Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами

Е. И. БУНИНА, А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: helen_bunina@mtu-net.ru

УДК 512.643+512.552.2

Ключевые слова: линейно упорядоченное кольцо, обратимые матрицы, неотрицательные элементы, автоморфизмы.

Аннотация

В работе доказано, что любой автоморфизм полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над линейно упорядоченным ассоциативным кольцом на некоторой специально определённой подгруппе совпадает с композицией внутреннего автоморфизма полугруппы, автоморфизма кольца, сохраняющего порядок, и центральной гомотетии.

Abstract

E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, Automorphisms of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 3—23.

In this paper, we prove that every automorphism of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements over a linearly ordered associative ring on some specially defined subgroup coincides with the composition of an inner automorphism of the semigroup, an order-preserving automorphism of the ring, and a central homothety.

Пусть R — линейно упорядоченное кольцо с $1/2$, $\mathrm{G}_n(R)$ $(n \geqslant 3)$ — подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В [2] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$ в случае, когда R является телом и $n \geqslant 2$. В данной работе мы описываем все автоморфизмы полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geqslant 3$.

1. Необходимые определения и понятия. Формулировка основной теоремы

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1.

Определение 1. Кольцо R называется линейно упорядоченным, если в нём выделено подмножество R_+, удовлетворяющее следующим условиям:

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 3—23.

1) $\forall x \in R\ (x = 0 \vee x \in R_+ \vee -x \in R_+) \wedge (x \in R_+ \Rightarrow -x \notin R_+)$;
2) $\forall x, y \in R_+\ (x + y \in R_+ \wedge xy \in R_+)$.

Если $x - y \in R_+$ ($x - y \in R_+ \cup \{0\}$), то мы говорим, что $x \in R$ больше (не меньше), чем $y \in R$, и обозначаем это через $x > y$ или $y < x$ ($x \geqslant y$ или $y \leqslant x$).

Очевидно, что $1 \in R_+$, так как в противном случае $-1 \in R_+$, поэтому $1 = (-1)(-1) \in R_+$, что невозможно.

Легко доказать по индукции, что в линейно упорядоченном кольце R имеет место $\operatorname{char} R = 0$.

Элементы множества R_+ называются *положительными*, а элементы множества $R_+ \cup \{0\}$ — *неотрицательными*.

Определение 2. Пусть R — линейно упорядоченное кольцо. Через $\mathrm{G}_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца R обозначается через R^*. Если $1/2 \in R$, то множество R^* бесконечно, так как оно содержит все $1/2^n$ для $n \in \mathbb{N}$. Множество $R_+ \cap R^*$ обозначается через R_+^*. Если $1/2 \in R$, то оно также бесконечно.

Определение 3. Предположим, что R — линейно упорядоченное кольцо, $T \subset R$. Тогда $Z(T)$ обозначает центр множества T, $Z^*(T) = Z(T) \cap R^*$, $Z_+(T) = Z(T) \cap R_+$, $Z_+^*(T) = Z(T) \cap R_+^*$.

Ясно, что $Z_+^*(R) \subseteq Z_+^*(R^*)$. Если $1/2 \in R$, то все эти множества бесконечны для $T = R$.

Определение 4. Пусть $I = I_n$, $\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых матриц из $\mathrm{G}_n(R)$, Σ_n — симметрическая группа порядка n, S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ (т. е. матрица $(\delta_{i\sigma(j)})$, где $\delta_{i\sigma(j)}$ — символ Кронекера), $S_n = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$, $\operatorname{diag}[d_1, \ldots, d_n]$ — диагональная матрица с элементами $d_1, \ldots, d_n$ на диагонали, $d_1, \ldots, d_n \in R_+^*$.

Определение 5. Через $\mathrm{D}_n(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $\mathrm{G}_n(R)$, через $\mathrm{D}_n^Z(R)$ — центр группы $\mathrm{D}_n(R)$.

Ясно, что группа $\mathrm{D}_n^Z(R)$ состоит из всех матриц $\operatorname{diag}[d_1, \ldots, d_n]$, $d_1, \ldots, d_n \in Z_+^*(R^*)$.

Определение 6. Если $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — подмножества в $\mathrm{G}_n(R)$, то положим

$$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B}\ (ab = ba)\}.$$

Матрица $A \in \Gamma_n(R)$, удовлетворяющая условию $A^2 = I$, называется *инволюцией*.

Определение 7. Через $K_n(R)$ обозначим подполугруппу в $\mathrm{G}_n(R)$, состоящую из всех матриц

$$\begin{pmatrix} X_{n-1} & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad X_{n-1} \in \mathrm{G}_{n-1}(R), \quad x \in R_+^*.$$

Пусть E_{ij} — матрица с единственным ненулевым элементом $e_{ij} = 1$.

Определение 8. Через $B_{ij}(x)$ обозначим матрицу $I + xE_{ij}$. Пусть $\mathbf{P}$ обозначает подполугруппу в $\mathrm{G}_n(R)$, порождённую всеми матрицами S_σ ($\sigma \in \Sigma_n$), $B_{ij}(x)$ ($x \in R_+$, $i \neq j$) и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in \mathrm{D}_n(R)$.

Определение 9. Две матрицы $A, B \in \mathrm{G}_n(R)$ называются $\mathcal{P}$-эквивалентными (см. [2]), если существуют матрицы $A_j \in \mathrm{G}_n(R)$, $j = 0, \ldots, k$, $A_0 = A$, $A_k = B$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$, такие что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Определение 10. Через $\mathrm{GE}_n^+(R)$ обозначим подполугруппу в $\mathrm{G}_n(R)$, порождённую всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Заметим, что если R — тело, то $\mathrm{GE}_n^+(R) = \mathrm{G}_n(R)$.

Определение 11. Если G — некоторая полугруппа (например, $G = R_+^*$, $\mathrm{G}_n(R), \mathrm{GE}_n^+(R)$), то гомоморфизм $\lambda(\cdot)\colon G \to G$ называется центральным гомоморфизмом G, если $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega(\cdot)\colon G \to G$, такое что для любого $X \in G$
$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$
где $\lambda(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, называется центральной гомотетией.

Например, если $R = \mathbb{R}$ (поле действительных чисел), то гомоморфизм $\lambda(\cdot)\colon \mathrm{G}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{G}_n(\mathbb{R})$, такой что $\lambda(A) = |\det A| \cdot I$ для любого $A \in \mathrm{G}_n(\mathbb{R})$, является центральным гомоморфизмом, а отображение $\Omega(\cdot)\colon \mathrm{G}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{G}_n(\mathbb{R})$, такое что $\Omega(A) = |\det A| \cdot A$ для любого $A \in \mathrm{G}_n(\mathbb{R})$, является центральной гомотетией. Заметим, что центральная гомотетия $\Omega(\cdot)$ всегда является эндоморфизмом полугруппы G: для любых $X, Y \in G$
$$\Omega(X)\Omega(Y) = \lambda(X)X \cdot \lambda(Y)Y = \lambda(X)\lambda(Y)X \cdot Y = \lambda(XY)XY = \Omega(XY).$$

Для каждой матрицы $M \in \Gamma_n(R)$ пусть Φ_M обозначает автоморфизм полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, такой что $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$ для любого $X \in \mathrm{G}_n(R)$.

Для каждого $y(\cdot) \in \mathrm{Aut}(R_+)$ через Φ^y обозначим автоморфизм полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, такой что $\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$ для любого $X = (x_{ij}) \in \mathrm{G}_n(R)$.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть Φ — автоморфизм полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$. Тогда на полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$ выполнено $\Phi = \Phi_M \Phi^c \Omega$, где $M \in \Gamma_n(R)$, $c(\cdot) \in \mathrm{Aut}(R_+)$, $\Omega(\cdot)$ — центральная гомотетия полугруппы $\mathrm{GE}_n^+(R)$.*

2. Построение автоморфизма Φ'

В этом разделе мы предполагаем, что фиксирован некоторый автоморфизм $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R))$, где $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, и с помощью его мы строим новый автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R))$, такой что $\Phi' = \Phi_{M'}\Phi$ для некоторой матрицы $M' \in \Gamma_n(R)$ и для всех $\sigma \in \Sigma_n$ выполнено условие $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$.

Следующая лемма (в большей общности) доказана в [1].

Лемма 1. $\Gamma_n(R) = \mathrm{D}_n(R) \cdot S_n$, *т. е. группа $\Gamma_n(R)$ состоит из всех мономиальных матриц.*

Доказательство. Очевидно, что любая мономиальная матрица обратима, т. е. $\mathrm{D}_n(R)S_n \subset \Gamma_n(R)$.

