W-геометрия систем Тоды

О. В. ИЛЬИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ilin@math243.phys.msu.ru

УДК 512.81+517.95

Ключевые слова: W-геометрия, уравнения Тоды, алгебра Ли.

Аннотация

В статье описывается W-геометрия двумеризованных по Лезнову—Савельеву цепочек Тоды, соответствующих алгебре Ли серии C_n.

Abstract

O. V. Il'in, On W-geometry of Toda systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 195—203.

We describe W-geometry of two-dimensional Toda systems associated with the Lie algebra C_n.

1. Введение

В статье описывается W-геометрия двумеризованных по Лезнову—Савельеву цепочек Тоды, соответствующих алгебре Ли серии C_n. Под этим определением понимается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$d\bar{d}\phi_i = \exp\biggl(\sum_j K_{ij}\phi_j\biggr), \tag{1.1}$$

где K_{ij} — матрица Картана типа C_n.

Построение W-поверхности для уравнения (1.1) основано на редукции цепочек Тоды серии A_{2n+1} к цепочкам Тоды серии C_n (см. [3]). Теория W-поверхностей для серии A была развита в [4,5], и, таким образом, аналогичная задача для уравнений Тоды серии C, а также нахождение соотношений Френе—Серре—Гаусса—Кодацци оказывается разрешимой.

2. Соотношения Френе—Серре—Гаусса—Кодацци для уравнений Тоды алгебры Ли A_n

Определим W-поверхности для уравнений Тоды серии A_n по аналогии с [4].

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 195—203.

Определение 1. W-поверхность — это двумерное многообразие S, вложенное в $2(n+1)$-мерное евклидово пространство $E^{2(n+1)}$ по формулам

$$X^A = f^A(z), \quad \bar{X}^{\bar{A}}(\bar{z}) = \bar{f}^{\bar{A}}(\bar{z}), \quad A = 1, \ldots, n+1, \quad \bar{A} = 1, \ldots, n+1, \tag{2.1}$$

причём предполагается, что $X^A = f^A(z)$, $\bar{X}^{\bar{A}}(\bar{z}) = \bar{f}^{\bar{A}}(\bar{z})$ — независимые (т. е. вронскианы функций f^A и $\bar{f}^{\bar{A}}$ отличны от нуля) бесконечно дифференцируемые функции. В каждой точке поверхности S определим матрицу

$$g_{i,\bar{j}} = \sum_{A=1}^{n+1} \sum_{\bar{B}=1}^{n+1} d^i f^A(z) \bar{d}^{\bar{j}} \bar{f}^{\bar{B}}(\bar{z}) \delta_{A\bar{B}}, \tag{2.2}$$

где

$$d^i = \frac{d^i}{dz^i}, \quad \bar{d}^{\bar{j}} = \frac{\bar{d}^{\bar{j}}}{\bar{d}\bar{z}^{\bar{j}}}.$$

Определим в пространстве $E^{2(n+1)}$ скалярное произведение формулой

$$(X, Y) = \sum_{A=\bar{A}} (X^A Y^{\bar{A}} + Y^A X^{\bar{A}}).$$

Определение 2 (подвижной репер). Определим векторы e_a, $\bar{e}_{\bar{a}}$ ($a = 1, \ldots, n+1$, $\bar{a} = 1, \ldots, n+1$) с компонентами

$$e_a^A = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a \Delta_{a-1}}} \begin{vmatrix} g_{1\bar{1}} & \cdots & g_{a\bar{1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1\overline{a-1}} & \cdots & g_{a\overline{a-1}} \\ f^{(1)A} & \cdots & f^{(a)A} \end{vmatrix}, \quad e_a^{\bar{A}} = 0, \tag{2.3}$$

$$\bar{e}_a^{\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a \Delta_{a-1}}} \begin{vmatrix} g_{\bar{1}1} & \cdots & g_{\bar{a}1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\bar{1}a-1} & \cdots & g_{\bar{a}a-1} \\ \bar{f}^{(1)\bar{A}} & \cdots & \bar{f}^{(a)\bar{A}} \end{vmatrix}, \quad \bar{e}_a^A = 0, \tag{2.4}$$

