О постановке начальной задачи для системы релятивистских частиц

С. Б. КИРПИЧЁВ, П. А. ПОЛЯКОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: serg@gen5521.phys.msu.ru

УДК 517.958+535+537.812

Ключевые слова: классическая электродинамика, задача Коши, дифференциально-разностные уравнения.

Аннотация

Исследуются вопросы корректной постановки задачи о движении релятивистской системы многих тел. На примере задачи об одномерном движении N одноимённых зарядов — в рамках микроскопической электродинамики Максвелла—Лоренца (включая модель с самодействием) и в теории Уилера—Фейнмана — показана возможность постановки обычной *в ньютоновой механике* задачи Коши в релятивистском случае.

Abstract

S. B. Kirpichev, P. A. Polyakov, On the formulation of initial-value problems for systems consisting of relativistic particles, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 211—226.

We discuss questions related to the well-posedness of problems on the motion of relativistic many-body systems. For one-dimensional relativistic motion of N similar charges, we prove that an ordinary Cauchy problem usual in Newton mechanics can be stated; this is done in the framework of microscopic Maxwell—Lorentz electrodynamics (including a model with self-action) or Wheeler—Feynman theory.

1. Введение

Число степеней свободы является одной из ключевых концепций классической механики. Эволюция механической системы полностью определена заданием координат и импульсов в начальный момент времени t_0.

Такая ситуация качественно изменилась после формулировки классической микроскопической электродинамики Максвелла—Лоренца. С одной стороны, поведение системы «частицы + поле» полностью детерминировано ньютоновыми начальными данными для частиц и значениями электромагнитного поля в t_0. Действительно, рассмотрим полевые уравнения классической электродинамики в лоренцевой калибровке:

$$\Box A^{\mu}(x) = 4\pi j^{\mu}(x), \tag{1}$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 211—226.

где j^μ — 4-вектор тока,

$$\rho_q = \sum_a q_a \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a(t)) -$$

плотность заряда и $\boldsymbol{x}_a(t)$, $\boldsymbol{v}_a(t)$ обозначают закон движения a-го заряда. (Здесь и далее скорость света c полагается равной единице.) Задав значения $A^\mu(t_0, \boldsymbol{x})$ и $\partial_t A^\mu(t_0, \boldsymbol{x})$, удовлетворяющие калибровочному условию $\partial_\mu A^\mu = 0$, получаем решение уравнений поля. Например, для скалярного потенциала его можно записать в виде

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \sum_a q_a \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta(t - s - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a(s)\|)}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a(s)\|}\, ds + \\ + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{t-t_0}} \frac{\phi(t_0, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}\, d\sigma_{\boldsymbol{y}} + \iint\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{t-t_0}} \frac{\partial_t \phi(t_0, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}\, d\sigma_{\boldsymbol{y}}\right], \quad (2)$$

где $d\sigma_{\boldsymbol{y}}$ обозначает элемент поверхности трёхмерной сферы $S_{\boldsymbol{x}}^{t-t_0}$ с центром в точке $\boldsymbol{x}$ и радиусом $t - t_0$. Аналогичное соотношение справедливо и для векторного потенциала. Движение частиц в поле (2) определяется однозначно после задания начальных значений координат и импульсов.

Выше рассмотрена обычная задача Коши в классической электродинамике. Можно сказать, что *в такой формулировке* поле имеет бесконечное число степеней свободы: при решении конкретных задач значения полей в начальный момент времени считаются известными и выбираются из дополнительных соображений. Однако последние представляют собою суперпозицию как полей «внешних источников», так и созданных зарядами системы в «прошлом» при $t < t_0$. Поэтому более корректный физически путь постановки задачи должен включать явное разделение «самосогласованного» поля зарядов системы и «внешнего» поля. В отличие от предыдущего подхода, скалярный потенциал определится из выражения

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \sum_a \frac{q_a}{R - (\boldsymbol{v}_a(t_a^r), \boldsymbol{R})} + \\ + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{t-t'}} \frac{\phi_{\text{ext}}(t', \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}\, d\sigma_{\boldsymbol{y}} + \iint\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^{t-t'}} \frac{\partial_t \phi_{\text{ext}}(t', \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|}\, d\sigma_{\boldsymbol{y}}\right], \quad (3)$$

где t_a^r — запаздывающее время и $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_a(t_a^r)$. Значения $A^\mu_{ext}(t', \boldsymbol{x})$ и $\partial_t A^\mu_{ext}(t', \boldsymbol{x})$ задают внешнее поле $F^{\mu\nu}_{\text{ext}}$ в момент времени t', который, в принципе, может быть выбран произвольно. Очевидно, первое слагаемое в (3) представляет собою просто потенциал Лиенара—Вихерта. Запаздывание приводит к тому, что движение частиц будет определяться системой функциональных и дифференциально-разностных (ДР) уравнений [1, 2].

Законно спросить, имеет ли электродинамическая система дополнительные степени свободы (по сравнению с ньютоновой механикой), если учесть декомпозицию поля на «самосогласованное» и «внешнее»? Ответ на такой вопрос неочевиден и в электродинамике Уилера—Фейнмана [16,17], где частицы взаимодействуют *полусуммой* опережающих и запаздывающих потенциалов.

Неоднократно утверждалось [5,15], что $6N$ независимых координат и скоростей являются подходящими начальными данными для задачи N тел релятивистской механики. Однако это не является очевидным. Рассмотрим, например, простейшее ДР уравнение [12]

$$x'(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

с дополнительным условием $x(0) = 0$. Тогда $x(t) = a\sin t$ будет его решением для любого a. Стандартная математическая постановка задачи в теории ДР уравнений [1,2] заключается в задании значений неизвестной функции на некотором начальном множестве. Так, уравнение (4) имеет единственное решение на $t \geqslant 0$, если $x(t) = \phi(t)$ на $t \in [-\pi/2, 0]$, где ϕ непрерывна. В классической электродинамике такой подход был развит математически Драйвером, Норрисом и Хсингом [11]. Уилером и Фейнманом также утверждалось [17] (без доказательства), что спецификация некоторых отрезков мировых линий частиц будет представлять «естественные» начальные данные в теории, включающей опережающие и запаздывающие потенциалы.

