tag{2.1}$$

где $g(z)$, $\bar{g}(\bar{z})$ — произвольные функции от z, $\bar{z}$ со значениями в группе G, подчинённые лишь граничным условиям. Каждую из матриц g, $\bar{g}$ представим в виде разложения Гаусса:

$$g(z) = A(z)B(z)C(z), \quad \bar{g}(\bar{z}) = \bar{A}(\bar{z})\bar{B}(\bar{z})\bar{C}(\bar{z}),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b(z) & 0 \\ 0 & \frac{1}{b(z)} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c(z) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{a}(\bar{z}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}(\bar{z}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{b}(\bar{z})} \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{c}(\bar{z}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём гауссово разложение для матрицы $\tilde{g}$:

$$\tilde{g} = \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} = A\underline{BC\bar{A}\bar{B}}\bar{C}. \tag{2.2}$$

Вычислим подчёркнутое произведение:

$$BC\bar{A}\bar{B} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\bar{b} & \frac{\bar{a}b}{\bar{b}} \\ \frac{\bar{b}c}{b} & \frac{\bar{a}c+1}{b\bar{b}} \end{pmatrix}.$$

Разложение Гаусса для произвольной матрицы

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2)$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \frac{1}{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q + \frac{PR}{Q} & \frac{P}{Q} \\ \frac{R}{Q} & \frac{1}{Q} \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} b\bar{b} & \frac{\bar{a}b}{\bar{b}} \\ \frac{\bar{b}c}{b} & \frac{\bar{a}c+1}{b\bar{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\bar{a}b^2}{\bar{a}c+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b\bar{b}}{\bar{a}c+1} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{a}c+1}{b\bar{b}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c\bar{b}^2}{\bar{a}c+1} & 1 \end{pmatrix} = A^* B C^*.$$

Разложение для матрицы $\tilde{g}$ имеет вид

$$\tilde{g} = AA^* BC^* \bar{C} = \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C},$$

где

$$\tilde{A} = AA^* = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\bar{a}b^2}{\bar{a}c+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + \frac{\bar{a}b^2}{\bar{a}c+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{b\bar{b}}{\bar{a}c+1} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{a}c+1}{b\bar{b}} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = C^* \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c\bar{b}^2}{\bar{a}c+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{c} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{c} + \frac{c\bar{b}^2}{\bar{a}c+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим

$$x = a + \frac{\bar{a}b^2}{\bar{a}c+1}, \quad y = \bar{c} + \frac{c\bar{b}^2}{\bar{a}c+1}, \quad e^{\varphi} = \frac{b\bar{b}}{\bar{a}c+1}.$$

Связи (1.2), принимающие теперь вид

$$\partial y = \frac{\partial c \cdot \bar{b}^2}{(\bar{a}c+1)^2} = \mu \frac{b^2\bar{b}^2}{(\bar{a}c+1)^2}, \quad \bar{\partial} x = \frac{\bar{\partial}\bar{a} \cdot b^2}{(\bar{a}c+1)^2} = \mu \frac{b^2\bar{b}^2}{(\bar{a}c+1)^2},$$

дают следующие соотношения между матричными элементами:

$$\partial c = \mu b^2, \quad \bar{\partial}\bar{a} = \nu \bar{b}^2.$$

Таким образом, находим, что

$$e^{2\varphi} = \frac{b^2\bar{b}^2}{(\bar{a}c+1)^2} = \frac{\bar{\partial}\bar{a} \cdot \partial c}{\mu\nu(\bar{a}c+1)^2}, \tag{2.4}$$

где $\bar{a}(\bar{z})$, $c(z)$ — произвольные функции. Эта формула представляет общее решение уравнения Лиувилля. При рассмотрении задачи Гурса для уравнения Лиувилля функции $\bar{a}(\bar{z})$, $c(z)$ могут быть определены из данных на характеристиках.