Теперь рассмотрим некоторую матрицу $A = (a_{ij}) \in \Gamma_n(R)$. Нам требуется показать, что в каждой её строке (столбце) содержится ровно один ненулевой элемент. Предположим, что это не так и i-я строка матрицы A содержит по крайней мере два ненулевых (т. е. положительных) элемента a_{ik} и a_{ij}. Рассмотрим обратную матрицу $B = (b_{lm})$. Её k-я строка ненулевая, поэтому существует такое l, что $b_{kl} > 0$. Значит,

$$\delta_{il} = a_{i1}b_{1l} + \ldots + a_{in}b_{nl} \geqslant a_{ik}b_{kl} > 0,$$

и поэтому $i = l$.

Аналогично существует такое m, что $b_{jm} > 0$, т. е. $i = m$. Таким образом, $l = m = i$. Значит, $b_{ji} > 0$, $b_{ki} > 0$.

Условие $I = BA$ влечёт

$$\delta_{jk} = b_{j1}a_{1k} + \ldots + b_{jn}a_{nk} \geqslant b_{ji}a_{ik} > 0.$$

Следовательно, $j = k$, что противоречит предположению о том, что i-я строка содержит два ненулевых элемента. □

Заметим, что представление матрицы $A \in \Gamma_n(R)$ в виде

$$A = DS_\sigma, \quad D \in \mathrm{D}_n(R), \quad \sigma \in \Sigma_n,$$

единственно.

Лемма 2. *Если $r \in R_+$ и $r^k = 1$ для некоторого $k \geqslant 1$, то $r = 1$.*

Доказательство. Нам нужно показать, что из $x > 1$ следует $x^k > 1$, а из $0 < x < 1$ следует $0 < x^k < 1$.

Докажем по индукции, что

$$x > 1 \implies x^k > 1.$$

Если $k = 1$, то соотношение очевидно. Предположим, что наше соотношение доказано для некоторого k, т. е. $x > 1$, $x^k > 1$, откуда $x - 1 \in R_+$, $x^k - 1 \in R_+$, следовательно,

$$x^{k+1} - x \in R_+ \implies (x^{k+1} - x) + (x - 1) \in R_+ \implies x^{k+1} - 1 \in R_+ \implies x^{k+1} > 1.$$

Аналогично докажем по индукции, что

$$0 < x < 1 \implies 0 < x^k < 1.$$

Если $k = 1$, то соотношение очевидным образом выполнено. Предположим, что наше соотношение доказано для некоторого k. Значит, $x, x^k, 1 - x, 1 - x^k \in R_+$, откуда

$$x(1 - x^k) = x - x^{k+1} \in R_+ \implies (1 - x) + (x - x^{k+1}) = 1 - x^{k+1} \in R_+,$$

т. е. $0 < x^{k+1} < 1$.

Таким образом, соотношение доказано. □

Ясно, что в кольце R нет делителей нуля.

Доказательство следующей леммы можно найти в [2].

Лемма 3. *Если A — инволюция в полугруппе $\mathrm{G}_n(R)$, то $A=\mathrm{diag}[t_1,\ldots,t_n]S_\sigma$, где $\sigma^2=1$ и для любого $i=1,\ldots,n$ выполнено $t_i\cdot t_{\sigma(i)}=1$.*

Доказательство. По лемме 1 имеем $A=dS_\sigma$, где $d=\mathrm{diag}[d_1,\ldots,d_n]$. Так как $A^2=I$, то

$$dS_\sigma dS_\sigma = I \implies dS_\sigma = S_\sigma^{-1}d^{-1}S_\sigma S_\sigma^{-1}.$$

Так как представление матрицы A в виде dS_σ единственно и $S_\sigma^{-1}d^{-1}S_\sigma\in\mathrm{D}_n(R)$, то $d=S_\sigma^{-1}d^{-1}S_\sigma$ и $S_\sigma=S_\sigma^{-1}$.

Значит, $\sigma^2=1$ и $\mathrm{diag}[d_1,\ldots,d_n]=\mathrm{diag}[d^{-1}_{\sigma(1)},\ldots,d^{-1}_{\sigma(n)}]$, т. е. $t_i=t^{-1}_{\sigma(i)}$. □

Лемма 4. *Если Φ — автоморфизм полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, где $n\geqslant 3$, $1/2\in R$, то*

1) $\Phi(\Gamma_n(R))=\Gamma_n(R)$;
2) $\Phi(\mathrm{D}_n(R))=\mathrm{D}_n(R)$;
3) $\Phi(\mathrm{D}_n^Z(R))=\mathrm{D}_n^Z(R)$.

Доказательство.

1) Так как $\Gamma_n(R)$ является подгруппой всех обратимых матриц полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, то $\Phi(\Gamma_n(R))=\Gamma_n(R)$.

2) Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ всех матриц $A\in\Gamma_n(R)$, коммутирующих со всеми матрицами, сопряжёнными к A.

Рассмотрим

$$A=\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\in\mathrm{D}_n^Z(R),$$

тогда любая матрица, сопряжённая к A, имеет вид

$$S_{\sigma^{-1}}\,\mathrm{diag}[d_1^{-1},\ldots,d_n^{-1}]\,\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\,\mathrm{diag}[d_1,\ldots,d_n]S_\sigma = \\ = S_{\sigma^{-1}}\,\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]S_\sigma=\mathrm{diag}[\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\ldots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)}],$$

т. е. коммутирует с $A=\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$.

Если мы рассмотрим

$$A=\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\in\mathrm{D}_n(R)\setminus\mathrm{D}_n^Z(R),$$

то матрица, сопряжённая к A, также диагональна, но невозможно сказать, коммутирует ли она с $A=\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$.

Пусть

$$A=\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]S_\rho,\quad \rho\neq e,\quad \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in R_+^*.$$

Рассмотрим некоторую матрицу

$$M=\mathrm{diag}[d_1,\ldots,d_n]\in\mathrm{D}_n^Z(R),$$

чтобы получить матрицу, сопряжённую с A. Имеем

$$M^{-1}AM=\mathrm{diag}[d_1^{-1},\ldots,d_n^{-1}]\,\mathrm{diag}[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]S_\rho\,\mathrm{diag}[d_1,\ldots,d_n]= \\ =\mathrm{diag}[d_{\rho^{-1}(1)}d_1^{-1}\alpha_1,\ldots,d_{\rho^{-1}(n)}d_n^{-1}\alpha_n]S_\rho=\mathrm{diag}[\gamma_1\alpha_1,\ldots,\gamma_n\alpha_n]S_\rho,$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in Z_+^*(R^*)$. Имеем соотношения

$$A(M^{-1}AM) = \mathrm{diag}[\gamma_{\rho^{-1}(1)}\alpha_1\alpha_{\rho^{-1}(1)}, \ldots, \gamma_{\rho^{-1}(n)}\alpha_n\alpha_{\rho^{-1}(n)}]S_{\rho^2},$$
$$(M^{-1}AM)A = \mathrm{diag}[\gamma_1\alpha_1\alpha_{\rho^{-1}(1)}, \ldots, \gamma_n\alpha_n\alpha_{\rho^{-1}(1)}]S_{\rho^2}.$$

Так как $\rho \neq e$, то существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $j = \rho^{-1}(i) \neq i$. В этом случае возьмём

$$d_k = \begin{cases} 2, & \text{если } k = j, \\ 1, & \text{если } k \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$\gamma_k = \begin{cases} 2 & \text{если } k = i, \\ 1/2, & \text{если } k = j, \\ 1, & \text{если } k \neq i \text{ и } k \neq j. \end{cases}$$

Значит,

$$A(M^{-1}AM) \neq (M^{-1}AM)A.$$

Поэтому соотношение

$$(A \in \Gamma_n(R)) \wedge (\forall M \in \Gamma_n(R)\ (M^{-1}AM)A = A(M^{-1}AM))$$

выполняется для всех элементов из $\mathrm{D}_n^Z(R)$, может выполняться для некоторых элементов из $\mathrm{D}_n(R) \setminus \mathrm{D}_n^Z(R)$ и никогда не выполняется для элементов из $\Gamma_n(R) \setminus \mathrm{D}_n(R)$.

Ясно, что $\Phi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Введём на множестве $\mathcal{F}$ дополнительное условие

$$(A \in \mathcal{F}) \wedge (\forall M \in \Gamma_n(R)\ (M \neq I \wedge M^{n!} = I \Rightarrow AM \neq MA)), \tag{1}$$

т. е. «A не коммутирует ни с одной неединичной матрицей конечного порядка». Ясно, что если матрица $A \in \mathrm{D}_n(R)$ содержит два ненулевых элемента на i-м и j-м местах диагонали, то она коммутирует с $S_{(i,j)}$.

Если $A \in \mathrm{D}_n^Z(R)$ имеет различные собственные значения, то она удовлетворяет условию (1). Кроме того, это условие может выполняться для некоторых матриц из $\mathrm{D}_n(R) \setminus \mathrm{D}_n^Z(R)$, но они также должны содержать различные собственные значения. Обозначим множество всех матриц, удовлетворяющих условию (1), через $\mathcal{L}$. Ясно, что $\Phi(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \bigcup_{M \in \mathcal{L}} C_{\Gamma_n(R)}(M),$$

т. е. множество всех обратимых матриц, коммутирующих с некоторой матрицей из $\mathcal{L}$.

