Модули и комодули для коколец

Р. ВИСБАУЭР
Университет Дюссельдорфа, Германия
e-mail: wisbauer@math.uni-duesseldorf.de

УДК 512.55

Ключевые слова: модули, комодули, кокольца.

Аннотация

Кокольцо C над кольцом A — это (A, A)-бимодуль с копроизведением $\Delta\colon C \to C \otimes_A C$ и коединицей $\varepsilon\colon C \to A$, являющимися левыми и правыми A-линейными отображениями, удовлетворяющими дополнительным условиям. Дуальные пространства $C^* = \mathrm{Hom}_A(C, A)$ и ${}^*C = {}_A\mathrm{Hom}(C, A)$ допускают кольцевые структуры, а правые (левые) комодули над C могут рассматриваться как левые (правые) модули над ${}^*C$ (соответственно C^*). В самом деле, при слабых ограничениях на A-модульные свойства C категорию правых C-комодулей можно рассматривать как подкатегорию $\sigma[{}_{^*C}C]$ в ${}^*C$-Mod, т. е. как категорию, подпорождённую левым ${}^*C$-модулем C. Такой подход позволяет применять результаты теории модулей для изучения коалгебр и комодулей.

Abstract

R. Wisbauer, Modules and comodules for corings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 51—72.

A coring C over a ring A is an (A, A)-bimodule with a comultiplication $\Delta\colon C \to C \otimes_A C$ and a counit $\varepsilon\colon C \to A$, both being left and right A-linear mappings satisfying additional conditions. The dual spaces $C^* = \mathrm{Hom}_A(C, A)$ and ${}^*C = {}_A\mathrm{Hom}(C, A)$ allow the ring structure and the right (left) comodules over C can be considered as left (right) modules over ${}^*C$ (respectively, C^*). In fact, under weak restrictions on the A-module properties of C, the category of right C-comodules can be identified with the subcategory $\sigma[{}_{^*C}C]$ of ${}^*C$-Mod, i.e., the category subgenerated by the left ${}^*C$-module C. This point of view allows one to apply results from module theory to the investigation of coalgebras and comodules.

Поздравления

Как следует из приглашения на эту конференцию, кафедра высшей алгебры Московского университета была основана в 1929 г. О. Ю. Шмидтом. Позднее её возглавляли А. Г. Курош и А. И. Кострикин. Многие всемирно известные математики вышли с этой кафедры или сотрудничали с ней. Однако причины процветания кафедры заключаются не только в этом. В действительности, кафедра высшей алгебры — это огромная семья с замечательной аурой, обеспечивающей плодотворную деятельность всех своих участников. Каждый член этой семьи вносит свой вклад в создание творческой среды внутри этого ма-

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 51—72.

тематического сообщества. Я крайне признателен за возможность участвовать в научной работе кафедры. Для меня всегда был важен не только обмен научными знаниями, но и личное общение на основе взаимного уважения.

Мой первый визит на кафедру высшей алгебры состоялся в 1973 году. Многие, наверное, помнят, что в то время мир, по сути, был поделён на две части, не очень дружественные друг к другу. В Москву я приехал по двум причинам. С одной стороны, мне хотелось познакомиться с русскими людьми, о которых в то время почти ничего не было известно на Западе, с другой стороны, меня интересовали результаты Л. А. Скорнякова в области теории модулей. Пришлось преодолеть ряд формальностей, но с самого начала я чувствовал дружескую поддержку со стороны членов кафедры. Она была особенна ценной для меня, поскольку я знал, что профессор Скорняков лично участвовал в обороне Ленинграда.

Когда я наконец оказался в МГУ, Л. А. Скорняков находился в отъезде, поэтому роль моего научного руководителя взял на себя В. Н. Латышев. Мне очень приятно по-прежнему видеть здесь мои старых друзей, с которыми я познакомился в 1973 году. Позвольте мне вспомнить одного из них — А. В. Михалёва, он в то время отвечал за визиты иностранных гостей. Мой визит в Москву был очень приятным и полезным. Более того, так как в Советском Союзе существовала тесная связь между университетами, я также посетил Новосибирск, где познакомился с Л. А. Бокутем и целой плеядой молодых алгебраистов, в том числе с А. Слинько, И. П. Шестаковым и В. К. Харченко. Я многому у них научился и до сих пор встречаю их в разных концах света.

Девять месяцев в МГУ положили начало плодотворному сотрудничеству. После политических событий в конце 80-х годов стало возможным приглашать на Запад своих коллег с Востока. Первым моим гостем в Дюссельдорфе стал студент А. В. Михалёва К. Бейдар. Хотя он пробыл всего месяц, его визит был полезным для меня не только с научной точки зрения, но и с человеческой. Я хотел бы посвятить эту работу его светлой памяти.

После этого прорыва мы смогли регулярно приглашать в Дюссельдорф студентов и сотрудников Московского университета: Г. Бродского, Г. Пунинского и В. Пунинскую, В. А. Артамонова, А. А. Нечаева и Н. Йыуду. Также нашими гостями были Liu Shaoxue из Пекина, A. Mekei из Улан-Батора и A. Kaučikas из Вильнюса. Сотрудничество с ними было для меня крайне полезным, а с некоторыми из них я работаю до сих пор.

Я хотел бы выразить свою глубочайшую благодарность всем, кто связан с кафедрой высшей алгебры. Я уверен, что будущие поколения алгебраистов продолжат её славные традиции.

1. Теория модулей

В своей диссертации я изучал проблемы неассоциативной алгебры, стараясь использовать изящные методы теории модулей над ассоциативными кольцами, чтобы лучше разобраться в неассоциативных кольцах.

Например, ассоциативная алгебра A над кольцом R сепарабельна, если она проективна как $A \otimes_R A^o$-модуль, т. е. если каноническое отображение

$$A \otimes_R A^o \to A, \quad a \otimes b \mapsto ab,$$

расщепляется как морфизм $A \otimes_R A^o$-модулей.

Многие классы колец могут быть охарактеризованы с помощью свойств соответствующих категорий модулей. Работа Л. А. Скорнякова [1] содержит великолепный обзор такого рода соответствий.

Первоначально подобный подход для неассоциативного случая казался невозможным, и я работал над этим вопросом во время моего первого визита в Москву. Я обнаружил, что имеет смысл сопоставить каждому модулю M категорию Гротендика, близкую к M настолько, чтобы отражать в себе (внутренние) свойства самого M. Причиной выбора категории именно такого типа послужила фундаментальная работа Габриэля [3], в которой он показал, что техника категорий модулей применима и в этой более общей ситуации. В частности, существуют инъективные оболочки и может быть применена техника локализации.

Строение нужной категории довольно просто: для любого модуля M берутся прямые суммы $M^{(\Lambda)}$ для любого индексирующего множества Λ, их фактор-модули (*M-порождённые модули*) и их подмодули (*M-подпорождённые модули*). Этот класс модулей определяет полную подкатегорию в A-Mod, которая обозначается $\sigma[M]$. Так как большинство свойств категории $\sigma[M]$ известны из общей теории, то остаётся выяснить роль самого M.

В теории модулей над ассоциативным кольцом A мы связывали свойства порождающего кольца A с A-модулями, теперь мы должны изучать подобные соотношения между *подпорождающим* и другими объектами. Всё это позволяет составить следующую таблицу.

1.1. Гомологическая классификация модулей.

