

# О многосвязности линий уровня $m\pi$ $n$ -солитонных решений уравнения синус-Гордона

О. Д. ВИКТОРОВА

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

e-mail: viktorova@math446.phys.msu.ru

УДК 514.752

**Ключевые слова:** нелинейное дифференциальное уравнение, солитон, геометрия поверхностей.

## Аннотация

В работе исследуется характер поведения линий уровня  $z = m\pi$  многосолитонных решений уравнения синус-Гордона.

## Abstract

*O. D. Viktorova, On the multiply connectedness of level lines  $m\pi$  of  $n$ -soliton solutions of the sine-Gordon equation, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 255–263.*

The behavior of level lines  $z = m\pi$  of multi-soliton solutions of the sine-Gordon equation is considered.

## 1. Введение

В геометрии уравнение синус-Гордона

$$z_{xy} = \sin z \quad (1)$$

связано с проблемой изометрических погружений частей плоскости Лобачевского в трёхмерное евклидово пространство  $E^3$ . Уравнение возникло в связи с изучением специальных координатных сетей, обладающих тем свойством, что противоположные стороны в элементарном координатном четырёхугольнике равны [5].

В 1901 г. Д. Гильберт рассматривал вопрос о возможности изометрического погружения в целом в  $E^3$  плоскости Лобачевского в виде регулярной поверхности. Д. Гильберт исследовал сеть асимптотических линий такой поверхности. Эти линии образуют чебышёвскую сеть, т. е.  $z(x, y)$  — угол между асимптотическими линиями, которые выбраны в качестве координатных линий  $x$  и  $y$  (так называемый сетевой угол), — удовлетворяет уравнению (1). Так как линии  $x$  и  $y$

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 1, с. 255–263.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

не касаются друг друга, то естественно подчинить решение  $z(x, y)$  уравнения (1) условию

$$0 < z < \pi. \quad (2)$$

Гильберт доказал теорему о том, что на плоскости  $Oxy$  не существует регулярного решения  $z(x, y)$  уравнения (1), удовлетворяющего условию (2), т. е. в  $E^3$  не существует полной регулярной поверхности, изометричной в целом плоскости Лобачевского [1].

В 1979 г. Э. Г. Позняк рассмотрел вопрос о геометрической интерпретации регулярных решений уравнения (1), не удовлетворяющих условию (2). Он доказал следующую теорему [3].

**Теорема 1.** Пусть заданная на всей плоскости  $Oxy$  функция  $z = z(x, y) \in C^4$  представляет собой решение уравнения (1). Тогда существует такая заданная на  $Oxy$  векторная функция  $\vec{r} = \vec{r}(x, y) \in C^3$ , что график этой функции в области, где  $z \neq m\pi$ , представляет собой поверхность постоянной отрицательной кривизны  $k = -1$ . При этом координатные линии  $x$  и  $y$  на указанной поверхности образуют асимптотическую сеть с сетевым углом  $z(x, y)$ .

Иными словами, любому регулярному заданному на всей плоскости  $Oxy$  решению  $z$  уравнения (1) соответствует поверхность постоянной отрицательной кривизны, имеющая особые точки, отвечающие значениям  $z = m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Многосвязность линии уровня  $z = m\pi$  означает, что данному  $m$  соответствует несколько (линейно связных) множеств особых точек поверхности  $\Phi[z]$ . Э. Г. Позняк высказал гипотезу, что число многосвязных компонент в линиях уровня  $z = m\pi$  многосолитонного решения может идентифицировать как само решение, так и соответствующую ему псевдосферическую поверхность. Отметим, что под многосвязностью линии уровня понимается наличие нескольких линейно связных компонент связности линии.

В контексте данной гипотезы в настоящей статье исследуется характер поведения линий уровня  $z = m\pi$  многосолитонных решений уравнения (1). При этом устанавливается ранее не выявленное свойство многосвязности данных линий уровня.

## 2. Область значений $n$ -солитонного решения уравнения синус-Гордона

Многосолитонные решения уравнения (1) были получены методом преобразования Бэклунда, идея которого заключается в построении новых решений уравнения (1) по уже известным его решениям. Связь искомого решения  $z_n(x, y)$  уравнения (1) с уже найденным решением  $z_{n-1}(x, y)$  реализуется посредством соотношений

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = F_1 \left( z_{n-1}, z_n, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial z_n}{\partial y} = F_2 \left( z_{n-1}, z_n, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} \right), \quad (3)$$

в которых  $z_{n-1}$  и  $z_n$  — последовательные итерации, а  $F_1$  и  $F_2$  — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подстановка соотношений (3) в уравнение (1) и наложение на полученную систему условия совместимости приводят к соотношениям (см. [4])

$$\frac{\partial z_n}{\partial x} = \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + 2k \sin \frac{z_n + z_{n-1}}{2}, \quad \frac{\partial z_n}{\partial y} = -\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + \frac{2}{k} \sin \frac{z_n - z_{n-1}}{2}, \quad (4)$$

где  $k$  — некоторая постоянная.