где

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} g_{1\bar{1}} & \cdots & g_{\bar{a}1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1\bar{a}} & \cdots & g_{a\bar{a}} \end{vmatrix}.$$

Предложение 1. *Подвижной репер, определённый формулами* (2.3), (2.4), *ортонормирован, т. е.*

$$(e_a, e_b) = (\bar{e}_a, \bar{e}_b) = 0, \quad (e_a, \bar{e}_b) = \delta_{ab}.$$

Доказательство. Первые два равенства утверждения очевидны. Докажем последнее. Имеем

$$(e_a, \bar{e}_b) = \sum_{A=\bar{A}} (e_a^A \bar{e}_b^{\bar{A}} + e_a^{\bar{A}} \bar{e}_b^A) = e_a^A \bar{e}_b^{\bar{A}}.$$

Введём в рассмотрение миноры ${}_a\Delta_{ij}$ матрицы Δ_a, соответствующие элементу g_{ij}. Разложим определители, входящие в определение e_a^A и $\bar{e}_a^{\bar{A}}$, по последней строке:

$$e_a^A = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a\Delta_{a-1}}}\sum_{i=1}^{a}(-1)^{a+i}f^{(i)A}{}_{(a)}\Delta_{i,\bar{a}},$$
$$e_a^{\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a\Delta_{a-1}}}\sum_{\bar{j}=1}^{a}(-1)^{a+\bar{j}}\bar{f}^{(\bar{j})\bar{A}}{}_{(b)}\Delta_{\bar{j},a}.$$

Тогда получим

$$\sum_{A=\bar{A}}^{n} e_a^A e_b^{\bar{A}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a\Delta_{a-1}}}\sum_{i,j}^{a,b}(-1)^{a+b+i+j}g_{i\bar{j}(a)}\Delta_{i\bar{a}(b)}\Delta_{j\bar{b}}.$$

1. Случай $a > b$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_a\Delta_{a-1}}}\sum_{j=1}^{b}{}_{(b)}\Delta_{j\bar{b}}\left(\sum_{i=1}^{a}(-1)^{(a+b+\bar{j})+i}g_{i\bar{j}a}\Delta_{i\bar{a}}\right) = 0.$$

Выражение в скобках представляет собой разложение определителя по некоторой строке, причём алгебраические дополнения берутся из другой. Таким образом, всё выражение равно нулю.

2. Случай $a = b$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_a\Delta_{a-1}}}\sum_{i,j}^{a,a}(-1)^{2a+i+\bar{j}}g_{i\bar{j}(a)}\Delta_{i\bar{a}(a)}\Delta_{\bar{j}a} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a\Delta_{a-1}}}\sum_{i,j}^{a,a}(-1)^{i+\bar{j}}g_{i\bar{j}(a)}\Delta_{i\bar{a}(a)}\Delta_{\bar{j}a}.$$

Согласно предыдущему случаю из всей суммы ненулевым может быть слагаемое с $\bar{j} = a$:

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_a\Delta_{a-1}}}\sum_{i=1}^{a}(-1)^{i+\bar{a}}g_{i\bar{a}(a)}\Delta_{i\bar{a}(a)}\Delta_{\bar{a}a} = \frac{\Delta_{a(a)}\Delta a\bar{a}}{\Delta_a\Delta_{a-1}} = \frac{{}_{(a)}\Delta_{a\bar{a}}}{\Delta_{a-1}} = 1.$$

