

Экстремальные задачи для линейных функционалов на чебышёвских пространствах*

В. Б. ДЕМИДОВИЧ, Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, В. М. ТИХОМИРОВ

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

e-mail: vadem@approx.math.msu.su, tikh@tikhomir.mccme.ru

УДК 517

Ключевые слова: чебышёвское пространство, экстремальная задача, задача восстановления, выпуклые функции.

Аннотация

Изучение чебышёвских пространств (являющихся обобщением пространства алгебраических многочленов) и связанных с ними различных экстремальных задач имеет полуторазековую историю. В последнее время произошло переосмысление многих фактов теории приближений с позиций общих принципов теории экстремума и выпуклой двойственности. Это позволило не только единообразно получить для алгебраических многочленов и пространств обобщённых полиномов уже известные результаты, но и устанавливать новые. Работа посвящена данному кругу вопросов с приложением к задачам оптимального восстановления.

Abstract

V. B. Demidovich, G. G. Magaril-Ilyayev, V. M. Tikhomirov, *Extremal problems for linear functionals on the Tchebycheff spaces*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 87–100.

The study of the Tchebycheff spaces (generalizing the space of algebraic polynomials) and extremal problems related to them began one and a half centuries ago. Lately, many facts of the approximation theory were understood and reinterpreted from the point of view of general principles of the theory of extremum and convex duality. This approach not only allowed to prove the previously known results for algebraic polynomials and generalized polynomials in a unified way, but also enabled obtaining new results. In this paper, we work out this direction with a special attention to the optimal recovery problems.

Изучение чебышёвских пространств (являющихся обобщением пространства алгебраических многочленов) и связанных с ними различных экстремальных задач имеет полуторазековую историю. Истоками здесь являются классические результаты П. Л. Чебышёва, А. А. Маркова, В. А. Маркова, Е. И. Золотарёва и С. Н. Бернштейна (см. [2, 3, 10, 11, 17, 18, 22, 27, 28]), получившие развитие в огромном числе работ (см., например, [1, 4–6, 8, 9, 13, 14, 19, 20, 23, 25, 26] и

*Исследования поддержаны грантами Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00261, 05-01-00066), грантом НШ-304.2003.1 и грантом Американского фонда гражданских исследований и развития и Министерства образования и науки Российской Федерации VZ-0100-0.

библиографию к ним). В последнее время произошло переосмысление многих фактов теории приближений с позиций общих принципов теории экстремума и выпуклой двойственности (см. [12, 16, 21]). Это позволило не только единообразно получить для алгебраических многочленов и пространств обобщённых полиномов уже известные результаты, но и устанавливать новые (см., например, [7]).

Работа посвящена данному кругу вопросов с приложением к задачам оптимального восстановления (о задачах оптимального восстановления см. [15, 24, 29]).

Постановки задач и предварительные сведения

Определение. Подпространство L_n пространства $C([a, b])$ (непрерывных функций на отрезке $[a, b]$) размерности n называется *чебышёвским пространством* или *T-пространством* (от Tchebycheff), если любая нетривиальная функция из L_n имеет на $[a, b]$ не более $n - 1$ нуля. Любой базис в T-пространстве называется *T-системой* порядка n на $[a, b]$.

Назовём n -мерное подпространство L_n пространства $C^{n-1}([a, b])$ ($(n - 1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$) *обобщённым чебышёвским пространством* или *ЕТ-пространством* (от extended), если любая его ненулевая функция имеет на $[a, b]$ не более $n - 1$ нуля с учётом их кратностей.

Базис $\{e_k(\cdot)\}_{k=1}^n$ в T-пространстве L_n называется *полной чебышёвской системой* или *СТ-системой* (от complete) порядка n на $[a, b]$, если все пространства $L_m = \text{span}\{e_k(\cdot)\}_{k=1}^m$, $1 \leq m \leq n$, являются чебышёвскими. Подпространство L_n с таким базисом называется *полным чебышёвским пространством* или *СТ-пространством*.

Базис $\{e_k(\cdot)\}_{k=1}^n$ в ЕТ-пространстве L_n называется *обобщённой полной чебышёвской системой* или *ЕСТ-системой* порядка n на $[a, b]$, если все пространства $L_m = \text{span}\{e_k(\cdot)\}_{k=1}^m$, $1 \leq m \leq n$, являются обобщёнными чебышёвскими пространствами. Подпространство L_n с таким базисом называется *обобщённым полным чебышёвским пространством* или *ЕСТ-пространством*.

Элементы введённых пространств будем называть просто *обобщёнными полиномами*.