Модуль M	***если и только если***
простой	*каждый модуль в $\sigma[M]$ изоморфен некоторому $M^{(\Lambda)}$.*
полупростой	*— каждый простой модуль (в $\sigma[M]$) M-проективен;* *— каждый модуль в $\sigma[M]$ инъективен (проективен) в $\sigma[M]$.*
регулярный	*— каждый модуль в $\sigma[M]$ регулярен в $\sigma[M]$;* *— каждый модуль в $\sigma[M]$ плоский в $\sigma[M]$.*
наследственный	*M проективен в $\sigma[M]$ и* *— подмодули проективных модулей проективны в $\sigma[M]$ или* *— фактор-модули инъективных модулей инъективны в $\sigma[M]$.*

полусовершенный	*M проективен в $\sigma[M]$ и* *— простые фактор-модули в M имеют проективные оболочки в $\sigma[M]$ или* *— конечно M-порождённые модули имеют проективные оболочки в $\sigma[M]$.*
совершенный	*M проективен в $\sigma[M]$ и* *— M-порождённые модули имеют проективные оболочки в $\sigma[M]$ или* *— $M^{(\mathbb{N})}$ полусовершенен в $\sigma[M]$.*
локально нётеров	*— прямые суммы M-инъективных модулей M-инъективны или* *— инъективные модули в $\sigma[M]$ — прямые суммы неразложимых.*
локально конечной длины	*— конечно порождённые модули в $\sigma[M]$ имеют конечную длину или* *— инъективные модули в $\sigma[M]$ — прямые суммы инъективных оболочек простых модулей.*
QF	*M конечно порождён, M-проективен и* *— каждый инъективный модуль проективен в $\sigma[M]$ или* *— M является порождающим и проективные модули являются инъективными в $\sigma[M]$.*

До сих пор мы имели дело с внутренними свойствами $\sigma[M]$. По определению $\sigma[M]$ есть наследственный класс предкручения в A-Mod, и в теории кручения возникает вопрос, какие ещё свойства мы можем охватить. Например, является ли $\sigma[M]$ классом кручения, т. е. замкнут ли $\sigma[M]$ относительно расширений в A-Mod.

Эти условия не зависят от внутренних свойств $\sigma[M]$, и даже для полупростого модуля M это не обязательно.

1.2. Функтор следа. По своей природе $\sigma[M]$ определяет теорию наследственного предкручения в A-Mod, которая описывается *следом* $\sigma[M]$ *в* N для любого $N \in A$-Mod:

$$\mathcal{T}^M(N) := \mathrm{Tr}(\sigma[M], N) = \sum \{\mathrm{Im}\, f \mid f \in \mathrm{Hom}_A(K, N),\ K \in \sigma[M]\}.$$

Таким образом, $\mathcal{T}^M(N)$ — наибольший подмодуль в N, который принадлежит $\sigma[M]$, и мы получаем функтор

$$\mathcal{T}^M\colon A\text{-Mod} \to \sigma[M], \quad N \mapsto \mathcal{T}^M(N),$$

который является правым сопряжённым для функтора включения $\sigma[M] \to A$-Mod (см. [4, 45.11]).

Отдельный интерес представляет случай, когда $\sigma[M]$ является *классом конаследственного кручения*, т. е. $\sigma[M]$ замкнут относительно расширений и класс без кручения замкнут относительно фактор-модулей.

След $\sigma[M]$ в A, $\mathcal{T}^M(A) \subset A$, является идеалом в A и называется *идеалом следа*. Он полезен при описании условий на класс $\sigma[M]$.

1.3. $\mathcal{T}^M$ как точный функтор. *Для* $T := \mathcal{T}^M(A)$ *следующие условия эквивалентны*:

а) *функтор* $\mathcal{T}^M : A\text{-Mod} \to \sigma[M]$ *точен*;

б) $\sigma[M]$ — *класс конаследственного кручения*;

в) *для каждого* $N \in \sigma[M]$ *справедливо* $TN = N$;

г) $T^2 = T$ *и* ${}_AT$ — *порождающий в* $\sigma[M]$;

д) $TM = M$ *и* A/T *плоский как правый* A*-модуль*.

Рассмотрим некоторые свойства для этого частого случая. Будем говорить, что $\sigma[M]$ *замкнут относительно малых эпиморфизмов*, если для любого эпиморфизма $f\colon P \to N$ в A-Mod с избыточным ядром и $N \in \sigma[M]$ мы имеем $P \in \sigma[M]$.

1.4. Свойства. *Пусть* $\mathcal{T}^M : A\text{-Mod} \to \sigma[M]$ *является точным. Тогда*

1) $\sigma[M]$ *замкнут относительно малых эпиморфизмов*;

2) *если* P *конечно представим в* $\sigma[M]$, *то* P *конечно представим в* A-Mod;

3) *если* P *проективен в* $\sigma[M]$, *то* P *проективен в* A-Mod.

2. Кокольца и комодули

Более подробную информацию о понятиях и результатах этого раздела можно найти в [2]. Везде далее A будет обозначать ассоциативное кольцо или R-алгебру.

2.1. Кокольца. A*-кокольцо* — это (A, A)-бимодуль $\mathcal{C}$ с (A, A)-билинейными отображениями

$$\underline{\Delta} : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \quad \text{и} \quad \underline{\varepsilon} : \mathcal{C} \to A,$$

называемыми (*коассоциативным*) *копроизведением* и *коединицей*, со свойствами

$$(I_\mathcal{C} \otimes \underline{\Delta}) \circ \underline{\Delta} = (\underline{\Delta} \otimes I_\mathcal{C}) \circ \underline{\Delta}, \quad (I_\mathcal{C} \otimes \underline{\varepsilon}) \circ \underline{\Delta} = I_\mathcal{C} = (\underline{\varepsilon} \otimes I_\mathcal{C}) \circ \underline{\Delta}.$$

Для коалгебр мы будем использовать Σ*-обозначения* и будем писать для $c \in \mathcal{C}$

$$\underline{\Delta}(c) = \sum_{i=1}^{k} c_i \otimes \tilde{c}_i = \sum c_{\underline{1}} \otimes c_{\underline{2}}.$$

2.2. Кокольцо Свидлера. Пусть $\varphi\colon B \to A$ — произвольное расширение кольца. Тогда $\mathcal{C} = A \otimes_B A$ есть A-кокольцо с копроизведением

$$\underline{\Delta} : A \otimes_B A \to A \otimes_B A \otimes_B A \simeq (A \otimes_B A) \otimes_A (A \otimes_B A), \quad a \otimes a' \mapsto a \otimes 1_A \otimes a',$$

и коединицей

$$\underline{\varepsilon}: A \otimes_B A \to A, \quad a \otimes a' \mapsto aa'.$$

A-линейные отображения $\mathcal{C} \to A$ имеют кольцевую структуру, что позволяет описывать свойства самого кокольца, и мы полагаем

$$\mathcal{C}^* = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, A), \quad {}^*\mathcal{C} = {}_A\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, A), \quad {}^*\mathcal{C}^* = {}_A\mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}, A) = {}^*\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^*.$$

2.3. Дуальные кольца.

1. $\mathcal{C}^*$ — *кольцо с единицей* $\underline{\varepsilon}$ *относительно умножения* (*для* $f, g \in \mathcal{C}^*$, $c \in \mathcal{C}$)

$$f *^r g \colon \mathcal{C} \xrightarrow{\underline{\Delta}} \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \xrightarrow{f \otimes I_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \xrightarrow{g} A, \quad f *^r g(c) = \sum g(f(c_{\underline{1}})c_{\underline{2}}),$$

и существует кольцевой антиморфизм

$$i_R \colon A \to \mathcal{C}^*, \quad a \mapsto \underline{\varepsilon}(a\text{-}).$$

2. ${}^*\mathcal{C}$ — *кольцо с единицей* $\underline{\varepsilon}$ *относительно умножения* (*для* $f, g \in {}^*\mathcal{C}$, $c \in \mathcal{C}$)

$$f *^l g \colon \mathcal{C} \xrightarrow{\underline{\Delta}} \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \xrightarrow{I_{\mathcal{C}} \otimes g} \mathcal{C} \xrightarrow{f} A, \quad f *^l g(c) = \sum f(c_{\underline{1}} g(c_{\underline{2}})),$$

и существует кольцевой антиморфизм

$$i_L \colon A \to {}^*\mathcal{C}, \quad a \mapsto \underline{\varepsilon}(\text{-}a).$$

3. ${}^*\mathcal{C}^*$ — *кольцо с единицей* $\underline{\varepsilon}$ *относительно умножения* (*для* $f, g \in {}^*\mathcal{C}^*$, $c \in \mathcal{C}$)

$$f * g(c) = \sum f(c_{\underline{1}}) g(c_{\underline{2}}),$$

и существует кольцевой морфизм

$$Z(A) \to Z({}^*\mathcal{C}^*), \quad a \mapsto \underline{\varepsilon}(a\text{-}) = \underline{\varepsilon}(\text{-}a).$$

4. *Имеют место включения* $Z({}^*\mathcal{C}) \subset Z({}^*\mathcal{C}^*)$ *и* $Z(\mathcal{C}^*) \subset Z({}^*\mathcal{C}^*)$.

Естественно, если $A = R$, то $\mathcal{C}^* = {}^*\mathcal{C} = {}^*\mathcal{C}^*$.