Случай $b > a$ сводится к $a > b$. Предложение доказано. □

Для последующих вычислений полезно заметить, что

$$e_a = \sum_{b\leqslant a}C_{ab}(z,\bar{z})\sqrt{\frac{\Delta_{a-1}}{\Delta_a}}f^{(b)}(z), \tag{2.5}$$

$$\bar{e}_a = \sum_{b\leqslant a}A_{ba}(z,\bar{z})\sqrt{\frac{\Delta_{a-1}}{\Delta_a}}\bar{f}^{(b)}(\bar{z}), \tag{2.6}$$

где $C_{aa} = 1$, $A_{aa} = 1$,

$$f = \sum_A f^A, \quad \bar{f} = \sum_{\bar{A}}\bar{f}^{\bar{A}}.$$

Эти формулы получены разложением определителей (2.3), (2.4) по последней строке.

Предложение 2 (формулы Френе—Серре). *Производные векторов подвижного репера выражаются следующим образом*:

$$\begin{aligned}
de_a &= \frac{1}{2} d \ln\left(\frac{\Delta_a}{\Delta_{a-1}}\right) e_a + \sqrt{\frac{\Delta_a \Delta_{a-1}}{\Delta_a^2}} e_{a+1}, \qquad a \leqslant n,\\
de_{n+1} &= \frac{1}{2} d \ln\left(\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}\right) e_n,\\
\bar{d}e_a &= -\frac{1}{2} \bar{d} \ln\left(\frac{\Delta_a}{\Delta_{a-1}}\right) e_a - \sqrt{\frac{\Delta_a \Delta_{a-2}}{\Delta_{a-1}^2}} e_{a-1}, \quad 2 \leqslant a,\\
\bar{d}e_1 &= -\frac{1}{2} \bar{d} \ln(\Delta_1) e_1.
\end{aligned}$$

Аналогичные соотношения имеют место для $\bar{e}$.

Доказательство. Запишем производные в виде

$$\begin{aligned}
de_a &= \sum_b R_{ab} e_b, \quad \bar{d}e_a = \sum_b S_{ab} e_b,\\
\bar{d}\bar{e}_a &= \sum_b \bar{R}_{ab} \bar{e}_b, \quad d\bar{e}_a = \sum_b \bar{S}_{ab} \bar{e}_b.
\end{aligned}$$

Учтём, что

$$0 = d(e_a, \bar{e}_b) = R_{ab} + \bar{S}_{ba}, \quad d\bar{f}^{(a)} = \bar{d} f^{(a)} = 0.$$

Тогда получается, что $S_{ab} = \bar{S}_{ab} = 0$ при $b > a$, а de_a и $\bar{d}\bar{e}_a$ могут быть представлены через $f^{(b)}$ и $\bar{f}^{(b)}$ при $b \leqslant a+1$. Тогда формулы для производных приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
de_a &= \kappa_a e_{a+1} + \sigma_a e_a, \quad \bar{d}e_a = -\bar{\sigma}_a e_a - \bar{\kappa}_{a-1} e_{a-1},\\
\bar{d}\bar{e}_a &= \bar{\kappa}_a \bar{e}_{a+1} + \bar{\sigma}_a \bar{e}_a, \quad d\bar{e}_a = -\sigma_a \bar{e}_a - \kappa_{a-1} \bar{e}_{a-1}.
\end{aligned}$$

Теперь вычислим $(e_a, \bar{f}^{(b)}) = (\bar{e}_a, f^{(b)})$:

$$\begin{aligned}
(e_a, \bar{f}^{(b)}) = (\bar{e}_a, f^{(b)}) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_a \Delta_{a-1}}} \sum_{i=1} (-1)^{a+i} f^{(i)} \Delta_{ia} \bar{f}^{(b)} =\\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta_a \Delta_{a-1}}} \sum_{i=1} (-1)^{a+i} g_{i\bar{b}} \Delta_{ia} = \delta_{ab} \frac{1}{\sqrt{\Delta_a \Delta_{a-1}}} \Delta_a = \frac{\sqrt{\Delta_a}}{\sqrt{\Delta_{a-1}}} \delta_{a\bar{b}}.
\end{aligned}$$