Наряду с этим на примере ряда модельных задач электродинамики (в частности, для классической задачи о лобовом столкновении двух одноимённо заряженных частиц, известной как задача Синга [15]) была показана [9,10,12,18] достаточность обычных «ньютоновых» начальных данных Коши для выделения единственного решения. Некоторые из известных здесь результатов выглядят, как следствие перехода к нерелятивизму, аналогично построению гамильтониана Дарвина [7] для системы взаимодействующих зарядов с точностью $(v/c)^2$. Например, Драйвер [10] доказал единственность решения при ограничении $|v_a(t)| \leqslant 0{,}015 \times c$ на скорости сталкивающихся частиц.

Мы видим из [9,10,12,18], что задание отрезков траекторий частиц как начальных условий может неадекватно отражать истинную размерность задачи, равно как и стандартный подход к постановке начальной задачи в электродинамике, основанный на задании полей.

В разделе 3 доказана теорема существования и единственности решения обычной (для ньютоновой механики) задачи Коши при одномерном движении N одноимённых зарядов — без ограничивающих предположений относительно начальных координат и скоростей частиц в случае «запаздывающего» взаимодействия. Таким образом, релятивистская система оказывается *конечномерной*. Возможность обобщения этого тезиса на более широкий класс задач обсуждается в разделе 4.

2. Модель

Пусть $x_a(t)$ и $v_a(t)$ — координаты и скорости N частиц. Магнитное поле не действует на частицы. Запаздывающее электрическое поле, например действующее на a-ю частицу со стороны b-й, равно

$$\frac{1+\varepsilon_{ab}v_b(t-\tau_{ab})}{1-\varepsilon_{ab}v_b(t-\tau_{ab})}\frac{\varepsilon_{ab}q_b}{[x_a(t)-x_b(t-\tau_{ab})]^2},$$

где $\varepsilon_{ab}=\operatorname{sign}(a-b)$. Запаздывающий аргумент $t-\tau_{ab}$ определяется из условия $\tau_{ab}=|x_a(t)-x_b(t-\tau_{ab})|$. Опережающее электрическое поле, действующее на a-ю частицу со стороны b-й, отличается от приведённого выше выражения заменой запаздывающего времени $t-\tau_{ab}$ на опережающее $t+\eta_{ab}$, где $\eta_{ab}=$ $=|x_a(t)-x_b(t+\eta_{ab})|$, и $\varepsilon_{ab}v_{ab}(t-\tau_{ab})$ на $-\varepsilon_{ab}v_{ab}(t+\eta_{ab})$. В этих обозначениях уравнение движения для a-й частицы есть

$$\frac{d}{dt}\frac{m_a v_a(t)}{\sqrt{1-v_a^2(t)}}= \\ =\alpha{\sum_{b=1}^{N}}'\frac{1+\varepsilon_{ab}v_b(t-\tau_{ab})}{1-\varepsilon_{ab}v_b(t-\tau_{ab})}\frac{\varepsilon_{ab}q_a q_b}{\tau_{ab}^2}+\beta{\sum_{b=1}^{N}}'\frac{1-\varepsilon_{ab}v_b(t+\eta_{ab})}{1+\varepsilon_{ab}v_b(t+\eta_{ab})}\frac{\varepsilon_{ab}q_a q_b}{\eta_{ab}^2}, \quad (5)$$

где $\alpha,\beta\geqslant 0$, $\alpha+\beta=1$, в электродинамике Максвелла—Лоренца $\beta=0$ и в теории Уилера—Фейнмана $\alpha=\beta=1/2$. Отклонения аргумента определятся из функциональных уравнений

$$\tau_{ab}(t)=\varepsilon_{ab}[x_a(t)-x_b(t-\tau_{ab}(t))],\quad \eta_{ab}(t)=\varepsilon_{ab}[x_a(t)-x_b(t+\eta_{ab}(t))], \quad (6)$$

учитывающих упорядоченность $x_a>x_b$ при $a>b$.

Рассмотрим «начальную задачу» для (5), (6) при дополнительных условиях

$$x_a(0)=\tilde{x}_a,\quad v_a(0)=\tilde{v}_a,\quad \text{где}\quad |\tilde{v}_a|<1\quad \text{и}\quad \tilde{x}_a>\tilde{x}_b\quad \text{при}\quad a>b. \quad (7)$$

Самодействие отброшено, что не приводит к нарушению теоремы единственности, однако доказательство этого факта без привнесения новых идей более сложно технически и обсуждается в разделе 4.

Дифференцирование уравнений (6) даёт

$$\tau'_{ab}(t)=\varepsilon_{ab}\frac{v_a(t)-v_b(t-\tau_{ab})}{1-\varepsilon_{ab}v_b(t-\tau_{ab})}, \quad (8a)$$

$$\eta'_{ab}(t)=\varepsilon_{ab}\frac{v_a(t)-v_b(t+\eta_{ab})}{1+\varepsilon_{ab}v_b(t+\eta_{ab})}. \quad (8b)$$

Также для любого решения (5), (6) с условиями (7)

$$\tau_{ab}(0) = \tilde{\tau}_{ab} = \varepsilon_{ab}\left[\tilde{x}_a - \tilde{x}_b + \int\limits_{-\tilde{\tau}_{ab}}^{0} v_b(\xi)\,d\xi\right], \tag{9a}$$

$$\eta_{ab}(0) = \tilde{\eta}_{ab} = \varepsilon_{ab}\left[\tilde{x}_a - \tilde{x}_b + \int\limits_{\tilde{\eta}_{ab}}^{0} v_b(\xi)\,d\xi\right]. \tag{9b}$$

Обратно, интегрирование (8) с условиями (9) приводит к (6), где

$$x_a(t) = \tilde{x}_a + \int\limits_0^t v_a(\xi)\,d\xi.$$

(Уравнение (9a) — и, аналогично, (9b) — имеет, и притом единственное, положительное решение, так как

$$\tilde{\tau}_{ab} - \varepsilon_{ab}\int\limits_{-\tilde{\tau}_{ab}}^{0} v_b(\xi)\,d\xi$$

является дифференцируемой функцией $\tilde{\tau}_{ab}$ с положительной производной.) Ниже мы будем использовать ДР уравнения (8) совместно с условиями (9) вместо функционального уравнения (6).