2.4. Правые $\mathcal{C}$-комодули. Пусть M — правый A-модуль. A-линейное отображение $\varrho^M \colon M \to M \otimes_A \mathcal{C}$ называется *коассоциативным* и *коунитальным правым кодействием* $\mathcal{C}$ на M, если диаграммы

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varrho^M"] \arrow[d, "\varrho^M"'] & M \otimes_A \mathcal{C} \arrow[d, "I_M \otimes \underline{\Delta}"] \\ M \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "\varrho^M \otimes I_{\mathcal{C}}"] & M \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C} \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varrho^M"] \arrow[dr, "="'] & M \otimes_A \mathcal{C} \arrow[d, "I_M \otimes \underline{\varepsilon}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

коммутативны. A-модуль с коассоциативным коунитальным правым кодействием называется *правым $\mathcal{C}$-комодулем*, и для $m \in M$ будем писать

$$\varrho^M(m) = \sum m_{\underline{0}} \otimes m_{\underline{1}}.$$

2.5. Комодульные морфизмы. *Комодульный морфизм* $f\colon M \to N$ между правыми $\mathcal{C}$-комодулями — это A-линейное отображение f, дающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varrho^M"'] & N \arrow[d, "\varrho^N"] \\ M \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "f\otimes I_{\mathcal{C}}"] & N \otimes_A \mathcal{C} \end{tikzcd},$$

которая означает, что

$$\varrho^N \circ f = (f \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \varrho^M$$

и для любого $m \in M$

$$\sum f(m)_{\underline{0}} \otimes f(m)_{\underline{1}} = \sum f(m_{\underline{0}}) \otimes m_{\underline{1}}.$$

Множество $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N)$, состоящее из $\mathcal{C}$-морфизмов, действующих из M в N, является абелевой группой, и из определения следует, что она задаётся точной последовательностью в $\mathbf{M}_R$

$$0 \to \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_A(M, N \otimes_A \mathcal{C}),$$

где $\gamma(f) = \varrho^N \circ f - (f \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \varrho^M$.

Категория правых $\mathcal{C}$-комодулей и комодульных морфизмов обозначается $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. Так как $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N)$ — абелева группа, то для любых правых комодулей M и N $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ является предаддитивной категорией.

Как и для коколец, некоторые конструкции для $\mathcal{C}$-комодулей основываются на аналогичных конструкциях для A-модулей.

2.6. Коядра и ядра в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. Пусть $f\colon M \to N$ — морфизм в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. Коядро g отображения f в $\mathbf{M}_A$ даёт точную коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varrho^M"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varrho^N"] & L \arrow[r] & 0 \\ M \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "f\otimes I_{\mathcal{C}}"] & N \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "g\otimes I_{\mathcal{C}}"] & L \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

которая может быть продолжена коммутативно в $\mathbf{M}_A$ посредством некоторого $\varrho^L\colon L \to L \otimes_A \mathcal{C}$. Можно увидеть, что с этим отображением L превращается в правый $\mathcal{C}$-комодуль. Таким образом, коядра существуют в категории $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.

По дуальности для ядра h отображения f в $\mathbf{M}_A$ существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "h"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varrho^M"'] & N \arrow[d, "\varrho^N"] \\ 0 \arrow[r] & K \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "h\otimes I_{\mathcal{C}}"] & M \otimes_A \mathcal{C} \arrow[r, "f\otimes I_{\mathcal{C}}"] & N \otimes_A \mathcal{C} \end{tikzcd},$$

где верхняя последовательность всегда точна. При условии точности второй последовательности диаграмма может быть продолжена коммутативно посредством кодействия $\varrho^K: K \to K \otimes_A \mathcal{C}$. Таким образом, при определённых дополнительных условиях ядра $\mathcal{C}$-морфизмов порождаются ядрами в $\mathbf{M}_A$, это верно, например, если $\mathcal{C}$ является плоским как левый A-модуль.

2.7. Комодули и тензорные произведения. *Пусть $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, $f: X \to X'$ в $\mathbf{M}_A$. Тогда*

1) *$X \otimes_A \mathcal{C}$ — правый $\mathcal{C}$-комодуль,*
$$I_X \otimes \underline{\Delta}: X \otimes_A \mathcal{C} \to X \otimes_A \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}$$
и отображение $f \otimes I_{\mathcal{C}}: X \otimes_A \mathcal{C} \to X' \otimes_A \mathcal{C}$ является $\mathcal{C}$-морфизмом;
2) *для любого индексного множества Λ справедливо $A^{(\Lambda)} \otimes_A \mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{(\Lambda)}$ и существует сюръективный $\mathcal{C}$-морфизм $\mathcal{C}^{(\Lambda')} \to M \otimes_A \mathcal{C}$ для некоторого Λ';*
3) *структурное отображение $\varrho^M: M \to M \otimes_A \mathcal{C}$ является комодульным морфизмом и, таким образом, M — подкомодуль $\mathcal{C}$-порождённого комодуля;*
4) *пусть B — такая R-алгебра, что M — (B, A)-бимодуль и отображение ϱ^M является (B, A)-линейным. Тогда для любого $Y \in \mathbf{M}_B$ правый A-модуль $Y \otimes_B M$ является правым $\mathcal{C}$-комодулем,*
$$I_Y \otimes \varrho^M: Y \otimes_B M \to Y \otimes_B M \otimes_A \mathcal{C}.$$

Соотношения между функтором Hom и тензорным функтором носят фундаментальный характер для коколец.

2.8. Hom-тензорные соотношения для правых $\mathcal{C}$-комодулей. *Пусть A — R-алгебра, $M, N \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ и $X \in \mathbf{M}_A$. Существует биективное R-линейное отображение*
$$\varphi\colon \operatorname{Hom}^{\mathcal{C}}(M, X \otimes_A \mathcal{C}) \to \operatorname{Hom}_A(M, X), \quad f \mapsto (I_X \otimes \underline{\varepsilon}) \circ f,$$
с обратным отображением $h \mapsto (h \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \varrho^M$.

Полагая $X = A$ и $M = \mathcal{C}$ в 2.8, мы получаем, что изоморфизмы φ и φ' описывают комодульные эндоморфизмы $\mathcal{C}$.

2.9. Комодульные эндоморфизмы $\mathcal{C}$.

1. *Существует антиизоморфизм алгебр*
$$\varphi\colon \operatorname{End}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^*, \quad f \mapsto \underline{\varepsilon} \circ f,$$
с обратным отображением $h \mapsto (h \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \underline{\Delta}$.
2. *Существует изоморфизм алгебр*
$$\varphi'\colon {}^{\mathcal{C}}\operatorname{End}(\mathcal{C}) \to {}^*\mathcal{C}, \quad f \mapsto \underline{\varepsilon} \circ f,$$
с обратным отображением $h \mapsto (I_{\mathcal{C}} \otimes h) \circ \underline{\Delta}$.
3. *φ и φ' являются гомеоморфизмами относительно конечных топологий.*

Заметим, что в 2.9 морфизмы пишутся слева от аргумента. Запись морфизмов правых комодулей с правой стороны даёт изоморфизм между $\mathcal{C}^*$ и $\mathrm{End}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$. Далее подведём итог всему сказанному выше относительно категории комодулей.

2.10. Категория $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.

1. *Категория $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ содержит прямые суммы и коядра, и $\mathcal{C}$ является подпорождающим. Она содержит ядра, если $\mathcal{C}$ — плоский левый A-модуль. В этом случае $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ имеет порождающий.*
2. *Функтор $- \otimes_A \mathcal{C} \colon \mathbf{M}_A \to \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ является правым сопряжённым для забывающего функтора $(-)_A \colon \mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{M}_A$ посредством изоморфизма*
$$\varphi\colon\ \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, X \otimes_A \mathcal{C}) \to \mathrm{Hom}_A(M, X).$$
3. *Для любого мономорфизма $f \colon K \to L$ в $\mathbf{M}_A$*
$$f \otimes I_{\mathcal{C}} \colon K \otimes_A \mathcal{C} \to L \otimes_A \mathcal{C}$$
является мономорфизмом в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.
4. *Для любого семейства $\{M_\lambda\}_\Lambda$ правых A-модулей*
$$\Big(\prod_\Lambda M_\lambda\Big) \otimes_A \mathcal{C}$$
является произведением $M_\lambda \otimes_A \mathcal{C}$ в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.