Система (4) допускает следующую рекуррентную связь последовательных итераций искомого преобразования:

$$z_{n+1} = z_{n-1} + 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{k_i + k_j}{k_i - k_j} \operatorname{tg} \frac{z_n^i - z_n^j}{4} \right), \quad (5)$$

где  $k_i$  и  $k_j$  — некоторые постоянные,  $k_i \neq k_j$ .

Полагая в (4)  $z_0 \equiv 0$ , получаем следующее выражение для функции  $z_1^{(i)}$ :

$$z_1^{(i)} = 4 \operatorname{arctg} \exp \left( k_i x + \frac{y}{k_i} + b_i \right), \quad k_i, b_i = \operatorname{const},$$

в физике она называется односолитонным решением.

Таким образом, известна область значений  $z_n$  для  $n = 0$  и  $n = 1$ :

$$z_0 \equiv 0, \quad 0 < z_1 < 2\pi. \quad (6)$$

Согласно (5) можно получить бесконечное семейство решений  $z_n(x, y)$ , называемых в физике многосолитонными решениями, представляющих собой связанные состояния уединённых локализованных нелинейных волн типа  $z_1(x, y)$  (солитонов). Так, для  $z_2^{(1,2)}$  рекуррентное соотношение (5) примет вид

$$z_2^{(1,2)} = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \operatorname{tg} \frac{z_1^{(1)} - z_1^{(2)}}{4} \right), \quad (7)$$

а для  $z_2^{(2,3)}$  и  $z_3^{(1,3)}$  соответственно

$$z_2^{(2,3)} = 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{k_2 + k_3}{k_2 - k_3} \operatorname{tg} \frac{z_1^{(2)} - z_1^{(3)}}{4} \right), \quad (8)$$

$$z_3^{(1,3)} = z_1^{(1)} + 4 \operatorname{arctg} \left( \frac{k_1 + k_3}{k_1 - k_3} \operatorname{tg} \frac{z_2^{(1,2)} - z_2^{(2,3)}}{4} \right). \quad (9)$$

Из (7)–(9), учитывая (6), находим области значений  $z_n$  для  $n = 2$  и  $n = 3$ :

$$-2\pi < z_2 < 2\pi, \quad -2\pi < z_3 < 4\pi.$$

Аналогичным образом, учитывая область значений  $(n - 2)$ -солитонного решения  $z_{n-2}$ , получаем область значений  $n$ -солитонного решения  $z_n$  для любого  $n$ :

$$-4\pi < z_4 < 4\pi, \quad -4\pi < z_5 < 6\pi, \quad -6\pi < z_6 < 6\pi, \dots,$$

т. е. справедливы соотношения

$$-2(k-1)\pi < z_{2k-1} < 2k\pi, \quad -2k\pi < z_{2k} < 2k\pi.$$

### 3. Линии уровня $z_2 = m\pi$

Покажем, что в линиях уровня двухсолитонного решения  $z_2 = m\pi$  многосвязных компонент не возникает. Так как  $-2\pi < z_2 < 2\pi$ , то необходимо рассмотреть линии уровня  $z_2 = m\pi$  при  $m = 0$  и  $m = \pm 1$ .

При  $m = 0$  имеем

$$4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \frac{e^{k_1 x + \frac{y}{k_1} + b_1} - e^{k_2 x + \frac{y}{k_2} + b_2}}{1 + e^{(k_1 + k_2)x + (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})y + b_1 + b_2}} \right\} = 0,$$

откуда получаем явное выражение для линии уровня  $z_2(x, y) = 0$ :

$$y(x) = k_1 k_2 x + \frac{b_2 - b_1}{k_2 - k_1}. \quad (10)$$

Но (10) представляет собой уравнение прямой, поэтому для данной линии уровня многосвязности не наблюдается.