Полученную выше формулу используем для вычисления σ_a и κ_a:

$$R_{aa} = \sigma_a = -(de_a, \bar{e}_a) = -(d\bar{e}_a, e_a) = -d\left(A_{aa}\sqrt{\frac{\Delta_{a-1}}{\Delta_a}}\bar{f}^{(a)}(\bar{z}), e_a\right) =$$

$$= -d\left(\sqrt{\frac{\Delta_{a-1}}{\Delta_a}}\right)\sqrt{\frac{\Delta_a}{\Delta_{a-1}}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\Delta_a}{\Delta_{a-1}}\right),$$

$$R_{a,a+1} = \kappa_a = -(de_a, \bar{e}_{a+1}) = \sqrt{\frac{\Delta_{a-1}}{\Delta_a}}\left(\bar{e}_{a+1}, f^{(a+1)}\right) = \sqrt{\frac{\Delta_{a-1}\Delta_{a+1}}{\Delta_a^2}}.$$

Утверждение доказано. □

Определение 3. Поле Тоды определяется формулой

$$\phi_a \equiv -\ln(\Delta_a). \tag{2.7}$$

Условия согласования уравнений Френе—Серре можно записать как равенство смешанных производных или в следующем виде:

$$[d, \bar{d}]e_a = 0.$$

Эти уравнения и приводят к цепочке Тоды серии A_n:

$$\begin{aligned} \bar{d}d\phi_a &= -\exp\left(\sum_{j=1}^{n} K_{aj}^{A_n}\phi_j\right), \quad a = 1, \ldots, n, \\ \bar{d}d\phi_{n+1} &= 0, \end{aligned}$$

где $K_{aj}^{A_n}$ — матрица Картана алгебры Ли A_n.

Последнее уравнение не является уравнением Тоды и должно удовлетворяться тождественным образом. Это можно осуществить, положив вронскиан функций $\bar{f}^{\bar{A}}$ и вронскиан функций f^A тождественно равными единице.

3. Редукционная процедура для алгебры Ли серии A_r

Рассмотрим уравнения Тоды для алгебры Ли серии A_r:

$$\begin{aligned} \bar{d}d\phi_1 &= \exp(2\phi_1 - \phi_2), \\ \bar{d}d\phi_i &= \exp(-\phi_{i-1} + 2\phi_i - \phi_{i+1}), \quad i = 2, \ldots, r-1, \\ \bar{d}d\phi_r &= \exp(-\phi_{r-1} + 2\phi_r), \\ \bar{d}d\phi_{r+1} &= 0. \end{aligned}$$

Положим по определению

$$\chi^A \equiv f^{A(1)}, \quad \bar{\chi}^{\bar{A}} \equiv \bar{f}^{\bar{A}(\bar{1})}.$$

Тогда, выражая $g_{i\bar{j}}$ через χ^A, легко получим, что

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} g_{1\bar{1}} & \dots & g_{a\bar{1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1\bar{a}} & \dots & g_{a\bar{a}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_a} \begin{vmatrix} \chi^{i_1} & \dots & \chi^{i_a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi^{i_1(a-1)} & \dots & \chi^{i_a(a-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\chi}^{i_1} & \dots & \bar{\chi}^{i_a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{\chi}^{i_1\overline{(a-1)}} & \dots & \bar{\chi}^{i_a\overline{(a-1)}} \end{vmatrix}.$$

Вначале рассмотрим цепочку Тоды, соответствующую алгебре Ли A_1, т. е. пусть $r = 1$:

$$\bar{d}d\phi_1 = \exp(2\phi_1), \quad \bar{d}d\phi_2 = 0. \tag{3.1}$$

Положим $\Delta_2 = 1$. Тогда второе уравнение в (3.1) выполняется тождественно. Это равенство эквивалентно системе уравнений

$$\chi^1\chi^{2(1)} - \chi^{1(1)}\chi^2 = 1, \quad \bar{\chi}^1\bar{\chi}^{2(\bar{1})} - \bar{\chi}^2\bar{\chi}^{1(\bar{1})} = 1. \tag{3.2}$$