Случай $N = 2$ в проблеме соответствует классической задаче Синга о лобовом столкновении одноимённых зарядов. Драйвер [9] показал, что в этом случае имеется единственное решение, когда $(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2) > 0$ достаточно велико. Учитывались только запаздывающие потенциалы. Жданов [18] рассмотрел симметричный случай (когда $m_1 = m_2$, $x_2 = -x_1$) и доказал аналогичное утверждение при достаточно малом $m_2\tilde{v}_2^2 + q_1q_2/(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1)$ (нерелятивистская энергия). Хсинг [12] расширил результат на случай, когда

$$\max\left[\frac{\tilde{v}_2^2}{\sqrt{1-4\tilde{v}_2^2}}, \frac{\tilde{v}_1^2}{\sqrt{1-4\tilde{v}_1^2}}\right] \leqslant \frac{\max\left(\frac{q_1q_2}{m_1}, \frac{q_1q_2}{m_2}\right)}{\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1}$$

и правая часть неравенства мала. В рамках электродинамики Уилера—Фейнмана показано [10], что условия $x_2(0) = \tilde{x}_2$ и $v_2(0) = 0$ в симметричном случае гарантируют существование и единственность, если $\tilde{x}_2 \geqslant 2295$ (в единицах классического радиуса электрона). Это ограничение ведёт к цитированной в разделе 1 оценке скоростей частиц $|v_a(t)| \leqslant 1/\sqrt{2\tilde{x}_2}$.

3. Существование и единственность

Докажем утверждение о существовании и единственности решения релятивистской начальной задачи с начальными данными (7) *в случае N одноимённых зарядов* при некоторых ограничивающих предположениях о начальных данных.

Для электродинамики с запаздывающими потенциалами результат будет справедлив при достаточно больших начальных расстояниях между зарядами. Это гарантирует нам, что размерность задачи остаётся такой же, как и в нерелятивизме.

При доказательстве основных теорем используется следующая лемма.

Лемма 1. *Рассмотрим систему N обыкновенных дифференциальных уравнений вида*

$$x_a''(t) = {\sum_{b=1}^{N}}' \frac{Q_{ab}^2(t)\varepsilon_{ab}}{|x_a(t) - x_b(t)|^2} \tag{10}$$

с начальными условиями (7). *Пусть функции $Q_{ab}(t)$ удовлетворяют неравенствам*

$$0 < q^2 \leqslant Q_{ab}^2(t) \leqslant Q^2 \tag{11}$$

и являются непрерывными функциями. Тогда

$$\min_{a,b} |x_a(t) - x_b(t)|^2 > \lambda(q, Q, N, \tilde{\boldsymbol{v}}, \tilde{\boldsymbol{x}}) \times (1 + t^2). \tag{12}$$

Доказательство. Используя (11), получим соотношения

$$x_{a+1}'' - x_a'' > \frac{q^2}{|x_{a+1} - x_a|^2} - \frac{NQ^2}{|x_{a+2} - x_{a+1}|^2} - \frac{NQ^2}{|x_a - x_{a-1}|^2}, \tag{13a}$$

где $i = \overline{2, N-2}$, причём

$$x_N'' - x_{N-1}'' > \frac{q^2}{|x_N - x_{N-1}|^2} - \frac{NQ^2}{|x_{N-1} - x_{N-2}|^2} \tag{13b}$$

и

$$x_2'' - x_1'' > \frac{q^2}{|x_2 - x_1|^2} - \frac{NQ^2}{|x_3 - x_2|^2}. \tag{13c}$$

Из (13) мы видим, что взаимные расстояния могут стремиться к нулю только одновременно. Однако

$$x_N'' - x_1'' > \frac{2q^2(N-1)}{|x_N - x_1|^2},$$

откуда находим ограничение $|x_N - x_1| > \mathrm{const} \times (1 + t^2)$, зависящее исключительно от начальных условий, N, q и Q. Противоречие показывает, что взаимные расстояния между частицами $[x_{a+1} - x_a]$ ограничены снизу, что и требовалось доказать. □

3.1. Единственность

Докажем сперва теорему существования и единственности для регуляризованной проблемы. Неудобство уравнений (5) состоит в наличии множителей (делителей) вида

$$1 \pm \varepsilon_{ab} v_b(\text{отклоняющийся аргумент}).$$

Лемма 2 (существование и единственность решения «регуляризованной» проблемы Коши). *Существует единственное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*

$$\frac{m_a\dot v_a(t)}{[1-\langle v_a(t)\rangle^2]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\alpha{\sum_{b=1}^{N}}'\frac{1+\varepsilon_{ab}\langle v_b(t-\tau_{ab})\rangle}{1-\varepsilon_{ab}\langle v_b(t-\tau_{ab})\rangle}\frac{\varepsilon_{ab}q_aq_b}{[x_a(t)-x_b(t)]^2}\left[1-\int\limits_{t-\tau_{ab}}^{t}\frac{\varepsilon_{ab}\langle v_b(\xi)\rangle}{\tau_{ab}(t)}\,d\xi\right]^2+$$