Сложнее получить выражение для линии уровня  $z_2 = m\pi$  при  $m = 1$  (случай  $m = -1$  рассматривается аналогично). Имеем

$$4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \frac{e^{k_1 x + \frac{y}{k_1} + b_1} - e^{k_2 x + \frac{y}{k_2} + b_2}}{1 + e^{(k_1 + k_2)x + (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})y + b_1 + b_2}} \right\} = \pi,$$

откуда получаем нетривиальное уравнение относительно  $y$ :

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) \left( e^{k_1 x + \frac{y}{k_1} + b_1} - e^{k_2 x + \frac{y}{k_2} + b_2} \right) = \\ = (k_1 - k_2) \left( 1 + e^{(k_1 + k_2)x + (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})y + b_1 + b_2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Будем искать параметрическое выражение для функции  $y(x)$ , заданной в неявном виде (11). Введём обозначения

$$\alpha = e^{k_1 x}, \quad \beta = e^{\frac{y}{k_1}}, \quad B_1 = e^{b_1}, \quad B_2 = e^{b_2}, \quad t = \alpha\beta, \quad w = \alpha^{\frac{k_2}{k_1}} \beta^{\frac{k_1}{k_2}}. \quad (12)$$

Используя эти обозначения, перепишем соотношение (11) в виде

$$(k_1 + k_2)(B_1 t - B_2 w) = (k_1 - k_2)(1 + B_1 B_2 t w). \quad (13)$$

Введём обозначение

$$k = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}.$$

Из (13) получаем явное выражение для  $w(t)$ :

$$w(t) = \frac{B_1 t - k}{B_2 (B_1 k t + 1)}. \quad (14)$$

Согласно обозначениям (12)

$$\beta = \alpha^{-1}t, \quad (15)$$

поэтому

$$w(t) = \alpha^{\frac{k_2}{k_1}} \alpha^{-\frac{k_1}{k_2}} t^{\frac{k_1}{k_2}}. \quad (16)$$

Приравнивая выражения (14) и (16) для  $w$  и учитывая (15), находим  $\alpha$  и  $\beta$  как функции  $t$ :

$$\alpha(t) = \left( \frac{B_2 t^{\frac{k_1}{k_2}} (B_1 k t + 1)}{B_1 t - k} \right)^{\frac{k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2}}, \quad \beta(t) = \left( \frac{B_2 t^{\frac{k_1}{k_2}} (B_1 k t + 1)}{B_1 t - k} \right)^{-\frac{k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2}} t. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (12), получаем параметрическое выражение для линии уровня  $z_2 = \pi$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k_2}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ b_2 + \frac{k_1}{k_2} \ln t + \ln(B_1 k t + 1) - \ln(B_1 t - k) \right\}, \\ y(t) &= k_1 t - \frac{k_1^2 k_2}{k_1^2 - k_2^2} \left\{ b_2 + \frac{k_1}{k_2} \ln t + \ln(B_1 k t + 1) - \ln(B_1 t - k) \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Исследуем график функции  $y(x)$ , заданной (18). Найдём область определения этой функции как функции от  $t$ . Из (16) следует, что  $w > 0$ , откуда согласно (14)  $\frac{B_1 t - k}{B_1 k t + 1} > 0$ . Таким образом, при  $k > 0$  имеем  $t > \frac{k}{B_1} > 0$ , а при  $k < 0 - 0 < t < -\frac{1}{B_1 k}$ .

Найдём теперь асимптоты графика функции  $y(x)$ :

- 1)  $\tilde{y}_1(x) = -k_1^2 x + k_1(\ln k - b_1)$  для  $k > 0$  при  $t \rightarrow \frac{k}{B_1} + 0$  (т. е. при  $x \rightarrow +\infty$ );
- 2)  $\tilde{y}_2(x) = -k_2^2 x + k_2(\ln(-k) - b_2)$  для  $k < 0$  при  $t \rightarrow 0 + 0$  (т. е. при  $x \rightarrow -\infty$ );
- 3)  $\tilde{y}_3(x) = -k_1^2 x - k_1(\ln(-k) + b_1)$  при  $t \rightarrow -\frac{1}{B_1 k} - 0$  (т. е. также при  $x \rightarrow -\infty$ ).

Особые точки линии  $\{x(t), y(t)\}$  находятся из условия  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0$ , т. е.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0.$$

Эти условия выполняются при

$$t = \frac{-k_2 \pm \sqrt{k_2^2 + k_1^2}}{k_1 B_1}, \quad t = \frac{k_1 \pm \sqrt{k_2^2 + k_1^2}}{k_2 B_1}$$

соответственно. Приравнивая полученные выражения для  $t$ , находим условие на коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ , при которых может иметь место особенность:  $k_1^2 + k_2^2 = 0$ , откуда  $k = -\frac{k_2}{k_1}$ . Таким образом, особенность возможна при  $t = \frac{k}{B_1}$ , но данное значение  $t$  не принадлежит области определения функции, заданной (18), ни при каких  $k$ .