2.11. $\mathcal{C}$ как плоский A-модуль. *Следующие условия эквивалентны*:

а) *$\mathcal{C}$ — плоский как левый A-модуль*;
б) *каждый мономорфизм в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ инъективен*;
в) *каждый мономорфизм $U \to \mathcal{C}$ в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ инъективен*;
г) *забывающий функтор $(-)_A \colon \mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{M}_A$ уважает мономорфизмы.*

Если эти условия выполняются, то $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ является категорией Гротендика.

2.12. $- \otimes_A \mathcal{C}$ как левый сопряжённый функтор. *Если функтор $- \otimes_A \mathcal{C} \colon \mathbf{M}_A \to \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ является левым сопряжённым для забывающего функтора $(-)_A \colon \mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{M}_A$, то $\mathcal{C}$ конечно порождён и проективен как левый A-модуль.*

Доказательство. Будучи правым сопряжённым, забывающий функтор уважает мономорфизмы и произведения. Поэтому $\mathcal{C}$ является плоским левым A-модулем и для любого семейства $\{M_\lambda\}_\Lambda$ правых A-модулей существует изоморфизм
$$\Big(\prod_\Lambda M_\lambda\Big) \otimes_A \mathcal{C} \simeq \prod_\Lambda (M_\lambda \otimes_A \mathcal{C}).$$
Из этого следует, что $\mathcal{C}$ — конечно представимый левый A-модуль, следовательно, он проективен. □

Комодуль $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ называется $(\mathcal{C}, A)$-*инъективным*, если для каждого $\mathcal{C}$-комодульного отображения $i\colon N \to L$, являющегося коретракцией в $\mathbf{M}_A$, любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & L \\ & M \end{tikzcd}$$

в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ может быть коммутативно дополнена некоторым $g\colon L \to M$ в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.

2.13. $(\mathcal{C}, A)$-инъективность. *Для любого $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ эквивалентны следующие условия*:

а) *M является $(\mathcal{C}, A)$-инъективным*;

б) *любое $\mathcal{C}$-комодульное отображение $i\colon M \to L$, являющееся коретракцией в $\mathbf{M}_A$, является коретракцией и в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$*;

в) *$\varrho^M\colon M \to M \otimes_A \mathcal{C}$ — коретракция в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.*

Для любого $X \in \mathbf{M}_A$ модуль $X \otimes_A \mathcal{C}$ является $(\mathcal{C}, A)$-инъективным.

Пусть ${}_A\mathcal{C}$ плоский. Тогда короткая точная последовательность в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ называется $(\mathcal{C}, A)$-*точной*, если она расщепляется в $\mathbf{M}_A$. Функтор на $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ называется *левым* (*правым*) $(\mathcal{C}, A)$-*точным*, если он является левым (правым) точным на коротких $(\mathcal{C}, A)$-точных последовательностях. Очевидно, что комодуль M $(\mathcal{C}, A)$-инъективен, если и только если функтор $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(\text{-}, M)$ является $(\mathcal{C}, A)$-точным.

Объект $Q \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ является *инъективным в* $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, если для любого мономорфизма $f\colon M \to N$ в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ каноническое отображение $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(N, Q) \to \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, Q)$ сюръективно. Если ${}_A\mathcal{C}$ плоский, инъективные объекты $Q \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ характеризуются точностью $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(\text{-}, Q)$.

2.14. Инъективные объекты в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. *Предположим, что ${}_A\mathcal{C}$ плоский.*

1. *Если X инъективный в $\mathbf{M}_A$, то $X \otimes_A \mathcal{C}$ инъективный в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.*
2. *Если M $(\mathcal{C}, A)$-инъективный и инъективный в $\mathbf{M}_A$, то M инъективный в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.*
3. *Если A инъективный в $\mathbf{M}_A$, то $\mathcal{C}$ инъективный в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.*

Объект $P \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ *проективен в* $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, если для любого эпиморфизма $M \to N$ в $\mathbf{M}^{C}$ каноническое отображение $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(P, M) \to \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(P, N)$ сюръективно.

2.15. Проективные объекты в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. *Рассмотрим произвольный объект $P \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.*

1. *Если P проективный в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, то P проективный в $\mathbf{M}_A$.*
2. *Если ${}_A\mathcal{C}$ плоский, то следующие условия эквивалентны*:
   а) *P проективный в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$*;
   б) *функтор $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(P, \text{-})\colon \mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{M}_R$ точный.*

Функтор Hom и тензорный функтор обладают, по существу, теми же свойствами, что и в категориях модулей.

2.16. Функтор Hom и тензорный функтор. *Для любых $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ и $S = \mathrm{End}^{\mathcal{C}}(M)$ при записи морфизмов с левой стороны существует сопряжённая пара функторов*

$$- \otimes_S M \colon \mathbf{M}_S \to \mathbf{M}^{\mathcal{C}}, \quad \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, -) \colon \mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{M}_S,$$

т. е. существуют канонические изоморфизмы для $N \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ и $X \in \mathbf{M}_S$

$$\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(X \otimes_S M, N) \to \mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N)), \quad \delta \mapsto [x \mapsto \delta(x \otimes -)],$$

с обратным отображением $\varphi \mapsto [x \otimes m \mapsto \varphi(x)(m)]$.

В явной форме коединица и единица присоединения записываются так:

$$\mu_N \colon \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N) \otimes_S M \to N, \quad f \otimes m \mapsto f(m),$$
$$\nu_X \colon X \to \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, X \otimes_S M), \quad x \mapsto [m \mapsto x \otimes m].$$

В общем случае $\mathcal{C}$ не обязательно является порождающим в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. Порождающие описываются с помощью следующих условий.

2.17. Порождающие в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. *Пусть ${}_A\mathcal{C}$ плоский, $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ и $S = \mathrm{End}^{\mathcal{C}}(M)$. Следующие условия эквивалентны*:

а) *M — порождающий в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$*;

б) *функтор $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, -) \colon \mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{M}_S$ унивалентный*;

в) *${}_S M$ плоский, и для каждого инъективного комодуля $N \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$*

$$\mu_N \colon \mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N) \otimes_S M \to N$$

является изоморфизмом.

В том случае, когда мономорфизмы инъективны в $\mathbf{M}^{C}$, свойства проективных порождающих можно перенести из теории модулей. Это приведёт к следующим характеризациям.

2.18. Проективные порождающие в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. *Предположим, что ${}_A\mathcal{C}$ плоский. Пусть $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ такой, что M_A конечно порождён, и $S = \mathrm{End}^{\mathcal{C}}(M)$. Следующие условия эквивалентны*:

а) *M — проективный порождающий в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$*;

б) *M — порождающий в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, и ${}_S M$ точно плоский*;

в) *$\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, -) \colon \mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{M}_S$ порождает эквивалентность категорий.*

3. $\mathcal{C}$-комодули и $\mathcal{C}^*$-модули

В этом разделе мы рассматриваем комодули над кокольцом $\mathcal{C}$ как модули над дуальной алгеброй для $\mathcal{C}$. Подробности можно найти в [2]. Напомним, что левое дуальное кольцо ${}^*\mathcal{C}$ и правое дуальное кольцо $\mathcal{C}^*$ ассоциированы с любым кокольцом $\mathcal{C}$.

3.1. $\mathcal{C}$-комодули и $^*\mathcal{C}$-модули. *Любой модуль $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ может быть рассмотрен как левый $^*\mathcal{C}$-модуль посредством*

$$\rightharpoonup : {}^*\mathcal{C} \otimes_R M \to M, \quad f \otimes m \mapsto (I_M \otimes f) \circ \varrho^M(m).$$

Любой морфизм $h\colon M \to N$ в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ является левым $^*\mathcal{C}$-модульным морфизмом, таким образом,

$$\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N) \subset {}_{^*\mathcal{C}}\mathrm{Hom}(M, N)$$

и существует унивалентный функтор $\mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to \sigma[{}_{^*\mathcal{C}}\mathcal{C}] \subset {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$.

Следующая наша задача — удостовериться, что $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ — полная подкатегория в ${}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$.

3.2. Левое α-условие. Будем говорить, что $\mathcal{C}$ *удовлетворяет левому α-условию*, если отображение

$$\alpha_N : N \otimes_A \mathcal{C} \to \mathrm{Hom}_A({}^*\mathcal{C}, N), \quad n \otimes c \mapsto [f \mapsto nf(c)],$$

инъективно для каждого $N \in \mathbf{M}_A$.

