О бесконечных многоугольниках плоскости Лобачевского

Ж. КАЙДАСОВ

УДК 514.132

Ключевые слова: плоскость Лобачевского, интерпретация Пуанкаре, многоугольник.

Аннотация

В работе доказаны две теоремы о свойствах бесконечных многоугольников плоскости Лобачевского.

Abstract

Zh. Kaidasov, On infinite polygons of the Lobachevsky plane, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 1, pp. 265—269.

Two theorems about properties of infinite polygons on the Lobachevsky plane are proved.

Напомним некоторые факты геометрии Лобачевского и проиллюстрируем их в модели Пуанкаре плоскости Лобачевского [1, 3].

Роль плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре играет верхняя полуплоскость $\{(x, y),\ y > 0\}$ без границы $\{y = 0\}$, роль прямых выполняют содержащиеся в ней полуокружности с центрами на оси абсцисс (без концов) и вертикальные лучи. Будем называть эти прямые *Л*-прямыми (рис. 1). Точки граничной прямой x называются бесконечно удалёнными точками плоскости Лобачевского (плоскости *Л*).

Если две *Л*-прямые не пересекаются, то они либо имеют, и притом единственный, общий перпендикуляр и бесконечно расходятся друг от друга в обе стороны, либо параллельны и расходятся в одну сторону и асимптотически сближаются в другую. Таким образом, никакие две прямые не располагаются на постоянном расстоянии друг от друга. Линия, проходящая на постоянном расстоянии от прямой, — выпуклая кривая, она называется *эквидистантой*. При сдвиге вдоль прямой точки плоскости, не лежащие на этой прямой, перемещаются по эквидистантам. Они пересекают прямые, перпендикулярные данной прямой, под прямым углом.

Выясним, как выглядят эквидистанты для *Л*-прямой, изображаемой лучом. Пусть луч a перпендикулярен граничной прямой x в точке O. Тогда все полуокружности с центром O пересекают его под прямым углом. В геометрии Лобачевского это означает, что они изображают *Л*-прямые, перпендикулярные

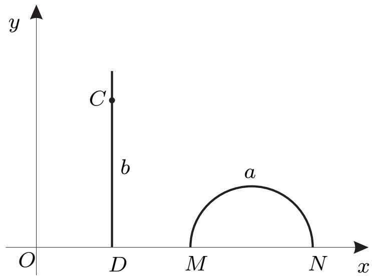

Рис. 1

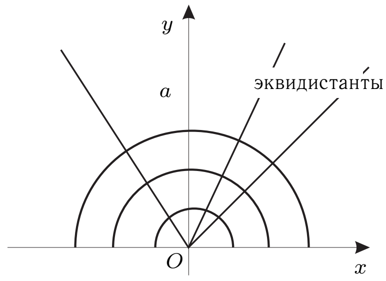

Рис. 2

Л-прямой a. Отсюда видно, что лучи с общим началом на граничной прямой x изображают эквидистанты (рис. 2).

В модели Пуанкаре параллельные *Л*-прямые изображаются полуокружностями (лучами), касающимися друг друга в одном их общем конце на граничной прямой x. Кривая, перпендикулярная параллельным друг другу *Л*-прямым, называется *орициклом*. В модели Пуанкаре лучи, перпендикулярные граничной прямой, представляют собой параллельные друг другу *Л*-прямые. Поэтому соответствующие орициклы — прямые, параллельные граничной прямой x (рис. 3).

Вообще же, в плоскости *Л* через три точки, не лежащие на одной *Л*-прямой, проходит либо окружность, либо орицикл, либо эквидистанта. Окружность перпендикулярна лучам с общим началом, орицикл — параллельным лучам, эквидистанта — лучам, перпендикулярным *Л*-прямой (кривая, пересекающая линии какого-либо семейства под прямым углом, называется ортогональной траекторией этого семейства).

Замечательной особенностью модели Пуанкаре является тот факт, что угол между *Л*-прямыми в этой модели равен обычному углу между дугами. Подчеркнём, что при этом расстояние между точками плоскости Лобачевского, конечно же, не равно обычному расстоянию: оно измеряется, например, для двух *Л*-точек $P_1(0, y_1)$, $P_2(0, y_2)$, лежащих на оси ординат, по формуле

$$S(P_1, P_2) = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right). \tag{1}$$

Посредством преобразований-инверсий полуплоскость можно отобразить на внутренность круга, тогда получится модель плоскости *Л* внутри круга. Роль *Л*-прямых в ней играют дуги окружностей, перпендикулярные ограничивающей окружности. Кривая, перпендикулярная всем *Л*-прямым семейства параллельных *Л*-прямых, есть просто окружность, касающаяся ограничивающей окружности (абсолюта) изнутри.