Важнейшим примером n -мерного ЕСТ-пространства в $C([a, b])$ служит подпространство $\mathcal{P}_{n-1}$ алгебраических многочленов степени не выше $n - 1$. Вот несколько примеров ЕСТ-систем порядка n на $[a, b]$, порождающих в $C([a, b])$ соответствующие ЕСТ-пространства:

- *экспоненты*: $\{1, e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_{n-1} t}\}$, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1}$;
- *степени*: $\{1, t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_{n-1}}\}$, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1}$ ($a > 0$);
- *рациональные дроби*: $\{1, \frac{1}{t+\alpha_1}, \dots, \frac{1}{t+\alpha_{n-1}}\}$, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1}$ ($a > 0$);
- *логарифмы*: $\{1, \ln(t + \alpha_1), \dots, \ln(t + \alpha_{n-1})\}$, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1}$ ($a > 0$);

- *гауссовы функции*: $\left\{1, e^{-\frac{(t+\alpha_1)^2}{\beta}}, \dots, e^{-\frac{(t+\alpha_{n-1})^2}{\beta}}\right\}$, $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1}$, $\beta > 0$ ($a > 0$);

- *экспонентно-степенные функции*:

$$\{1, t, \dots, t^{\beta_0-1}, e^{\alpha_1 t}, te^{\alpha_1 t}, \dots, t^{\beta_1-1} e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_j t}, te^{\alpha_j t}, \dots, t^{\beta_j-1} e^{\alpha_j t}\},$$

$$0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_j, \beta_i \in \mathbb{Z}_+, \sum_{i=0}^j \beta_i = n.$$

В теории аппроксимации рассматривались различные экстремальные задачи, связанные с классическим подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ пространства $C([a, b])$. Среди них — задачи о наилучшем приближении функций многочленами и об экстраполяции для многочленов и их производных. Сформулируем обобщения этих задач для введенных выше чебышёвских подпространств.

1. *Задача о наилучшем приближении чебышёвским подпространством* (см., например, [8, глава I, § 2]) формализуется в виде

$$\|y(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([a, b])} \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in L_n, \quad (P_1)$$

где L_n — Т-пространство в $C([a, b])$ и $y(\cdot) \in C([a, b]) \setminus L_n$.

2. *Задача о норме линейного функционала на чебышёвском подпространстве* (см. [7]) имеет формализацию вида

$$l(x(\cdot)) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C([a, b])} \leq 1, \quad x(\cdot) \in L_n, \quad (P_2)$$

где L_n — Т-пространство в $C([a, b])$, а l — линейный функционал на L_n .

3. В ЕСТ-пространстве L_n можно ввести дифференциальный оператор D^k , обобщающий оператор k -кратного дифференцирования (см. [5, 6]):

$$D^k x(\cdot) = \frac{W(e_1(\cdot), \dots, e_k(\cdot), x(\cdot))}{W(e_1(\cdot), \dots, e_k(\cdot))}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad D^0 x(\cdot) = x(\cdot),$$

где $\{e_k(\cdot)\}_{k=1}^n$ — выбранный в L_n базис, а $W(\dots)$ — соответствующие вронскианы. Тогда можно рассматривать *обобщённую задачу об экстраполяции на ЕСТ-пространстве* (см. [7]), формализуемую в виде

$$D^k x(\tau) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq 1, \quad x(\cdot) \in L_n, \quad (P_3)$$

где $[a', b'] \subset [a, b]$ и $\tau \in [a, b] \setminus [a', b']$.

Все сформулированные задачи являются выпуклыми. Первая из них относится к так называемым *экстремальным задачам без ограничений*, т. е. к задачам вида

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X,$$

где X — векторное пространство и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Вторая и третья — к *экстремальным задачам с ограничениями типа неравенств*, т. е. к задачам вида

$$f_0(x) \rightarrow \max, \quad f_1(x) \leq 1, \quad x \in X,$$

где $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная, а $f_1: X \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функции.

