О возможности точного взаимопреобразования односолитонных решений уравнений из класса Лобачевского

М. С. РАТИНСКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ratinski@mtu-net.ru

УДК 514.752.4+517.95

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, солитон, уравнение синус-Гордона, модифицированное уравнения Кортевега—де Фриза.

Аннотация

В статье обсуждаются вопросы взаимопреобразования решений уравнений из Λ^2-класса (уравнений, связанных со специальными координатными сетями на плоскости Лобачевского Λ^2). Предлагается метод построения решений одного аналитического дифференциального уравнения из Λ^2-класса по решению другого аналитического дифференциального уравнения из этого же класса. Получено взаимопреобразование односолитонных решений уравнения синус-Гордона и односолитонных решений модифицированного уравнения Кортевега—де Фриза, подтверждающее принципиальную возможность построения такого перехода.

Abstract

M. S. Ratinsky, On the possibility of exact reciprocal transformations for one-soliton solutions to equations of the Lobachevsky class, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 241—246.

Problems on reciprocal transformation of solutions to equations of Λ^2-class (equations related with special coordinate nets on the Lobachevsky plane Λ^2) are discussed. A method of the construction of solutions to one analytic differential equation of Λ^2-class by a given solution of another analytic differential equation of this class is proposed. The reciprocal transformation of one-soliton solutions of the sine-Gordon equation and one-soliton solutions of the modified Korteweg—de Vries equation is obtained. This result confirms the possibility of the construction of such transition.

1. Понятие Λ^2-класса нелинейных дифференциальных уравнений

Данная работа является закономерным продолжением исследований специальных координатных сетей на Λ^2, проведённых Э. Г. Позняком и А. Г. Поповым (см. [2, 4]) с целью построения точных взаимопреобразований решений различных уравнений из класса Лобачевского.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 1, с. 241—246.

Рассмотрим на плоскости параметров (x, y) двумерную дифференциальную форму
$$ds^2 = E[u(x,y)]\,dx^2 + 2F[u(x,y)]\,dx\,dy + G[u(x,y)]\,dy^2. \tag{1}$$
Воспользуемся формулой Гаусса для вычисления кривизны формы (1):
$$K = -\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_x & E_y \\ F & F_x & F_y \\ G & G_x & G_y \end{vmatrix} - \\ - \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_y - F_x}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_y - \left(\frac{F_y - G_x}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_x\right\}. \tag{2}$$
Правая часть соотношения (2) — известное выражение для K через E, F, G и их производные до второго порядка включительно (см., например, [1]). Если считать кривизну $K = K(x,y)$ априори заданной функцией, то, очевидно, соотношение (2) можно рассматривать как дифференциальное уравнение для функции $u(x,y)$.

Таким образом, дифференциальная форма (1) с заданной кривизной $K(x,y)$ порождает дифференциальное уравнение (2) относительно неизвестной функции $u(x,y)$. Заметим, что если $u(x,y)$ — решение уравнения (2), то форма (1) определяет в плоскости параметров (x,y) метрику с линейным элементом (1) и кривизной $K(x,y)$.

Определение. Будем говорить, что дифференциальное уравнение принадлежит Λ^2-классу (или является Λ^2-уравнением), если оно порождается указанным выше способом метрикой постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K(x,y) \equiv -1$ (кривизна плоскости Лобачевского Λ^2).

Приведём примеры Λ^2-уравнений.

1. Рассмотрим форму
$$ds^2 = dx^2 + 2\cos z(x,y)\,dx\,dy + dy^2. \tag{3}$$
Вычисляя кривизну формы (2), приходим к уравнению
$$z_{xy} = \sin z, \tag{4}$$
известному как уравнение синус-Гордона.

2. Выберем метрику
$$ds^2 = dx^2 + (2u(x,y)^2 + 1)\,dx\,dy + 4(u(x,y))_x^2 + (2u(x,y)^2 + 1)^2\,dy^2. \tag{5}$$
По-прежнему предполагая, что гауссова кривизна постоянна и отрицательна, $K \equiv -1$, получим Λ^2-уравнение
$$u_t = 6u^2u_x + u_{xxx}, \tag{6}$$
т. е. модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза (МКдФ).

Приведённые примеры показывают, как дифференциальные уравнения порождаются метриками специального вида, связанными с плоскостью Лобачевского Λ^2.

2. Метод построения взаимопреобразования решений уравнений из Λ^2-класса

Рассмотрим задачу о погружении метрики, заданной на плоскости Лобачевского в виде (1), в трёхмерное евклидово пространство E^3. В этом случае мы можем рассматривать данную метрику как линейный элемент (первую квадратичную форму) поверхности Φ, заданной в E^3 и имеющей постоянную отрицательную гауссову кривизну $K \equiv -1$. Таким образом, координатной сети на плоскости Лобачевского будет соответствовать координатная сеть на поверхности Φ.