2.2. Решение задачи Гурса для системы Тоды, ассоциированной с алгеброй Ли A_2

Применим рассмотренный метод к построению решения задачи Гурса для системы Тоды, ассоциированной с простой алгеброй Ли типа A_2 (т. е. $\mathfrak{sl}(3)$). Эта система имеет вид

$$\partial\bar{\partial}\varphi_1 = e^{2\varphi_1 - \varphi_2}, \quad \partial\bar{\partial}\varphi_2 = e^{-\varphi_1 + 2\varphi_2}. \tag{2.5}$$

Как уже упоминалось, общее решение $\tilde g(z,\bar z)$ модели Весса—Зумино имеет вид

$$\tilde g(z,\bar z)=g(z)\,\bar g(\bar z),$$

где $g(x)$, $\bar g(\bar z)$ — произвольные гладкие функции переменных z, $\bar z$ соответственно со значениями в группе Ли G. Мы рассматриваем случай $G=\mathrm{SL}(3)$, при этом $\mathfrak g=\operatorname{Lie}G=\mathfrak{sl}(3)$.

Как и в пункте 2.1, представим каждую из матриц $g(z)$, $\bar g(\bar z)$ в виде гауссова произведения:

$$g(z)=A(z)B(z)C(z),\quad \bar g(z)=\bar A(\bar z)\bar B(\bar z)\bar C(\bar z), \tag{2.6}$$

где

$$A(z)=\exp\biggl(\sum_{\varphi\in\Phi^+}a^\alpha(z)E_\alpha\biggr),$$

$$B(z)=\exp\biggl(\frac12\sum_{\alpha\in\Delta^+}b^\alpha(z)H_\alpha\biggr),\quad C(z)=\exp\biggl(\sum_{\varphi\in\Phi^+}c^\alpha(z)E_{-\alpha}\biggr),$$

и аналогично для $\bar A(\bar z)$, $\bar B(\bar z)$, $\bar C(\bar z)$. Мы будем использовать следующие обозначения для матричных элементов:

$$A(z)=\begin{pmatrix}1&a(z)&c(z)\\0&1&b(z)\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad \bar A(\bar z)=\begin{pmatrix}1&\bar a(\bar z)&\bar c(\bar z)\\0&1&\bar b(\bar z)\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$B(z)=\begin{pmatrix}\sigma(z)&0&0\\0&\frac{\sigma(z)}{\tau(z)}&0\\0&0&\frac{1}{\tau(z)}\end{pmatrix},\quad \bar B(\bar z)=\begin{pmatrix}\bar\sigma(\bar z)&0&0\\0&\frac{\bar\tau(\bar z)}{\bar\sigma(\bar z)}&0\\0&0&\frac{1}{\bar\tau(\bar z)}\end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

$$C(z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\p(z)&1&0\\r(z)&q(z)&1\end{pmatrix},\qquad \bar C(\bar z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\\bar p(\bar z)&1&0\\\bar r(\bar z)&\bar q(\bar z)&1\end{pmatrix}.$$

В дальнейшем аргументы z, $\bar z$ функций одной переменной будем опускать, а производные по аргументу обозначать штрихами: так, мы пишем $\bar\sigma$ вместо $\bar\sigma(\bar z)$, τ вместо $\tau(z)$, $\bar a'$ вместо $\bar\partial\bar a(\bar z)$ и т. д.

Из (2.6), (2.7) находим, что

$$\tilde g(z,\bar z)=g\bar g=ABC\bar A\bar B\bar C=\tilde A(z,\bar z)\tilde B(z,\bar z)\tilde C(z,\bar z).$$

Обозначим $D(z,\bar z)=BC\bar A\bar B$. Эта матрица допускает гауссово разложение

$$D(z,\bar z)=A^*(z,\bar z)B^*(z,\bar z)C^*(z,\bar z).$$

В этом случае

$$\tilde g=\tilde A\tilde B\tilde C=AA^*B^*C^*\bar C, \tag{2.8}$$

так что

$$\tilde A=AA^*,\quad \tilde B=B^*,\quad \tilde C=C^*\bar C.$$

2.2.1. Вычисление матричных элементов матриц $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$