Покажем, что $\mathcal{X} = \mathrm{D}_n(R)$. Для того чтобы доказать, что $\mathcal{X} \subset \mathrm{D}_n(R)$, заметим, что каждая матрица $M \in \mathcal{L}$ имеет различные собственные значения,

поэтому если $AM = MA$, то $A \in \mathrm{D}_n(R)$. Чтобы доказать $\mathrm{D}_n(R) \subset \mathcal{X}$, рассмотрим матрицу
$$M = \mathrm{diag}[2, 2^2, \ldots, 2^n] \in \mathrm{D}_n^Z(R).$$
Очевидно, что $M \in \mathcal{L}$ и $C_{\Gamma_n(R)}(M) = \mathrm{D}_n(R)$. Так как $C_{\Gamma_n(R)}(M) \subset \mathcal{X}$, имеем $\mathrm{D}_n(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Следовательно, $\mathcal{X} = \mathrm{D}_n(R)$.

Ясно, что $\Phi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Значит, $\Phi(\mathrm{D}_n(R)) = \mathrm{D}_n(R)$.

3) Так как $C_{\Gamma_n(R)}(\mathrm{D}_n(R)) = \mathrm{D}_n^Z(R)$ и $\Phi(\mathrm{D}_n(R)) = \mathrm{D}_n(R)$, то имеем $\Phi(\mathrm{D}_n^Z(R)) = \mathrm{D}_n^Z(R)$. □

Лемма 5. *Если Φ является автоморфизмом полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, то существует матрица $M \in \Gamma_n(R)$, такая что $\Phi_M\Phi(K_n(R)) = K_n(R)$, где для всех $X \in \mathrm{G}_n(R)$*
$$\Phi_M(X) = MXM^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу
$$A = \mathrm{diag}[\alpha, \ldots, \alpha, \beta] \in \mathrm{D}_n^Z(R), \quad \alpha \neq \beta.$$
Предположим, что
$$B = \Phi(A) = \mathrm{diag}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] \in \mathrm{D}_n^Z(R).$$
Ясно, что
$$C_{\Gamma_n(R)}(A)/\,\mathrm{D}_n(R) \cong \Sigma_{n-1},$$
поэтому
$$\Phi(C_{\Gamma_n(R)}(A))/\Phi(\mathrm{D}_n(R)) = C_{\Gamma_n(R)}(B)/\,\mathrm{D}_n(R) \cong \Sigma_{n-1}.$$
Значит,
$$B = \mathrm{diag}[\gamma, \ldots, \gamma, \delta, \gamma, \ldots, \gamma], \quad \gamma \neq \delta.$$

Таким образом, существует перестановка $\sigma \in \Sigma_n$, такая что
$$\tilde{B} = S_\sigma B S_{\sigma^{-1}} = [\gamma, \ldots, \gamma, \delta].$$
Имеем $C_{\mathrm{G}_n(R)}(A) \subseteq K$ и $C_{\mathrm{G}_n(R)}(\tilde{B}) \subseteq K$. Кроме того, существует такая матрица A (например, $\mathrm{diag}[1, \ldots, 1, 2]$), что $C_{\mathrm{G}_n(R)}(A) = K_n(R)$, т. е.
$$K_n(R) = \bigcup_{A=\mathrm{diag}[\alpha,\ldots,\alpha,\beta]\in \mathrm{D}_n^Z(R),\ \alpha\neq\beta} C_{\mathrm{G}_n(R)}(A),$$
$$K_n(R) = \bigcup_{A=\mathrm{diag}[\alpha,\ldots,\alpha,\beta]\in \mathrm{D}_n^Z(R),\ \alpha\neq\beta} C_{\mathrm{G}_n(R)}(S_\sigma \Phi(A) S_\sigma^{-1}),$$
так как Φ — автоморфизм.

Рассмотрим $M = S_\sigma$, $\Phi' = \Phi_M \circ \Phi$. Для каждой матрицы $A = \mathrm{diag}[\alpha, \ldots, \alpha, \beta] \in \mathrm{D}_n^Z(R)$, $\alpha \neq \beta$, имеем $\Phi'(A) = \mathrm{diag}[\gamma, \ldots, \gamma, \delta] \in \mathrm{D}_n^Z(R)$, $\gamma \neq \delta$, и

$$\begin{aligned}\Phi'(K_n(R)) &= \Phi'\Bigl(\bigcup_{A=\mathrm{diag}[\alpha,\dots,\alpha,\beta]\in \mathrm{D}_n^Z(R),\ \alpha\ne\beta} C_{\mathrm{G}_n(R)}(A)\Bigr)\\ &= \bigcup_{A=\mathrm{diag}[\alpha,\dots,\alpha,\beta]\in \mathrm{D}_n^Z(R),\ \alpha\ne\beta} \Phi'(C_{\mathrm{G}_n(R)}(A))\\ &= \bigcup_{A=\mathrm{diag}[\alpha,\dots,\alpha,\beta]\in \mathrm{D}_n^Z(R),\ \alpha\ne\beta} C_{\mathrm{G}_n(R)}(\Phi'(A)) = K_n(R).\end{aligned}$$

Значит, $\Phi_M\Phi(K_n(R)) = K_n(R)$. □

Лемма 6. *Если Φ является автоморфизмом группы $\mathrm{G}_n(R)$, то по лемме 4, так как $\Phi(\Gamma_n(R)) = \Gamma_n(R)$, для каждого $\sigma\in\Sigma_n$ имеем*

$$\Phi(S_\sigma) = D_\sigma S_{\varphi(\sigma)},$$

где $D_\sigma\in \mathrm{D}_n(R)$. Полученное отображение $\varphi\colon \Sigma_n\to\Sigma_n$ является эндоморфизмом группы Σ_n.

Доказательство. Для всех $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma_n$

$$\begin{aligned}\Phi(S_{\sigma_1}\cdot S_{\sigma_2}) &= \Phi(S_{\sigma_1\cdot\sigma_2}) = D_{\sigma_1\sigma_2}\cdot S_{\varphi(\sigma_1\sigma_2)},\\ \Phi(S_{\sigma_1})\cdot\Phi(S_{\sigma_2}) &= D_{\sigma_1}S_{\varphi(\sigma_1)}D_{\sigma_2}S_{\varphi(\sigma_2)} = D_{\sigma_1}\cdot D'_{\sigma_2}S_{\varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2)},\\ \Phi(S_{\sigma_1}\cdot S_{\sigma_2}) &= \Phi(S_{\sigma_1})\cdot\Phi(S_{\sigma_2}),\end{aligned}$$

поэтому

$$\varphi(\sigma_1\sigma_2) = \varphi(\sigma_1)\varphi(\sigma_2).$$

Так как $\Phi(\mathrm{D}_n(R)) = \mathrm{D}_n(R)$ (утверждение 2) леммы 4), имеем $\varphi\in\mathrm{Aut}(\Sigma_n)$. Действительно, если $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma_n$, $\sigma_1\ne\sigma_2$, $\sigma=\varphi(\sigma_1)=\varphi(\sigma_2)$, то

$$\Phi(S_{\sigma_1}) = D_{\sigma_1}S_\sigma,\ \Phi(S_{\sigma_2}) = D_{\sigma_2}S_\sigma \implies \Phi(S_{\sigma_1}\cdot S_{\sigma_2^{-1}}) = D_{\sigma_1}S_\sigma S_{\sigma^{-1}}D_{\sigma_2}^{-1}\in\mathrm{D}_n(R).$$

Таким образом, для некоторого $\rho\ne e$ имеем

$$\Phi(S_\rho)\in\mathrm{D}_n(R),$$

но это невозможно. □

Доказательство следующей леммы совершенно аналогично доказательству предложения 10 из [2].

Лемма 7. *Если Φ — автоморфизм полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, $1/2\in R$, $n\geqslant 3$, то существует матрица $M\in\Gamma_n(R)$, такая что $\Phi_M\Phi(S_\sigma)=S_\sigma$ для всех $\sigma\in\Sigma_n$.*

Доказательство. Пусть $n\ne 6$. Рассмотрим автоморфизм $\varphi\in\mathrm{Aut}(\Sigma_n)$, введённый в лемме 6. Так как для $n\ne 6$ все автоморфизмы группы Σ_n являются внутренними, то существует такая перестановка $\rho\in\Sigma_n$, что для всех $\sigma\in\Sigma_n$

$$\varphi(\sigma) = \rho\sigma\rho^{-1}.$$

Значит, для всех $\sigma\in\Sigma_n$

$$\Phi(S_\sigma) = D_\sigma S_{\rho\sigma\rho^{-1}} = D_\sigma S_\rho S_\sigma S_{\rho^{-1}} = S_\rho D'_\sigma S_\sigma S_\rho.$$

Тогда для $M' = S_\rho^{-1}$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$

$$\Phi_{M'}\Phi(S_\sigma) = D'_\sigma S_\sigma.$$

Пусть $n = 6$. Рассмотрим некоторый автоморфизм $\Phi_1 = \Phi_{M_1}\Phi$ полугруппы $\mathrm{G}_6(R)$, такой что $\Phi_1(K_n(R)) = K_n(R)$, который существует по лемме 5. Пусть φ_1 — автоморфизм группы Σ_6, индуцированный автоморфизмом Φ_1. Заметим, что для каждой перестановки $\sigma \in \Sigma_6$ имеем $S_\sigma \in K_n(R)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(6) = 6$. Таким образом, φ_1 индуцирует внутренний автоморфизм группы $\Sigma(1, \dots, 5)$, т. е. существует такое $\tau \in \Sigma(1, \dots, 5)$, что для каждого $\sigma \in \Sigma(1, \dots, 5)$ имеет место $\varphi_1(\sigma) = \tau\sigma\tau^{-1}$.