Из системы (3.2) получаем

$$\left(\frac{\chi^2}{\chi^1}\right)^{(1)} = (\chi^1)^{-2}, \quad \left(\frac{\bar{\chi}^2}{\bar{\chi}^1}\right)^{(\bar{1})} = (\bar{\chi}^1)^{-2}.$$

Проинтегрируем полученные выражения:

$$\chi^2 = \chi^1 \int^z dz \left(\frac{1}{\chi^1}\right)^2, \quad \bar{\chi}^2 = \bar{\chi}^1 \int^{\bar{z}} d\bar{z} \left(\frac{1}{\bar{\chi}^1}\right)^2. \tag{3.3}$$

Сделаем преобразование

$$\chi^1 = \varphi^{-1/2}(z), \quad \bar{\chi}^1 = \bar{\varphi}^{-1/2}(\bar{z}).$$

В итоге интегралы (3.3) выглядят следующим образом:

$$\chi^2 = (\varphi^{-1/2}) \int^z dz\, \varphi, \quad \bar{\chi}^2 = (\bar{\varphi}^{-1/2}) \int^{\bar{z}} d\bar{z}\, \bar{\varphi}.$$

Обратимся теперь к рассмотрению общего случая, т. е. к серии A_r, как того требует индукция. Предположим, что известно решение для алгебры A_{r-1}, определяемое $2(r-1)$ произвольными функциями $\varphi_j(z)$, $\bar{\varphi}_j(\bar{z})$. Тогда известны функции ${}_{(r-1)}\chi^A$, ${}_{(r-1)}\bar{\chi}^A$. В этом случае для уравнений Тоды для алгебры A_r имеется следующее частное решение, зависящее от $2(r-1)$ произвольных функций:

$${}_{(r)}\chi^A(z) = \int^z {}_{(r-1)}\chi^A(z)\, dz, \quad {}_{(r)}\bar{\chi}^{\bar{A}}(\bar{z}) = \int^{\bar{z}} {}_{(r-1)}\bar{\chi}^{\bar{A}}(\bar{z})\, d\bar{z},$$

если $1 \leqslant A \leqslant r$, и

$${}_{(r)}\chi^{r+1}(z) =_{(r)} \bar{\chi}^{r+1}(\bar{z}) = 1.$$

Система уравнений Тоды серии A_r конформно ковариантна относительно преобразований

$$z \to \varphi(z), \quad \bar{z} \to \bar{\varphi}(\bar{z}), \quad \phi_j \to \phi_j + \ln \varphi(z)\bar{\varphi}(\bar{z}) \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} K_{ji}^{-1}.$$

Применяя данное преобразование к функциям ${}_{(r)}\chi^A$, ${}_{(r)}\bar{\chi}^{\bar{A}}$, приходим к полному решению цепочки Тоды серии A_r:

$${}_{(r)}\chi^A(z) = \int^{\varphi(z)} dz_{(r-1)}\chi^A(z)\, d\varphi^{-r/2}(z), \quad {}_{(r)}\bar{\chi}^A(\bar{z}) = \int^{\bar{\varphi}(\bar{z})} d\bar{z}_{(r-1)}\bar{\chi}^A(\bar{z})\, \bar{d}\bar{\varphi}^{-r/2},$$

если $A = \bar{A} = 1, \ldots, r$, и

$${}_{(r)}\chi^{r+1}(z) = d\varphi^{-r/2}(z), \quad {}_{(r)}\bar{\chi}^{r+1}(\bar{z}) = \bar{d}\bar{\varphi}^{-r/2}(\bar{z}).$$