Следующие условия эквивалентны:

а) *$\mathcal{C}$ удовлетворяет левому α-условию*;

б) *для $N \in \mathbf{M}_A$ и $u \in N \otimes_A \mathcal{C}$ из того, что $(I_N \otimes f)(u) = 0$ для всех $f \in {}^*\mathcal{C}$, следует $u = 0$*;

в) *$\mathcal{C}$ локально проективен как левый A-модуль.*

Из левого α-условия следует, что $\mathcal{C}$ — плоский и A-копорождённый левый A-модуль. *Правое α-условие* для-$\mathcal{C}$ определяется симметрично и даёт соответствующие (лево-право симметричные) свойства.

3.3. $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ как полная подкатегория в ${}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$. *Для $\mathcal{C}$ следующие условия эквивалентны*:

а) $\mathbf{M}^{\mathcal{C}} = \sigma[{}_{^*\mathcal{C}}\mathcal{C}]$;

б) $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ — *полная подкатегория в* ${}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$;

в) *для всех $M, N \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ справедливо* $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}}(M, N) = {}_{^*\mathcal{C}}\mathrm{Hom}(M, N)$;

г) *$\mathcal{C}$ удовлетворяет левому α-условию.*

Если эти условия выполняются, то функтор включения $\mathbf{M}^{\mathcal{C}} \to {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$ имеет правый сопряжённый и для любого семейства $\{M_\lambda\}_\Lambda$ A-модулей

$$\left(\prod_\Lambda M_\lambda\right) \otimes_A \mathcal{C} \simeq \prod_\Lambda^{\mathcal{C}} (M_\lambda \otimes_A \mathcal{C}) \subset \prod_\Lambda (M_\lambda \otimes_A \mathcal{C}),$$

где $\prod^{\mathcal{C}}$ обозначает произведение в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.

Ответ на вопрос, когда все $^*\mathcal{C}$-модули являются $\mathcal{C}$-комодулями, следующий.

3.4. Когда $\mathbf{M}^{\mathcal{C}} = {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$? *Для $\mathcal{C}$ следующие условия эквивалентны*:

а) $\mathbf{M}^{\mathcal{C}} = {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$;

б) *функтор* $- \otimes_A \mathcal{C}\colon \mathbf{M}_A \to {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$ *имеет левый сопряжённый*;

в) *${}_A\mathcal{C}$ конечно порождён и проективен.*

Если выполняется α-условие, то $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ может быть рассмотрена как категория модулей $\sigma[{}_{^*\mathcal{C}}\mathcal{C}]$, и тогда, в частности, теоретико-модульная характеризация $\mathcal{C}$-инъективных или $\mathcal{C}$-проективных модулей применима и к комодулям. Заметим, что проективные объекты не обязательно существуют в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.

3.5. $\mathcal{C}$ как $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-бимодуль. *$\mathcal{C}$ можно рассмотреть как $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-бимодуль посредством*

$$\rightharpoonup\colon {}^*\mathcal{C}\otimes_R\mathcal{C}\to\mathcal{C},\quad f\otimes c\mapsto f\rightharpoonup c=(I_{\mathcal{C}}\otimes f)\circ\underline{\Delta}(c)=\sum c_{\underline{1}}f(c_{\underline{2}}),$$
$$\leftharpoonup\colon \mathcal{C}\otimes_R\mathcal{C}^*\to\mathcal{C},\quad c\otimes g\mapsto c\leftharpoonup g=(g\otimes I_{\mathcal{C}})\circ\underline{\Delta}(c)=\sum g(c_{\underline{1}})c_{\underline{2}}.$$

1. *Для любых $f\in{}^*\mathcal{C}$, $g\in\mathcal{C}^*$ и $c\in\mathcal{C}$*
$$(f\rightharpoonup c)\leftharpoonup g=f\rightharpoonup(c\leftharpoonup g),\quad g(f\rightharpoonup c)=f(c\leftharpoonup g).$$
2. *$\mathcal{C}$ точен как левый ${}^*\mathcal{C}$- и как правый $\mathcal{C}^*$-модуль.*
3. *Если $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому и правому α-условиям, то $\mathcal{C}$ — сбалансированный $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-бимодуль, т. е.*
$$_{^*\mathcal{C}}\operatorname{End}(\mathcal{C})=\operatorname{End}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\simeq\mathcal{C}^*,\quad \operatorname{End}_{\mathcal{C}^*}(\mathcal{C})={}^{\mathcal{C}}\operatorname{End}(\mathcal{C})\simeq{}^*\mathcal{C},$$
$$_{^*\mathcal{C}}\operatorname{End}_{\mathcal{C}^*}(\mathcal{C})={}^{\mathcal{C}}\operatorname{End}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C})\simeq Z(\mathcal{C}^*)=Z({}^*\mathcal{C}),$$
где морфизмы записываются с противоположной стороны от скаляров. В этом случае левый и правый сервантный (A,A)-подбимодуль $D\subset\mathcal{C}$ является подкокольцом, если и только если D — $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-подбимодуль.

Доказательство. Чтобы понять последнее утверждение, предположим, что $D\subset\mathcal{C}$ — левый и правый сервантный (A,A)-подбимодуль. Если D — подкокольцо, то оно также является правым и левым подкомодулем и, следовательно, $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-подбимодулем. Обратно, предположим, что D — $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-подбимодуль. Тогда сужение $\underline{\Delta}$ порождает левое и правое $\mathcal{C}$-кодействие на D и по условию сервантности
$$\underline{\Delta}(D)\subset D\otimes_A\mathcal{C}\cap\mathcal{C}\otimes_A D=D\otimes_A D,$$
что доказывает, что D — подкокольцо. □

3.6. Теорема конечности.

1. *Пусть $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому α-условию и $M\in\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. Тогда каждое конечное подмножество в M содержится в подкомодуле в M, который конечно порождён как правый A-модуль.*
2. *Пусть $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому и правому α-условиям. Тогда любое конечное подмножество в $\mathcal{C}$ содержится в $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-подбимодуле, который конечно порождён как (A,A)-бимодуль.*

Будем называть правый $\mathcal{C}$-комодуль N *полупростым* (в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$), если каждый $\mathcal{C}$-мономорфизм $U\to N$ является коретракцией, и будем называть N *простым*, если все эти мономорфизмы являются изоморфизмами. Полупростота N эквивалентна факту, что каждый правый $\mathcal{C}$-комодуль N-инъективен.

Кокольцо $\mathcal{C}$ называется *левым* (*правым*) *полупростым*, если оно полупросто как левый (правый) комодуль. $\mathcal{C}$ называется *простым кокольцом*, если оно просто как $(\mathcal{C},\mathcal{C})$-бикомодуль.

3.7. Полупростые комодули. *Пусть $\mathcal{C}$ является плоским левым A-модулем. Для $N \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ эквивалентны следующие условия*:

а) *N полупрост* (*в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, как было определено выше*);

б) *каждый подкомодуль в N выделяется прямым слагаемым*;

в) *N является* (*прямой*) *суммой простых подкомодулей.*

Теперь мы готовы охарактеризовать важный класс колец.

3.8. Правые полупростые кокольца. *Для кокольца $\mathcal{C}$ эквивалентны следующие условия*:

а) *$\mathcal{C}$ — полупростой правый $\mathcal{C}$-комодуль*;

б) *${}_A\mathcal{C}$ плоский и $\mathcal{C}$ является* (*прямой*) *суммой простых правых комодулей*;

в) *${}_A\mathcal{C}$ плоский и каждый комодуль в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ проективен*;

г) *${}_A\mathcal{C}$ проективный и $\mathcal{C}$ — полупростой левый ${}^*\mathcal{C}$-модуль*;

д) *каждый комодуль в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$* ($\mathcal{C}$-)*инъективен*;

е) *$\mathcal{C}$ является прямой суммой простых колец, являющихся правыми* (*левыми*) *полупростыми*;

ж) *$\mathcal{C}$ — полупростой левый $\mathcal{C}$-комодуль.*

Рассуждения, проведённые выше, позволяют дать также следующую характеризацию.