Метод базируется на идее приведения координатных сетей, порождающих Λ^2-уравнения, к асимптотическому виду. Рассмотрим две различные первые квадратичные формы

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= E_1[z(x,y]\,dx^2 + 2F_1[z(x,y)]\,dx\,dy + G_1[z(x,y)]\,dy^2, \\ \mathrm{I}_2 &= E_2[u(x,y]\,dx^2 + 2F_2[u(x,y)]\,dx\,dy + G_2[u(x,y)]\,dy^2, \end{aligned} \tag{7}$$

порождающие Λ^2-уравнения

$$K(E_1, F_1, G_1, z) = -1, \quad K(E_2, F_2, G_2, u) = -1$$

соответственно.

Перейдём к вопросу реализации метрик (7) кривизны -1 в E^3. Для построения в E^3 поверхностей с заданными первыми квадратичными формами необходимо получить вторые квадратичные формы поверхностей, т. е. необходимо проинтегрировать уравнения Петерсона—Кодацци и Гаусса (ПКГ). Предположим, что нам удалось это сделать и мы получили вторые квадратичные формы

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_1 &= L_1[z(x_1,y_1]\,dx_1^2 + 2M_1[z(x_1,y_1)]\,dx_1\,dy_1 + N_1[z(x_1,y_1)]\,dy_1^2, \\ \mathrm{II}_2 &= L_2[u(x_2,y_2]\,dx_2^2 + 2M_2[u(x_2,y_2)]\,dx_2\,dy_2 + N_2[u(x_2,y_2)]\,dy_2^2, \end{aligned} \tag{8}$$

соответствующие метрикам (7). Теперь приведём исходные сети, задаваемые метриками (7), к асимптотическому виду. Для этого нам необходимо разрешить уравнения

$$\mathrm{II}_1 = 0, \quad \mathrm{II}_2 = 0 \tag{9}$$

и получить преобразования координат

$$x_1 = x_1(s_1, t_1), \quad y_1 = y_1(s_1, t_1), \quad x_2 = x_2(s_2, t_2), \quad y_2 = y_2(s_2, t_2),$$

приводящие вторые квадратичные формы (8) к виду

$$\mathrm{II}_1 = 2M_1[z(s_1,t_1)]\,ds_1\,dt_1, \quad \mathrm{II}_2 = 2M_2[z(s_2,t_2)]\,ds_2\,dt_2, \tag{10}$$

т. е. направления (s_1, t_1) и (s_2, t_2) будут асимптотическими. Теперь путём растяжения или сжатия совместим данные направления, т. е. получим уравнения связи (отметим, что при таком преобразовании сети останутся асимптотическими) между указанными асимптотическими направлениями. Тем самым мы приведём вторые квадратичные формы к единой параметризации $(\hat{s}, \hat{t})$, в которой формы (10) примут вид

$$\mathrm{II}_1 = 2\hat{M}_1[z(\hat{s}, \hat{t})]\, d\hat{s}\, d\hat{t}, \quad \mathrm{II}_2 = 2\hat{M}_2[z(\hat{s}, \hat{t})]\, d\hat{s}\, d\hat{t}.$$

Приравняв соответствующие коэффициенты в квадратичных формах, мы получим простое уравнение взаимопреобразования решений z и u

$$\hat{M}_1(z) = \hat{M}_2(u).$$

В связи с вышеизложенным данный метод кажется наиболее перспективным для построения взаимопреобразований между решениями уравнения синус-Гордона (4) и решениями других Λ^2-уравнений, так как для метрики (3), порождающей уравнение (4), существует решение уравнений ПКГ (см. [3]) вида

$$\mathrm{II} = 2\sin[z(x, y)]\, dx\, dy, \tag{11}$$

т. е. данная сеть уже является асимптотической.

3. О взаимопреобразовании односолитонных решений уравнений синус-Гордона и МКдФ

3.1. Частное решение задачи погружения метрики, порождающей уравнение МКдФ

Рассмотрим метрику

$$ds^2 = dx^2 + (2u(x, y)^2 + 1)\, dx\, dy + 4(u(x, y))_x^2 + (2u(x, y)^2 + 1)^2\, dy^2, \tag{12}$$

порождающую Λ^2-уравнение

$$u_t = 6u^2 u_x + u_{xxx}, \tag{13}$$

т. е. модифицированное уравнение Кортевега—де Фриза.

Решение задачи погружения будем искать при следующих предположениях относительно функции $u(x, y)$.