Как следует из редукционной процедуры, явную зависимость ${}_{(r)}\chi^{r+1}(z)$, ${}_{(r)}\bar{\chi}^{r+1}(\bar{z})$ от функций $\varphi_j(z)$, $\bar{\varphi}_j(\bar{z})$ естественно представить в виде

$$\chi^A(z) = \varphi_0(z) \int^{z} dz^{(1)}\varphi_1\big(z^{(1)}\big) \int^{z^{(1)}} dz^{(2)}\varphi_2\big(z^{(2)}\big) \ldots \int^{z^{(A-1)}} dz^{(A)}\varphi_A\big(z^A\big), \tag{3.4}$$

$$\bar{\chi}^{\bar{A}}(\bar{z}) = \bar{\varphi}_0(\bar{z}) \int^{\bar{z}} d\bar{z}^{(1)}\bar{\varphi}_1\big(\bar{z}^{(1)}\big) \int^{\bar{z}^{(1)}} \bar{d}\bar{z}^{(2)}\bar{\varphi}_2\big(\bar{z}^{(2)}\big) \ldots \int^{\bar{z}^{(\overline{A-1})}} \bar{d}\bar{z}^{(\bar{A})}\bar{\varphi}_{\bar{A}}\big(\bar{z}^{\bar{A}}\big), \tag{3.5}$$

причём

$$\bar{\varphi}_0(\bar{z}) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \bar{\varphi}_j^{1/(r+1)}, \quad \varphi_0(z) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \varphi_j^{1/(r+1)}.$$

Итак, получено выражение экспонент Δ_k, $k = 1, \ldots, r+1$, полей Тоды через функции χ^i, $i = 1, \ldots, r+1$, зависящие от произвольных функций φ^j, $j = 1, \ldots, r$, а также выполняется $\Delta_{r+1} = 1$.

Замечание. Теперь в определение W-поверхности серии A_r можно добавить, что функции $df^A \equiv \chi^A$, $\bar{d}\bar{f}^{\bar{A}} \equiv \bar{\chi}^{\bar{A}}$ удовлетворяют уравнениям (3.4) и (3.5). Это приводит к тому, что $\Delta_{r+1} = 1$ выполняется тождественно.

4. Уравнения Тоды алгебры Ли C_r

Уравнения Тоды алгебры Ли C_r получаются некоторым предельным переходом из соответствующих уравнений серии A. Уравнения Тоды серии A_s симметричны относительно перестановки $\phi_j \to \phi_{s-j+1}$ и, следовательно, обладают решениями с $\phi_j = \phi_{s-j+1}$. Такая операция приравнивания приводит к соотношениям

$$\varphi_j(z) = \varphi_{s-j+1}(z), \quad \bar{\varphi}_j(\bar{z}) = \bar{\varphi}_{s-j+1}(\bar{z}).$$

Пусть $s = 2r-1$. Осуществим операцию приравнивания, описанную выше. Тогда получаем

$$\begin{aligned} d\bar{d}\phi_1 &= \exp\left(2\phi_1 - \phi_2\right), \\ &\dots \\ d\bar{d}\phi_{r-1} &= \exp\left(-\phi_{r-2} + 2\phi_{r-1} - \phi_r\right), \\ d\bar{d}\phi_r &= \exp\left(-2\phi_{r-1} + 2\phi_r\right), \\ d\bar{d}\phi_{2r} &= 0. \end{aligned}$$

Полученные уравнения, за исключением последнего, которое выполняется тождественно, так как согласно построениям предыдущего раздела $\Delta_{2r} = 1$, определяют цепочку Тоды C_r. Теперь можно сформулировать определение W-поверхности для данной серии.

