Геодезические в двумерной псевдоримановой метрике и контроль точности численного интегрирования уравнения геодезических

Э. Р. РОЗЕНДОРН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

УДК 513.81

Ключевые слова: псевдориманово пространство, изотропные координаты, геодезическая линия.

Аннотация

Показано, что в двумерной псевдоримановой метрике, записанной в изотропных координатах, уравнения неизотропных геодезических существенно упрощаются. Предложен метод контроля точности численного решения уравнений геодезических, основанный на этом свойстве.

Abstract

E. R. Rozendorn, Geodesics of a two-dimensional pseudo-Riemannian metric and accuracy control of numerical simulations of geodesics, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 205—209.

We show that the equation of nonisotropic geodesics of a two-dimensional pseudo-Riemannian metric admits substantial simplification in isotropic coordinates.

При изучении геометрических вопросов, связанных с космологическими проблемами, используются псевдоримановы метрики

$$ds^2 = 2F(x,y)\,dx\,dy, \quad F > 0. \tag{1}$$

В частности, для ансамблей этих метрик рассматривалось поведение геодезических линий и их статистические свойства [2].

Следует заметить, что координатные линии метрик (1) являются изотропными кривыми, а поскольку речь идёт о двумерном многообразии, то и геодезическими. В этой работе мы покажем, что и уравнения неизотропных геодезических в метриках (1) существенно упрощаются, что может быть полезным при исследовании поведения таких геодезических. Мы демонстрируем это, предлагая подход, который позволяет при численном интегрировании уравнений неизотропных геодезических проводить контроль точности.

Напомним уравнение геодезических линий. Оно нелинейно, однотипно записывается для римановых и псевдоримановых метрик [5] и в общем виде, в криволинейных координатах (u,v), выглядит так:

$$\ddot{u}\dot{v} - \ddot{v}\dot{u} + A(\dot{u},\dot{v})\dot{v} - B(\dot{u},\dot{v})\dot{u} = 0. \tag{2}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 205—209.

Точкой сверху обозначено дифференцирование по параметру t, к которому отнесена геодезическая $u = u(t)$, $v = v(t)$, а символами A и B, согласно [3], обозначены следующие агрегаты, квадратичные относительно $\dot{u}$ и $\dot{v}$:

$$A = \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 \tag{3}$$

и

$$B = \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2, \tag{4}$$

Γ_{jk}^i — символы Кристоффеля [3].

Для дальнейшего важно, что специальный вид метрики (1) приводит к существенному упрощению выражений (3), (4), а вместе с тем и уравнения (2). Именно, в метрике (1) символы Кристоффеля таковы:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{F_x'}{F}, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{F_y'}{F}. \tag{5}$$

Штрихом и нижним буквенным индексом здесь и далее обозначаем частные производные. Остальные символы Кристоффеля для метрики (1) тождественно равны нулю. Положим

$$\phi = \ln F, \quad F_1 = F_x', \quad F_2 = F_y', \quad \tilde{\gamma} = \frac{dx}{dy}, \quad \gamma = \frac{dy}{dx}, \tag{6}$$

а также

$$ds_0^2 = dx^2 + dy^2. \tag{7}$$

Обратим внимание на тождество

$$\gamma\tilde{\gamma} = 1, \tag{8}$$

которое нам потребуется далее.

Функцию F будем считать C^2-гладкой. Тогда применима теорема о существовании и единственности геодезической линии, проходящей через данную точку в данном направлении [3]. Поэтому геодезическая линия L, которая выходит из какой-либо точки $A(x_0, y_0)$ в неизотропном направлении

$$\frac{dy}{dx}(x_0, y_0) = \gamma_0, \quad -\infty < \gamma_0 < +\infty, \quad \gamma_0 \neq 0, \tag{9}$$

на всем своём протяжении остаётся неизотропной и не касается направления $dx = 0$ и $dy = 0$. Отсюда, в свою очередь, следует, что L в координатах (x, y) допускает два равноправных представления: как

$$y = g(x) \tag{10}$$

и как

$$x = h(y), \tag{11}$$

причём обе функции (10) и (11) строго монотонные. Они являются взаимно-обратными. Кроме того, применимо и то же параметрическое задание, о котором шла речь в связи с уравнением (2), здесь оно выглядит как

$$x = x(t), \quad y = y(t), \tag{12}$$

а уравнение (2) принимает вид

$$\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x} + \phi'_x \dot{x}^2 \dot{y} - \phi'_y \dot{x}\dot{y}^2 = 0. \tag{13}$$

Из монотонности функций (10) и (11) следует, что, переходя к записи (12), можно выбрать направление возрастания параметра t на геодезической линии L так, что на всём её протяжении будет

$$\dot{x}(t) > 0 \quad \text{и} \quad \dot{y}(t) > 0. \tag{14}$$

В уравнении (13) понизим порядок. Для этого, используя (14), разделим обе части равенства (13) на $\dot{x}^2\dot{y}$. Получим

$$\frac{d\gamma}{dy} + \phi'_y \gamma = \phi'_x, \tag{15}$$

поскольку $\gamma = \dot{y}/\dot{x}$.

