Классы групповых представлений, аксиоматизируемых в логике действия

А. ГВАРАМИЯ
Абхазский государственный университет,
Сухум, Абхазия

Б. ПЛОТКИН
Иерусалимский университет,
Иерусалим, Израиль

УДК 512.7

Ключевые слова: представления групп, действие группы, логика действия, классы, аксиоматизируемые в логике действия, квазимногообразия представлений.

Аннотация

Работа дополняет книгу Б. И. Плоткина, С. М. Вовси «Многообразия представлений групп: Общая теория, связи и приложения» (Рига: Зинатне, 1983) и может считаться её продолжением. В книге рассматриваются многообразия представлений, которые на самом деле являются многообразиями, определяемыми тождествами действия. Данная работа изучает другие классы представлений, аксиоматизируемые в специальной логике действия.

Abstract

A. Gravamia, B. Plotkin, Action-type axiomatizable classes of group representations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 73—85.

The paper adjoins the book of B. I. Plotkin and S. M. Vovsi *Varieties of Representations of Groups* (Zinatne, Riga (1983)) and turns to be, in a sense, its continuation. In the book, the varieties of representations have been considered. As a matter of fact, the varieties under consideration are action-type varieties. This paper studies other classes of representations, axiomatizable in a special action-type logic.

1. Введение

1.1. Многообразие Rep-K

Для данного коммутативного кольца K с единицей рассмотрим многообразие, являющееся также категорией, обозначаемое через Rep-K. Алгебрами этого многообразия являются двусортные алгебры. Это пары, или представления, (V, G), где V — это K-модуль, а G — это группа, действующая на V. Действие рассматривается как операция в двусортной алгебре (V, G).

Ниже приведён список аксиом.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 73—85.

1. Отображение $a \to a \circ g$ является K-линейным отображением в V.
2. $(a \circ g_1) \circ g_2 = a \circ g_1 g_2$.
3. $a \circ 1 = a$.

Здесь 1 — это единица в G, $a \in V$, $g \in G$. Операция $\circ$ возвращает нас к представлению $\rho\colon G \to \operatorname{Aut} V$, которое иногда отождествляется с алгеброй (V, G), т. е. $\rho = (V, G)$.

Указанные тождества вместе с тождествами групп и K-модулей определяют многообразие Rep-K. Как обычно, это многообразие также является категорией. Её морфизмы — это двусортные гомоморфизмы

$$\mu = (\alpha, \beta)\colon (V, G) \to (V', G'),$$

где $\alpha\colon V \to V'$ — K-гомоморфизм модулей, $\beta\colon G \to G'$ — гомоморфизм групп, $(a \circ g)^\alpha = a^\alpha \circ g^\beta$. Имеем $\operatorname{Ker} \mu = (\operatorname{Ker} \alpha, \operatorname{Ker} \beta)$. Возьмём $\operatorname{Ker} \alpha = V_0$, $\operatorname{Ker} \beta = H$. Тогда пара (V_0, H) является конгруэнцией представления (V, G) в следующем смысле: V_0 — это подмодуль в V, инвариантный относительно действия группы G, H — нормальная подгруппа в G, действующая тривиально на V/V_0. Имеем $(V, G)/\operatorname{Ker} \mu = (V/V_0, G/H)$. Это даёт нам теорему о гомоморфизмах.

Рассмотрим свободное представление $W = W(X, Y)$. Здесь пара (X, Y) — это двусортное множество. Имеем $W(X, Y) = (XKF(Y), F(Y))$, где $F(Y) = F$ — это свободная группа над множеством Y, $XKF = \Phi$ — свободный KF-модуль над множеством X, а KF — групповая алгебра.

Элементы модуля Φ имеют вид $w = x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n$, $u_i \in KF$. Элементы группы F записываются как $f = f(y_1, \ldots, y_m)$. Действие $\circ$ определяется правилом

$$w \circ f = wf = x_1(u_1 f) + \ldots + x_n(u_n f).$$

Легко понять, что отображения $\alpha\colon X \to V$ и $\beta\colon Y \to G$ определяют гомоморфизм $\mu = (\alpha, \beta)\colon (\Phi, F) = W \to (V, G)$.

Рассмотрим множества $\operatorname{Hom}(W, \rho) = \operatorname{Hom}(W, (V, G))$. В ситуации конечных множеств $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ множества $\operatorname{Hom}(W, \rho)$ могут рассматриваться как аффинные пространства. Имеется естественная биекция $\operatorname{Hom}(W, \rho) \to V^{(n)} \times G^{(m)}$. Точка

$$((\alpha(x_1), \ldots, (\alpha(x_n)), (\beta(y_1), \ldots, \beta(y_m))) = ((a_1, \ldots, a_n), (g_1, \ldots, g_m)),$$

$a_i \in V$, $g_k \in G$, соответствует гомоморфизму $\mu = (\alpha, \beta)\colon (\Phi, F) \to (V, G)$.

1.2. Логика многообразия Rep-K

Для данных множеств X и Y рассмотрим сигнатуру

$$L = L_{X,Y} = \{\vee,\ \wedge,\ \neg,\ \exists x,\ \exists y,\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Для алгебры $W = W(X, Y)$ мы рассмотрим равенства $w \equiv 0$ и $f \equiv 1$. Мы считаем эти равенства логическими формулами. Равенства первого типа назовём *равенствами действия*, в то время как равенства второго типа — *групповыми равенствами*. Обозначим через $LW = L_{X,Y}W(X,Y)$ абсолютно свободную L-алгебру над множеством всех W-равенств. Её элементы назовём формулами (элементарными формулами, формулами первого порядка) над свободным представлением $W = (\Phi, F)$.