Бесконечным многоугольником (БМ) называется пересечение замкнутых *Л*-полуплоскостей, границы которых — прямые линии на плоскости *Л*, не имеющие общих точек.

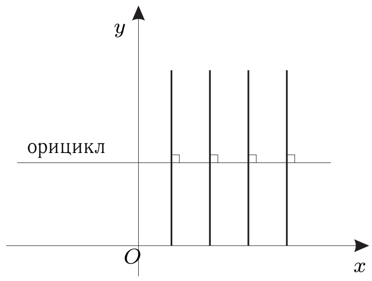

Рис. 3

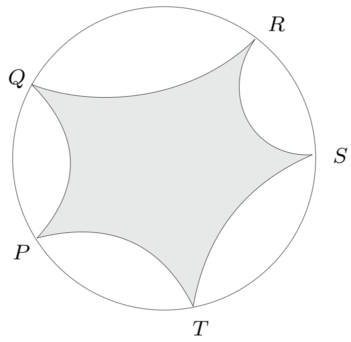

Рис. 4

Очевидно, граница любого БМ состоит из конечного или счётного множества $Л$-прямых, которые в дальнейшем будут именоваться сторонами БМ. Две стороны БМ называются соседними, если они параллельны. Про каждую из таких сторон будем говорить, что она имеет соседнюю. Соседние стороны определяют бесконечно удалённую вершину БМ. Понятие бесконечно удалённой вершины становится особенно наглядным, если обратиться к модели плоскости $Л$ в круге Пуанкаре.

На рис. 4 изображён бесконечный пятиугольник с бесконечно удалёнными вершинами P, Q, R, S, T.

Множество всех БМ разделяется на две части: БМ, содержащие полуплоскости, и БМ, не содержащие полуплоскостей.

Мы рассмотрим множество БМ, не содержащих полуплоскостей. Выделим в нём два типа БМ: БМ$_э$ и БМ$_о$. БМ$_э$ — это БМ, для которых можно указать такую эквидистанту с базой b, что все стороны БМ начиная с некоторого номера касаются эквидистанты, а b является одной из его сторон (рис. 5). БМ$_о$ — это БМ, для которых можно указать такой орицикл с бесконечно удалённой точкой Q, что все стороны БМ начиная с некоторого номера касаются орицикла, а одна из его сторон имеет вершину Q (рис. 6).

Теорема 1. *Длины ортогональных проекций сторон БМ$_э$ на базу соответствующей эквидистанты — постоянные величины.*

Доказательство. Пусть база b эквидистанты l изображается лучом Oy (рис. 7). Заметим, что радиусы полуокружностей, изображающих касающиеся стороны многоугольника БМ$_э$, возрастают по закону

$$r_1 = r_1, \quad r_2 = r_1(1+2r_1), \quad r_3 = r_1(1+2r_1)^2, \ldots, \quad r_n = r_1(1+2r_1)^{n-1}, \ldots \quad (2)$$

(для удобства вычисления можно взять $OC_1 = 1$).

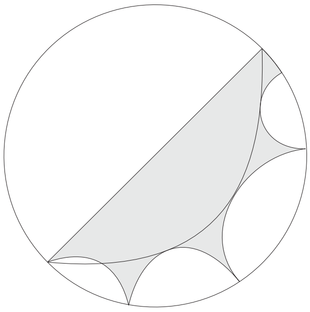

Рис. 5

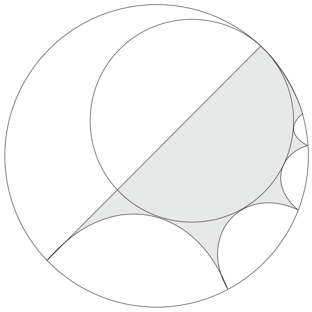

Рис. 6

Если $N_1, N_2, \ldots, N_n$ — точки касания соответствующих полуокружностей с центрами $O_1, O_2, \ldots, O_n$ с лучом l, то из подобия треугольников ON_1O_1, $ON_2O_2, \ldots, ON_nO_n$ получим