Согласно определению матрицы D имеем

$$D = BC\bar{A}\bar{B} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ r & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{c} \\ 0 & 1 & \bar{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\tau}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ p\frac{\tau}{\sigma} & \frac{\tau}{\sigma} & 0 \\ r\frac{1}{\tau} & q\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & \bar{a}\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} & \bar{c}\frac{1}{\bar{\tau}} \\ 0 & \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} & \bar{b}\frac{1}{\bar{\tau}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\bar{\tau}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\bar{\sigma} & \sigma\bar{a}\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} & \sigma\bar{c}\frac{1}{\bar{\tau}} \\ p\frac{\tau}{\sigma}\bar{\sigma} & \frac{\tau\bar{\tau}}{\sigma\bar{\sigma}}(p\bar{a}+1) & \frac{\tau}{\sigma}\frac{1}{\bar{\tau}}(p\bar{c}+\bar{b}) \\ r\frac{1}{\tau}\bar{\sigma} & \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}\frac{1}{\tau}(r\bar{a}+q) & \frac{1}{\tau\bar{\tau}}(r\bar{c}+q\bar{b}+1) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма. *Гауссово разложение*

$$M = \begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \\ V & W & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ r & q & 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

матрицы $M \in \mathrm{SL}(3)$ *вычисляется по следующим формулам*:

$$\begin{aligned} &\sigma = \frac{1}{TZ-UV}, \qquad \tau = \frac{1}{Z}, \qquad a = \frac{QZ-RW}{TZ-UV}, \qquad b = \frac{U}{Z}, \\ &c = \frac{R}{Z}, \qquad p = \frac{SZ-UV}{TZ-UV}, \qquad q = \frac{W}{Z}, \qquad r = \frac{V}{Z}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Доказательство состоит в непосредственном перемножении матриц в правой части (2.10) и выражении их элементов через элементы исходной матрицы. Имеем

$$\begin{pmatrix} P & Q & R \\ S & T & U \\ V & W & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\tau}{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ r & q & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma & a\frac{\tau}{\sigma} & c\frac{1}{\tau} \\ 0 & \frac{\tau}{\sigma} & b\frac{1}{\tau} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ r & q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma + pa\frac{\tau}{\sigma} + cr\frac{1}{\tau} & a\frac{\tau}{\sigma} + cq\frac{1}{\tau} & c\frac{1}{\tau} \\ p\frac{\tau}{\sigma} + br\frac{1}{\tau} & \frac{\tau}{\sigma} + qb\frac{1}{\tau} & b\frac{1}{\tau} \\ r\frac{1}{\tau} & q\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &P = \sigma + pa\frac{\tau}{\sigma} + cr\frac{1}{\tau}, \qquad R = c\frac{1}{\tau}, \qquad U = b\frac{1}{\tau}, \\ &Q = a\frac{\tau}{\sigma} + cq\frac{1}{\tau}, \qquad V = r\frac{1}{\tau}, \qquad S = p\frac{\tau}{\sigma} + br\frac{1}{\tau}, \\ &W = q\frac{1}{\tau}, \qquad T = \frac{\tau}{\sigma} + qb\frac{1}{\tau}, \qquad Z = \frac{1}{\tau}, \end{aligned}$$

из которой вытекают формулы (2.11).