Теперь рассмотрим пример L-алгебры. Возьмём множество $\mathrm{Hom}(W,(V,G))$. Пусть $\mathrm{Set}(W,(V,G))$ — система всех подмножеств в $\mathrm{Hom}(W,(V,G))$. Ясно, что на системе $\mathrm{Set}(W,(V,G))$ определены булевы операции и что она является булевой алгеброй. Определим также кванторы. Пусть A — подмножество в $\mathrm{Hom}(W,(V,G))$. Положим $\mu = (\alpha,\beta) \in \exists x\, A$, если существует $\nu = (\alpha',\beta)$, такое что $\nu \in A$ и $\alpha(x_1) = \alpha'(x_1)$ для $x_1 \neq x$. Аналогично определим $\exists y\, A$. Здесь $\exists x$ и $\exists y$ — это кванторы булевой алгебры $\mathrm{Set}(W,(V,G))$ в смысле следующего определения.

Квантор $\exists$ булевой алгебры B — это отображение $\exists\colon B \to B$ со свойствами

1) $\exists 0 = 0$;
2) $a < \exists a$;
3) $\exists(a \wedge \exists b) = \exists a \wedge \exists b$.

Здесь 0 — это нуль в B, $a, b \in B$. Определим теперь канонический гомоморфизм L-алгебр

$$\mathrm{Val} = \mathrm{Val}^W_{(V,G)}\colon LW \to \mathrm{Set}(W,(V,G)).$$

Положим $\mu = (\alpha,\beta) \in \mathrm{Val}(w \equiv 0)$, если $w^\alpha = 0$ в V, $\mu = (\alpha,\beta) \in \mathrm{Val}(f \equiv 1)$, если $f^\beta = 1$ в G. Так как LW свободна, $\mathrm{Val}(u)$ определено для каждой формулы $u \in LW$. Множество гомоморфизмов $\mathrm{Val}(u)$ называется *значением формулы u на представлении* (V,G). Если $\mathrm{Val}(u) = \mathrm{Hom}(W,(V,G))$, то это означает, что формула u выполняется в представлении (V,G).

Определим отдельно логику действия. Она порождается равенствами действия $w \equiv 0$ в сигнатуре

$$L_X = \{\vee,\ \wedge,\ \neg,\ \exists x,\ x \in X\}.$$

В ней нет кванторов $\exists y$ и равенств $f \equiv 1$. Обозначим эту логику через $L_X W$.

1.3. Классы представлений

Рассмотрим классы $\mathfrak{X}$ представлений (V,G) в многообразии $\mathrm{Rep}\text{-}K$ и одновременно множество формул T в логике LW со счётными множествами X и Y. Установим соответствие Галуа

$$T = \mathfrak{X}^* = \{u \in LW \mid u \text{ выполняется в каждом } (V,G) \in \mathfrak{X}\},$$
$$\mathfrak{X} = T^* = \{(V,G) \mid \text{любая формула из } T \text{ выполняется в } (V,G)\}.$$

Класс $\mathfrak{X}$ вида $\mathfrak{X} = T^*$ называется *аксиоматизируемым*. Здесь T — произвольное множество. Если T состоит из формул действия, то $\mathfrak{X} = T^*$ — это *аксиоматизируемый класс, определяемый в логике действия*.

Рассмотрим специальные случаи.

1. T состоит из равенств. Тогда $\mathfrak{X} = T^*$ — это многообразие представлений. Если T состоит из равенств действия, то $\mathfrak{X} = T^*$ — *многообразие, определяемое тождествами действия*. Такое многообразие $\mathfrak{X}$ задаётся также формулами вида $x \circ u \equiv 0$, $u \in KF$.

2. Формулы вида
$$u_1 \vee u_2 \vee \ldots \vee u_n,$$
где все u_i являются равенствами, называются *псевдоравенствами* (или *псевдотождествами*). Соответствующие $\mathfrak{X} = T^*$ называются псевдомногообразиями. Псевдомногообразия, определяемые тождествами действия, задаются формулами вида
$$w_1 \equiv 0 \vee \ldots \vee w_n \equiv 0.$$

3. Формулы вида
$$u_1 \wedge u_2 \wedge \ldots \wedge u_n \Longrightarrow u,$$
где все u_i являются равенствами, называются *квазиравенствами* (или *квазитождествами*). Формула
$$w_1 \equiv 0 \wedge \ldots \wedge w_n \equiv 0 \Longrightarrow w \equiv 0$$
является квазитождеством действия. У нас есть квазимногообразия и квазимногообразия, определяемые квазитождествами действия.

4. Универсальные формулы имеют вид
$$u_1 \vee \ldots \vee u_n \vee \neg v_1 \vee \ldots \vee \neg v_m,$$
где u_i и v_j — равенства. Универсальные формулы действия имеют вид
$$w_1 \equiv 0 \vee \ldots \vee w_n \equiv 0 \vee w_1' \not\equiv 0 \vee \ldots \vee w_m' \not\equiv 0.$$
Соответствующие классы $\mathfrak{X}$ являются универсальными классами и универсальными классами, определяемыми универсальными формулами действия. Рассматриваем также классы $\mathfrak{X}$, аксиоматизируемые произвольными формулами действия.