Определение 4. W-поверхность серии C_r — двумерное многообразие S, вложенное в $2(2r)$-мерное евклидово пространство $E^{2(2r)}$. Уравнения вложения задаются соотношениями

$$X^A = f^A(z), \quad A = 1, \dots, 2r, \qquad \bar{X}^{\bar{A}} = \bar{f}^{\bar{A}}(\bar{z}), \quad \bar{A} = 1, \dots, 2r,$$

где функции f^A, $\bar{f}^{\bar{A}}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} df^A = \chi^A(z) = \varphi_0(z) \int^{z} dz^{(1)} \varphi_1\bigl(z^{(1)}\bigr) \int^{z^{(1)}} dz^{(2)} \varphi_2\bigl(z^{(2)}\bigr) \dots \int^{z^{(A-1)}} dz^{(A)} \varphi_A\bigl(z^A\bigr), \\ \bar{d}\bar{f}^A = \bar{\chi}^{\bar{A}}(\bar{z}) = \bar{\varphi}_0(\bar{z}) \int^{\bar{z}} d\bar{z}^{(1)} \bar{\varphi}_1\bigl(\bar{z}^{(1)}\bigr) \int^{\bar{z}^{(1)}} \bar{d}\bar{z}^{(2)} \bar{\varphi}_2\bigl(\bar{z}^{(2)}\bigr) \dots \int^{\bar{z}^{(\overline{A-1})}} \bar{d}\bar{z}^{(\bar{A})} \bar{\varphi}_{\bar{A}}\bigl(\bar{z}^{\bar{A}}\bigr), \end{aligned}$$

причём, очевидно, должно выполняться следующее:

$$\varphi_i = \varphi_{2r-i+1}, \quad \bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_{2r-i+1},$$

а также по определению

$$\bar{\varphi}_0(\bar{z}) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant 2r} \bar{\varphi}_j^{1/(2r+1)}, \quad \varphi_0(z) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant 2r} \varphi_j^{1/(2r+1)}.$$

Так как уравнения Тоды для серии C получаются редукцией от уравнений Тоды для серии A, то соотношения Френе—Серре обладают тем же свойством. Тогда получаем, что подвижной репер цепочки Тоды C_r определяется так же, как для серии A_s, $s = 2r - 1$, только с учётом условия $\Delta_j = \Delta_{s-j+1}$. Уравнения Френе—Серре выглядят следующим образом:

$$
\begin{aligned}
de_a &= \frac{1}{2} d\ln\frac{\Delta_a}{\Delta_{a-1}} e_a + \sqrt{\frac{\Delta_a\Delta_{a-1}}{\Delta_a^2}} e_{a+1}, && 1 \leqslant a \leqslant r-1;\\
de_r &= \frac{1}{2} d\ln\frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}} e_r + \sqrt{\frac{\Delta_{r-1}^2}{\Delta_r^2}} e_{r+1},\\
de_{r+a} &= \frac{1}{2} d\ln\frac{\Delta_{r-a}}{\Delta_{r-a-1}} e_{r+a} + \sqrt{\frac{\Delta_{r-a-1}\Delta_{r-a+1}}{\Delta_{r-a}^2}} e_{r+a+1}, && 1 \leqslant a \leqslant r-1,\\
de_{2r} &= \frac{1}{2} d\ln\frac{\Delta_{2r}}{\Delta_{2r-1}} e_{2r-1}.
\end{aligned}
$$

Подобные соотношения получаются для $\bar{e}$.

Автор выражает благодарность А. В. Овчинникову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Гото М., Гроссханс Ф. Полупростые алгебры Ли. — Новокузнецк, 1998.

[2] Дринфельд В. Г., Соколов В. В. Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега—де Фриза // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения. Т. 24. — М.: ВИНИТИ, 1984. — С. 81—180.

[3] Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1985.

[4] Gervais J., Matsuo Y. Classical A_n-W-geometry // Comm. Math. Phys. — 1993. — Vol. 152, no. 2. — P. 317—368.

[5] Gervais J., Matsuo Y. W-geometries // Phys. Lett. B. — 1992. — Vol. 274.

[6] Gervais J., Saveliev M. W-geometry of the Toda systems associated with non-exceptional simple Lie algebras. — LPTENS93/47.