$$+\beta{\sum_{b=1}^{N}}'\frac{1-\varepsilon_{ab}\langle v_b(t+\eta_{ab})\rangle}{1+\varepsilon_{ab}\langle v_b(t+\eta_{ab})\rangle}\frac{\varepsilon_{ab}q_aq_b}{[x_a(t)-x_b(t)]^2}\left[1+\int\limits_{t}^{t+\eta_{ab}}\frac{\varepsilon_{ab}\langle v_b(\xi)\rangle}{\eta_{ab}(t)}\,d\xi\right]^2,\quad(14a)$$

$$\dot x_a(t)=v_a(t)\qquad(14b)$$

с положительными q_a *и начальными условиями* (7) *при некоторых* (*см. доказательство*) *ограничениях на начальные данные. Отклонения аргументов в уравнениях* (14a) *определены функциональными уравнениями* (6). *Здесь введено обозначение* $\langle f\rangle=\min(\max(f,-M),M)$ *и* $1>M>\max\bigl[\max\limits_a|\tilde v_a|\,,0\bigr]$.

Доказательство. Рассмотрим полное метрическое пространство $\mathbb{M}$ непрерывных функций $\boldsymbol{v}(t)$ с нормой

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\|=\sum_{a=1}^{N}|v_a-u_a|\,,$$

где

$$\left|\tilde x_a-\tilde x_b+\int\limits_0^t[v_a(\xi)-v_b(\xi)]\,d\xi\right|\geqslant r(N,M,\{\tilde x_a,\tilde v_a\})$$

и $|v_a(t)|<\infty$ для $a,b=\overline{1,N}$. Значение r укажем позднее. Метрику в $\mathbb{M}$ определим соотношением $\rho(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|\boldsymbol{f}(t)-\boldsymbol{g}(t)\|$. Очевидно, решение рассматриваемой задачи Коши принадлежит $\mathbb{M}$. Определим отображение $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\mathcal{A}u}$ как $v_a(t)=\dot x_a(t)$, где $x_a(t)$ находим из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{m_a\ddot x_a(t)}{[1-\langle\dot x_a(t)\rangle^2]^{\frac{3}{2}}}=$$

$$=\alpha{\sum_{b=1}^{N}}'\frac{1+\varepsilon_{ab}\langle u_b(t-\tau_{ab})\rangle}{1-\varepsilon_{ab}\langle u_b(t-\tau_{ab})\rangle}\frac{\varepsilon_{ab}q_aq_b}{[x_a(t)-x_b(t)]^2}\left[1-\int\limits_{t-\tau_{ab}}^{t}\frac{\varepsilon_{ab}\langle u_b(\xi)\rangle}{\tau_{ab}(t)}\,d\xi\right]^2+$$

$$+\beta{\sum_{b=1}^{N}}'\frac{1-\varepsilon_{ab}\langle u_b(t+\eta_{ab})\rangle}{1+\varepsilon_{ab}\langle u_b(t+\eta_{ab})\rangle}\frac{\varepsilon_{ab}q_aq_b}{[x_a(t)-x_b(t)]^2}\left[1+\int\limits_{t}^{t+\eta_{ab}}\frac{\varepsilon_{ab}\langle u_b(\xi)\rangle}{\eta_{ab}(t)}\,d\xi\right]^2\qquad(15)$$

с начальными условиями (7), причём отклонения аргументов определяются через $\boldsymbol{u}$ посредством функциональных уравнений

$$\tau_{ab}(t)=\varepsilon_{ab}[\chi_a(t)-\chi_b(t-\tau_{ab}(t))],\quad \eta_{ab}(t)=\varepsilon_{ab}[\chi_a(t)-\chi_b(t+\eta_{ab}(t))],\tag{16}$$

где $\chi_a(t)=\tilde{x}_a+\int\limits_0^t\langle u(\xi)\rangle\,d\xi$ и $\boldsymbol{u}\in\mathbb{M}$. (Единственные решения уравнений (16) существуют в силу $|\langle u_a(t)\rangle|\leqslant M<1$.) Каждая неподвижная точка этого отображения есть решение регуляризованной проблемы Коши с ньютоновыми начальными данными.

Очевидно, можно переписать (15) в виде (10), причём

$$\frac{Q_{ab}^2(t)}{[1-\langle v_a\rangle^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{q_aq_b}{m_a}\left\{\alpha\frac{1+\varepsilon_{ab}\langle u_b(t-\tau_{ab})\rangle}{1-\varepsilon_{ab}\langle u_b(t-\tau_{ab})\rangle}\left[1-\int\limits_{t-\tau_{ab}}^{t}\frac{\varepsilon_{ab}\langle u_b(\xi)\rangle}{\tau_{ab}(t)}\,d\xi\right]^2+\right.$$

$$\left.+\beta\frac{1-\varepsilon_{ab}\langle u_b(t+\eta_{ab})\rangle}{1+\varepsilon_{ab}\langle u_b(t+\eta_{ab})\rangle}\left[1+\int\limits_{t}^{t+\eta_{ab}}\frac{\varepsilon_{ab}\langle u_b(\xi)\rangle}{\eta_{ab}(t)}\,d\xi\right]^2\right\},$$

$$q^2=\min_{a,b}\left[\frac{q_aq_b}{m_a}\right]\frac{(1-M)^{\frac{9}{2}}}{2}\quad\text{и}\quad Q^2=\max_{a,b}\left[\frac{q_aq_b}{m_a}\right]\frac{8}{1-M}.$$