3.9. Простые кокольца. *Для кокольца $\mathcal{C}$ эквивалентны следующие условия*:

а) *$\mathcal{C}$ — простое кокольцо, являющееся правым полупростым*;

б) *$\mathcal{C}$ проективно в ${}_A\mathbf{M}$ и является простым $({}^*\mathcal{C},\mathcal{C}^*)$-бимодулем с минимальным правым $\mathcal{C}^*$-подмодулем*;

в) *$\mathcal{C}$ правое полупростое, и все простые комодули изоморфны*;

г) *$\mathcal{C}$ — простое кокольцо, являющееся левым полупростым.*

Если эти условия выполняются, то существуют R-алгебра с делением T и (T,A)-бимодуль P, такие что P_A конечно порождён и $P^* \otimes_T P$ и $\mathcal{C}$ изоморфны как кокольца.

Из теоремы конечности и Hom-тензорных соотношений следует, что свойства основного кольца A существенно влияют на комодульные свойства $\mathcal{C}$.

3.10. Кокольца над специальными кольцами. *Пусть $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому α-условию.*

1. *Если A нётерово справа, то $\mathcal{C}$ — локально нётеров правый комодуль и прямые суммы инъективных объектов в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ инъективны.*
2. *Если A левое совершенное, то каждый модуль в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ удовлетворяет условию убывающих цепей конечно порождённых подкомодулей.*

3. *Если A артиново справа, то каждый конечно порождённый модуль в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ имеет конечную длину.*

Над артиновым слева (левым совершенным) кольцом A левое α-условие на $\mathcal{C}$ эквивалентно проективности ${}_A\mathcal{C}$. QF-кольцо A артиново, инъективно и является сопорождающим в ${}_A\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_A$.

3.11. Кокольца над QF-кольцами. *Пусть ${}_A\mathcal{C}$ проективен и A является QF-кольцом.*

1. *$\mathcal{C}$ — (большой) инъективный копорождающий в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.*
2. *Каждый комодуль в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ является подкомодулем некоторой прямой суммы $\mathcal{C}^{(\Lambda)}$.*
3. *$\mathcal{C}^*$ — $\mathfrak{f}$-полусовершенное кольцо.*
4. $K := \operatorname{Soc}_{{}^*\mathcal{C}}\mathcal{C} \trianglelefteq \mathcal{C}$ *и* $\operatorname{Jac}(\mathcal{C}^*) = \operatorname{Hom}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/K, \mathcal{C}) \simeq \operatorname{Hom}_A(\mathcal{C}/K, A)$.

Заметим, что здесь нет симметрии: из проективности ${}_A\mathcal{C}$ не обязательно следует проективность $\mathcal{C}_A$.

При определённых условиях конечности мы можем перейти от левых $\mathcal{C}$-комодулей к правым. В частности, это верно над QF-кольцами. Напомним, что для конечно представимого правого A-модуля M и плоского правого A-модуля $\mathcal{C}$ существует изоморфизм

$$\nu_M : \mathcal{C} \otimes_A \operatorname{Hom}_A(M, A) \to \operatorname{Hom}_A(M, \mathcal{C}), \quad c \otimes h \mapsto c \otimes h(\text{-}).$$

3.12. Комодули, конечно представимые как A-модули. *Пусть $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ и предположим, что M_A конечно порождён и проективен или что $\mathcal{C}_A$ плоский и M_A конечно представим.*

1. *$M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ можно рассмотреть как левый $\mathcal{C}$-комодуль посредством структурного отображения*
$$\bar{\varrho}\colon M^* \to \operatorname{Hom}_A(M, \mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \otimes_A M^*, \quad g \mapsto (g \otimes I_{\mathcal{C}}) \circ \varrho^M.$$
В результате структура правого $\mathcal{C}^*$-модуля на M^* задаётся посредством отображения
$$M^* \otimes_R \mathcal{C}^* \to M^*, \quad g \otimes f \mapsto \Big[m \mapsto \sum f(g(m_{\underline{0}})m_{\underline{1}})\Big].$$
2. *Предположим также, что ${}_A\mathcal{C}$ плоский. Если M инъективен как правый $\mathcal{C}$-комодуль и содержится в свободном A-модуле, то M^* проективен в $\mathbf{M}_{\mathcal{C}^*}$.*

Над QF-кольцами для некоторых модулей инъективность (проективность) в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ расширяется до инъективности (соответственно проективности) в ${}_{\mathcal{C}^*}\mathbf{M}$.

3.13. Инъективность—проективность. *Пусть ${}_A\mathcal{C}$ проективен, A — QF-кольцо и $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. Если M проективен в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, то M^* $\mathcal{C}$-инъективен как правый $\mathcal{C}^*$-модуль и ${}^{\mathcal{C}}\operatorname{Rat}(M^*)$ инъективен в ${}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}$.*

3.14. $\mathcal{C}$ является линейно компактным. *Пусть A — QF-кольцо, и предположим, что $\mathcal{C}$ проективен как левый и правый A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) ${}_{*\mathcal{C}}\mathcal{C}$ *является линейно компактным*;

б) $\mathcal{C}_{\mathcal{C}^*}$ *является* $\mathcal{C}^*$-*инъективным*;

в) ${}_{*\mathcal{C}}\mathcal{C}$ *артинов*.

Над (левым и правым) нётеровым кольцом A $\mathcal{C}$ является левым и правым локально нётеровым $\mathcal{C}^*$-модулем.

3.15. $\mathcal{C}$ как инъективный копорождающий в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. *Пусть A нётерово, и пусть $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому и правому α-условиям. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) $\mathcal{C}$ — *инъективный копорождающий в* $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$;

б) $\mathcal{C}$ — *инъективный копорождающий в* ${}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}$;

в) $\mathcal{C}$ — *копорождающий и в* $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, *и в* ${}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}$.

Ограничиваясь только артиновыми кольцами, мы получаем интересную характеризацию $\mathcal{C}$ как инъективного копорождающего не только в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, но и в $\mathbf{M}_{\mathcal{C}^*}$.

3.16. $\mathcal{C}$ как инъективный копорождающий в $\mathbf{M}_{\mathcal{C}^*}$. *Пусть A — артиново кольцо, ${}_A\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_A$ — проективные модули. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) $\mathcal{C}$ — *инъективный копорождающий в* $\mathbf{M}_{\mathcal{C}^*}$;

б) ${}_{*\mathcal{C}}\mathcal{C}$ *артиново и является инъективным копорождающим в* $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$;

в) ${}_{*\mathcal{C}}\mathcal{C}$ — *инъективный копорождающий в* $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ *и* $\mathcal{C}^*$ *нётерово справа.*

Если эти условия выполняются, то $\mathcal{C}^*$ — полусовершенное кольцо и каждый правый $\mathcal{C}^*$-модуль, конечно порождённый как A-модуль, принадлежит ${}^{\mathcal{C}}\mathbf{M}$.

Так как над QF-кольцом любое кокольцо является инъективным копорождающим для своих комодулей, то результаты 3.16 упрощаются следующим образом.

3.17. Следствие. *Если A — QF-кольцо, ${}_A\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_A$ проективные. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) $\mathcal{C}$ *инъективный в* $\mathbf{M}_{\mathcal{C}^*}$;

б) $\mathcal{C}$ — *инъективный копорождающий в* $\mathbf{M}_{\mathcal{C}^*}$;

в) ${}_{*\mathcal{C}}\mathcal{C}$ *артинов*;

г) $\mathcal{C}^*$ — *нётерово справа кольцо.*

4. Рациональный функтор для кокольца

При α-условии $\mathcal{C}$-комодули образуют наследственный класс предкручения в категории ${}^*\mathcal{C}$-модулей.

4.1. Рациональный функтор. Для любого левого ${}^*\mathcal{C}$-модуля M *рациональный подмодуль* определяется следующим образом:

$$\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(M) = \sum\{\mathrm{Im}\, f \mid f \in {}_{*\mathcal{C}}\mathrm{Hom}(U, M),\ U \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}\}.$$

Таким образом, $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(M)$ — наибольший подмодуль в M, который подпорождён посредством $\mathcal{C}$ и, следовательно, является правым $\mathcal{C}$-комодулем. Индуцированный функтор, подфунктор тождественного, называется *рациональным функтором*:

$$\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}\colon {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M} \to \mathbf{M}^{\mathcal{C}}, \qquad \begin{array}{c} M \mapsto \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(M), \\ f\colon M \to N \mapsto f|_{\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(M)}\colon \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(M) \to \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(N). \end{array}$$

Очевидно, $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(M) = M$ для $M \in {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$, если и только если $M \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$.