Сомножители A^*, B^*, C^* гауссова разложения матрицы D, согласно формулам (2.11), имеют следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned}
&\sigma^* = \frac{\sigma\bar{\sigma}}{1 + p\bar{a} + (pq - r)(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})}, && \tau^* = \frac{\tau\bar{\tau}}{1 + r\bar{c} + q\bar{b}}, \\
&a^* = \frac{\sigma^2}{\tau}\frac{\bar{a} + q(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})}{1 + p\bar{a} + (pq - r)(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})}, && p^* = \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\tau}}\frac{p + \bar{b}(pq - r)}{1 + p\bar{a} + (pq - r)(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})}, \\
&b^* = \frac{\tau^2}{\sigma}\frac{p\bar{c} + \bar{b}}{1 + r\bar{c} + q\bar{b}}, && q^* = \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}\frac{q + \bar{a}r}{1 + r\bar{c} + q\bar{b}}, \\
&c^* = \sigma\tau\frac{\bar{c}}{1 + r\bar{c} + q\bar{b}}, && r^* = \bar{\sigma}\bar{\tau}\frac{r}{1 + r\bar{c} + q\bar{b}}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Удобно симметризовать запись знаменателей, положив $\pi = pq - r$, $\bar{\alpha} = \bar{a}\bar{b} - \bar{c}$, откуда $r = pq - \pi$, $\bar{c} = \bar{a}\bar{b} - \bar{\alpha}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
&\sigma^* = \frac{\sigma\bar{\sigma}}{1 + p\bar{a} + \pi(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})}, && \tau^* = \frac{\tau\bar{\tau}}{1 + (pq - \pi)\bar{c} + q\bar{b}}, \\
&a^* = \frac{\sigma^2}{\tau}\frac{\bar{a} + q(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})}{1 + p\bar{a} + \pi(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})}, && p^* = \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\tau}}\frac{p + \bar{b}(pq - r)}{1 + p\bar{a} + (pq - r)\bar{\alpha}}, \\
&b^* = \frac{\tau^2}{\sigma}\frac{p\bar{c} + \bar{b}}{1 + (pq - \pi)\bar{c} + q\bar{b}}, && q^* = \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}\frac{q + \bar{a}r}{1 + r(\bar{a}\bar{b} - \bar{\alpha}) + q\bar{b}}, \\
&c^* = \sigma\tau\frac{\bar{c}}{1 + (pq - \pi)\bar{c} + q\bar{b}}, && r^* = \bar{\sigma}\bar{\tau}\frac{r}{1 + r(\bar{a}\bar{b} - \bar{\alpha}) + q\bar{b}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Введём также обозначения

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= 1 + p\bar{a} + (pq - r)(\bar{a}\bar{b} - \bar{c}) \equiv 1 + p\bar{a} + \pi(\bar{a}\bar{b} - \bar{c}) \equiv 1 + p\bar{a} + (pq - r)\bar{\alpha}, \\
\mathrm{II} &= 1 + r\bar{c} + q\bar{b} \equiv 1 + (pq - \pi)\bar{c} + q\bar{b} \equiv 1 + r(\bar{a}\bar{b} - \bar{\alpha}) + q\bar{b}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.2.2. Наложение связей на модель Весса—Зумино

Запишем соотношения связей (1.2) для матричных элементов сомножителей $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ гауссова разложения (2.8) решения модели Весса—Зумино. Поскольку для матриц

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{c} \\ 0 & 1 & \tilde{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tilde{p} & 1 & 0 \\ \tilde{r} & \tilde{q} & 1 \end{pmatrix}$$

обратные матрицы $\tilde{A}^{-1}$, $\tilde{C}^{-1}$ имеют вид

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{a} & \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{c} \\ 0 & 1 & -\tilde{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{p} & 1 & 0 \\ \tilde{p}\tilde{q} - \tilde{r} & -\tilde{q} & 1 \end{pmatrix},$$

находим

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{-1}\partial\tilde{A} &= \begin{pmatrix}1 & -\tilde{a} & \tilde{a}\tilde{b}-\tilde{c}\\ 0 & 1 & -\tilde{b}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \tilde{a}' & \tilde{c}'\\ 0 & 0 & \tilde{b}'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \tilde{a}' & \tilde{c}'-\tilde{a}\tilde{b}'\\ 0 & 0 & \tilde{b}'\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\partial\tilde{C}\cdot\tilde{C}^{-1} &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \tilde{p}' & 0 & 0\\ \tilde{r}' & \tilde{q}' & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -\tilde{p} & 1 & 0\\ \tilde{p}\tilde{q}-\tilde{r} & -\tilde{q} & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \tilde{p}' & 0 & 0\\ \tilde{r}'-\tilde{p}\tilde{q}' & \tilde{q}' & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{2.16}$$