Оценка (12) леммы 1 позволяет взять значение $r=\sqrt{\lambda}$. Учёт этой оценки позволяет показать, что $|v_a(t)|<\mathrm{const}(N,M,\{\tilde{x}_a,\tilde{v}_a\})$ и, следовательно, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\mathcal{A}u}\in\mathbb{M}$. Отсюда для различных $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in\mathbb{M}$ выводим очевидное неравенство

$$\left|\frac{Q_{ab}^2(t)}{|x_a(t)-x_b(t)|^2}-\frac{\bar{Q}_{ab}^2(t)}{|y_a(t)-y_b(t)|^2}\right|\leqslant\frac{2Q^2}{\lambda[1+t^2]}\frac{\sup\limits_t|f_b(t)-g_b(t)|}{1-M}+$$

$$+\frac{Q^2}{\lambda[1+t^2]^{\frac{3}{2}}}(|x_a(t)-y_a(t)|+|x_b(t)-y_b(t)|),\tag{17}$$

где $\dot{x}_a(t)\equiv(\boldsymbol{\mathcal{A}f})_a(t)$, $\dot{y}_a(t)\equiv(\boldsymbol{\mathcal{A}g})_a(t)$, Q_{ab} функционально зависит от $\boldsymbol{f}$ и $\bar{Q}_{ab}$ — от $\boldsymbol{g}$.

Окончательно получаем для $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in\mathbb{M}$ неравенство

$$\|(\boldsymbol{\mathcal{A}f})(t)-(\boldsymbol{\mathcal{A}g})(t)\|<$$

$$<\frac{2NQ^2}{\lambda(1-M)}\left|\int\limits_0^t d\xi\frac{\rho(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})}{1+\xi^2}\right|+\frac{2NQ^2}{\lambda}\left|\int\limits_0^t d\xi\frac{|\xi|\,\|(\boldsymbol{\mathcal{A}f})(\xi)-(\boldsymbol{\mathcal{A}g})(\xi)\|}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\right|.$$

Применение леммы Гронвалля даёт

$$\rho(\boldsymbol{\mathcal{A}f},\boldsymbol{\mathcal{A}g})<\frac{\pi NQ^2}{\lambda(1-M)}\exp\left[\frac{2NQ^2}{\lambda}\int\limits_0^\infty\frac{\xi d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\rho(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=$$

$$=\frac{\pi NQ^2}{\lambda(1-M)}\exp\left(\frac{2NQ^2}{\lambda}\right)\rho(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}),$$

откуда видим, что для достаточно малого M значение коэффициента при $\rho(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$ становится меньшим единицы. Принцип сжатых отображений гарантирует нам в этом случае существование и единственность неподвижной точки отображения. □

Простейшим следствием доказанной леммы является следующая теорема.

Теорема 1 (единственность решения начальной задачи (в нерелятивистской постановке) для одноимённых зарядов). *Решение уравнений* (5), (6) *однозначно определяется начальными условиями* (7).

Доказательство. Действительно, пусть при «начальных условиях» (7) мы имеем два решения уравнений движения N одноимённых зарядов $v_a(t)$ и $\bar{v}_a(t)$. Пусть $M < 1$ и $M > \max\limits_a[v_a(t), \bar{v}_a(t)]$. Нетривиальным является то обстоятельство, что $\sup\limits_t \max\limits_a |v_a(t)| < 1$ для любого решения уравнений движения (5). Покажем это.

Необходимо доказать, что $|v_a(\pm\infty)| < 1$. Поскольку $|x_a(t) - x_b(t)| \to \infty$ при $t \to \pm\infty$, то найдётся такое t', что $\dot{\tau}_{ab}(t)$ и $\dot{\eta}_{ab}(t)$ знакоопределённы при $t < t'$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{m_a v_a(t)}{\sqrt{1 - v_a^2(t)}} < \alpha \sum_{b=1}^{N}{}' \frac{\mp q_a q_b}{|v_a(t') - v_b(t' - \tau_{ab}(t'))|}\frac{d}{dt}\frac{1}{\tau_{ab}} + \\ + \beta \sum_{b=1}^{N}{}' \frac{\mp q_a q_b}{|v_a(t') - v_b(t' + \eta_{ab}(t'))|}\frac{d}{dt}\frac{1}{\eta_{ab}},$$

где знак «минус» отвечает положительным $\dot{\tau}_{ab}(t')$ и $\dot{\eta}_{ab}(t')$ и знак «плюс» — противоположной ситуации. Интегрирование неравенства по $(-\infty, t']$ позволяет показать, что $|v_a(-\infty)| < 1$. Аналогично поступаем, доказывая ограниченность $|v_a(+\infty)|$.

Пара наборов функций v_a и $\bar{v}_a$ (где $a = \overline{1, N}$) будет решениями и задачи Коши, рассмотренной в лемме 2, что противоречит утверждению леммы. □

Обратим теперь внимание на то, что существование и единственность решения уравнений движения для электродинамики с запаздывающими полями достаточно доказать лишь на интервале $(-\infty, 0]$. Рассуждения получаются, в сущности, теми же, что и в лемме 2, за исключением очевидного изменения области изменения независимой переменной — времени. Оценка (12) леммы 1 теперь справедлива на интервале $t < 0$. Очевидно, при достаточно больших начальных расстояниях между частицами можно сделать λ сколь угодно большим. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение. *Существует и единственно* (*при взаимодействии запаздывающими потенциалами*) *решение начальной задачи рассеяния одноимённых зарядов* (*в её нерелятивистской постановке*) *при достаточно больших начальных расстояниях.*

Продолжая траекторию вперед, можно (в принципе) прийти к пересечению фазовых траекторий с разными начальными условиями в момент $t = 0$. Однако мера множества фазовых точек с таким нарушением единственности будет равной нулю. Тем самым решение задачи Коши *единственно* при почти любых начальных данных (7) из $2N$-мерного фазового пространства $\{x_a, v_a\}$.

