О клин-произведении и копервичных коалгебрах

И. Э. ВИДЖАЯНТИ
Университет Дюссельдорфа, Германия

УДК 512.55

Ключевые слова: клин-произведение, копервичные коалгебры.

Аннотация

Клин-произведение подкоалгебр коалгебры может использоваться для определения копервичной коалгебры. С другой стороны, копервичные элементы в большой решётке предрадикалов в категории модулей приводят к определению копервичных модулей. Рассматривая коалгебру C как модуль над дуальной алгеброй C^*, мы приходим к другому определению копервичности для коалгебр. При определённых условиях эти два определения становятся равносильными.

Abstract

I. E. Wijayanti, On the wedge product and coprime coalgebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 45—49.

The wedge product of subcoalgebras of a coalgebra can be used to define coprime coalgebras. On the other hand, coprime elements in the big lattice of preradicals in module categories also lead to the definition of coprime modules. Considering a coalgebra C as a module over its dual algebra C^*, this yields another notion of coprimeness for coalgebras. Under special conditions, the two definitions coincide.

1. Введение и предварительные сведения

Определение копервичных коалгебр над полем, использующее клин-произведение было рассмотрено в [4] (см. также [3]). В данной работе мы применяем клин-произведение для обобщения этого подхода на случай копервичных коалгебр над кольцом. В [5] изучались копервичные элементы в большой решётке предрадикалов в категории модулей и копервичные модули (см. также [1]). Коалгебра C может рассматриваться как модуль над дуальной алгеброй C^*. Следовательно, для C мы можем применить результирующее определение копервичности.

Вначале приведём основные определения и понятия. С основами теории читатель может ознакомиться по [2]. Пусть A — ассоциативное унитарное кольцо, а M — левый модуль над A. Категория левых A-модулей обозначается ${}_A\mathcal{M}$, а $\sigma[M]$ обозначает полную подкатегорию в ${}_A\mathcal{M}$, элементы которой являются M-подпорождёнными. A-модуль называется самокопорождающим, если он копорождает каждый из своих фактор-модулей (см. [8]). Это условие эквивалентно

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 45—49.

существованию мономорфизма $M/N \to M^{\Lambda}$ для любого подмодуля $N \subset M$ и некоторого множества Λ и влечёт, в частности, что $\mathrm{Hom}(M/N, M) \neq 0$.

Пусть C — коалгебра над коммутативным кольцом R с коединицей $\varepsilon\colon C \to R$. Её дуальная алгебра — это $C^* = \mathrm{Hom}(C, R)$ с умножением, определённым по правилу

$$(f * g)(c) = (f \otimes g) \circ \Delta(c) = \sum f(c_{\underline{1}})g(c_{\underline{2}})$$

для любого $c \in C,\ f, g \in C^*$, где $\Delta(c) = \sum c_{\underline{1}} \otimes c_{\underline{2}}$.

Любая коалгебра C может рассматриваться как правый C-комодуль, и существует тесная связь между комодулями над C и модулями над C^*. Обозначим через $\boldsymbol{\mathcal{M}}^C$ категорию правых C-комодулей, а через ${}_{C^*}\boldsymbol{\mathcal{M}}$ — категорию левых C^*-модулей. Существует точный функтор из $\boldsymbol{\mathcal{M}}^C$ в ${}_{C^*}\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Если коалгебра C локально проективна, то $\boldsymbol{\mathcal{M}}^C$ — полная подкатегория в ${}_{C^*}\boldsymbol{\mathcal{M}}$, т. е. $\boldsymbol{\mathcal{M}}^C$ изоморфна $\sigma[{}_{C^*}C]$ — полной подкатегории левых C^*-модулей, объекты которой являются ${}_{C^*}C$-подпорождёнными.

Подобно классическому случаю в $\boldsymbol{\mathcal{M}}^C$ (см. [2]) существуют Hom-тензорные соотношения. Для любых $M \in \boldsymbol{\mathcal{M}}^C$ и $X \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_R$ существует R-линейный изоморфизм

$$\phi\colon\ \mathrm{Hom}^C(M, X \otimes_R C) \to \mathrm{Hom}_R(M, X), \quad f \mapsto (I \otimes \varepsilon) \circ f.$$

Для $X = R$ и $M = C$ отображение ϕ даёт (анти-)изоморфизм алгебр

$$\phi\colon\ \mathrm{End}^C(C) \to C^*.$$

2. Копервичные модули в смысле теории предкручения

В [5] с использованием теории предкручения в категории модулей были исследованы копервичные элементы в большой решётке предрадикалов. Внутреннее копроизведение подмодулей модуля определено в [1, 5]. Копервичные подмодули определяются с помощью этого внутреннего копроизведения. Мы рассматриваем эти копервичные подмодули в смысле теории предкручения и для краткости называем их pt-копервичными. Более того, мы определяем копервичную коалгебру, рассматривая коалгебру как модуль над дуальной алгеброй.