Далее, так как матрица Картана алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$ имеет вид

$$K = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{2}|\alpha|^2\nu^\alpha E_\alpha \exp\Bigl(\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Delta}K_{\alpha\beta}\varphi^\beta\Bigr) &= \begin{pmatrix}0 & \nu^1 e^{\varphi^1-\frac{1}{2}\varphi^2} & 0\\ 0 & 0 & \nu^2 e^{\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi^1}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\\
\sum_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{2}|\alpha|^2\nu^\alpha E_{-\alpha} \exp\Bigl(\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Delta}K_{\alpha\beta}\varphi^\beta\Bigr) &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \mu^1 e^{\varphi^1-\frac{1}{2}\varphi^2} & 0 & 0\\ 0 & \mu^2 e^{\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi^1} & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{2.17}$$

Значения констант ν^1, ν^2, μ^1, μ^2 положим равными 1, после чего получаем искомые соотношения:

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}' = e^{\varphi^1-\frac{1}{2}\varphi^2} = \tilde{\sigma}^2\tilde{\tau}^{-1}, &\quad &\tilde{p}' = e^{\varphi^1-\frac{1}{2}\varphi^2} = \tilde{\sigma}^2\tilde{\tau}^{-1},\\
&\tilde{b}' = e^{\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi^1} = \tilde{\tau}^2\tilde{\sigma}^{-1}, &\quad &\tilde{q}' = e^{\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi^1} = \tilde{\tau}^2\tilde{\sigma}^{-1},\\
&\tilde{c}' = \tilde{a}\tilde{b}', &\quad &\tilde{r}' = \tilde{p}\tilde{q}'.
\end{aligned}\tag{2.18}$$

Найдём связи, которым подчинены элементы матриц A^*, C^*. Так как

$$\tilde{g} = \tilde{A}\tilde{B}\tilde{C} = AD\bar{C} = AA^*B^*C^*\bar{C},$$

то

$$\tilde{A} = AA^* = \begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a^* & c^*\\ 0 & 1 & b^*\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a+a^* & c+c^*+ab^*\\ 0 & 1 & b+b^*\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{C} = C^*\bar{C} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ p^* & 1 & 0\\ r^* & q^* & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ p & 1 & 0\\ r & q & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ p+p^* & 1 & 0\\ r+r^*+pq^* & q+q^* & 1\end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\tilde{a} = a + a^*, \qquad \tilde{p} = p + p^*, \tag{2.19a}$$

$$\tilde{b} = b + b^*, \qquad \tilde{q} = q + q^*, \tag{2.19b}$$

$$\tilde{c} = c + c^* + ab^*, \qquad \tilde{r} = r + r^* + pq^*. \tag{2.19c}$$

Связи принимают вид

$$\bar{\partial}\tilde{a} = \bar{\partial}a + \bar{\partial}a^* = \bar{\partial}a^* = (\sigma^*)^2(\tau^*)^{-1}, \tag{2.20a}$$

$$\bar{\partial}\tilde{b} = \bar{\partial}b + \bar{\partial}b^* = \bar{\partial}b^* = (\tau^*)^2(\sigma^*)^{-1}, \tag{2.20b}$$

$$\bar{\partial}\tilde{c} = \bar{\partial}c + \bar{\partial}c^* + \bar{\partial}a \cdot b^* + a \cdot \bar{\partial}b^* = \bar{\partial}c^* + a \cdot \bar{\partial}b^* = (a + a^*)\bar{\partial}b^*, \tag{2.20c}$$

откуда

$$\bar{\partial}c^* = a^*\bar{\partial}b^* = a^*(\tau^*)^2(\sigma^*)^{-1}.$$

Здесь учтено, что

$$\tilde{\sigma} = \sigma^*, \quad \tilde{\tau} = \tau^*.$$

Аналогичные выражения получаются для $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$. Окончательно находим следующие соотношения связей:

$$\begin{aligned} &\bar{\partial}a^* = (\sigma^*)^2(\tau^*)^{-1}, && \partial p^* = (\sigma^*)^2(\tau^*)^{-1},\\ &\bar{\partial}b^* = (\tau^*)^2(\sigma^*)^{-1}, && \partial q^* = (\tau^*)^2(\sigma^*)^{-1},\\ &\bar{\partial}c^* = a^*(\tau^*)^2(\sigma^*)^{-1}, && \partial r^* = p^*(\tau^*)^2(\sigma^*)^{-1}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Теперь нужно, используя эти шесть уравнений, исключить из восьми соотношений (2.15) последние шесть, оставив только выражения для $\sigma^*(z, \bar{z})$, $\tau^*(z, \bar{z})$, которые нас интересуют.