3.2. Существование (для симметричного столкновения двух частиц)

Решение начальной задачи для одноимённых зарядов будет гарантированно существовать, если мы построим оценку $\max\limits_a |v_a(t)| < M(\{\tilde{x}_c, \tilde{v}_c\}) < 1$ для любого решения с начальными условиями (7), причём M окажется малым, как описано в лемме 2. Для этого достаточно использовать лемму 2 при таком M. Доказательство оказывается конструктивным, поскольку формулируется и итерационный алгоритм построения точного решения, рассмотренный выше в лемме 2.

Проведём подробные выкладки для наиболее простого случая *лобового столкновения двух одноимённых зарядов, взаимодействующих запаздывающими потенциалами*, т. е. задачи Синга, в симметричном случае, когда $m_1 = m_2 = 1$, $q_1 q_2 = +1$, $x(t) = x_2(t) = -x_1(t)$ и $v(t) = x'(t) = v_2(t) = -v_1(t)$. Положим $\tau(t) = \tau_{12}(t)$, $\tau(0) = \tilde{\tau}$, $x(0) = \tilde{x}$ и $v(0) = \tilde{v}$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} = \frac{1-v(t-\tau)}{1+v(t-\tau)}\frac{q_1 q_2}{\tau^2}, \tag{18a}$$

$$\dot{\tau}(t) = \frac{v(t)+v(t-\tau)}{1+v(t-\tau)}, \tag{18b}$$

$$\tau(t) = x(t) + x(t-\tau), \tag{18c}$$

$$\tilde{\tau} + \int\limits_{-\tilde{\tau}}^{0} v(\xi)d\xi = 2\tilde{x}. \tag{18d}$$

Монотонность изменения скорости позволяет получить из (18c) неравенства

$$\frac{1-v(t-\tau)}{1+v(t-\tau)}\frac{|v(t)|}{\tau^2(t)} \leqslant \frac{d}{dt}\frac{2}{x(t-\tau)} \tag{19}$$

на интервале $t \leqslant t_0$ и

$$\frac{1-v(t-\tau)}{1+v(t-\tau)}\frac{v(t)}{\tau^2(t)} \leqslant -\frac{2}{1+v(t-\tau)}\frac{d}{dt}\frac{1}{x(t)} \tag{20}$$

при $t \geqslant t_0$. Здесь момент времени t_0, $v(t_0) = 0$, соответствует «столкновению» частиц. Заметим, что тогда найдётся такое t_τ, что $\dot{\tau}(t)$ меняет знак в t_τ, причём $\dot{\tau}(t) < 0$ при $t < t_\tau$. Очевидно, $t_0 < t_\tau$.

Теорема 2 (ограничение на скорости в случае симметричного столкновения двух зарядов). *Существует оценка* $|v(t)| < M(\tilde{x}, \tilde{v}) < 1$ *для любого решения задачи о лобовом столкновении двух одноимённо заряженных частиц при* $\alpha = 1$.

Доказательство. При $t_\tau \geqslant 0$ выберем t_*, для которого

$$v(t_*) = \min\left(-\frac{|v(-\infty)|}{2}, \tilde{v}\right).$$

Тогда, умножая (18a) на $|v(t)|$, используя (19) и интегрируя результат по $(-\infty, t_*]$, получаем

$$\left.\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right|_{|v(t_*)|}^{|v(-\infty)|} \leqslant \frac{2}{x(t_* - \tau(t_*))} < \frac{4}{\tau(t_*)}, \tag{21}$$

поскольку на $t < t_0$ выполнено $x(t-\tau) > \tau(t)/2$. Оценка верхней грани $|v(-\infty)|$ будет следовать из (21), если учесть, что $\tau(t) \geqslant \tilde{\tau} > \tilde{x}$ при $t_\tau \geqslant 0$.

Если $t_\tau < 0$, то оценка $|v(-\infty)|$ получится из (21), поскольку $\tau(t) > \tau(t_\tau)$. Оценим $\tau(t_\tau)$ снизу. Заметим, что в этом случае $\tilde{v} > 0$. Следовательно, для $t \in [t_\tau, 0]$ получим

$$0 < v(t) \leqslant \tilde{v} < 1, \quad v(t) \geqslant |v(t-\tau)|, \quad \dot{\tau}(t) < \frac{2\tilde{v}}{1 + v(t-\tau)}.$$

Подставим эти оценки в (18a):

$$\frac{d}{dt}\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} > -\frac{1-\tilde{v}}{2\tilde{v}}\frac{d}{dt}\frac{1}{\tau}.$$

Интегрирование этого неравенства по $[t_\tau, 0]$ позволяет получить искомую оценку $\tau(t_\tau)$.

Итак, $|v(-\infty)| < M_1(\tilde{x}, \tilde{v}) < 1$ для произвольных начальных данных. Для аналогичной оценки $v(+\infty) < M_2(\tilde{x}, \tilde{v}) < 1$ сначала найдём нижнюю границу для $x(t_0)$. Учитывая (18c) и $|v(t)| \leqslant M_1$ для $t \leqslant t_0$, получим из (5)

$$\frac{d}{dt}\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} > \frac{1-M_1}{4x^2(t)}. \tag{22}$$

Умножение неравенства на $-v(t)$ и интегрирование по $(-\infty, t_0]$ даёт оценку $x(t_0)$ из

$$[1 - M_1^2]^{-1/2} - 1 > \frac{1-M_1}{4x(t_0)}.$$

Теперь пусть t' таково, что $v(t') = v(+\infty)/2$. Умножив (18a) на $v(t)$, использовав (20) и проинтегрировав по $[t', +\infty)$, получаем M_2 из

$$\left.\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right|_{\frac{v(+\infty)}{2}}^{v(+\infty)} \leqslant \frac{2}{1-M_1}\frac{1}{x(t_0)}.$$

Окончательно берём $M = \max[M_1, M_2]$. □

4. Что может быть в общем случае?