Рациональный подмодуль $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}({}^*\mathcal{C})$ является двусторонним идеалом в ${}^*\mathcal{C}$ и называется *левым идеалом следа*. Естественно, $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}({}^*\mathcal{C}) = {}^*\mathcal{C}$, если и только если ${}_A\mathcal{C}$ конечно порождён и проективен.

По симметрии, если $\mathcal{C}$ удовлетворяет правому α-условию, то *правые рациональные $\mathcal{C}^*$-модули* определены и порождают *правый идеал следа* ${}^{\mathcal{C}}\,\mathrm{Rat}(\mathcal{C}^*)$.

4.2. Свойства левого идеала следа. *Пусть $T = \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}({}^*\mathcal{C})$.*

1. *Пусть $f \in {}^*\mathcal{C}$. Предположим, что $f \rightharpoonup \mathcal{C}$ — конечно представимый левый A-модуль. Тогда $f \in T$.*
2. *Для любого $f \in T$ правый комодуль ${}^*\mathcal{C} *^l f$ конечно порождён как A-модуль.*

4.3. Плотные идеалы в ${}^*\mathcal{C}$. *Для идеала $T \subset {}^*\mathcal{C}$ следующие условия эквивалентны*:

а) *T плотный в ${}^*\mathcal{C}$ (в конечной топологии) и $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому α-условию*;

б) $\mathbf{M}^{\mathcal{C}} = \sigma[{}_T\mathcal{C}]$;

в) *$\mathcal{C}$ — s-унитальный T-модуль и $\mathcal{C}$ удовлетворяет α-условию.*

Далее будем подразумевать, что $\mathcal{C}$ удовлетворяет α-условию.

4.4. Рациональный функтор точен. *Пусть $T = \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}({}^*\mathcal{C})$. Следующие условия для $\mathcal{C}$ эквивалентны*:

а) *функтор $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}\colon {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M} \to \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ точен*;

б) *категория $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ замкнута относительно расширений в ${}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$ и класс (без кручения) $\{X \in {}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M} \mid \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}(X) = 0\}$ замкнут относительно фактор-модулей*;

в) *$T^2 = T$ и T — порождающий в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$*;

г) *$T\mathcal{C} = \mathcal{C}$ и ${}^*\mathcal{C}/T$ плоский как правый ${}^*\mathcal{C}$-модуль*;

д) *T — $\mathcal{C}$-плотный идеал в ${}^*\mathcal{C}$.*

Отметим некоторые следствия точности Rat-функтора.

4.5. Следствие. *Предположим, что $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}$ точен и $P \in \mathbf{M}^{\mathcal{C}}$. Тогда*

1) *$\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ замкнут относительно малых эпиморфизмов в ${}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$*;

2) *если P конечно представим в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, то P конечно представим в ${}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$*;

3) *если P проективен в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$, то P проективен в ${}_{^*\mathcal{C}}\mathbf{M}$.*

Над QF-кольцом A для любого A-кокольца $\mathcal{C}$, такого что ${}_A\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_A$ проективны, дуальные кольца $\mathcal{C}^*$ и ${}^*\mathcal{C}$ f-полупервичны (кольца эндоморфизмов самоинъективных модулей).

4.6. Проективных объектов в $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ достаточно. *Пусть ${}_A\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_A$ проективны, предположим, что A — QF-кольцо. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) *функтор* $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}$ *точен*;

б) *левый идеал следа* $\mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}({}^*\mathcal{C})$ *плотен в* ${}^*\mathcal{C}$;

в) *каждый простой комодуль имеет проективную оболочку в* $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$;

г) $\mathbf{M}^{\mathcal{C}}$ *имеет порождающее множество из конечно порождённых проективных модулей.*

4.7. Идеал следа и разложения. *Пусть $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому и правому α-условиям, и положим $T = \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}({}^*\mathcal{C})$. Если $\mathcal{C}$ — прямая сумма конечно порождённых правых $\mathcal{C}^*$-модулей (левых $\mathcal{C}$-комодулей), то существует множество ортогональных идемпотентов $\{e_\lambda\}_\Lambda$ в T, таких что*

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{\Lambda} e_\lambda \rightharpoonup \mathcal{C}.$$

В этом случае T $\mathcal{C}$-плотен в ${}^*\mathcal{C}$.

4.8. Двусторонние разложения. *Предположим, что $\mathcal{C}$ удовлетворяет левому и правому α-условиям, и положим $T = \mathrm{Rat}^{\mathcal{C}}({}^*\mathcal{C})$. Если $\mathcal{C}$ — прямая сумма $({}^*\mathcal{C}, \mathcal{C}^*)$-бимодулей (подкоколец), которые являются конечно порождёнными как левые A-модули, то*

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{\Lambda} e_\lambda \rightharpoonup \mathcal{C},$$

где $\{e_\lambda\}_\Lambda$ — семейство ортогональных центральных идемпотентов в T.

5. Структуры сплетения и алгебры Хопфа

Интерес к кокольцам со стороны алгебраистов и физиков значительно вырос, как только обнаружилась тесная связь этих объектов со *структурами сплетения*, которые, в свою очередь, обобщают конструкции, возникающие в связи с алгебрами Хопфа. Мы приведём здесь лишь основные идеи, подробное изложение этой теории можно найти в [2].

5.1. Структуры сплетения. (Правая-правая) *структура сплетения* (над R) — это тройка $(A, C)_\psi$, состоящая из R-алгебры A, R-коалгебры C и R-модульного отображения $\psi\colon C \otimes_R A \to A \otimes_R C$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\psi \circ (I_C \otimes \mu) = (\mu \otimes I_C) \circ (I_A \otimes \psi) \circ (\psi \otimes I_A)$;

2) $(I_A \otimes \Delta) \circ \psi = (\psi \otimes I_C) \circ (I_C \otimes \psi) \circ (\Delta \otimes I_A)$;

3) $\psi \circ (I_C \otimes \iota) = \iota \otimes I_C$;

4) $(I_A \otimes \varepsilon) \circ \psi = \varepsilon \otimes I_A$.

Отображение ψ известно как *отображение сплетения*, а C и A называются *сплетёнными* посредством ψ.

5.2. Диаграмма банта. Условия в определении 5.1 могут быть отображены в виде следующей коммутативной *диаграммы банта* (тензоры подразумеваются над R):

$$\begin{tikzcd}
 & C\otimes A\otimes A \arrow[dl, "\psi\otimes I_A"'] \arrow[drr, "I_C\otimes\mu"] & & & & C\otimes C\otimes A \arrow[dr, "I_C\otimes\psi"] & \\
 & & & C\otimes A \arrow[urr, "\Delta\otimes I_A"] \arrow[dd, "\psi"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes I_A"] & & & \\
A\otimes C\otimes A \arrow[dr, "I_A\otimes\psi"'] & & C \arrow[ur, "I_C\otimes\iota"] \arrow[dr, "\iota\otimes I_C"'] & & A & & C\otimes A\otimes C \arrow[dl, "\psi\otimes I_C"] \\
 & & & A\otimes C \arrow[ur, "I_A\otimes\varepsilon"'] \arrow[drr, "I_A\otimes\Delta"] & & & \\
 & A\otimes A\otimes C \arrow[urr, "\mu\otimes I_C"] & & & & A\otimes C\otimes C &
\end{tikzcd}\quad .$$

5.3. α-обозначения. Для обозначения действия отображения сплетения ψ на элементах мы используем следующие *α-обозначения*:

$$\psi(c\otimes a)=\sum_{\alpha} a_\alpha\otimes c^\alpha,$$
$$(I_A\otimes\psi)\circ(\psi\otimes I_A)(c\otimes a\otimes a')=\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha\otimes a'_\beta\otimes c^{\alpha\beta}$$

и т. д. для всех $a, a'\in A$, $c\in C$. Эти обозначения оказываются очень полезными при конкретных вычислениях с использованием ψ. Читатель может проверить, что диаграмма банта эквивалентна следующим соотношениям для всех $a, a'\in A$, $c\in C$:

левый пятиугольник: $\displaystyle\sum_{\alpha}(aa')_\alpha\otimes c^\alpha=\sum_{\alpha,\beta} a_\alpha a'_\beta\otimes c^{\alpha\beta},$