2.2.3. Исключение переменных, подчинённых связям

Используя связь (2.19a), запишем[1]

$$\bar{\partial}a^* = \frac{\sigma^2}{\tau}\frac{1}{\mathrm{I}^2}\big\{[\bar{a}' + q(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})']\,[1 + \bar{a}p + \pi(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})] - [\bar{a} + q(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})]\,[\bar{a}'p + \pi(\bar{a}\bar{b} - \bar{c})']\big\} = \\ = \frac{\sigma^2\bar{\sigma}^2}{\mathrm{I}^2}\frac{\mathrm{II}}{\tau\bar{\tau}},$$

откуда

$$\bar{a}'[1 + q\bar{b} + (pq - \pi)\bar{c}] + \bar{b}'\bar{a}[q + \bar{a}(pq - \pi)] - \bar{c}'[q + \bar{a}(pq - \pi)] = \frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\tau}}[1 + (pq - \pi)\bar{c} + q\bar{b}]. \tag{2.22}$$

Используя (2.19b), находим, что

$$\bar{\partial}b^* = \frac{\tau^2}{\sigma}\frac{1}{\mathrm{II}^2}\big\{(p\bar{c}' + \bar{b}')[1 + (pq - \pi)\bar{c} + q\bar{b}] - (p\bar{c} + \bar{b})[(pq - \pi)\bar{c}' + q\bar{b}']\big\} = \frac{\tau^2\bar{\tau}^2}{\mathrm{II}^2}\frac{\mathrm{I}}{\sigma\bar{\sigma}},$$

[1] Напомним, что штрихом обозначается дифференцирование функции одной переменной по её аргументу.

или

$$\bar{c}'(p+\pi\bar{b})+\bar{b}'(1-\pi\bar{c})=\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}[1+p\bar{a}+(pq-r)(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})]. \tag{2.23}$$

Аналогично, из (2.19c) вытекает

$$\bar{\partial}c^*=\frac{\sigma\tau}{\mathrm{II}^2}\big\{\bar{c}'[1+(pq-\pi)\bar{c}+q\bar{b}]-\bar{c}[(pq-\pi)\bar{c}'+q\bar{b}']\big\}=\frac{\sigma^2}{\tau}\frac{\bar{a}+q(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})}{\mathrm{I}}\frac{\tau^2\bar{\tau}^2}{\mathrm{II}^2}\frac{\mathrm{I}}{\sigma\bar{\sigma}},$$

так что

$$\bar{c}'(1+q\bar{b})-\bar{b}'q\bar{c}=\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}[\bar{a}+q(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})]. \tag{2.24}$$

Соотношения (2.22)—(2.24) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$, для решения которой прежде всего найдём $\bar{b}'$ и $\bar{c}'$ по формулам Крамера:

$$\bar{b}'=\frac{\Delta_{\bar{b}}}{\Delta},\quad \bar{c}'=\frac{\Delta_{\bar{c}}}{\Delta},$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix}p+\pi\bar{b} & 1-\pi\bar{c}\\ 1+q\bar{b} & -q\bar{c}\end{vmatrix}=-1-q\bar{b}-\bar{c}(pq-\pi)=-\mathrm{II},$$

$$\Delta_{\bar{b}}=\begin{vmatrix}p+\pi\bar{b} & \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}[1+p\bar{a}+(pq-r)(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})]\\ 1+q\bar{b} & \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}[\bar{a}+q(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})]\end{vmatrix}=-\mathrm{II}\,\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}},$$

$$\Delta_{\bar{c}}=\begin{vmatrix}\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}[1+p\bar{a}+(pq-r)(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})] & 1-\pi\bar{c}\\ \frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}[\bar{a}+q(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})] & -q\bar{c}\end{vmatrix}=-\bar{a}\,\mathrm{II}\,\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}.$$