Пользуясь лоренц-инвариантностью электродинамики, находим, что явно релятивистская форма доказанного утверждения может быть сформулирована для случая двух тел так: возможно выделение единственного решения фиксацией скоростей частиц в пространственно-временных точках, разделённых пространственно-подобным интервалом. Вероятно, это справедливо и в случае N тел. Для суперпозиции опережающих и запаздывающих полей теорема существования и единственности справедлива при достаточно больших начальных расстояниях и малых скоростях.

Учёт самодействия

Ниже мы укажем аналог теоремы 1 для случая лобового столкновения двух частиц в рамках классической микроскопической электродинамики с радиационным трением. Предположения тождественности частиц и симметрии (сделанные в теореме 2) сохранены. После ренормализации масс частиц, предложенной Дираком [8], уравнения движения (обозначения раздела 3.2) примут вид

$$\dot{p}(t) = \frac{d}{dt}\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} = \frac{1-v(t-\tau)}{1+v(t-\tau)}\frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{3}\frac{d^2}{dt^2}\frac{v(t)}{\sqrt{1-v^2(t)}} \Bigg/ \sqrt{1-v^2(t)}. \quad (23)$$

Уравнения (23) содержат нефизичные самоускоряющиеся решения [8,13]. Поэтому перепишем уравнения движения в виде интегродифференциальных уравнений [13]

$$\dot{p}(t) = \int\limits_t^\infty \frac{1-v(s-\tau(s))}{1+v(s-\tau(s))}\frac{\phi(s)}{\tau^2(s)} \exp\left[-\int\limits_t^s \phi(\xi)d\xi\right] ds, \quad (24)$$

где $\phi(t) = 3/2\sqrt{1-v^2(t)}$. При выводе уравнения из (23) использовано дополнительное условие на ускорения $v'(\pm\infty) = 0$. Уравнение (24) явно вводит зависимость ускорения от будущего — «предускорение».

Пусть построена оценка $|v(t)| < M(\tilde{x},\tilde{v}) < 1$ решения задачи Коши для уравнений (24), (18b) с условиями $\tau(0) = \tilde{\tau}$ и $v(0) = \tilde{v}$, причём $\tilde{\tau}$ определяется (18d). Тогда можно получить $\tau(t) > T(\tilde{x},\tilde{v})$. Действительно, из (18c) следует $\tau(t) > x(t)$. Остаётся оценить координату правого заряда снизу.

Из уравнения движения следует

$$\dot{p}(t) > \frac{3}{2}\sqrt{1-M^2}\frac{(1-M)^3}{4(1+M)}\int\limits_t^\infty \frac{e^{\frac{3}{2}(t-s)}}{x^2(s)}\, ds.$$

Пусть, например, $\tilde{v} < 0$ (в случае $\tilde{v} \geqslant 0$ $x(t_0)$ оценивается аналогично). Тогда $x(t) \geqslant x(s)$ при $t \in [0, t_0]$. Следовательно,

$$\dot{p}(t) > \frac{(1-M)^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}x^2(t)}\int\limits_t^{t_0} e^{\frac{3}{2}(t-s)}\, ds = \frac{(1-M)^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}x^2(t)}\left[1-\exp\left(-\frac{3}{2}(t_0-t)\right)\right]. \quad (25)$$

Из (25) после интегрирования по $[0, t_0]$ и использования $x(t) \leqslant \tilde{x}$ на интервале интегрирования получим оценку t_0 сверху:

$$\frac{|\tilde{v}|}{\sqrt{1-v_0^2}} > \frac{(1-M)^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}(\tilde{x})^2} \int\limits_0^{t_0} \left[1 - e^{-\frac{3}{2}(t_0 - t)}\right] dt.$$

После умножения (25) на $|v(t)|$ и интегрирования по $[0, t_0]$ получим следующую оценку $x(t_0)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}} - 1 + \frac{(1-M)^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}\tilde{x}} >$$
$$> \frac{(1-M)^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2}} \int\limits_0^{t_0} \frac{|v(t)|\, e^{-\frac{3}{2}(t_0-t)}}{|\tilde{v}|\, x(t)}\, dt > \frac{(1-M)^{\frac{5}{2}}}{4\sqrt{2} x^2(t)} \ln\left[\frac{\tilde{x}}{x(t_0)}\right] e^{-\frac{3}{2}t_0}.$$

Учтём ограничения $|v(t)| < M$ и $\tau(t) > T(\tilde{x}, \tilde{v}) > 0$ в математической модели, подобно лемме 2, заменив τ^2 на $\max[\tau^2(t), T^2]$ и v на $\langle v \rangle$ в уравнении (24). Доказательство единственности решения начальной задачи с самодействием после этого шага повторяет рассуждения леммы 2 и теоремы 1.

Внешнее поле отлично от нуля

Предположим, что движение зарядов происходит во внешнем (удовлетворяющем одномерному уравнению Даламбера в области движения) электромагнитном поле

$$E_{\text{ext}}(t, x) = \frac{\phi(x+t) + \phi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)\, d\xi. \qquad (26)$$

Единственность для задачи Коши для системы одноимённых зарядов во внешнем поле (26) можно гарантировать для взаимодействия запаздывающими потенциалами, если $\phi(s)$ и $\psi(s)$ ограничены и достаточно быстро убывают, т. е. E_{ext} является локализованной электромагнитной волной.

Физически это обусловлено тем, что такая локализованная электромагнитная волна взаимодействует с системой только на ограниченном интервале времени: либо электромагнитная волна уходит из области, где расположены заряды (скорость волны больше скорости зарядов системы), либо внешнее поле статическое и, соответственно, заряды в результате рассеяния покидают область его действия. Таким образом, все решения уравнений движения представляют собою процессы рассеяния.