Поскольку в задачах (P₁)–(P₃) пространство $X = L_n$ конечномерно, то можно (и удобно) рассматривать их как задачи на пространстве $\mathbb{R}^n$. Именно, пусть $\{e_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ — базис в L_n и тем самым каждому элементу $x(\cdot) = x_1 e_1(\cdot) + \dots + x_n e_n(\cdot) \in L_n$ можно поставить в соответствие вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Если положить

$$F(t, x) = \left| y(t) - \sum_{i=1}^n x_i e_i(t) \right|, \quad f(x) = \max_{t \in [a, b]} F(t, x),$$

то (P₁) равносильна задаче

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (P'_1)$$

в том смысле, что $\hat{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(\cdot)$ является решением (P₁) тогда и только тогда, когда $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ служит решением для (P'₁). Если же положить

$$F(t, x) = \left| \sum_{i=1}^n x_i e_i(t) \right|, \quad f_1(x) = \max_{t \in [a, b]} F(t, x)$$

и

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^n y_i x_i,$$

где $y_i = l(e_i(\cdot))$, $i = 1, \dots, n$, то (P₂) равносильна задаче

$$f_0(x) \rightarrow \max, \quad f_1(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (P'_2)$$

Переформулировка на $\mathbb{R}^n$ задачи (P₃) также понятна.

В данной работе все сформулированные задачи изучаются средствами выпуклого анализа, и основным инструментом здесь является следующая теорема.

Теорема (об очистке). Пусть функция $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что

- 1) функция $x \rightarrow F(t, x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ для любого $t \in [a, b]$;
- 2) функция $t \rightarrow F(t, x)$ непрерывна на $[a, b]$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$;
- 3) $M = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{t \in [a, b]} F(t, x) > -\infty$.

Тогда найдутся натуральное $r \leq n+1$ и точки $\tau_i \in [a, b]$, $1 \leq i \leq r+1$, такие что

$$M = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{1 \leq i \leq r} F(\tau_i, x).$$

Доказательство этой теоремы (и даже в более сильном варианте) имеется в [16, с. 152, 153].

Непосредственно мы будем пользоваться некоторым следствием этой теоремы. Для его формулировки и доказательства потребуются некоторые стандартные сведения из выпуклого анализа (см., например, [12, 16, 21]).

Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция и $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Множество

$$\partial f(\hat{x}) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f(x) - f(\hat{x}) \geq z \cdot (x - \hat{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

(здесь $z \cdot (x - \hat{x}) = \sum_{i=1}^n z_i(x_i - \hat{x}_i)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$) называется *субдифференциалом* функции f в точке $\hat{x}$. Если дополнительно f дифференцируема в $\hat{x}$, то $\partial f(\hat{x})$ состоит из одного элемента $f'(\hat{x})$ — производной f в точке $\hat{x}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема (Ферма для выпуклых функций). Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Точка $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ является минимумом f тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(\hat{x})$.

Теорема (Дубовицкого—Милютина). Пусть $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, — выпуклые функции, непрерывные в точке $\hat{x}$, и $f_1(\hat{x}) = \dots = f_m(\hat{x})$. Тогда

$$\partial \max(f_1, \dots, f_m)(\hat{x}) = \text{co} \left(\bigcup_{i=1}^m \partial f_i(\hat{x}) \right),$$

где co обозначает выпуклую оболочку множества.

Теперь мы можем сформулировать и доказать нужное нам следствие.

Следствие теоремы об очистке. Пусть функция $F: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы об очистке. Тогда $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ является минимумом функции $x \rightarrow f(x) = \max_{t \in [a, b]} F(t, x)$ в том и только в том случае, когда найдутся натуральное число $r \leq n + 1$, точки $\tau_i \in [a, b]$, векторы $y_i \in \partial F_{x}(\tau_i, \hat{x})$ ($\partial F_{x}(\tau_i, \hat{x})$ — субдифференциал функции $x \rightarrow F(\tau_i, x)$ в точке $\hat{x}$) и числа $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, такие что

$$f(\hat{x}) = F(\tau_i, \hat{x}), \quad i = 1, \dots, r, \quad (*)$$

и

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i y_i = 0. \quad (**)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\hat{x}$ — точка минимума f . Тогда выполнено условие 3) теоремы об очистке и, значит, найдутся натуральное число $r \leq n + 1$ и точки $\tau_i \in [a, b]$, $1 \leq i \leq r$, такие что $\hat{x}$ — минимум функции $x \rightarrow f_0(x) = \max_{1 \leq i \leq r} F(\tau_i, x)$. Уменьшая, если необходимо, r , получаем соотношение (*).

По теореме Ферма $0 \in \partial f_0(\hat{x})$. Тогда из теоремы Дубовицкого—Милютина следует, что найдутся векторы $y_i \in \partial F_{x}(\tau_i, \hat{x})$ и числа $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, такие что выполнено соотношение (**). Снова, уменьшая r , можно считать, что $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq r$.

Достаточность. Пусть выполнены соотношения (*) и (**) для вектора $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, точек $\tau_i \in [a, b]$, векторов $y_i \in \partial F_{x}(\tau_i, \hat{x})$ и чисел $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$.