Класс $\mathfrak{X}$ назовём *насыщенным*, если включение $(V, G) \in \mathfrak{X}$ имеет место в том и только в том случае, когда для соответствующего точного представления $(V, \bar{G})$ имеет место $(V, \bar{G}) \in \mathfrak{X}$.

Класс $\mathfrak{X}$ назовём *наследственным справа*, если $(V, G) \in \mathfrak{X} \Longrightarrow (V, H) \in \mathfrak{X}$ для любой подгруппы H в G.

Наконец, класс представлений $\mathfrak{X}$ называется *локальным справа* при условии, что $(V, G) \in \mathfrak{X}$, если $(V, H) \in \mathfrak{X}$ для всех конечно порождённых подгрупп H в G.

2. Классы, аксиоматизируемые формулами действия

Теорема 1. *Если класс $\mathfrak{X}$ задан формулами действия, то такой класс является насыщенным, наследственным справа и локальным справа.*

Доказательство. Для начала проверим, что класс является насыщенным.

Возьмём представление (V,G) и соответствующее точное представление $(V,\bar{G})$. Пусть $\beta_0\colon G \to \bar{G}$ — естественный гомоморфизм. Тогда для любых $a \in V$ и $g \in G$ имеет место $a \circ g = a \circ g^{\beta_0}$. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\mu_0 = (\alpha,\beta)\colon W \to (V,G) \quad \text{и} \quad \mu = (\alpha,\beta\beta_0)\colon W \to (V,\bar{G}).$$

Имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[dr, "\mu"'] & (V,G) \arrow[d, "\nu=(1,\beta_0)"] \\ & (V,\bar{G}) \end{tikzcd}$$

Здесь $\mu = \mu_0\nu$, и каждое μ может быть представлено в таком виде.

Заметим, что гомоморфизм $\beta\colon F \to G$ индуцирует гомоморфизм $\beta\colon KF \to KG$ групповых алгебр. Имеем также $\beta_0\colon KG \to K\bar{G}$ и $a \circ h = a \circ h^{\beta_0}$ для любых $a \in V$ и $h \in KG$.

Возьмём теперь элемент $w = x_1 \circ u_1 + \ldots + x_n \circ u_n$. Тогда

$$w^\alpha = x_1^\alpha \circ u_1^\beta + \ldots + x_n^\alpha \circ u_n^\beta = x_1^\alpha \circ u_1^{\beta\beta_0} + \ldots + x_n^\alpha \circ u_n^{\beta\beta_0}.$$

Отсюда следует, что $w^\alpha \equiv 0$ выполняется в (V,G), если и только если то же самое выполняется в $(V,\bar{G})$. Другими словами,

$$\mu = (\alpha,\beta\beta_0) \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(w \equiv 0) \Longleftrightarrow \mu_0 = (\alpha,\beta) \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(w \equiv 0)$$

выполняется для каждой формулы вида $w \equiv 0$. Докажем по индукции, что это верно для любой формулы действия. Пусть это верно для формул действия u и v. Перейдём к формулам $u \vee v$, $u \wedge v$, $\neg u$, $\exists x\, u$. Пусть

$$\mu \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u \vee v) = \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u) \vee \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(v),$$

и пусть, например,

$$\mu \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u).$$

Тогда $\mu_0 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$, $\mu_0 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u \vee v)$. Аналогично проверим, что

$$\mu_0 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u \vee v) \Longrightarrow \mu \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u \vee v).$$

То же самое для случая $u \wedge v$.

Пусть теперь

$$\mu \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(\neg u) = \neg\, \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u),$$

т. е. $\mu \notin \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u)$. Следовательно, $\mu_0 \notin \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$, $\mu_0 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\neg u)$. То же самое в обратную сторону.

Рассмотрим теперь $\exists x\, u$. Пусть

$$\mu \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(\exists x\, u) = \exists x\ \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u).$$

Найдём $\nu = (\alpha_1,\beta\beta_0) \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u)$, $\alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)$, $x_1 \neq x$. Заметим, что индукция показывает, что любые пары μ и μ_0 подходят к диаграмме. Возьмём

$\nu_0 = (\alpha_1, \beta)$, $\nu = \nu_0(1, \beta_0)$. Включение $\nu \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}(u)$ равносильно включению $\nu_0 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$. Так как $\alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)$ для $x_1 \neq x$, мы заключаем, что $\mu_0 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u)$. Аналогично, $\mu_0 \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}$ влечёт $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,\bar{G})}$.

Предположим, что класс $\mathfrak{X}$ задаётся некоторым множеством формул действия. Каждая из этих формул выполняется в представлении (V, G) тогда и только тогда, когда она выполняется в представлении $(V, \bar{G})$. Следовательно, класс $\mathfrak{X}$ насыщенный.