Таким образом, в линиях уровня двухсолитонного решения не может возникнуть многосвязных компонент.

График линий уровня  $z_2 = m\pi$  имеет вид, изображённый на рис. 1.

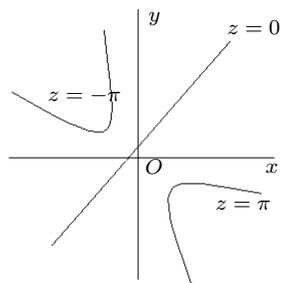


Рис. 1

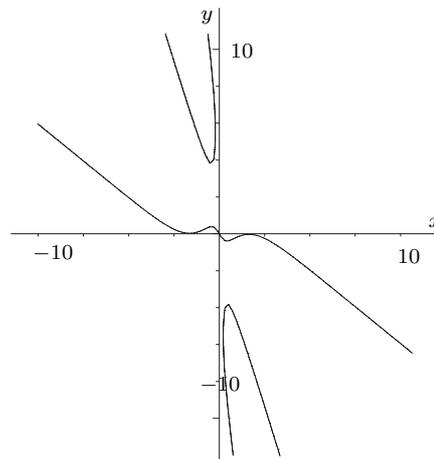


Рис. 2

Кривые  $z_2 = \pi$  и  $z_2 = -\pi$  расположены симметрично относительно начала координат, а график линии  $z_2 = 0$ , как уже было отмечено, представляет собой прямую.

#### 4. Линии уровня $m\pi$ $n$ -солитонных решений ( $n \geq 3$ )

Ниже приводятся результаты компьютерного моделирования (с использованием Maple 8) линий уровня трёхсолитонного решения для различных значений параметров  $k_1, k_2, k_3$ , а также линий уровня  $n$ -солитонных решений при  $n = 4, 5, 6$ .

Рассмотрим линию уровня  $z_3^{1,3} = \pi$ . Положим для простоты  $b_1 = b_2 = b_3 = 0$  (результаты исследования показывают, что на вид линии уровня это никак не повлияет). Для  $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$  график данной линии уровня изображён на рис. 2.

Таким образом, при данных значениях параметров наблюдается многосвязность. Теперь зафиксируем  $k_1$  и  $k_3$  и будем непрерывно менять  $k_2$  в пределах, например, от  $-100$  до  $100$ . При  $k_2 \simeq 5,01$  многосвязность исчезает (см. рис. 3).

Аналогично, фиксируя  $k_1 = 1, k_2 = 2$  и непрерывно меняя  $k_3$  в тех же пределах, наблюдаем исчезновение многосвязности при  $k_3 \simeq 0,66$  (см. рис. 4). Такое поведение линий уровня легко усматривается из графика функции  $z_3^{1,3}(x, y)$ , изображённого на рис. 5.