1. Будем рассматривать решения $u(x, y)$ уравнения (13) типа бегущих волн, т. е. имеющие вид $u(x, y) = u(ax + by) = u(\theta)$, где $\theta = ax + by$. Тогда уравнение (13) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению
$$bu' = 6au^2 u' + a^3 u'''. \tag{14}$$

   Теперь проинтегрируем уравнение (14) один раз и получим
$$bu = 2au^3 + a^3 u'' + C_0. \tag{15}$$

2. Кроме того, будем рассматривать только те решения (13), которые достаточно быстро убывают на бесконечности. В силу сделанного предположения в уравнении (15) константу интегрирования C_0 можно положить равной нулю, тогда уравнение (15) принимает вид
$$bu = 2au^3 + a^3u''. \tag{16}$$
3. Заметим, что решение имеет смысл только тогда, когда a и b одного знака, так как в противном случае мы получим комплекснозначные решения уравнения (13).

При сделанных выше предположениях мы получаем простое решение системы ПКГ, т. е. вторую квадратичную форму поверхности
$$\mathrm{II} = \pm 4(u_x\,dx\,dy + (u_x + u_y)\,dy^2). \tag{17}$$
Теперь приведём исходную сеть, задаваемую метрикой (12), к асимптотическому виду. Для этого, пользуясь линейной зависимостью производных $au_x = bu_y$, решим уравнение
$$\mathrm{II} = \pm 4u_x\left(dx\,dy + \left(1 + \frac{b}{a}\right)dy^2\right) = 0. \tag{18}$$
Из (18) получим четыре различных преобразования параметров (x, y), приводящих исходную сеть к асимптотической. В силу эквивалентности асимптотических направлений на поверхности подробно остановимся только на одном:
$$y = t, \quad x = s - \left(1 + \frac{b}{a}\right)t. \tag{19}$$
Преобразование (19) параметров (x, y) приводит вторую квадратичную форму (17) к виду
$$\mathrm{II} = \pm 4u_s\,ds\,dt, \tag{20}$$
а автомодельную переменную к виду $\theta = as - at$.

Построим теперь взаимопреобразование решений уравнений синус-Гордона (4) и МКдФ (13). В соответствии с изложенным выше методом совместим полученные асимптотические сети, тем самым приведя автомодельную переменную θ к виду автомодельной переменной уравнения синус-Гордона.

Проиллюстрируем сказанное примером.

3.2. Взаимопреобразование односолитонных решений уравнений синус-Гордона и МКдФ

Рассмотрим односолитонное решение уравнения (13)
$$u(x, y) = \frac{\pm k}{\mathrm{ch}(kx + k^3y)}. \tag{21}$$

Для данного решения справедливо погружение (17) метрики (12). Преобразование (19) принимает вид

$$x = \hat{s} + \left(\frac{1}{k^2} + 1\right)\hat{t}, \quad y = -\frac{1}{k^2}\hat{t}$$

и приводит вторую квадратичную форму к виду

$$\mathrm{II} = \mp\frac{4}{k^2}u_{\hat{s}}\,d\hat{s}\,d\hat{t}, \tag{22}$$

а автомодельную переменную к виду $\theta = ks - t/k$, совпадающему с видом автомодельной переменной для односолитонного решения уравнения синус-Гордона.

Таким образом, получаем простое уравнение взаимопреобразования решений уравнения (4) и уравнения (13):

$$\sin z(\hat{s},\hat{t}) = \frac{\mp 2}{k^2}u_{\hat{s}}(\hat{s},\hat{t}), \tag{23}$$

а с учётом того, что

$$\sin z(\hat{s},\hat{t}) = z_{\hat{s}\hat{t}}(\hat{s},\hat{t}),$$

получаем вид односолитонного решения уравнения синус-Гордона, выраженного через односолитонное решение уравнения МКдФ:

$$z(\hat{s},\hat{t})) = \frac{\mp 2}{k^2}\int\limits_{-\infty}^{t} u(\hat{s},\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

Проверим соотношение (24) для односолитонного решения (21) уравнения МКдФ:

$$z(\hat{s},\hat{t})) = \frac{\mp 2}{k^2}\int\limits_{-\infty}^{\hat{t}} \frac{k}{\mathrm{ch}(k\hat{s} + \xi/k)}\,d\xi = \pm 4\,\mathrm{arctg}\left(\exp\left(k\hat{s} + \frac{\hat{t}}{k}\right)\right), \tag{25}$$

т. е. получаем односолитонное решение уравнения синус-Гордона.

Литература

[1] Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.

[2] Позняк Э. Г., Попов А. Г. Геометрия Лобачевского и уравнения математической физики // Докл. РАН. — 1993. — Т. 332, № 4. — С. 418—421.

[3] Позняк Э. Г., Попов А. Г. Геометрия уравнения sin-Гордона // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии. Вып. 23. — М.: ВИНИТИ, 1991. — С. 99—130.

[4] Попов А. Г. // ДАН. — 1990. — Т. 312, № 5. — С. 1109—1111.