Из уравнения (15) и упомянутой выше теоремы единственности геодезических вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть функция $\phi(x, y)$ такова, что при $y = kx + b$ соблюдается равенство $\phi'_x = k\phi'_y$. Тогда линия $y = kx + b$* (*прямая в метрике* (7)) *является геодезической и в метрике* (1).

Продолжим преобразование уравнения геодезических. С этой целью используем тождество (8), к обеим частям равенства (15) прибавим $\phi'_x = \phi'_x \gamma\tilde{\gamma}$ и вспомним, что

$$\phi'_x \tilde{\gamma} + \phi'_y = \phi'_x \frac{dx}{dy} + \phi'_y = \frac{d}{dy}\phi(x(y), y). \tag{16}$$

В результате уравнение (15) примет вид

$$\frac{d\gamma}{dy} + \left(\frac{d\phi}{dy}\right)\gamma = 2\phi'_x. \tag{17}$$

Линейное уравнение (17) стандартным образом интегрируется в квадратурах [4] и с учётом начального условия (9) даёт

$$\gamma = \frac{1}{F(x, y)}\left(\gamma_0 F_0 + 2\int\limits_{y_0}^{y} F_1(h(\eta), \eta)\, d\eta\right), \tag{18}$$

где $F_0 = F(x_0, y_0)$.

Пусть $Z = Z(x, y)$ — текущая точка линии L. Воспользовавшись ещё раз тождеством (8), из (18) имеем

$$\tilde{\gamma} = \left(\gamma_0 F_0 + 2\int\limits_{y_0}^{y} F_1(h(\eta), \eta)\, d\eta\right)^{-1} F(x, y). \tag{19}$$

Равенства (15), (16) и (17) удовлетворяются тождественно вдоль линии (11).

Формулу (19) будем рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dy} = \left(\gamma_0 F_0 + 2\int\limits_{y_0}^{y} F_1(h(\eta),\eta)\,d\eta\right)^{-1} F(x,y), \tag{20}$$

которое вместе с начальным условием $x(y_0) = x_0$ определяет функцию (11).

Вместе с тем, мы могли бы поступить иначе: разделить (13) на $\dot{x}\dot{y}^2$, привести его к виду

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dx} + \phi'_x \tilde{\gamma} = \phi'_y, \tag{21}$$

затем к обеим частям прибавить $\phi'_y = \phi'_y \tilde{\gamma}\gamma$ и использовать формулу

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi'_x + \phi'_y \frac{dy}{dx} = \phi'_x + \phi'_y \gamma. \tag{22}$$

В итоге получим

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dx} + \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\tilde{\gamma} = 2\phi'_y. \tag{23}$$

Формула (22) и уравнение (23) соблюдаются вдоль линии (10). Проинтегрировав (23), с учётом (8) и (9) получим

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{F(x,y)}\left(\frac{F_0}{\gamma_0} + 2\int\limits_{x_0}^{x} F_2(\xi, g(\xi))\,d\xi\right). \tag{24}$$

Аналогично тому, как от (18) перешли к (19), а затем к (20), перейдём от выражения (24) к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{F_0}{\gamma_0} + 2\int\limits_{x_0}^{x} F_2(\xi, g(\xi))\,d\xi\right)^{-1} F(x,y). \tag{25}$$

Вместе с начальным условием $y(x_0) = y_0$ уравнение (25) определяет функцию (10). Для вычисления интегралов, участвующих в их правых частях, нужно использовать квадратурные формулы [1].

Каждое из уравнений (20) и (25) допускает численное интегрирование, например методом Рунге—Кутты [1]. Таким образом, искомую геодезическую можно приближённо строить сразу в двух вариантах:

а) как $y = y(x, x_0, y_0, \gamma_0)$, используя (25);

б) как $x = x(y, x_0, y_0, \gamma_0)$, используя (20).

Ясно, что, сравнивая эти варианты, можно следить за точностью построения и при необходимости корректировать шаг численного интегрирования. Дополнительную информацию может дать проверка той точности, с которой на уже пройденном участке численного интегрирования соблюдаются уравнения (15) и (21), а также тождество (8).

Работа поддержана проектом РФФИ 02-01-00297. Автор выражает благодарность И. Х. Сабитову и Д. Д. Соколову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М., СПб.: Физматгиз, Невский диалект, 2001.

[2] Ламбурт В. Г., Розендорн Э. Р., Соколов Д. Д., Тутубалин В. Н. Геодезические со случайной кривизной на римановых и псевдоримановых многообразиях // Труды геометр. семинара. Вып. 24. — Казань: КГУ, 2003. — С. 99—106.

[3] Погорелов А. В. Лекции по дифференциальной геометрии. — Харьков: ХГУ, 1967.

[4] Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1959.

[5] Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия. — М.: ГИТТЛ, 1948.