Проверим теперь, что наш класс является наследственным справа. Возьмём (V, G) и (V, H), $H \subset G$. Для каждой формулы действия u проверим, что

$$\mathrm{Val}_{(V,H)}(u) = \mathrm{Val}_{(V,G)}(u) \cap \mathrm{Hom}(W, (V, H)).$$

Опять применим индукцию. Случай, когда u является равенством $w \equiv 0$, легко проверяется. Также легко проверяется, что если u и v удовлетворяют условию, то это верно и для формул $u \vee v$, $u \wedge v$ и $\neg u$. Осталось проверить только формулу $\exists x\, u$, если существует равенство для u. Возьмём

$$\mu = (\alpha, \beta) \in \mathrm{Val}_{(V,H)}(\exists x\, u) = \exists x\ \mathrm{Val}_{(V,H)}(u).$$

Тогда $\mu \in \mathrm{Hom}(W, (V, H))$ и существует элемент $\nu = (\alpha_1, \beta)$ с $\alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)$, если $x_1 \neq x$, $\nu \in \mathrm{Val}_{(V,H)}(u)$. По условию $\nu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$ и $\mu \in \exists x\ \mathrm{Val}_{(V,G)} = \mathrm{Val}_{(V,G)}\, \exists x\, u$, поэтому $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}\, \exists x\, u \cap \mathrm{Hom}(W, (V, H))$. Обратно, пусть $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u) \cap \mathrm{Hom}(W, (V, H))$, $\mu = (\alpha, \beta)$ и β — гомоморфизм $F \to H$. Найдём

$$\nu = (\alpha, \beta) \in\ \mathrm{Val}_{(V,G)}(u) \cap \mathrm{Hom}(W, (V, H)) = \mathrm{Val}_{(V,H)}(u),$$

$\alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)$, $x_1 \neq x$. Теперь $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,H)}(\exists x\, u)$. Равенство проверено. Предположим теперь, что формула действия u выполняется в представлении (V, G), $\mathrm{Val}_{(V,G)}(u) = \mathrm{Hom}(W, (V, G))$. Имеем

$$\mathrm{Val}_{(V,H)}(u) = \mathrm{Hom}(W, (V, G)) \cap \mathrm{Hom}(W, (V, H)) = \mathrm{Hom}(W, (V, H)),$$

а u выполняется в (V, H). Таким образом, класс $\mathfrak{X}$ является наследственным справа.

Теперь осталось только доказать, что класс $\mathfrak{X}$ локален справа. Как и раньше, предположим, что класс $\mathfrak{X}$ задан формулами действия. Нам нужно показать, что если u — формула действия, (V, G) — представление, u выполняется на каждом (V, H), где H — конечно порождённая подгруппа в G, то u выполняется также в (V, G).

Для этого нам потребуются некоторые вспомогательные рассуждения. Пусть дан гомоморфизм $\mu = (\alpha, \beta)\colon W \to (V, G)$, $W = W(X, Y) = (XKF, F)$. Возьмём подмножество Y_0 в Y и заменим гомоморфизм β на $\beta'\colon F \to G$, совпадающий с β на Y_0 и переводящий все остальные y в единицу. Возьмём $\mu' = (\alpha', \beta')$, где α' совпадает с α на $\mathfrak{X}$. Возьмём теперь произвольный элемент $w = x_1 \circ u_1 + \ldots + x_n \circ u_n$, такой что носители всех u_i принадлежат Y_0 (другими словами, все элементы u_i выражаются через переменные из Y_0). Тогда

$$w^{\alpha'} = x_1^{\alpha'} \circ u_1^{\beta'} + \ldots + x_n^{\alpha'} \circ u_n^{\beta'} = x_1^{\alpha} \circ u_1^{\beta} + \ldots + x_n^{\alpha} \circ u_n^{\beta} = w^{\alpha}.$$

Для произвольной формулы действия u рассмотрим её Y-носитель $\Delta_Y(u)$. Имеем

$$\Delta_Y(u) = \Delta_Y(\neg u) = \Delta_Y(\exists x\, u),$$
$$\Delta_Y(u \vee v) = \Delta_Y(u \wedge v) = \Delta_Y(u) \cup \Delta_Y(v).$$

Теперь пусть $\mu = (\alpha, \beta)$ — гомоморфизм, а u — формула действия, где $Y_0 \supset \supset \Delta_Y(u)$, Y_0 — конечное множество. Перейдём к $\mu' = (\alpha', \beta')$ на Y_0. Следующее свойство всегда выполняется при наших предположениях:

$$\mu = (\alpha, \beta) \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u) \Longleftrightarrow \mu' = (\alpha', \beta') \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u).$$

Проверим это. Свойство очевидно для равенств. Теперь пусть оно выполняется для некоторой формулы действия u. Перейдём к $\neg u$ и $\exists x\, u$. Имеем $\Delta_Y(\neg u) = \Delta_Y(\exists x\, u) = \Delta_Y(u)$. Возьмём произвольное конечное Y_0, содержащее эти носители. Пусть $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\neg u)$, т. е. $\mu \notin \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$. Тогда $\mu' \notin \mathrm{Val}_{(V,G)}(\neg u)$ и $\mu' \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\neg u)$. Обратное проверяется аналогично.

Перейдём к $\exists x\, u$ с тем же Y_0. Для данного

$$\mu = (\alpha, \beta) \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u) = \exists x\ \mathrm{Val}_{(V,G)}(u),$$

имеем $\mu' = (\alpha', \beta')$ с Y_0. Кроме того, мы можем выбрать гомоморфизм $\mu_1 = = (\alpha_1, \beta)$, такой что $\mu_1 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$, $\alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)$ для $x_1 \neq x$. Возьмём ещё один $\mu_1' = (\alpha_1', \beta')$ для $\mu_1 = (\alpha_1, \beta)$ с Y_0. Теперь $\mu_1 \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$ влечёт $\mu_1' \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$. Напомним, что α и α' совпадают на множестве X, как и α_1 и α_1'. Тогда для $x_1 \neq x$ имеем $\alpha_1'(x_1) = \alpha_1(x_1) = \alpha(x_1)\alpha'(x_1)$. Сравнивая μ' с μ_1', заключаем, что $\mu' \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u)$. Аналогично,

$$\mu' \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u) \Longrightarrow \mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u).$$

Пусть теперь соотношение выполняется для u и v. Проверим $u \vee v$, $u \wedge v$. Возьмём

$$Y_0 \supset \Delta_Y(u \vee v) = \Delta_Y(u \wedge v) = \Delta_Y(u) \cup \Delta_Y(v).$$

Возьмём $\mu = (\alpha, \beta)$ и перейдём к $\mu' = (\alpha', \beta')$ с Y_0.