Таким образом, получаем

$$\bar{c}'=\bar{a}\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}},\quad \bar{b}'=\frac{\bar{\tau}^2}{\bar{\sigma}}.$$

Теперь из (2.22) находим

$$\bar{a}'=\frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\tau}}+(\bar{c}'-\bar{a}\bar{b}')[q+\bar{a}(pq-\pi)]=\frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\tau}}. \tag{2.25}$$

Аналогично, система уравнений для определения p', q', r' имеет вид

$$p'=\frac{\sigma^2}{\tau}+\frac{q'p-r'}{\mathrm{II}}[\bar{b}'+p(\bar{a}\bar{b}-\bar{\alpha})], \tag{2.26}$$

$$q'(1-r\bar{\alpha})+r'(\bar{a}+q\bar{\alpha})=\frac{\tau^2}{\sigma}[1+p\bar{a}+\pi(\bar{a}\bar{b}-\bar{c})], \tag{2.27}$$

$$-q'r\bar{b}+r'(1+q\bar{b})=\frac{\tau^2}{\sigma}[p+\bar{b}(pq-r)]. \tag{2.28}$$

Из (2.27), (2.28) находим r', q':

$$q'=\frac{\tau^2}{\sigma},\qquad r'=p\frac{\tau^2}{\sigma}, \tag{2.29}$$

а для p' получаем выражение

$$p' = \frac{\sigma^2}{\tau}. \tag{2.30}$$

2.2.4. Запись решения задачи Гурса

Задача Гурса для системы Тоды (2.5) ставится следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_1(z,0) &= \varphi_1(z), \quad \varphi_1(0,\bar z) = \bar\varphi_1(\bar z), \\ \varphi_2(z,0) &= \varphi_2(z), \quad \varphi_2(0,\bar z) = \bar\varphi_2(\bar z), \end{aligned} \tag{2.31}$$

где φ_1, $\bar\varphi_1$, φ_2, $\bar\varphi_2$ — заданные функции. Решение $\varphi_1(z,\bar z)$, $\varphi_2(z,\bar z)$ задачи Гурса для рассматриваемой системы Тоды имеет вид

$$\varphi_1(z,\bar z) = \ln\sigma^*(z,\bar z), \quad \varphi_2(z,\bar z) = \ln\tau^*(z,\bar z),$$

где σ^*, τ^* выражаются формулами (2.13):

$$\sigma^* = \frac{\sigma\bar\sigma}{1 + p\bar a + (pq - r)(\bar a\bar b - \bar c)}, \quad \tau^* = \frac{\tau\bar\tau}{1 + r\bar c + q\bar b}.$$

Выразим σ^*, τ^* через «данные на характеристиках», в качестве которых возьмём величины $\bar a' = \bar\varphi_1(\bar z)$, $\bar b' = \bar\varphi_2(\bar z)$, $p' = \varphi_1(z)$, $q' = \varphi_2(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} \bar a' &= \bar\varphi_1 = \frac{\bar\sigma^2}{\bar\tau}, \quad \bar b' = \bar\varphi_2 = \frac{\bar\tau^2}{\bar\sigma}, \quad \bar c' = \bar a\bar b' = \bar a\bar\varphi_2, \\ p' &= \varphi_1 = \frac{\sigma^2}{\tau}, \quad q' = \varphi_2 = \frac{\tau^2}{\sigma}, \quad r' = pq' = p\varphi_2, \end{aligned} \tag{2.32}$$