Для R-модуля N и вполне инвариантных подмодулей $K, L \subset N$ определим внутреннее копроизведение как

$$K : L = \bigcap\{f^{-1}(L) \mid f \in \mathrm{End}(N),\ K \subset \mathrm{Ker}\, f\}.$$

Копроизведение может быть описано как

$$K : L = \mathrm{Ker}\, \pi_K \diamond \mathrm{Hom}_A(N/K, N) \diamond \pi_L.$$

Мы используем символ $\diamond$ для обозначения композиции отображений, действующих справа. Обычную композицию мы обозначаем через $\circ$. Далее мы будем пользоваться тем, что $(u)f \diamond g = g \circ f(u)$.

Определение 2.1. Пусть N — R-модуль. Мы будем называть подмодуль $N' \subset N$ *pt-копервичным* в N, если $N' \subseteq (K : L)$ влечёт $N' \subset K$ или $N' \subset L$ для любых вполне инвариантных подмодулей $K, L \subset N$. Модуль N будем называть *pt-копервичным*, если N pt-копервичен как подмодуль самого себя.

Лемма 2.2. *Пусть K и L — вполне инвариантные подмодули модуля N. Тогда*

$$K : L \subseteq \operatorname{Ker} \operatorname{Hom}_R(N/K, N) \diamond \operatorname{Hom}_R(N/L, N),$$

где равенство имеет место в случае, когда N является самокопорождающим.

Пример такого модуля даёт следующая лемма.

Лемма 2.3. *Если модуль N самокопорождается и $\operatorname{End}_R(N)$ является первичным кольцом, то N является pt-копервичным.*

Главный вопрос, возникающий в связи с леммой 2.3, заключается в том, справедливо ли обратное утверждение, т. е. если N является копервичным, то следует ли из этого, что $\operatorname{End}_R(N)$ — первичное кольцо? Пусть I, J — идеалы в $\operatorname{End}_R(N)$ и, скажем, $\operatorname{Ker} I = K$, $\operatorname{Ker} J = L$, тогда

$$I \subseteq \operatorname{Hom}(N/K, N), \quad J \subseteq \operatorname{Hom}(N/L, N). \tag{1}$$

Имеем $\operatorname{Ker} \operatorname{Hom}(N/K, N) \diamond \operatorname{Hom}(N/L, N) \subseteq \operatorname{Ker} IJ = N$. Для обращения леммы 2.3 прежде всего важен случай достижения равенств в (1). Нам потребуется следующая характеризация первичных колец.

Лемма 2.4. *Кольцо A первично, если и только если $EF = 0$ влечёт $E = 0$ или $F = 0$ для любых конечно порождённых идеалов E, F в A.*

Свойства инъективности и копорождения модуля N отражаются в аннулирующих условиях между $\operatorname{End}_R(N)$ и N (см. [8, часть 28]). Для идеала I в $S = \operatorname{End}_R(N)$ мы хотим знать, когда $I = \operatorname{Hom}(N/L, N)$ для $L = \operatorname{Ker} I$. В терминах аннулирующих условий $\operatorname{Ann}_S(L) = \operatorname{Hom}(N/L, N)$. Если N самоинъективен, то для каждого конечно порождённого идеала $I \subseteq \operatorname{End}_R(N)$ справедливо $\operatorname{Ann}_S(\operatorname{Ker} I) = I$, т. е. $\operatorname{Hom}(N/\operatorname{Ker}\ I, N) = \operatorname{Hom}(N/L, N) = I$ (см. [8, 28.1(4)]).

Объединяя эти рассуждения и лемму 2.3, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 2.5. *Пусть N является самоинъективным самокопорждающим модулем. Тогда кольцо $\operatorname{End}_R(N)$ первично в том и только в том случае, когда N является pt-копервичным.*

3. Копервичные коалгебры

Пусть C — R-коалгебра, где R — коммутативное кольцо. Рассмотрим $C^* = \operatorname{Hom}_R(C, R)$ как дуальную алгебру для C. Для коалгебр в качестве немедленного следствия предложения 2.5 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Пусть C — коалгебра над кольцом R, и пусть C как C^*-модуль является самоинъективным и самокопорождающим. Тогда кольцо C^* является первичным тогда и только тогда, когда C — pt-копервичный C^*-модуль.*

Для любой подкоалгебры $A \subseteq C$ аннулятор A в C^* является двусторонним идеалом,

$$A^{\perp C^*} = \{f \in C^* \mid f(a) = 0 \text{ для любого } a \in A\} = (C/A)^*.$$

Обратно, если $I \subseteq C^*$ — подмножество в C^*, то мы определяем следующее подмножество в C:

$$I^{\perp C} = \{c \in C \mid f(c) = 0 \text{ для любого } f \in I\} = \bigcap\{\operatorname{Ker} f \mid f \in I\} = \operatorname{Ker} I.$$

$\operatorname{Ker} I$ есть (C^*, C^*)-подбимодуль в C, если I является идеалом в C^*.