Это означает, что $0 \in \partial f_0(\hat{x})$. Тогда по теореме Ферма $\hat{x}$ — минимум функции f_0 . Но, очевидно, $f(x) \geq f_0(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, и поэтому $\hat{x}$ — минимум f . $\square$

Помимо теоремы об очистке, будет использован простейший вариант принципа Лагранжа для выпуклых задач — следствие теоремы Каруша—Куна—Таккера, изложенной, например, в [16]: вектор $\hat{x}$ является решением задачи (P'_2) тогда и только тогда, когда $f_1(\hat{x}) = 1$ и найдётся такое положительное число λ , что функции Лагранжа $x \rightarrow \mathcal{L}(x, \lambda) = -f_0(x) + \lambda f_1(x)$ достигает абсолютного минимума в $\hat{x}$.

Наряду с задачей (P_3) , рассмотрим тесно связанную с ней задачу об оптимальном восстановлении величины $D^k x(\tau)$, $\tau \in [a, b] \setminus [a', b']$, на пространстве L_n по неточно заданной информации о функциях из этого пространства, а именно когда информация об $x(\cdot) \in L_n$ заключается в том, что нам известна лишь функция $y(\cdot) \in C([a', b'])$, удовлетворяющая неравенству $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta$, где $\delta > 0$. Задача об оптимальном восстановлении $D^k x(\tau)$ на пространстве L_n по данной информации состоит в нахождении величины

$$E(D^k_\tau, L_n, \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in L_n, y(\cdot) \in C([a', b']), \\ \|y(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta}} |D^k x(\tau) - m(y(\cdot))|$$

(здесь нижняя грань берётся по всем функциям (методам восстановления) $m: C([a', b']) \rightarrow \mathbb{R}$), называемой *погрешностью оптимального восстановления*, и метода $\hat{m}$, на котором достигается нижняя грань, называемого *оптимальным методом восстановления*).

Формулировка результатов

Теорема 1 (существование, единственность и критерий решения задачи (P_1)). Пусть L_n — T -пространство. Тогда решение задачи (P_1) существует и единственно. Для того чтобы функция $\hat{x}(\cdot)$ была её решением, необходимо и достаточно, чтобы разность $y(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ имела $n + 1$ -альтернанс, т. е. нашлись $n + 1$ точек $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} \leq b$, таких что

$$|y(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i)| = \|y(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i)\|_{C([a, b])}, \quad 1 \leq i \leq n + 1,$$

и

$$(y(\tau_i) - \hat{x}(\tau_i))(y(\tau_{i+1}) - \hat{x}(\tau_{i+1})) < 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Теорема 2 (критерий решения задачи (P_2)). Пусть L_n — T -пространство. Для того чтобы функция $\hat{x}(\cdot)$ была решением задачи (P_2) необходимо и достаточно, чтобы нашлись натуральное $r \leq n$, точки $\tau_j \in [a, b]$, числа $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, r$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, и $\lambda > 0$, такие что справедливо тождество

$$l(x(\cdot)) = \lambda \sum_{j=1}^r \alpha_j \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j) x(\tau_j) \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_n,$$

и при этом

$$|\hat{x}(\tau_j)| = 1 \quad (j = 1, \dots, r).$$

Определение. Пусть L_n — Т-пространство. Функцию из L_n назовём *обобщённым полиномом Чебышёва*, если на $[a, b]$ она имеет n -альтернанс.

Теорема 3 (о существовании обобщённых полиномов Чебышёва). В СТ-пространстве существует единственный (с точностью до множителя) обобщённый полином Чебышёва.

Теорема 4 (о решении задачи (P₃)). Пусть L_n — ЕСТ-пространство. Решением задачи (P₃) является обобщённый полином Чебышёва на $[a', b']$.

Теорема 5 (об оптимальном восстановлении обобщённой производной во внешней точке). Пусть L_n — ЕСТ-пространство, $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (P₃), $a' \leq \tau_1 < \dots < \tau_n \leq b'$ — его точки альтернанса, а $\zeta_i(\cdot) \in L_n$, $1 \leq i \leq n$, — такие обобщённые полиномы, что $\zeta_i(\tau_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$ (во всяком чебышёвском пространстве искомые обобщённые полиномы определяются однозначно). Тогда $E(D_\tau^k, L_n, \delta) = \delta D^k \hat{x}(\tau)$ и $\hat{m} = \sum_{j=1}^n D^k \zeta_j(\tau) y(\tau_j)$ — оптимальный метод восстановления.