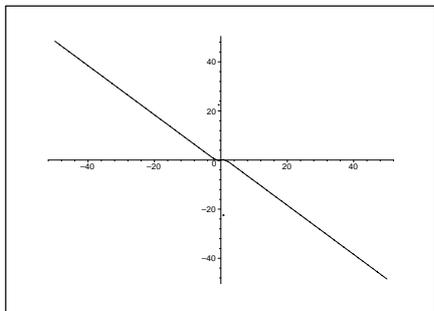


Рис. 3

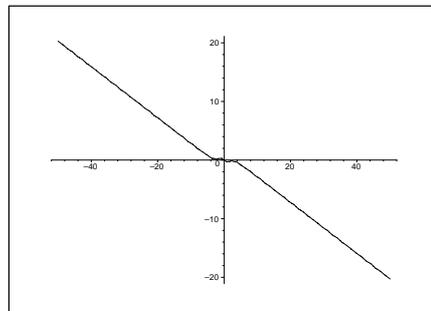


Рис. 4

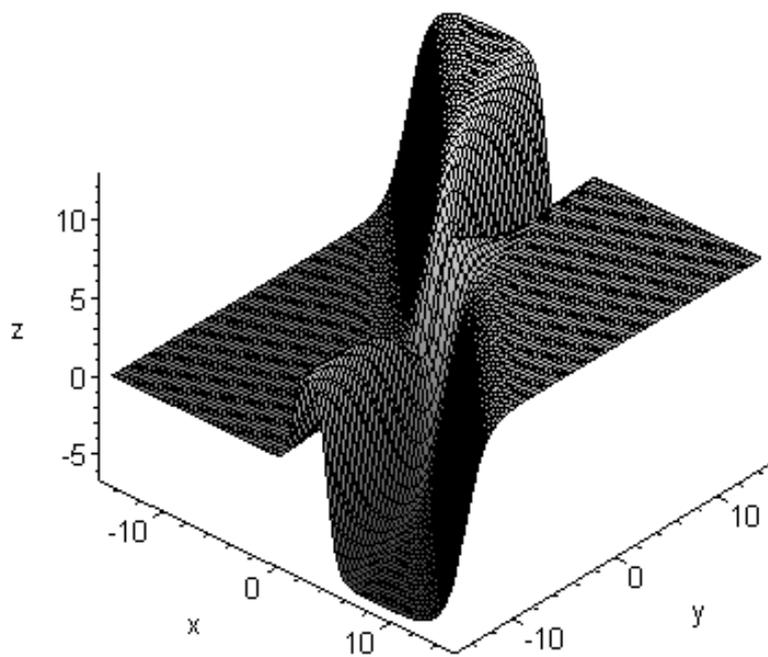


Рис. 5

От значений параметров  $k_1, k_2, k_3$  зависит взаимное расположение и «амплитуда» складок поверхности, которая может пересекать или не пересекать плоскость  $z = m\pi$ .

Отмеченное явление многосвязности анализировалось для  $n = 3$ , но оно экспериментально наблюдалось и при  $n = 4, 5, 6$ , за исключением определённых значений параметров  $k_i$ . С ростом  $n$  количество складок поверхности увеличивается. Например, график пятисолитонного решения  $z_5^{(1,5)}$  при  $k_1 = 1, k_2 = 2, \dots, k_5 = 5$  изображён на рис. 6.

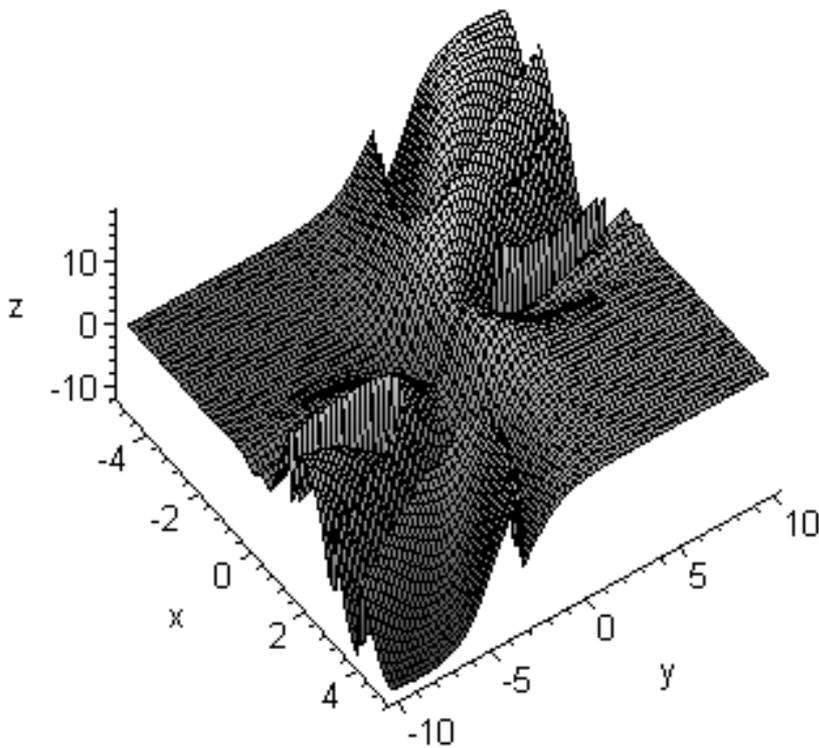


Рис. 6.

## Литература

- [1] Гильберт Д. Основания геометрии. — М.—Л., 1948.
- [2] Пелиновский Е. Н. Некоторые точные методы в теории нелинейных волн // Изв. высш. учебн. завед. Сер. радиофизика. — 1976. — № 5. — С. 883—901.

- [3] Позняк Э. Г. Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения  $z_{xy} = \sin z$  // Дифференц. уравн. — 1979. — Т. 15, № 7. — С. 1332—1336.
- [4] Позняк Э. Г., Попов А. Г. Геометрия уравнения син-Гордона // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии. Вып. 23. — М.: ВИНТИ, 1991. — С. 99—130.
- [5] Чебышёв П. Л. О крое одежд // Успехи мат. наук. — 1946. — Т. 1, № 2. — С. 38—42.