Возьмём

$$\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u \vee v) = \mathrm{Val}_{(V,G)}(u) \cup \mathrm{Val}_{(V,G)}(v).$$

Пусть $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$. Так как $Y_0 \supset \Delta_Y(u)$, то $\mu' \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$ и $\mu' \in \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u \vee v)$. Остальное доказывается аналогично. Свойство проверяется для каждого u.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть формула u выполняется в каждом (V, H). Имеем $\mathrm{Val}_{(V,H)}(u) = \mathrm{Val}_{(V,G)}(u) \cap \mathrm{Hom}(W, (V, H))$. Возьмём произвольное $\mu = (\alpha, \beta)$ и перейдём к $\mu' = (\alpha', \beta')$ с u. Возьмём $\mathrm{Im}\,\beta'$ в качестве H. Тогда $\mu' \in \mathrm{Hom}(W, (V, H)) = \mathrm{Val}_{(V,H)}(u)$. Но тогда $\mu' \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$, и это даёт $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$. Это верно для всех μ и $\mathrm{Val}_{(V,G)}(u) = \mathrm{Hom}(W, (V, G))$. Формула u выполняется в представлении (V, G).

Пусть теперь класс $\mathfrak{X}$ задан множеством T формул действия и для представления (V, G) каждое представление (V, H) принадлежит T^*, т. е. удовлетворяет всем $u \in T$. Тогда все формулы u выполняются в (V, G), а (V, G) принадлежит $\mathfrak{X}$. Следовательно, выполняется нужное нам свойство локальности, и теорема доказана.

Проблема 1. Верно ли, что аксиоматизированный класс $\mathfrak{X}$ является аксиоматизируемым в логике действия тогда и только тогда, когда он является насыщенным, наследственным справа и локальным справа?

Теорема 2 решает вопрос в одну сторону, но обратное требование нуждается в дополнительных рассмотрениях.

Теорема 2. *Для многообразий, псевдомногообразий, квазимногообразий и универсальных классов представлений проблема* 1 *имеет положительное решение.*

Доказательство. Случай многообразий изучен в [2]. Применим общий подход, также рассмотренный в [2].

Пусть $\mathfrak{X}$ — насыщенный класс, а G — группа. Существуют представления с действием группы G в $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathfrak{X}_G$ G-*слой* в $\mathfrak{X}$, все (V, G) в $\mathfrak{X}_G$ связаны с данной группой G.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — псевдомногообразие, удовлетворяющее условиям замкнутости из проблемы 1. Нам нужно показать, что $\mathfrak{X}$ задаётся псевдотождествами действия. Покажем сначала, что класс $\mathfrak{X}$ с этими условиями замкнутости является псевдомногообразием тогда и только тогда, когда каждый слой $\mathfrak{X}_G$ является псевдомногообразием G-модулей.

Напомним, что класс алгебр Θ является псевдомногообразием, если и только если он замкнут по отношению к ультрапроизведениям, взятию подалгебр и гомоморфных образов (для односортных алгебр см. [1], обобщение для многосортных объектов см. в [4]).

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — псевдомногообразие представлений, и пусть этот класс является насыщенным, наследственным справа и локальным справа. Перейдём к слою $\mathfrak{X}_G$. Очевидно, что он замкнут относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов, и нам нужно проверить, что он замкнут относительно ультрапроизведений.

Пусть I — множество, D — фильтр подмножеств в I. Мы имеем представление (V_α, G) для каждого $\alpha \in I$. Возьмём декартово произведение $\Big(\Big(\prod\limits_\alpha V_\alpha\Big), G^I\Big)$, и пусть (V_0, H) — конгруэнция, определённая фильтром D. Соответствующее фильтрованное произведение — это $\Big(\Big(\prod\limits_\alpha V_\alpha\Big)/V_0, G^I/H\Big)$. Оно принадлежит классу $\mathfrak{X}$, если D — ультрафильтр. Так как класс $\mathfrak{X}$ насыщенный, то представление $\Big(\Big(\prod\limits_\alpha V_\alpha\Big)/V_0, G^I\Big)$ также принадлежит $\mathfrak{X}$. Вложим теперь $G \to G^I$ диагональным образом. Так как класс $\mathfrak{X}$ наследственный, то $\Big(\Big(\prod_\alpha V_\alpha\Big)/V_0, G\Big)$ принадлежит $\mathfrak{X}$ и, следовательно, $\mathfrak{X}_G$. Легко понять, что это представление изоморфно ультрапроизведению над D всех (V_α, G) с фиксированной группой G. Следовательно, все $\mathfrak{X}_G$ являются псевдомногообразиями.