откуда

$$\sigma = \varphi_1^{2/3}\varphi_2^{1/3}, \quad \tau = \varphi_1^{1/3}\varphi_2^{2/3}, \quad \bar\sigma = \bar\varphi_1^{2/3}\bar\varphi_2^{1/3}, \quad \tau = \bar\varphi_1^{1/3}\bar\varphi_2^{2/3}. \tag{2.33}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} p(z) &= \int^z d\zeta\,\varphi_1(\zeta), \quad \bar a(\bar z) = \int^{\bar z} d\bar\zeta\,\bar\varphi_1(\bar\zeta), \\ q(z) &= \int^z d\zeta\,\varphi_2(\zeta), \quad \bar b(\bar z) = \int^{\bar z} d\bar\zeta\,\bar\varphi_2(\bar\zeta). \end{aligned}$$

Так как

$$(pq - r)' = p'q + pq' - r' = p'q, \quad (\bar a\bar b - \bar a)' = \bar a'\bar b + \bar a\bar b' - \bar c' = \bar a'\bar b,$$

то

$$pq - r = \int^z d\zeta\,\varphi_1(\zeta)\int^\zeta d\xi\,\varphi_2(\xi), \quad \bar a\bar b - \bar c = \int^{\bar z} d\bar\zeta\,\bar\varphi_1(\bar\zeta)\int^{\bar\zeta} d\bar\xi\bar\varphi_2(\bar\xi).$$

Теперь мы можем записать окончательный результат:

$$
\begin{aligned}
e^{\varphi_1} = \sigma^* = \varphi_1^{2/3}\varphi_2^{1/3}\bar{\varphi}_1^{2/3}\bar{\varphi}_2^{1/3}\Big\{1 + \int^{z} d\zeta\,\varphi_1(\zeta)\int^{\bar z} d\bar\zeta\,\bar\varphi_1(\bar\zeta) + \\
+ \int^{z} d\zeta\,\varphi_1(\zeta)\int^{\zeta} d\xi\,\varphi_2(\xi)\int^{\bar z} d\bar\zeta\,\bar\varphi_1(\bar\zeta)\int^{\bar\zeta} d\bar\xi\,\bar\varphi_2(\bar\xi)\Big\}^{-1}, \\
e^{\varphi_2} = \tau^* = \varphi_1^{1/3}\varphi_2^{2/3}\bar{\varphi}_1^{1/3}\bar{\varphi}_2^{2/3}\Big\{1 + \int^{z} d\zeta\,\varphi_2(\zeta)\int^{\bar z} d\bar\zeta\,\bar\varphi_2(\bar\zeta) + \\
+ \int^{z} d\zeta\,\varphi_2(\zeta)\int^{\zeta} d\xi\,\varphi_1(\xi)\int^{\bar z} d\bar\zeta\,\bar\varphi_2(\bar\zeta)\int^{\bar\zeta} d\bar\xi\,\bar\varphi_1(\bar\xi)\Big\}^{-1}.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

Эти формулы дают решение задачи Гурса для системы Тоды (2.5) с данными на характеристиках (2.31).

Литература

[1] Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега—де Фриза // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. Т. 24. — М.: ВИНИТИ, 1984. — С. 81—180.

[2] Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1985.

[3] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.

[4] Balog J., Fehér L., O'Raifeartaigh L., Forgács P., Wipf A. Toda theory and W-algebra from a gauged WZNW point of view // Ann. Physics. — 1990. — Vol. 203. — P. 76—136.

[5] Belavin A. A., Polyakov A. M., Zamolodchikov A. B. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory // Nuclear Phys. B. — 1984. — Vol. 241. — P. 333—380.

[6] Dotsenko V. S. Lectures on conformal field theory // Adv. Stud. Pure Math. — 1988. — Vol. 16. — P. 123—170.

[7] Fehér L., O'Raifeartaigh L., Ruelle P., Tsutsui I., Wipf A. On Hamiltonian reductions of the Wess—Zumino—Novikov—Witten theories // Phys. Rep. — 1992. — Vol. 222, no. 1. — P. 1—64.

[8] Mikhailov A. V., Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Two-dimensional generalized Toda lattice // Comm. Math. Phys. — 1981. — Vol. 79. — P. 473—488.