Рассмотрим автоморфизм $\Phi_2 = \Phi_{M_2} \circ \Phi_1$ группы $\mathrm{G}_6(R)$, где $M_2 = S_\tau^{-1}$. Для каждой перестановки $\sigma \in \Sigma(1, \dots, 5)$ имеем

$$\Phi_2(S_\sigma) = S_\tau^{-1}\Phi_1(S_\sigma)S_\tau = S_\tau^{-1}D_\sigma S_{\tau\sigma\tau^{-1}}S_\tau = D'_\sigma S_\sigma.$$

Пусть φ_2 — автоморфизм группы Σ_6, ассоциированный с Φ_2. Заметим, что $\Phi_2(K_n(R)) = K_n(R)$ и $\varphi_2(\sigma) = \sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma(1, \dots, 5)$.

Докажем, что φ_2 является тождественным автоморфизмом группы Σ_6. Пусть $\delta = \varphi_2((1,6))$. Ясно, что δ является нечётной подстановкой, и поэтому либо $\delta = (1,6)$, либо $\delta = (1,6)(\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)$. Если $\delta = (1,6)$, то для любого $i = 2, \dots, 5$

$$\varphi_2((i,6)) = \varphi_2((1,6)(1,i)(1,6)) = (1,6)(1,i)(1,6) = (i,6).$$

Так как группа Σ_n порождается транспозициями, а для каждой транспозиции σ справедливо $\varphi_2(\sigma) = \sigma$, получаем, что для всех $\sigma \in \Sigma_6$ имеет место $\varphi_2(\sigma) = \sigma$, т. е. φ_2 тождественный.

Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, в этом случае

$$\varphi_2((1,6)) = \varphi_2((\alpha_2, \beta_1)(1,6)(\alpha_2, \beta_1)) = \\ = (\alpha_2, \beta_1)(1,6)(\alpha_1, \alpha_2)(\beta_1, \beta_2)(\alpha_2, \beta_1) = (1,6)(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) \neq \varphi(1,6).$$

Значит, для матрицы $M' = M_2M_1$ имеем $\Phi_{M'}\Phi(S_\sigma) = D_\sigma S_\sigma$ для всех $S_\sigma \in S_n$.

Теперь для любого $n \geqslant 3$ мы имеем некоторую матрицу $M' \in \Gamma_n(R)$, такую что $\Phi_{M'}\Phi(S_\sigma) = D_\sigma S_\sigma$ для любой матрицы $S_\sigma \in S_n$.

Рассмотрим $\rho = (1, 2, \dots, n) \in \Sigma_n$. Пусть

$$\Phi_{M'}\Phi(S_\rho) = D_\rho S_\rho,$$

где

$$D_\rho = \operatorname{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n].$$

Равенство $S_\rho^n = I$ влечёт $(D_\rho S_\rho)^n = I$, и тогда $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = 1$. Рассмотрим матрицу $T = \operatorname{diag}[t_1, \dots, t_n]$, где $t_i = (\alpha_i\alpha_{i+1} \dots \alpha_n)^{-1}$, $i = 1, \dots, n$, и автоморфизм $\Phi_3 = \Phi_T\Phi_M\Phi$. Мы видим, что

$$\Phi_3(S_\rho) = \operatorname{diag}[t_1, \dots, t_n]\operatorname{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]S_\rho \operatorname{diag}[t_1^{-1}, \dots, t_n^{-1}] = \\ = \operatorname{diag}[t_1\alpha_1t_2^{-1}, t_2\alpha_2t_3^{-1}, \dots, t_n\alpha_nt_1^{-1}]S_\rho = S_\rho$$

и для каждой перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ имеет место $\Phi_3(S_\sigma) = \tilde{D}_\sigma S_\sigma$, где $\tilde{D}_\sigma \in \in \mathrm{D}_n(R)$. Пусть теперь $\tau = (1, 2)$. Тогда S_τ является инволюцией. В соответствии с леммой 3 получаем $\Phi_3(S_\tau) = \tilde{D}_\tau S_\tau$, где

$$\tilde{D}_\tau = \mathrm{diag}[\beta, \beta^{-1}, 1, \ldots, 1], \quad \beta \in R^*_+.$$

Соотношение $\rho = (n, n-1)(n-1, n-2) \ldots (2, 1)$ влечёт $S_\rho = S_\tau^{\rho^{n-2}} \ldots S_\tau$, где $S_\tau^\delta = S_\delta^{-1} S_\tau S_\delta$. Следовательно,

$$S_\rho = \Phi_3(S_\tau^{\rho^{n-2}} \ldots S_\tau) = (D_\tau S_\tau)^{\rho^{n-2}} \ldots D_\tau S_\tau.$$

Сравнивая ненулевые элементы, получаем $\beta^n = 1$, откуда $\beta = 1$ (лемма 2). Значит, $\Phi_3(S_\tau) = S_\tau$. Так как ρ и τ порождают Σ_n, то $\Phi_3(S_\sigma) = S_\sigma$ для каждого $\sigma \in \Sigma_n$. □

3. Действие автоморфизма Φ' на диагональных матрицах

В предыдущем разделе по нашему автоморфизму Φ мы построили новый автоморфизм $\Phi' = \Phi_M \Phi$, такой что $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$. Мы предположим, что такой автоморфизм Φ' фиксирован.

Лемма 8. *Если $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R))$ таков, что $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, то для всех $\alpha, \beta \in R^*_+$ мы имеем*

$$\Phi'(\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta]) = \mathrm{diag}[\gamma, \delta, \ldots, \delta], \quad \gamma, \delta \in R^*_+.$$

Если $\alpha \neq \beta$, то $\gamma \neq \delta$. Если $\alpha, \beta \in Z^*_+(R^*)$, то $\gamma, \delta \in Z^*_+(R^*)$.

Доказательство. По лемме 4

$$\Phi'(\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta]) = \mathrm{diag}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n].$$

Так как $\Phi'(S_{(i,i+1)}) = S_{(i,i+1)}$ для всех $i = 2, \ldots, n-1$, то для всех $i = 2, \ldots, n-1$ имеем

$$\Phi'(\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta])\Phi'(S_{(i,i+1)}) = \Phi'(S_{(i,i+1)})\Phi'(\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta]) \implies \\ \implies \mathrm{diag}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] S_{(i,i+1)} = S_{(i,i+1)} \mathrm{diag}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] \implies \gamma_i = \gamma_{i+1}.$$

Таким образом, $\gamma_2 = \gamma_3 = \ldots = \gamma_{n-1} = \gamma_n$, и мы можем считать, что

$$\Phi'(\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta]) = \mathrm{diag}[\gamma, \delta, \ldots, \delta].$$

Если $\alpha \neq \beta$, то

$$\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta] S_{(1,2)} \neq S_{(1,2)} \mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta] \implies \\ \implies \mathrm{diag}[\gamma, \delta, \ldots, \delta] S_{(1,2)} \neq S_{(1,2)} \mathrm{diag}[\gamma, \delta, \ldots, \delta] \implies \gamma \neq \delta.$$

Если $\alpha, \beta \in Z^*(R^*)$, то $\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \ldots, \beta] \in \mathrm{D}_n^Z(R)$, и по утверждению 3) леммы 4 $\mathrm{diag}[\gamma, \delta, \ldots, \delta] \in \mathrm{D}_n^Z(R^*)$, откуда $\gamma, \delta \in Z^*(R^*)$. □

Лемма 9. *Если $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R)$ таков, что $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, то для всех $X \in \mathrm{G}_2(R)$ имеет место*

$$\Phi' \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a \end{pmatrix},$$

где $Y \in \mathrm{G}_2(R)$, $a \in Z_+^*(R^*)$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 8 можно доказать, что для любой матрицы

$$A = \mathrm{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \dots, \beta] \in \mathrm{D}_n(R), \quad \alpha \neq \beta,$$

имеет место

$$\Phi'(A) = \mathrm{diag}[\gamma, \gamma, \delta, \dots, \delta] \in \mathrm{D}_n(R), \quad \gamma \neq \delta.$$