Пусть теперь класс $\mathfrak{X}$ является насыщенным и наследственным справа и все $\mathfrak{X}_G$ являются псевдомногообразиями. Покажем, что класс $\mathfrak{X}$ является псевдомногообразием. Сначала проверим, что класс $\mathfrak{X}$ является наследственным и замкнутым относительно взятия гомоморфных образов. Возьмём $(V, G) \in \mathfrak{X}$, и пусть (V_0, H) — подпредставление. Из наследственности справа следует, что (V, H) принадлежит $\mathfrak{X}$. Рассмотрим слой $\mathfrak{X}_H$. Он является псевдомногообразием, следовательно, $(V_0, H) \in \mathfrak{X}_H$ и $(V_0, H) \in \mathfrak{X}$.

Пусть теперь задан сюръективный гомоморфизм $\mu = (\alpha, \beta)\colon (V, G) \to (V_1, G_1)$, $(V, G) \in \mathfrak{X}$. Гомоморфизм $\beta\colon G \to G_1$ определяет представление (V_1, G). Имеем гомоморфизм $(\alpha, 1)\colon (V, G) \to (V_1, G)$. Так как слой $\mathfrak{X}_G$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, то $(V_1, G) \in \mathfrak{X}_G$ и $(V_1, G) \in \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{X}$ является насыщенным. Это означает, что $(V_1, G_1) \in \mathfrak{X}$.

Осталось только проверить, что класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия ультрапроизведений. Пусть I — множество, D — ультрафильтр над I. Для данных $(V_\alpha, G_\alpha) \in \mathfrak{X}$, $\alpha \in I$, возьмём $G = \prod\limits_{\alpha} G_\alpha$. Имеем $\pi_\alpha\colon G \to G_\alpha$ — определяющее представление (V_α, G). Оно принадлежит классу $\mathfrak{X}$, так как класс $\mathfrak{X}$ является насыщенным. Рассмотрим слой $\mathfrak{X}_G$ и возьмём в нём ультрапроизведение над D. Имеем $\bigl((\prod V_\alpha)/D, G\bigr) \in \mathfrak{X}_G$, следовательно, оно принадлежит $\mathfrak{X}$. Ультрапроизведение над D всех (V_α, G_α) является гомоморфным образом представления $\bigl((\prod V_\alpha)/D, G\bigr)$. Так как мы проверили замкнутость относительно взятия гомоморфных образов, то соответствующее ультрапроизведение содержится в $\mathfrak{X}$. Следовательно, класс $\mathfrak{X}$ является псевдомногообразием с данными условиями замкнутости.

Пусть, далее, класс $\mathfrak{X}$ является псевдомногообразием. Докажем, что класс $\mathfrak{X}$ задаётся псевдотождествами действия. Возьмём счётное множество Y и свободную группу $F = F(Y)$. Рассмотрим слой $\mathfrak{X}_F$. Он является псевдомногообразием и задаётся псевдотождествами. Возьмём соответствующее множество псевдотождеств, и пусть оно индексировано множеством I. Отождествим I с этим множеством.

Рассмотрим псевдотождества

$$w_1^k \equiv 0 \vee \ldots \vee w_{n_k}^k \equiv 0, \quad k \in I.$$

Обозначим через u^k данное k-е псевдотождество, $u^k = u^k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$. Кроме того, имеем $w_i^k = w_i^k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$. Мы будем считать все $x_1, \ldots, x_n$ переменными, а $y_1, \ldots, y_m$ константами. Покажем, что то же множество I с различными y определяет класс $\mathfrak{X}$. Возьмём представление (V, G) и покажем, что оно принадлежит классу $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда в нём выполняются все псевдотождества данного множества.

Пусть $(V, G) \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\mu = (\alpha, \beta)\colon W = W(X, Y) = (XKF, F) \to (V, G).$$

Используя $\beta\colon F \to G$, определим представление (V, F). Так как класс $\mathfrak{X}$ является насыщенным и наследственным справа, мы заключаем, что $(V, F) \in \mathfrak{X}$.

Тогда $(V, F) \in \mathfrak{X}_F$ и множество I выполняется в (V, F). Следовательно, для каждого $k \in I$ существует $w_i^k = w_i^k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$, для которого $w_i^k(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha; y_1, \ldots, y_m) = 0$. Однако

$$w_i^k(x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha; y_1, \ldots, y_m) = w_i^k(x_1^\alpha, \ldots, n^\alpha; y_1^\beta, \ldots, y_m^\beta).$$

Таким образом, u^k выполняется в (V, G) по отношению к гомоморфизму $\mu = (\alpha, \beta)$. Это верно для любых k и μ, что означает, что множество формул I выполняется в представлении (V, G).

Обратно, пусть множество I выполняется в (V, G). Нам нужно проверить, что $(V, G) \in \mathfrak{X}$. Возьмём конечно порождённую подгруппу H в G и сюръекцию $\beta\colon F \to H$. Возьмём пару (V, F), определённую этой сюръекцией. Для произвольного $\alpha\colon \mathfrak{X} \to V$ имеем KF-гомоморфизм $\alpha\colon XKF \to V$. Имеем также $\mu = (\alpha, \beta)\colon W \to (V, G)$. Для каждого k найдём $w_i^k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$, для которого

$$w_i^k(x_1^\alpha, \ldots, n^\alpha; y_1^\beta, \ldots, y_m^\beta) = 0 = w_i^k(x_1^\alpha, \ldots, n^\alpha; y_1, \ldots, y_m).$$

Это означает, что множество I с фиксированными y выполняется в (V, F), т. е. $(V, F) \in \mathfrak{X}_F$. Однако тогда $(V, F) \in \mathfrak{X}$ и $(V, H) \in \mathfrak{X}$. Это верно для каждой конечно порождённой подгруппы H в G, и таким образом, $(V, G) \in \mathfrak{X}$.