Лемма 3.2. $\operatorname{Ann}_C(I) = \operatorname{Ker} I$ *для любого идеала* $I \subset C^*$.

Клин-произведение в коалгебрах над полями рассматривалось в [6]. Мы обобщим это определение на случай коалгебр над кольцами.

Определение 3.3. Клин-произведение двух подкоалгебр A и B в R-коалгебре C определяется как

$$A \wedge^C B = (A^{\perp C^*} B^{\perp C^*})^{\perp C} = \operatorname{Ker}(C/A)^* * (C/B)^*.$$

Это вполне инвариантный C^*-подмодуль в C.

Мы используем это для определения копервичных подкоалгебр над кольцом R следующим образом.

Определение 3.4. Пусть D — подкоалгебра в коалгебре C над кольцом R. Мы будем называть D *копервичной* подкоалгеброй в C, если для любых подкоалгебр A и B в C из того, что $D \subseteq A \wedge^C B$, следует $D \subseteq A$ или $D \subseteq B$. Коалгебру C будем называть *копервичной*, если C является копервичной подкоалгеброй самой себя.

Определение копервичных подкоалгебр над полем k дано в [4]. В этом случае, если I — первичный идеал в C^*, такой что $I = (I^{\perp C})^{\perp C^*}$, т. е. I является замкнутым первичным идеалом, то $I^{\perp C}$ — копервичная подкоалгебра в C. Обратное верно, если $\dim(C^*) < \infty$. Более того, так как 0 является замкнутым идеалом в C^*, то мы получаем (см. [7]), что C есть копервичная коалгебра тогда и только тогда, когда C^* есть первичная алгебра.

Лемма 3.5. *Пусть C — коалгебра над кольцом R, ${}_RC$ является самокопорождающим и плоским. Для подкоалгебры A в C имеем $A = (A^{\perp C^*})^{\perp C}$.*

Лемма 3.6. *Пусть C — коалгебра над кольцом R и модуль ${}_RC$ является самокопорождающим, A, B — любые подкоалгебры в C, C^* — дуальная алгебра. Если C^* первична и $A \wedge^C B = C$, то $A = C$ или $B = C$.*

Следовательно, если C^* первична, то C копервична. Обратное не обязательно верно.

Внутреннее копроизведение и клин-произведение в коалгебре совпадают при условии, что коалгебра является самокопорождающим и локально проективным R-модулем.

Предложение 3.7. *Пусть (C, Δ, ε) — R-коалгебра, модуль ${}_RC$ является самокопорождающим и локально проективным. Для подкоалгебр $A, B \subset C$*

$$A : B = \operatorname{Ker} \operatorname{Hom}^C(C/A, C) \diamond \operatorname{Hom}^C(C/B, C) = A \wedge^C B.$$

Замечание. Если R — квазифробениусово кольцо и C (локально) является проективным как R-модуль, то $\boldsymbol{\mathcal{M}}^C \simeq \sigma[{}_{C^*}C]$ и C является инъективным самокопорождающим в $\boldsymbol{\mathcal{M}}^C$ (см. [2, раздел 9.1]), т. е. C — самоинъективный и самокопорождающий модуль. Более того, по предложению 3.7 для любых подкоалгебр A и B в C справедливо $A : B = A \wedge^C B$.

Предложение 3.8. *Пусть (C, Δ, ε) — коалгебра над квазифробениусовым кольцом R и C является локально проективным как R-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *C — pt-копервичный C^*-модуль*;
2) *C — копервичная коалгебра*;
3) *C^* — первичное кольцо.*

Литература

[1] Bican L., Jambor P., Kepka T., Nemec P. Prime and coprime modules // Fund. Math. — 1980. — Vol. 107. — P. 33—44.

[2] Brzeziński T., Wisbauer R. Corings and Comodules. — Cambridge University Press, 2003.

[3] Jara P., Merino L. M., Ruiz J. F. Prime Path Coalgebras. — Preprint. — 2003.

[4] Nekooei R., Torkzadeh L. Topology on coalgebras // Bull. Iranian Math. Soc. — 2001. — Vol. 27, no. 2. — P. 45—63.

[5] Raggi F., Montes J. R., Wisbauer R. Coprime Preradicals and Modules. — Preprint. — 2003.

[6] Sweedler M. E. Hopf Algebra. — New York: Benjamin, 1969.

[7] Wijayanti I. E. Coprime coalgebras and dual algebras // Int. Conf. on Algebras, Modules and Rings, Lissabon, 14—18th July. — 2003.

[8] Wisbauer R. Grundlagen der Modul- und Ringtheorie, München: Verlag Reinhard Fischer, 1988.