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{L}$ всех инволюций вида

$$\mathrm{diag}[\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1] S_{(1,2)}, \quad \xi \in R_+^*.$$

Для любой такой инволюции M имеем

$$N = \Phi'(M) = \Phi'(\mathrm{diag}[\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1]) S_{(1,2)},$$

и N является инволюцией. По лемме 3

$$N = \mathrm{diag}[\eta, \eta^{-1}, 1, \dots, 1] S_{(1,2)}.$$

Если $\xi \in Z_+^*(R^*)$, то $\eta \in Z_+^*(R^*)$, если $\xi \notin Z_+^*(R^*)$, то $\eta \notin Z_+^*(R^*)$. Мы видим, что $\Phi'(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

Множество матриц вида

$$\mathrm{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \dots, \beta], \quad \alpha, \beta \in R_+^*, \quad \alpha \neq \beta,$$

обозначим через $\mathcal{M}$. Мы знаем, что $\Phi'(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Таким образом,

$$\Phi'(C_{\mathcal{M}}\mathcal{L}) = C_{\mathcal{M}}\mathcal{L},$$

т. е. для любых $\mu \in Z_+^*(R^*)$, $\eta \in R_+^*$ имеем

$$\Phi'(\mathrm{diag}[\mu, \mu, \eta, \dots, \eta]) = \mathrm{diag}[\mu', \mu', \eta', \dots, \eta'],$$

где $\mu' \in Z_+^*(R^*)$, $\eta' \in R_+^*$ и если $\eta \in R_+^* \setminus Z_+^*(R^*)$, то $\eta' \in R_+^* \setminus Z_+^*(R^*)$.

Через $\mathcal{Z}$ мы обозначим множество всех матриц

$$\alpha I = \mathrm{diag}[\alpha, \dots, \alpha], \quad \alpha \in Z_+^*(R^*).$$

Ясно, что $\Phi'(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$.

Рассмотрим некоторую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 & & \\ 0 & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{G}_2(R), \quad a \in Z_+^*(R^*).$$

Эта матрица удовлетворяет условию

$$\forall M \in C_{\mathcal{M}}\mathcal{L}\ \exists N \in \mathcal{Z}\ A(MN) = (MN)A \wedge \\ \wedge\ AS_{(3,4)} = S_{(3,4)}A \wedge \ldots \wedge AS_{(n-1,n)} = S_{(n-1,n)}A. \quad (2)$$

Действительно, любая матрица $M \in C_{\mathcal{M}}\mathcal{L}$ имеет вид

$$M = \operatorname{diag}[\mu, \mu, \eta, \ldots, \eta], \quad \mu \in Z_+^*(R^*), \quad \eta \in R_+^*.$$

Если $MA = AM$, то мы можем взять $N = I$. Если $MA \neq AM$, т. е. $\mu \in \in Z_+^*(R^*) \setminus Z_+^*(R)$ и $X \operatorname{diag}[\mu, \mu] \neq \operatorname{diag}[\mu, \mu]X$, то мы можем взять

$$N = \operatorname{diag}[\mu^{-1}, \ldots, \mu^{-1}] \in \mathcal{Z}.$$

Тогда $MN = \operatorname{diag}[1, 1, \eta\mu^{-1}, \ldots, \eta\mu^{-1}]$ и $A(MN) = (MN)A$.

Если некоторая матрица A удовлетворяет условию (2), то часть

$$AS_{(3,4)} = S_{(3,4)}A \wedge \ldots \wedge AS_{(n-1,n)} = S_{(n-1,n)}A$$

влечёт

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 & & \\ 0 & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{G}_2(R), \quad a \in R_+^*.$$

Если $a \in R_+^* \setminus Z_+^*(R^*)$, то существует элемент $b \in R_+^*$, такой что $ab \neq ba$, значит, для

$$M = \operatorname{diag}[1, 1, b, \ldots, b] \in C_{\mathcal{M}}\mathcal{L}$$

имеем $MA \neq AM$. Для каждой матрицы $N = \operatorname{diag}[\alpha, \ldots, \alpha] \in \mathcal{Z}$ имеем $A(MN) \neq (MN)A$, так как $ab\alpha \neq b\alpha a$. Значит, матрица

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 & & \\ 0 & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

с $a \in R_+^* \setminus Z_+^*(R^*)$ не может удовлетворять условию (2). Таким образом, мы имеем $a \in Z_+^*(R^*)$.

Итак, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} X & 0 & & \\ 0 & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{G}_2(R), \quad a \in Z_+^*(R^*),$$

тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (2).

Так как $\Phi'(S_{(i,i+1)}) = S_{(i,i+1)}$ для всех $i = 3, \ldots, n-1$, $\Phi'(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$, $\Phi'(C_{\mathcal{M}}\mathcal{L}) = C_{\mathcal{M}}\mathcal{M}$, мы получаем, что если матрица A удовлетворяет (2), то и матрица $\Phi'(A)$ удовлетворяет (2). Следовательно, для $X \in \mathrm{G}_2(R)$, $a \in Z_+^*(R^*)$ имеем

$$\Phi' \begin{pmatrix} X & 0 & & \\ 0 & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 & & \\ 0 & b & & \\ & & \ddots & \\ & & & b \end{pmatrix}, \quad Y \in \mathrm{G}_2(R), \quad b \in Z_+^*(R^*).$$

Лемма доказана. □

Лемма 10. *Если $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R))$ таков, что $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, то для всех $x \in Z_+^*(R)$*

$$\Phi'(\mathrm{diag}[x, 1, \dots, 1]) = \mathrm{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta], \quad \xi, \eta \in Z_+^*(R).$$

Доказательство. Так как $x \in Z_+^*(R)$, то $x \in Z_+^*(R^*)$, откуда

$$A = \mathrm{diag}[x, 1, \dots, 1] \in \mathrm{D}_n^Z(R),$$

поэтому по лемме 8

$$A' = \Phi'(A) = \mathrm{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta],$$

где $\xi, \eta \in Z_+^*(R^*)$.

Пусть $\mathcal{Y}$ обозначает множество всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a & 0 \\ \dots & \dots & 0 & X \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{G}_2(R), \quad a \in Z_+^*(R^*).$$

Ясно, что $\Phi'(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ (доказательство полностью аналогично доказательству леммы 9).

Пусть $\bar{\mathcal{Z}}$ обозначает центр полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$. Ясно, что

$$\bar{\mathcal{Z}} = \{\alpha I \mid \alpha \in Z_+^*(R)\}.$$

Имеем $\Phi'(\bar{\mathcal{Z}}) = \bar{\mathcal{Z}}$.

Любая матрица $A = \mathrm{diag}[x, 1, \dots, 1]$, где $x \in Z_+^*(R)$, удовлетворяет условию

$$\forall M \in \mathcal{Y} \; MA = AM. \tag{3}$$

Матрица $A' = \Phi'(A)$ также удовлетворяет условию (3), поэтому

$$\forall M \in \mathcal{Y} \; M \cdot \mathrm{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta] = \mathrm{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta] \cdot M,$$

или

$$\forall X \in \mathrm{G}_2(R) \; X \circ \mathrm{diag}[\eta, \eta] = \mathrm{diag}[\eta, \eta] \circ X,$$

откуда $\eta \in Z_+^*(R)$.

Теперь нам нужно доказать, что $\xi \in Z_+^*(R)$.

Имеем

$$\Phi'(\mathrm{diag}[1,x,1,\dots,1]) = \Phi'(S_{(1,2)}\,\mathrm{diag}[x,1,\dots,1]S_{(1,2)}) = \\ = S_{(1,2)}\,\mathrm{diag}[\xi,\eta,\dots,\eta]S_{(1,2)} = \mathrm{diag}[\eta,\xi,\eta,\dots,\eta]$$

и, аналогично,

$$\Phi'(\mathrm{diag}[1,1,x,1,\dots,1]) = \mathrm{diag}[\eta,\eta,\xi,\eta,\dots,\eta],\dots, \\ \Phi'(\mathrm{diag}[1,\dots,1,x]) = \mathrm{diag}[\eta,\dots,\eta,\xi].$$

Следовательно,

$$\Phi'(x\cdot I) = \Phi'(\mathrm{diag}[x,1,\dots,1]\cdot\mathrm{diag}[1,x,\dots,1]\cdot\ldots\cdot\mathrm{diag}[1,\dots,1,x]) = \xi\eta^{n-1}\cdot I.$$

Так как $x \in Z_+^*(R)$, то $\xi\eta^{n-1} \in Z_+^*(R)$. Так как (как мы только что доказали) $\eta \in Z_+^*(R)$, то $\eta^{n-1} \in Z_+^*(R)$, откуда $\xi \in Z_+^*(R)$, что нам и нужно было доказать. □