Доказательство для случая псевдомногообразия закончено. Такие же рассуждения используются для квазимногообразий и универсальных классов.

Рассмотрим квазимногообразия более подробно, имея в виду их особую роль в алгебраической геометрии [5].

Известно (см. [1, 3]), что если $\mathfrak{X}$ — класс алгебр, а $\mathrm{qVar}(\mathfrak{X})$ — квазимногообразие, порождённое классом $\mathfrak{X}$, то

$$\mathrm{qVar}(\mathfrak{X}) = SCC_{\mathrm{up}}(\mathfrak{X}).$$

Здесь S — это оператор взятия подалгебр, C — оператор взятия декартовых произведений, C_{up} — оператор взятия ультрапроизведений. Отсюда следует также, что достаточно проверить, что соответствующий класс замкнут относительно оператора S и произвольных фильтрованных произведений. Кроме того, нам нужно предположить, что в классе существуют одноэлементные подалгебры.

Используя всё это, докажем теорему для квазимногообразий. Докажем, что если класс $\mathfrak{X}$ является насыщенным, наследственным справа и локальным справа квазимногообразием, то этот класс $\mathfrak{X}$ является квазимногообразием действия.

Как и раньше, выделим следующие два пункта доказательства. Сначала проверим, что если класс $\mathfrak{X}$ удовлетворяет указанным условиям замкнутости, то $\mathfrak{X}$ является квазимногообразием тогда и только тогда, когда любой слой $\mathfrak{X}_G$ является квазимногообразием. Тогда, используя слой $\mathfrak{X}_F$ и условия замкнутости, докажем, что класс $\mathfrak{X}$ определяется квазитождествами действия. Первый пункт доказательства копирует соответствующую часть доказательства для псевдомногообразий с единственной разницей, что мы работаем с фильтрованными произведениями вместо декартовых и ультрапроизведений. Вторая часть доказательства повторяет идею, использованную для псевдомногообразий. Те же рассуждения с двумя пунктами доказательства используем для универсальных классов. Теперь теорема 2 доказана.

3. Общая теорема

В предыдущей теореме мы использовали тот факт, что если класс $\mathfrak{X}$ задан аксиомами специального вида, то любой слой $\mathfrak{X}_G$ задаётся аксиомами того же вида. Однако мы не можем сказать ничего подобного, если вид аксиом не фиксирован. Мы не можем утверждать, что если класс $\mathfrak{X}$ аксиоматизируем и удовлетворяет указанным выше условиям замкнутости, то слой $\mathfrak{X}_F$ также аксиоматизируем. Мы рассмотрим это затруднение далее.

Заметим, что удобно использовать следующую терминологию. Назовём класс $\mathfrak{X}$ *строго насыщенным*, если он насыщенный, наследственный справа и локальный справа.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — аксиоматизируемый класс представлений, и пусть слой $\mathfrak{X}_F$ также аксиоматизируем. Такой класс $\mathfrak{X}$ является аксиоматизируемым формулами действия тогда и только тогда, когда он строго насыщенный.*

Доказательство. Сделаем несколько дополнительных замечаний относительно слоя $\mathfrak{X}_F$. Через $\mathrm{Rep}\text{-}KF$ мы обозначим класс всех K-представлений свободной группы F.

Каждое представление (V, F) можно теперь рассматривать как односортную алгебру, морфизмы которой имеют вид $\alpha = (\alpha, 1)\colon (V, F) \to (V_1, F)$ и при этом коммутируют с действием группы F. Свободное представление в $\mathrm{Rep}\text{-}KF$ — это то же самое (XKF, F). Логика представления $\mathrm{Rep}\text{-}KF$ состоит из формул действия, но мы рассмотрим эти формулы с другой точки зрения: мы считаем переменные множества Y константами, они не меняются. Если u — формула действия в логике над $\mathrm{Rep}\text{-}K$, то то же самое u в логике $\mathrm{Rep}\text{-}KF$ обозначается через u^0. Если T — это множество формул действия, мы рассмотрим T^0. Пусть множество T определяет класс $\mathfrak{X}$. Можем ли мы утверждать, что T^0 определяет слой $\mathfrak{X}_F$? Видимо, нет. Мы можем утверждать, что каждое $u^0 \in T^0$ выполняется в каждом $(V, F) \in \mathfrak{X}_F$, но мы не можем утверждать, что если T^0 выполняется в некотором (V, F), то T выполняется в $(V, F) \in \mathfrak{X}$. Нет никаких общих рассуждений, показывающих, что слой $\mathfrak{X}_F$ аксиоматизируем.

Перейдём теперь к доказательству теоремы 3. Пусть условия теоремы выполнены для $\mathfrak{X}$, а слой $\mathfrak{X}_F$ аксиоматизируем множеством формул T^0, где T — это множество формул действия. Покажем, что множество T определяет класс $\mathfrak{X}$. Мы будем использовать те же рассуждения, что и раньше.

Возьмём представление (V, G). Пусть оно принадлежит $\mathfrak{X}$. Проверим, что все формулы из T выполняются в (V, G).

Рассмотрим гомоморфизм $\mu = (\alpha, \beta)\colon (XKF, F) \to (V, G)$. Применяя $\beta\colon F \to G$, перейдём к представлению (V, F). Пусть $\mathrm{Im}\,\beta = H$. Имеем (V, H), и это представление принадлежит $\mathfrak{X}$, так как имеет место наследственность справа. Класс $\mathfrak{X}$ насыщенный, следовательно, представление (V, F) принадлежит $\mathfrak{X}$. Но тогда оно принадлежит слою $\mathfrak{X}_F$, и в нём выполняются все аксиомы множества T^0.