Разноимённые заряды

Ситуация в этом случае, возможно, кардинально отличается от изученных выше. В пользу нарушения единственности задачи Коши говорит численное моделирование [4] одномерного движения в симметричной проблеме двух тел (притяжение). Фазовые кривые пересекаются в «фазовом пространстве» $\{x, v\}$, насколько можно судить по [4, рис. 2]. К сожалению, в указанной работе рассмотрены только решения, отвечающие «столкновению» зарядов (аннигиляция). Другой возможностью является возникновение пары в некоторой пространственно-временной точке. Оба типа решения определены, вообще говоря, на некотором временном интервале, одна из границ которого, возможно, $\pm\infty$.

Трёхмерное движение

Насколько ограничивает общность движение в одном измерении? В одномерных задачах излучаемые частицами электромагнитные волны не дают вклада в уравнения движения, следовательно, уравнения движения не содержат запаздывающих ускорений частиц. Существенно также то, что рассмотренные в разделе 3 случаи являются задачами рассеяния. Такой подход неприемлем в трёхмерном случае, когда возможны также решения уравнений движения, когда расстояния между частицами ограничены и движение происходит в конечной области физического пространства.

Недостаточность ньютоновых начальных условий для незатухающих взаимодействий разноимённых зарядов, движущихся по орбитам, близким к круговым, аргументирована в [3], где рассматривалось движение под действием полусуммы опережающих и запаздывающих потенциалов. В указанной работе была развита теория возмущений для известного точного решения [14] релятивистской проблемы двух тел, когда частицы движутся по концентрическим круговым орбитам.

Линеаризованные уравнения для малых возмущений точного решения релятивистской задачи N тел представляют собой систему линейных дифференциально-разностных уравнений. В изученном в [3] случае коэффициенты и отклонения аргументов являются постоянными, зависящими от параметров невозмущённых орбит. В такой ситуации изучение линейных дифференциально-разностных уравнений можно свести [1,2] к проблеме собственных значений, как и в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В [3] получены следующие результаты. При малых скоростях невозмущённых орбит есть ряд действительных собственных значений (они описывают нерелятивистские эллиптические орбиты). Помимо этого, есть бесконечное множество комплексных собственных значений (нестабильные моды). При возрастании скорости невозмущённых орбит ($v \geqslant 0{,}95$) некоторые комплексные собственные значения становятся действительными: число ограниченных решений линеаризованных уравнений конечно, однако размерность может быть больше $6N$. Делая правдоподобное с физической точки зрения предположение, что круговые орбиты устойчивы (как и в нерелятивизме), мы можем однозначно связать число линейно независимых *ограниченных* решений в теории возмущений и число степеней свободы исходной релятивистской задачи двух тел, которое может быть, следовательно, более $6N$, однако является *конечным*. Неограниченные решения отбрасываются.

Можно показать, что число линейно независимых ограниченных решений линеаризованных уравнений для возмущений задачи о лобовом столкновении одноимённых зарядов в точности равно числу степеней свободы такой системы, однако здесь также присутствует бесконечное число линейно независимых неограниченных решений.

5. Заключение

Обычная формулировка начальной задачи в электродинамике часто является избыточной: в реальности система релятивистских взаимодействующих частиц может оказаться конечномерной, как и в ньютоновой механике. Этот факт не учитывается обычно при теоретическом анализе в задачах электродинамики и в компьютерном моделировании плазмоподобных сред, например методом крупных частиц.

Литература

[1] Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.

[2] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.

[3] Andersen C. M., von Baeyer H. C. Almost circular orbits in classical action-at-a-distance electrodynamics // Phys. Rev. D. — 1972. — Vol. 5, no. 4. — P. 802—813.

[4] Baylis W. E., Huschilt J. Numerical solutions to two-body problems in classical electrodynamics: straight-line motion with retarded fields and no radiation reaction // Phys. Rev. D — 1973. — Vol. 7, no. 10. — P. 2844—2850.

[5] Van Dam H., Wigner E. P. Classical relativistic mechanics of interacting point particles // Phys. Rev. — 1965. — Vol. 138, no. 6b. — P. 1576—1582.

[6] Van Dam H., Wigner E. P. Instantaneous and asymptotic conservation laws for classical relativistic mechanics of interacting point particles // Phys. Rev. — 1966. — Vol. 142, no. 4. — P. 838—843.

[7] Darvin C. G. — Philos. Mag. — 1920. — Vol. 39. — P. 537.

[8] Dirac P. A. M. Classical theory of radiating electrons // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1938. — Vol. 167. — P. 148—168.

[9] Driver R. D. A «backwards» two-body problem of classical relativistic electrodynamics // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 178, no. 5. — P. 2051—2057.

[10] Driver R. D. Can the future influence the present? // Phys. Rev. D. — 1979. — Vol. 19, no. 4. — P. 1098—1107.

[11] Driver R. D., Hsing D. K. // Dynamical Systems, Proc. University of Florida Int. Symp. — New York: Academic, 1977. — P. 427—430.

[12] Hsing D. K. Existence and uniquence theorem for the one-dimentional backwards two-bodies problem of electrodynamics // Phys. Rev. D. — 1977. — Vol. 16. — P. 974—982.

[13] Plass G. N. Classical electrodynamic equations of motion with radiative reaction // Rev. Modern Phys. — 1961. — Vol. 33, no. 1. — P. 37—62.

[14] Schild A. Electromagnetic two-body problem // Phys. Rev. — 1963. — Vol. 131, no. 6. — P. 2762—2766.

[15] Synge J. L. On the electromagnetic two-bodies problem // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1941. — Vol. 177. — P. 118—199.

[16] Wheeler J. A., Feynman R. P. Interaction with the absorber as the mechanism of radiation // Rev. Mod. Phys. — 1945. — Vol. 17. — P. 157—181.

[17] Wheeler J. A., Feynman R. P. Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action // Rev. Mod. Phys. — 1949. — Vol. 21. — P. 425—433.

[18] Zhdanov V. I. On the one-dimentional symmetric two-body problem of classical electrodynamics // Int. J. Theor. Phys. — 1976. — Vol. 15, no. 2. — P. 157—167.