Лемма 11. *Если $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R))$ таков, что $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, то для любых $x_1, x_2 \in Z_+^*(R)$, таких что $x_1 \neq x_2$,*

$$\Phi'(A_1) = \Phi'(\mathrm{diag}[x_1,1,\dots,1]) = \mathrm{diag}[\xi_1,\eta_1,\dots,\eta_1],$$
$$\Phi'(A_2) = \Phi'(\mathrm{diag}[x_2,1,\dots,1]) = \mathrm{diag}[\xi_2,\eta_2,\dots,\eta_2],$$

имеем $\xi_1\eta_1^{-1} \neq \xi_2\eta_2^{-1}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых различных $x_1, x_2 \in Z_+^*(R)$ имеет место $\xi_1\eta_1^{-1} = \xi_2\eta_2^{-1}$, т. е.

$$\Phi'(A_1) = \Phi'(\mathrm{diag}[x_1,1,\dots,1]) = \mathrm{diag}[\xi,\eta,\dots,\eta] = A_1',$$
$$\Phi'(A_2) = \Phi'(\mathrm{diag}[x_2,1,\dots,1]) = \alpha\cdot\mathrm{diag}[\xi,\eta,\dots,\eta] = A_2',$$

где $\xi,\eta,\alpha \in Z_+^*(R)$ (лемма 10). Значит,

$$\Phi'^{-1}(\alpha I) = \Phi'^{-1}(A_1'A_2'^{-1}) = \mathrm{diag}[x_1x_2^{-1},1,\dots,1]) = \mathrm{diag}[\beta,1,\dots,1],$$

где $1 \neq \beta \in Z_+^*(R)$, что невозможно, так как $\Phi'^{-1}(\bar{\mathcal{Z}}) = \bar{\mathcal{Z}}$ (см. доказательство леммы 10). Таким образом, $\xi_1\eta_1^{-1} \neq \xi_2\eta_2^{-1}$. □

4. Основная теорема

В этом разделе мы докажем основную теорему.

Напомним (определение 8), что для $x \in R_+$

$$B_{12}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{21}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ x & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 12. *Если* $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, *автоморфизм* $\Phi' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R))$ *таков, что* $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ *для всех* $\sigma \in \Sigma_n$, *то существуют две возможности*:

1) *существует некоторое отображение* $c(\cdot)\colon R_+ \to R_+$, *такое что для всех* $x \in R_+$ *справедливо* $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(c(x))$;
2) *существует некоторое отображение* $b(\cdot)\colon R_+ \to R_+$, *такое что для всех* $x \in R_+$ *справедливо* $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{21}(b(x))$.

Доказательство. По лемме 9 имеем

$$\Phi'(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}, \quad a \in Z_+^*(R^*), \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{G}_2(R).$$

Пусть для каждого $x \in R_+^*$

$$\Phi'(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1)] = \mathrm{diag}[\xi(x), \gamma(x), \ldots, \gamma(x)], \quad \xi(x), \eta(x) \in R_+^*$$

(лемма 8). Тогда для любого $x \in Z_+^*(R)$

$$\Phi'(B_{12}(x)) = \Phi'(\mathrm{diag}[x, 1, \ldots, 1] B_{12}(1)\, \mathrm{diag}[x^{-1}, 1, \ldots, 1]) =$$

$$= \mathrm{diag}[\xi(x), \eta(x), \ldots, \eta(x)] \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} \mathrm{diag}[\xi(x)^{-1}, \eta(x)^{-1}, \ldots, \eta(x)^{-1}] =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi(x)\alpha\xi(x)^{-1} & \xi(x)\beta\eta(x)^{-1} & & & \\ \eta(x)\gamma\xi(x)^{-1} & \eta(x)\delta\eta(x)^{-1} & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}.$$

Так как по лемме 10 $\xi(x), \eta(x) \in Z_+^*(R)$, то

$$\xi(x)\alpha\xi(x)^{-1} = \alpha, \qquad \xi(x)\beta\eta(x)^{-1} = \xi(x)\eta(x)^{-1}\beta,$$
$$\eta(x)\gamma\xi(x)^{-1} = \eta(x)\xi(x)^{-1}\gamma, \qquad \eta(x)\delta\eta(x)^{-1} = \delta,$$

поэтому

$$\Phi'(B_{12}(x)) = \begin{pmatrix} \alpha & \nu(x)\beta & & & \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}$$

для $\nu(x) = \xi(x)\eta(x)^{-1}$.

По лемме 11 для $x_1 \neq x_2$ имеем $\nu(x_1) \neq \nu(x_2)$.

Для каждого $x \in R_+$ элементы $\Phi'(B_{12}(1))$ и $\Phi'(B_{12}(x))$ коммутируют. Напишем это условие в матричной форме для $x \in Z_+^*(R)$ (напомним, что в этом случае $\nu(x) \in Z_+^*(R)$ по лемме 10):

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \nu(x)\beta\\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \nu(x)\beta\\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha^2+\nu(x)^{-1}\beta\gamma & \nu(x)\alpha\beta+\beta\delta\\ \gamma\alpha+\nu(x)^{-1}\delta\gamma & \nu(x)\gamma\beta+\delta^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2+\nu(x)\beta\gamma & \alpha\beta+\nu(x)\beta\delta\\ \nu(x)^{-1}\gamma\alpha+\delta\gamma & \nu(x)^{-1}\gamma\beta+\delta^2\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\nu(x)^{-1}\beta\gamma = \nu(x)\beta\gamma$ для различных $x \in Z_+^*(R)$ (например, для $x = 2, 2^2, \ldots$). По лемме 11 $\nu(x) \neq 1$ для $x \neq 1$, откуда $\nu(x) \neq \nu(x)^{-1}$ для $x \neq 1$ и $\beta\gamma = 0$, т. е. либо $\beta = 0$, либо $\gamma = 0$.

Предположим, что $\gamma = 0$ (случай $\beta = 0$ аналогичен). Тогда

$$\Phi'(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta & & & \\ 0 & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a\end{pmatrix}, \quad a \in Z_+^*(R^*), \quad \alpha, \delta \in R_+^*, \quad \beta \in R_+ \cup \{0\}.$$

Используем условие $(B_{12}(1))^2 = \operatorname{diag}[2, 1, \ldots, 1] B_{12}(1) \operatorname{diag}[1/2, 1, \ldots, 1]$:

$$\begin{pmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta+\beta\delta & & & \\ 0 & \delta^2 & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \nu(2)\beta & & & \\ 0 & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a\end{pmatrix},$$

откуда $\alpha = \delta = a = 1$, $\nu(2) = 2$. Значит, имеем $\Phi'(B_{12}(1)) = B_{12}(\beta)$ для некоторого $\beta \in R_+$.

Аналогично, если $\beta = 0$, то $\Phi'(B_{12}(1)) = B_{21}(\gamma)$ для некоторого $\gamma \in R_+$.

Рассмотрим случай $\gamma = 0$ (случай $\beta = 0$ аналогичен). Так как для любого $x \in R_+$ $\Phi'(B_{12}(x))$ коммутирует с $\Phi(B_{12}(1))$, с $S_{(i,i+1)}$ для $i = 3, \ldots, n-1$ и с $\operatorname{diag}[1, 1, \mu_3, \ldots, \mu_n]$ для $\mu_3, \ldots, \mu_n \in R_+^*$, то

$$\Phi'(B_{12}(x)) = \begin{pmatrix}a(x) & b(x) & & & \\ 0 & a(x) & & & \\ & & d(x) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d(x)\end{pmatrix}, \quad a(x), b(x) \in R_+, \quad d(x) \in Z_+^*(R^*).$$

Теперь используем условие $(B_{12}(x))^2 = \operatorname{diag}[2, 1, \ldots, 1] B_{12}(x) \operatorname{diag}[1/2, 1, \ldots, 1]$:

$$\begin{pmatrix} a(x)^2 & a(x)b(x)+b(x)a(x) & & & \\ 0 & a(x)^2 & & & \\ & & d(x)^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d(x)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a(x) & 2b(x) & & & \\ 0 & a(x) & & & \\ & & d(x) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d(x) \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $a(x) = d(x) = 1$ для любого $x \in R_+$. Значит, если $\gamma = 0$, то $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(b(x))$ для любого $x \in R_+$. Аналогично, в случае $\beta = 0$ имеем $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{21}(c(x))$ для любого $x \in R_+$. □

Теперь рассмотрим случаи $\gamma = 0$ и $\beta = 0$ по отдельности. В следующей лемме мы докажем, что случай $\beta = 0$ невозможен.

Лемма 13. *Если $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$, автоморфизм $\Phi' \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}_n(R))$ таков, что $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, то условие*

$$\Phi'(B_{12}(1)) = B_{21}(c(1)) \quad (= B_{21}(\gamma))$$

невозможно.

Доказательство. Если $\Phi'(B_{12}(1)) = B_{21}(\gamma) = B_{21}(c(1))$ для некоторого $\gamma = c(1) \in R_+$, то по предыдущей лемме существует такое отображение $c(\cdot)\colon R_+ \to R_+$, что для каждого $x \in R_+$ мы имеем $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{21}(c(x))$. Так как $n \geqslant 3$ и $\Phi'(S_\sigma) = S_\sigma$ для всех $\sigma \in \Sigma_n$, то

$$\Phi'(B_{13}(x)) = \Phi'(S_{(2,3)}B_{12}(x)S_{(2,3)}) = S_{(2,3)}B_{21}(c(x))S_{(2,3)} = B_{31}(c(x)).$$

Аналогично, $\Phi'(B_{32}(x)) = B_{23}(c(x))$.