Сейчас мы отойдём немного от основной линии и рассмотрим следующее свойство.

Для данного гомоморфизма $\mu = (\alpha, \beta)\colon (XKF, F) \to (V, G)$ перейдём, как ранее, к (V, F). Тогда

$$\alpha \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0) \Longleftrightarrow \mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$$

для любой формулы действия u. Докажем это по индукции. Пусть сначала u — это $w \equiv 0$, $w = x_1 \circ u_1 + \ldots + x_n \circ u_n$. Тогда

$$w^\alpha = x_1^\alpha \circ u_1 + \ldots + x_n^\alpha \circ u_n = x_1^\alpha \circ u_1^\beta + \ldots + x_n^\alpha \circ u_n^\beta.$$

Таким образом, $w^\alpha = 0$ выполняется в (V, F) тогда и только тогда, когда то же самое выполняется в (V, G). Свойство проверено для элементарных формул.

Пусть свойство проверено для некоторой формулы u. Проверим его для формул $\neg u$ и $\exists x\, u$. Возьмём $\alpha \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(\neg u^0)$, т. е. $\alpha \notin \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0)$, и $\mu \notin \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$, т. е. $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\neg u)$. Обратное утверждение проверяется аналогично.

Пусть теперь $\alpha \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(\exists x\, u^0) = \exists x\ \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0)$. Найдём $\alpha' \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0)$, для которого $\alpha'(x_1) = \alpha(x_1)$ для $x_1 \neq x$. Имеем $\mu = (\alpha, \beta)$. Возьмём $\mu' = (\alpha', \beta) = (\alpha', 1)(1, \beta)$. Так как $\alpha' \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0)$, а (V, F) построено из (V, G) с помощью β, то $\mu' \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$. Вместе с соотношением $\alpha'(x_1) = \alpha(x_1)$ это даёт $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u)$. Пусть $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(\exists x\, u)$, $\mu = (\alpha, \beta)$. Возьмём $\mu' = (\alpha', \beta) \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$, $\alpha'(x_1) = \alpha(x_1)$, $x_1 \neq x$. Имеем $\alpha' \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0)$ и $\alpha \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(\exists x\, u^0)$. Формулы $u \vee v$ и $u \wedge v$ проверяются аналогично. Свойство проверено.

Вернёмся к доказательству теоремы. Пусть теперь $u \in T$, $u^0 \in T^0$. Тогда формула u^0 выполняется в представлении (V, F) и для каждого гомоморфизма $\alpha\colon (XKF, F) \to (V, F)$ имеет место $\alpha \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0)$. Применим это рассуждение к начальному $\mu = (\alpha, \beta)$. Тогда $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$. Это верно для любых μ и $\mathrm{Val}_{(V,G)}(u) = \mathrm{Hom}(W, (V, G))$. Формула u выполняется в (V, G).

Пусть теперь множество формул T выполняется в (V, G). Нам нужно проверить, что $(V, G) \in \mathfrak{X}$. Так как класс $\mathfrak{X}$ локальный справа, то достаточно проверить, что $(V, H) \in \mathfrak{X}$ для любой конечно порождённой подгруппы $H \subset G$.

Рассмотрим такую подгруппу H и сюръекцию $\beta\colon F \to H$. Возьмём для неё (V, F). Для произвольного $\alpha\colon X \to V$ перейдём к KF-гомоморфизму $\alpha\colon XKF \to V$. Имеем также $\mu = (\alpha, \beta)\colon W \to (V, G)$.

Как мы видели,

$$\alpha \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0) \Longleftrightarrow \mu = (\alpha, \beta) \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$$

выполняется для любой формулы $u^0 \in T^0$, $u \in T$. Так как $\mu \in \mathrm{Val}_{(V,G)}(u)$ для любого μ, то $\alpha \in \mathrm{Val}_{(V,F)}(u^0)$ для произвольного $\alpha\colon XKF \to V$. Это означает, что множество формул T^0 выполняется в (V, F). Так как T^0 определяет слой $\mathfrak{X}_F$, то $(V,F) \in X_F$ и, следовательно, $(V,F) \in \mathfrak{X}$. Отсюда следует, что $(V,H) \in \mathfrak{X}$, и, таким образом, мы имеем $(V,G) \in \mathfrak{X}$.

Теорема доказана в одну сторону, и, более того, начальный класс $\mathfrak{X}$ не обязан быть аксиоматизируем. В обратную сторону теорема следует из теоремы 1, и здесь мы уже не требуем, чтобы слой $\mathfrak{X}_F$ был аксиоматизируем.

Основная проблема 1 в самой общей формулировке остаётся открытой.

Литература

[1] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[2] Плоткин Б. И., Вовси С. М. Многообразия представлений групп: Общая теория, связи и приложения. — Рига: Зинатне, 1983.

[3] Gratzer G., Lakser H. A note on the implicational class generated by a class of structures // Can. Math. Bull. — 1974. — Vol. 16, no. 4. — P. 603—605.

[4] Gvaramia A. Maltsev's theorem on quasi-varieties for multi-sorted algebras // Algebra and Discrete Mathematics. — Riga, 1984. — P. 33—45.

[5] Plotkin B. I., Tsurkov A. Action-type algebraic geometry in group representations. — Preprint.