$$\begin{aligned}
&\frac{r_1}{1+r_1} = \frac{r_2}{1+2r_1+r_2} \implies r_2 = r_1(1+2r_1),\\
&r_3 = (1+2r_1+2r_2)r_1 = r_1(1+2r_1)^2,\\
&\ldots\\
&r_n = r_1(1+2r_1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Теперь вершины $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$ многоугольника ортогонально спроектируем на сторону Oy и рассмотрим отрезок $C'_nC'_{n+1}$ [2]. Ординаты концов этого отрезка соответственно равны $1+2r_1+\ldots+2r_{n-1}$ и $1+2r_1+\ldots+2r_{n-1}+2r_n$. Вычислим длину Л-отрезка $C'_nC'_{n+1}$ по формуле (1) с учётом (2):

$$\begin{aligned}
S(C'_n, C'_{n+1}) &= \ln\frac{1+2r_1+2r_2+\ldots+2r_n}{1+2r_1+2r_2+\ldots+2r_{n-1}} =\\
&= \ln\left(1+\frac{2r_n}{1+2r_1+\ldots+2r_{n-1}}\right) = \ln\left[1+\frac{2r_1(1+2r_1)^{n-1}}{(1+2r_1)^{n-1}}\right] = \ln(1+2r_1).
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого номера $n \geqslant 1$ $S(C'_n, C'_{n+1}) = \ln(1+2r_1) = \mathrm{const}$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 2. *Длины ортогональных проекций сторон БМ$_{\text{о}}$ на его сторону, содержащую вершину Q, убывают.*

Доказательство. Пусть орицикл изображается прямой m, параллельной граничной прямой x, а сторона БМ$_{\text{о}}$, содержащая вершину Q, изображается лучом Oy (рис. 8). Тогда абсциссами вершин $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$ БМ$_{\text{о}}$ соответственно будут $2r, 2\cdot 2r, \ldots, n\cdot 2r, (n+1)\cdot 2r$. Ортогональными проекциями вершин БМ$_{\text{о}}$ на сторону Oy будут точки $C'_1(0, 2r), \ldots, C'_n(0, n\cdot 2r), C'_{n+1}(0, (n+1)\cdot 2r)$.

Теперь с помощью формулы (1) вычислим длину отрезка $C'_nC'_{n+1}$:

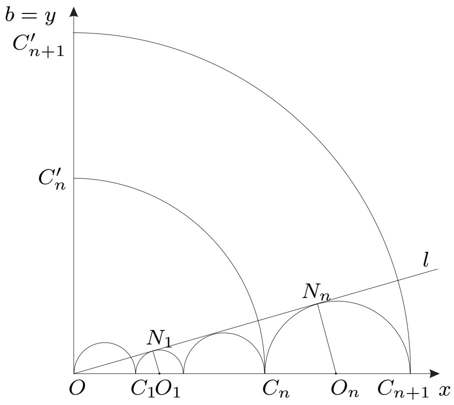

Рис. 7

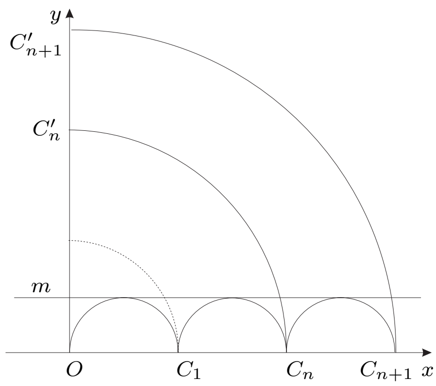

Рис. 8

$$S_n(C'_n, C'_{n+1}) = \ln \frac{(n+1)2r}{n2r} = \ln \frac{n+1}{n}.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем

$$S_n = \lim \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

Теорема доказана. □

Литература

[1] Александров А. Д. О геометрии Лобачевского // Математика в школе. — 1993. — № 2. — С. 2—7.

[2] Гиндикин С. Волшебный мир Анри Пуанкаре // Квант. — 1976. — № 3. — С. 9—17.

[3] Кадомцев С. Б. Геометрия Лобачевского и физика. — М.: Знание, 1984. — 64 с. — Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика, № 8.