Используем условие

$$\forall x_1, x_2 \in R_+ \ B_{13}(x_1)B_{32}(x_2) = B_{32}(x_2)B_{13}(x_1)B_{12}(x_1x_2).$$

Из него следует

$$\begin{aligned}
&\Phi'(B_{13}(x_1)B_{32}(x_2)) = \Phi'(B_{32}(x_2)B_{13}(x_1)B_{12}(x_1x_2)) \implies \\
&\quad\implies B_{31}(c(x_1))B_{23}(c(x_2)) = B_{23}(c(x_2))B_{31}(c(x_1))B_{21}(c(x_1x_2)) \implies \\
&\quad\implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c(x_2) \\ c(x_1) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c(x_2)c(x_1)+c(x_1x_2) & 1 & c(x_2) \\ c(x_1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \\
&\quad\implies \forall x_1, x_2 \in R_+ \ c(x_2)c(x_1)+c(x_1x_2) = 0 \implies \\
&\quad\implies \forall x \in R_+ \ c(x)^2 + c(x^2) = 0 \implies c(x) = 0,
\end{aligned}$$

но это невозможно, так как Φ' является автоморфизмом. □

Теорема. *Пусть Φ — автоморфизм полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, $n \geqslant 3$, $1/2 \in R$. Тогда на полугруппе $\mathrm{GE}_n^+(R)$ выполнено $\Phi = \Phi_M \Phi^c \Omega$, где $M \in \Gamma_n(R)$, $c(\cdot) \in \mathrm{Aut}(R_+)$, $\Omega(\cdot)$ — центральная гомотетия полугруппы $\mathrm{GE}_n^+(R)$.*

Доказательство. По лемме 6 существует такая матрица $M' \in \Gamma_n(R)$, что для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_n$

$$\Phi'(S_\sigma) = \Phi_{M'}\Phi(S_\sigma) = S_\sigma.$$

Теперь рассмотрим автоморфизм Φ'.

По леммам 12 и 13 существует отображение $c(\cdot)\colon R_+ \to R_+$, такое что для любого элемента $x \in R_+$

$$\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(c(x)).$$

Рассмотрим это отображение. Так как Φ — автоморфизм полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, то $c(\cdot)\colon R_+ \to R_+$ биективно.

Так как для всех $x_1, x_2 \in R_+$ справедливо $B_{12}(x_1 + x_2) = B_{12}(x_1)B_{12}(x_2)$, то

$$\begin{aligned} B_{12}(c(x_1+x_2)) &= \Phi'(B_{12}(x_1+x_2)) = \Phi'(B_{12}(x_1)B_{12}(x_2)) = \\ &= \Phi'(B_{12}(x_1))\Phi'(B_{12}(x_2)) = B_{12}(c(x_1))B_{12}(c(x_2)) = B_{12}(c(x_1)+c(x_2)), \end{aligned}$$

откуда получаем, что для всех $x_1, x_2 \in R_+$ справедливо $c(x_1+x_2) = c(x_1)+c(x_2)$, поэтому $c(\cdot)$ аддитивно.

Отображение $c(\cdot)$ мультипликативно, поскольку

$$\Phi'(B_{13}(x)) = \Phi'(S_{(2,3)}B_{12}(x)S_{(2,3)}) = S_{(2,3)}) = S_{(2,3)}B_{12}(c(x))S_{(2,3)} = B_{13}(c(x)),$$

аналогично, $\Phi'(B_{32}(x)) = B_{32}(c(x))$ и

$$\begin{aligned} & B_{13}(x_1)B_{32}(x_2) = B_{32}(x_2)B_{13}(x_1)B_{12}(x_1x_2) \implies \\ & \implies \Phi'(B_{13}(x_1))\Phi'(B_{32}(x_2)) = \Phi'(B_{32}(x_2))\Phi'(B_{13}(x_1))\Phi'(B_{12}(x_1x_2)) \implies \\ & \implies B_{13}(c(x_1))B_{32}(c(x_2)) = B_{32}(c(x_2))B_{13}(c(x_1))B_{12}(c(x_1x_2)) \implies \\ & \implies \forall x_1, x_2 \in R_+ \begin{pmatrix} 1 & c(x_1)c(x_2) & c(x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c(x_2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c(x_1x_2) & c(x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c(x_2) & 1 \end{pmatrix} \implies \\ & \implies \forall x_1, x_2 \in R_+ \ c(x_1x_2) = c(x_1)c(x_2) \end{aligned}$$

(ср. доказательство леммы 13).

Так как $c(\cdot)$ биективно, аддитивно и мультипликативно, то $c(\cdot)$ является автоморфизмом полукольца R_+, или, другими словами, $c(\cdot)$ может быть продолжено до автоморфизма кольца R, сохраняющего порядок.

Рассмотрим теперь отображение $\Phi^{c^{-1}}$, которое переводит каждую матрицу $A = (a_{ij})$ в матрицу $\Phi^{c^{-1}}(A) = (c^{-1}(a_{ij}))$. Это отображение является автоморфизмом полукольца $\mathrm{G}_n(R)$. Тогда $\Phi'' = \Phi^{c^{-1}} \circ \Phi' = \Phi^{c^{-1}} \circ \Phi_{M'} \circ \Phi$ является автоморфизмом полугруппы $\mathrm{G}_n(R)$, оставляющим на месте все матрицы S_σ ($\sigma \in \Sigma_n$) и $B_{ij}(x)$ ($x \in R_+$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$). Именно,

$$\Phi''(S_\sigma) = \Phi^{c^{-1}}(\Phi'(S_\sigma)) = \Phi^{c^{-1}}(S_\sigma) = S_\sigma,$$

так как матрица S_σ содержит только 0 и 1; для $i = 3, \ldots, n$

$$\begin{aligned}\Phi''(B_{i2}(x)) = \Phi''(S_{(1,i)} B_{12}(x) S_{(1,i)}) = S_{(1,i)} \Phi''(B_{12}(x))) S_{(1,i)} = \\ = S_{(1,i)} \Phi^{c^{-1}}(B_{12}(c(x))) S_{(1,i)} = S_{(1,i)} B_{12}(x) S_{(1,i)} = B_{i,2}(x);\end{aligned}$$

для $j = 3, \ldots, n$

$$\Phi''(B_{1j}(x)) = \Phi''(S_{(2,j)} B_{12}(x) S_{(2,j)}) = S_{(2,j)} B_{12}(x) S_{(2,j)} = B_{1j}(x);$$

для $i, j = 3, \ldots, n$

$$\Phi''(B_{ij}(x)) = \Phi''(S_{(i,1)} B_{1j}(x) S_{(1,i)}) = S_{(1,i)} B_{1j}(x) S_{(1,i)} = B_{ij}(x).$$

Как мы знаем (лемма 8), для всех $\alpha \in R_+^*$

$$\Phi''(\mathrm{diag}[\alpha, 1, \ldots, 1]) = \mathrm{diag}[\beta(\alpha), \gamma(\alpha), \ldots, \gamma(\alpha)], \quad \beta, \gamma \in R_+^*.$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}[\alpha, 1, \ldots, 1] B_{12}(1)\, \mathrm{diag}[\alpha^{-1}, 1, \ldots, 1] = B_{12}(\alpha) \implies \\ &\quad \implies \Phi''(\mathrm{diag}[\alpha, 1, \ldots, 1]) \Phi''(B_{12}(1)) \times \\ &\qquad \times \Phi''(\mathrm{diag}[\alpha^{-1}, 1, \ldots, 1]) = \Phi''(B_{12}(\alpha)) \implies \\ &\quad \implies \mathrm{diag}[\beta(\alpha), \gamma(\alpha), \ldots, \gamma(\alpha)] B_{12}(1) \times \\ &\qquad \times \mathrm{diag}[\beta(\alpha)^{-1}, \gamma(\alpha)^{-1}, \ldots, \gamma(\alpha)^{-1}] = B_{12}(\alpha) \implies \\ &\quad \implies \beta(\alpha)\gamma(\alpha)^{-1} = \alpha \implies \beta(\alpha) = \alpha\gamma(\alpha) \implies \\ &\quad \implies \forall \alpha \in R_+^* \ \Phi''(\mathrm{diag}[\alpha, 1, \ldots, 1]) = \mathrm{diag}[\alpha\gamma(\alpha), \gamma(\alpha), \ldots, \gamma(\alpha)].\end{aligned}$$

Так как $\mathrm{diag}[\alpha, 1, \ldots, 1]$ коммутирует с любой матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}, \quad X \in \mathrm{G}_{n-1}(R),$$

и $n \geqslant 3$, то для всех $\alpha \in R_+^*$ справедливо $\gamma(\alpha) \in Z_+^*(R)$.