левый треугольник: $\displaystyle\sum_{\alpha} 1_\alpha\otimes c^\alpha=1\otimes c,$

правый пятиугольник: $\displaystyle\sum_{\alpha} a_\alpha\otimes {c^\alpha}_{\underline{1}}\otimes {c^\alpha}_{\underline{2}}=\sum_{\alpha,\beta} a_{\beta\alpha}\otimes {c_{\underline{1}}}^{\alpha}\otimes {c_{\underline{2}}}^{\beta},$

правый треугольник: $\displaystyle\sum_{\alpha} a_\alpha\varepsilon(c^\alpha)=a\varepsilon(c).$

5.4. Сплетённые модули. Сопоставим каждой структуре сплетения $(A,C)_\psi$ категорию (правых-правых) *$(A,C)_\psi$-сплетённых модулей*, обозначаемую как

$\mathbf{M}_A^C(\psi)$. Объект $M \in \mathbf{M}_A^C(\psi)$ — это правый A-модуль с умножением ϱ_M и правый C-комодуль с кодействием ϱ^M, что порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R A \arrow[r, "\varrho^M \otimes I_A"] \arrow[dd, "\varrho_M"'] & M \otimes_R C \otimes_R A \arrow[dr, "I_M \otimes \psi"] & \\
& & M \otimes_R A \otimes_R C \arrow[dl, "\varrho_M \otimes I_C"] \\
M \arrow[r, "\varrho^M"] & M \otimes_R C &
\end{tikzcd} .$$

Морфизм в $\mathbf{M}_A^C(\psi)$ — это отображение правых A-модулей, являющееся одновременно отображением правых C-комодулей.

5.5. Кокольца, ассоциированные со структурой сплетения. *Рассмотрим $A \otimes_R C$ как левый A-модуль с естественным левым умножением $a(a' \otimes c) = aa' \otimes c$ для всех $a, a' \in A$, $c \in C$. Тогда*

1) *для структуры сплетения $(A, C)_\psi$ $\mathcal{C} = A \otimes_R C$ является (A, A)-бимодулем с правым умножением $(a' \otimes c)a = a'\psi(c \otimes a)$ и A-кокольцом с копроизведением и коединицей*

$$\underline{\Delta}_{\mathcal{C}} := I_A \otimes \Delta \colon \mathcal{C} \to A \otimes_R C \otimes_R C \simeq \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}, \quad \underline{\varepsilon}_{\mathcal{C}} := I_A \otimes \varepsilon \colon \mathcal{C} \to A;$$

2) *если $\mathcal{C} = A \otimes_R C$ — A-кокольцо с копроизведением $\underline{\Delta}_{\mathcal{C}} = I_A \otimes \Delta$ и коединицей $\underline{\varepsilon}_{\mathcal{C}} = I_A \otimes \varepsilon$, то $(A, C)_\psi$ можно рассмотреть как структуру сплетения посредством*

$$\psi \colon C \otimes_R A \to A \otimes_R C, \quad c \otimes a \mapsto (1 \otimes c)a;$$

3) *если $\mathcal{C} = A \otimes_R C$ — A-кокольцо, ассоциированное с $(A, C)_\psi$ как в* 1), *то категория $(A, C)_\psi$-сплетённых модулей изоморфна категории правых $\mathcal{C}$-комодулей.*

5.6. Биалгебры. R-модуль B, являющийся алгеброй (B, μ, ι) и коалгеброй (B, Δ, ε), называется *биалгеброй*, если Δ и ε — морфизмы алгебр, или, что эквивалентно, μ и ι — морфизмы коалгебр. Для того чтобы Δ был морфизмом алгебр, необходима коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_R B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta \otimes \Delta"'] & B \arrow[dd, "\Delta"] \\
(B \otimes_R B) \otimes_R (B \otimes_R B) \arrow[d, "I_B \otimes \mathsf{tw} \otimes I_B"'] & \\
(B \otimes_R B) \otimes_R (B \otimes_R B) \arrow[r, "\mu \otimes \mu"] & B \otimes_R B
\end{tikzcd} , \qquad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\simeq"'] & B \arrow[d, "\Delta"] \\
R \otimes_R R \arrow[r, "\iota \otimes \iota"] & B \otimes_R B
\end{tikzcd} ,$$

где tw обозначает отображение кручения. Аналогично, ε — морфизм алгебр, если и только если диаграммы

$$\begin{tikzcd} B \otimes_R B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & B \arrow[d, "\varepsilon"] \\ R \otimes_R R \arrow[r, "\simeq"] & R \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ R \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "="] & & R \end{tikzcd}$$

коммутативны. То же множество диаграмм даёт, что μ и ι — морфизмы коалгебр. Для единиц $1_B \in B$, $1_R \in R$ и для всех $a, b \in B$ эти диаграммы в точности означают, что

$$\Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B, \qquad \varepsilon(1_B) = 1_R,$$
$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \qquad \varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b).$$

5.7. Биалгебра сплетения и модули Хопфа. *Пусть B — R-алгебра и R-коалгебра. Рассмотрим R-линейное отображение*

$$\psi\colon B \otimes_R B \to B \otimes_R B, \quad b' \otimes b \mapsto \sum b_{\underline{1}} \otimes b' b_{\underline{2}}.$$

1. *ψ сплетает B с B, если и только если B является биалгеброй. Эта структура сплетения известна как биалгебра сплетения.*
2. *Сплетённый модуль, соответствующий биалгебре сплетения, — это правый B-модуль, правый B-комодуль M такой, что для всех $m \in M$ и $b \in B$,*
$$\varrho^M(mb) = \sum m_{\underline{0}} b_{\underline{1}} \otimes m_{\underline{1}} b_{\underline{2}},$$
т. е. категория сплетённых модулей $\mathbf{M}_B^B(\psi)$ совпадает с категория $\mathbf{M}_B^B$ модулей Хопфа (*см.* [2, раздел 14]).
3. *Если B — биалгебра, то $\mathcal{C} = B \otimes_R B$ — B-кокольцо с копроизведением $\underline{\Delta}_{\mathcal{C}} = I_B \otimes \Delta$, коединицей $\underline{\varepsilon}_{\mathcal{C}} = I_B \otimes \varepsilon$ и (B, B)-бимодульной структурой*
$$b(b' \otimes b'')c = \sum bb'c_{\underline{1}} \otimes b''c_{\underline{2}}$$
для $b, b', b'', c \in B$, т. е. как правый B-модуль $\mathcal{C} = B \otimes_R^b B$.

5.8. Фундаментальная теорема об алгебрах Хопфа. *Для любой R-биалгебры B следующие условия эквивалентны*:

а) *B — алгебра Хопфа* (*т. е. B имеет антипод*);

б) *для каждого $M \in \mathbf{M}^{B\otimes_R B}$ существует изоморфизм*
$$\varphi_M\colon \operatorname{Hom}^{B\otimes_R B}(B, M) \otimes_R B \to M, \quad f \otimes b \mapsto f(b);$$

в) *отображение*
$$\varphi_{B\otimes B}\colon \operatorname{Hom}^{B\otimes_R B}(B, B \otimes_R B) \otimes_R B \to B \otimes_R B$$
является изоморфизмом в $\mathbf{M}^{B\otimes_R B}$;

г) $\mathrm{Hom}^{B\otimes_R B}(B,\text{-})\colon \mathbf{M}^{B\otimes_R B} \to \mathbf{M}_R$ *является эквивалентностью.*

Если B плоский как R-модуль, то перечисленные условия эквивалентны следующему:

д) *B — (проективный) порождающий в $\mathbf{M}^{B\otimes_R B}$.*

Если B_R локально проективен, то все перечисленные условия эквивалентны следующему:

е) *B — подпорождающий в $\mathbf{M}^{B\otimes_R B}$, и образ отображения*

$$(B \otimes_R B)^* \to \mathrm{End}_R(B)$$

плотен (в конечной топологии).

Литература

[1] Скорняков Л. А. Гомологическая классификация колец // Мат. вестник. — 1967. — Т. 4 (19). — С. 415—434.

[2] Brzeziński T., Wisbauer R. Corings and Comodules. — Cambridge University Press, 2003.

[3] Gabriel P. Des catégories abéliennes // Bull. Soc. Math. France. — 1962. — Vol. 90. — P. 323—448.

[4] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Paris: Gordon and Breach, 1991.