Так как для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in R_+^*$

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}[\alpha_1\alpha_2\gamma(\alpha_1\alpha_2), \gamma(\alpha_1\alpha_2), \ldots, \gamma(\alpha_1\alpha_2)] = \Phi''(\mathrm{diag}[\alpha_1\alpha_2, 1, \ldots, 1]) = \\ &\quad = \Phi''(\mathrm{diag}[\alpha_1, 1, \ldots, 1]) \Phi''(\mathrm{diag}[\alpha_2, 1, \ldots, 1]) = \\ &\quad = \mathrm{diag}[\alpha_1\gamma(\alpha_1), \gamma(\alpha_1), \ldots, \gamma(\alpha_1)]\, \mathrm{diag}[\alpha_2\gamma(\alpha_2), \gamma(\alpha_2), \ldots, \gamma(\alpha_2)] = \\ &\quad = \mathrm{diag}[\alpha_1\alpha_2\gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2), \gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2), \ldots, \gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2)] \implies \\ &\quad \implies \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R_+^* \ \gamma(\alpha_1\alpha_2) = \gamma(\alpha_1)\gamma(\alpha_2),\end{aligned}$$

то отображение $\gamma(\cdot)$ является центральным гомоморфизмом (определение 11) $\gamma(\cdot)\colon R_+^* \to Z_+^*(R)$.

Если $A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in \mathrm{D}_n(R)$, то

$$\begin{aligned}\Phi''(A) = \Phi''(&\operatorname{diag}[\alpha_1, 1, \ldots, 1] S_{1,2} \operatorname{diag}[\alpha_2, 1, \ldots, 1] S_{(1,2)} S_{(1,3)} \times \\ &\times \operatorname{diag}[\alpha_3, 1, \ldots, 1] S_{(1,3)} \ldots S_{(1,n)} \operatorname{diag}[\alpha_n, 1, \ldots, 1] S_{(1,n)}) = \\ &= \gamma(\alpha_1) \operatorname{diag}[\alpha_1, 1, \ldots, 1] S_{(1,2)} \gamma(\alpha_2) \operatorname{diag}[\alpha_2, 1, \ldots, 1] S_{(1,2)} \ldots S_{(1,n)} \times \\ &\quad \times \gamma(\alpha_n) \operatorname{diag}[\alpha_n, 1, \ldots, 1] \gamma(\alpha_n) = \\ &= \gamma(\alpha_1) \ldots \gamma(\alpha_n) A = \gamma(\alpha_1 \ldots \alpha_n) A.\end{aligned}$$

Напомним (определение 8), что $\mathbf{P}$ является подполугруппой в $\mathrm{G}_n(R)$, порождённой матрицами S_σ $(\sigma \in \Sigma_n)$, $B_{ij}(x)$ $(x \in R_+,\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$ и $\operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R_+^*)$. Ясно, что любая матрица $A \in \mathbf{P}$ может быть представлена в виде

$$A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] A_1 \ldots A_k,$$

где

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in R_+^*,$$
$$A_1, \ldots, A_k \in \{S_\sigma, B_{ij}(x) \mid \sigma \in \Sigma_n,\ x \in R_+,\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi''(A) = \Phi''(&\operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] A_1 \ldots A_k) = \\ &= \gamma(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] A_1 \ldots A_k = \gamma(\alpha_1 \ldots \alpha_n) A.\end{aligned}$$

Теперь введём отображение $\bar{\gamma}(\cdot)\colon \mathbf{P} \to Z_+^*(R)$ с помощью следующего правила: если $A \in \mathbf{P}$ и $A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] A_1 \ldots A_k$, где

$$A_1, \ldots, A_k \in \{S_\sigma, B_{ij}(x) \mid \sigma \in \Sigma_n,\ x \in R_+,\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j\},$$

то $\bar{\gamma}(A) = \gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Отображение $\bar{\lambda}(\cdot)$ определено однозначно, так как если

$$A = \operatorname{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] A_1 \ldots A_k = \operatorname{diag}[\alpha_1', \ldots, \alpha_n'] A_1' \ldots A_m',$$

то $\Phi''(A) = \gamma(\alpha_1 \ldots \alpha_n) A$ и $\Phi''(A) = \gamma(\alpha_1' \ldots \alpha_n') A$, и поэтому

$$\gamma(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \gamma(\alpha_1' \ldots \alpha_n').$$

Так как

$$\bar{\gamma}(AA') AA' = \Phi''(AA') = \Phi''(A) \Phi''(A') = \bar{\gamma}(A) A \cdot \bar{\gamma}(A') A' = \bar{\gamma}(A) \bar{\gamma}(A') AA',$$

то $\bar{\gamma}$ является гомоморфизмом $\mathbf{P} \to Z_+^*(R)$.

Теперь мы видим, что на полугруппе $\mathbf{P}$ автоморфизм Φ'' совпадает с центральной гомотетией $\Omega(\cdot)\colon \mathbf{P} \to \mathbf{P}$, где для всех $A \in \mathbf{P}$ справедливо $\Omega(A) = \bar{\gamma}(A) \cdot A$.

Пусть $B \in \mathrm{GE}_n^+(R)$. Тогда (определения 99, 10) матрица B $\mathcal{P}$-эквивалентна некоторой матрице $A \in \mathbf{P}$, т. е. существуют матрицы $A_0, \ldots, A_k \in \mathrm{G}_n(R)$, $A_0 = A \in \mathbf{P}$, $A_k = B$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$, такие что для всех $i = 0, \ldots, k-1$

$$P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\Phi''(P_0 A_0 \tilde{P}_0) = \Phi''(Q_0 A_1 \tilde{Q}_0) \implies \\
&\quad\implies \bar{\gamma}(P_0) P_0 \bar{\gamma}(A_0) A_0 \bar{\gamma}(\tilde{P}_0) \tilde{P}_0 = \bar{\gamma}(Q_0) Q_0 \Phi''(A_1) \bar{\gamma}(\tilde{Q}_0) \tilde{Q}_0 \implies \\
&\quad\implies \bar{\gamma}(P_0 A_0 \tilde{P}_0) P_0 A_0 \tilde{P}_0 = \bar{\gamma}(Q_0 \tilde{Q}_0) Q_0 \Phi''(A_1) \tilde{Q}_0 \implies \\
&\quad\implies \bar{\gamma}(P_0 A_0 \tilde{P}_0) \bar{\gamma}(Q_0 \tilde{Q}_0)^{-1} Q_0 A_1 \tilde{Q}_0 = Q_0 \Phi''(A_1) \tilde{Q}_0 \implies \\
&\quad\implies \Phi''(A_1) = \bar{\gamma}(P_0 A_0 \tilde{P}_0) \bar{\gamma}(Q_0 \tilde{Q}_0)^{-1} A_1, \ldots, \\
&\qquad\quad \Phi''(B) = \Phi''(A_n) = \bar{\gamma}(P_{n-1}) \bar{\gamma}(A_{n-1}) \bar{\gamma}(\tilde{P}_{n-1}) \bar{\gamma}(Q_{n-1})^{-1} \bar{\gamma}(\tilde{Q}_{n-1}).
\end{aligned}$$

Значит, мы можем продолжить отображение $\bar{\gamma}(\cdot)\colon \mathbf{P} \to Z_+^*(R)$ до некоторого отображения $\lambda(\cdot)\colon \mathrm{GE}_n^+(R) \to Z_+^*(R)$, такого что для каждого $B \in \mathrm{GE}_n^+(R)$

$$\Phi''(B) = \lambda(B) \cdot B.$$

Так как Φ'' является автоморфизмом полугруппы $\mathrm{GE}_n^+(R)$, то $\lambda(\cdot)$ является центральным гомоморфизмом $\lambda(\cdot)\colon \mathrm{GE}_n^+(R) \to Z_+^*(R)$ и, значит, автоморфизм $\Phi''\colon \mathrm{GE}_n^+(R) \to \mathrm{GE}_n^+(R)$ является центральной гомотетией $\Omega(\cdot)\colon \mathrm{GE}_n^+(R) \to \mathrm{GE}_n^+(R)$, где $\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X$ для всех $X \in \mathrm{GE}_n^+(R)$.

Так как $\Phi'' = \Omega$ на $\mathrm{GE}_n^+(R)$ и $\Phi'' = \Phi^{c^{-1}} \circ \Phi_{M'} \circ \Phi$ на $\mathrm{G}_n(R)$, то $\Phi = \Phi_M \circ \Phi^c \circ \Omega$ на $\mathrm{GE}_n^+(R)$, где $M = M'^{-1}$. □

Литература

[1] Ильин С. Н. Обратимые матрицы над (неассоциативными) антикольцами // Универсальная алгебра и её приложения. — Волгоград: Перемена, 2000. — С. 81—89.

[2] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. — 1970. — Т. 81 (123), № 4. — С. 600—609.