Доказательства

Доказательство теоремы 1. Решение задачи (P₁) существует как элемент, на котором достигается расстояние от точки до конечномерного подпространства.

Необходимость. Пусть $\hat{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(\cdot)$ — решение задачи (P₁), где $\{e_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ — базис в L_n . Тогда $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ — решение задачи (P'₁). Функция F удовлетворяет условиям следствия теоремы об очистке. Поэтому найдутся натуральное число $r \leq n + 1$ и числа $\tau_j \in [a, b]$, $i = 1, \dots, r$, такие что

$$f(\hat{x}) = F(\tau_j, \hat{x}), \quad j = 1, \dots, r. \quad (i)$$

Поскольку $y(\cdot) \notin L_n$, то $f(\hat{x}) \neq 0$. Значит, функции

$$x \rightarrow F(\tau_j, x) = \left| y(\tau_j) - \sum_{i=1}^r x_i e_i(\tau_j) \right|, \quad j = 1, \dots, r,$$

дифференцируемы в точке $\hat{x}$, причём, очевидно,

$$F_x(\tau_j, \hat{x}) = \text{sign} \left(y(\tau_j) - \sum_{i=1}^r \hat{x}_i e_i(\tau_j) \right) (e_1(\tau_j), \dots, e_n(\tau_j)), \quad j = 1, \dots, r.$$

Соотношение (**) следствия (с учётом того, что субдифференциал дифференцируемой функции совпадает с производной) в данном случае означает справедливость тождества

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j \operatorname{sign}(y(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j))x(\tau_j) = 0 \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_n, \quad (\text{ii})$$

где $x(\cdot) = \sum_{i=1}^n x_i e_i(\cdot)$. Покажем, что $r = n + 1$.

Предположим, что $r \leq n$. Из того, что пространство L_n является чебышёвским, следует существование такой функции $\xi_1(\cdot) \in L_n$, что $\xi_1(\tau_i) = 0$, $i = 1, \dots, r-1$, и $\xi_1(\tau_r) = 1$. Подставляя эту функцию в (ii), получаем противоречие с тем, что $\alpha_r \operatorname{sign}(y(\tau_r) - \hat{x}(\tau_r)) \neq 0$. Тогда вместе с (i) это означает, что функция $y(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ принимает значение, равное её норме, не менее чем в $n + 1$ различных точках. Докажем, что эти точки образуют $(n + 1)$ -альтернанс.

Допустим, что это не так, т. е. существует такое $1 \leq j \leq n$, что

$$(y(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j))(y(\tau_{j+1}) - \hat{x}(\tau_{j+1})) > 0.$$

Рассмотрим ненулевую функцию $\xi_2(\cdot) \in L_n$, которая обращается в нуль в $n - 1$ точке $\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_{j+2}, \dots, \tau_{n+1}$. Подставляя её в (ii), получаем, что

$$\alpha_j \operatorname{sign}(y(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j))\xi_2(\tau_j) + \alpha_{j+1} \operatorname{sign}(y(\tau_{j+1}) - \hat{x}(\tau_{j+1}))\xi_2(\tau_{j+1}) = 0.$$

Но левая часть этого равенства не нуль, так как α_j и α_{j+1} — положительные числа, числа $y(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j)$ и $y(\tau_{j+1}) - \hat{x}(\tau_{j+1})$ одного знака и одного же знака числа $\xi_2(\tau_j)$ и $\xi_2(\tau_{j+1})$ (иначе функция $\xi_2(\cdot) \in L_n$, имеющая уже $n - 1$ нуль, имела бы ещё один нуль, что невозможно). Таким образом, разность $y(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ имеет $(n + 1)$ -альтернанс.

Достаточность. Пусть функция $\hat{x}(\cdot) \in L_n$ такова, что разность $y(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ имеет $(n + 1)$ -альтернанс в точках $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} \leq b$. Если $\{e_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ — базис в L_n , то линейная однородная система $\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j e_i(\tau_j) = 0$, $i = 1, \dots, n$, имеет нетривиальное решение $(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_{n+1})$. Отсюда следует, что справедливо тождество

$$\sum_{j=1}^{n+1} \hat{\mu}_j x(\tau_j) = 0 \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_n. \quad (\text{iii})$$

Пусть $\zeta_i(\cdot) \in L_n$, $1 \leq i \leq n$, — такие полиномы, что $\zeta_i(\tau_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Подставляя их в (iii), получаем, что $\hat{\mu}_j + \hat{\mu}_{n+1} \zeta_j(\tau_{n+1}) = 0$, $1 \leq j \leq n$. Далее легко понять, что $\operatorname{sign} \zeta_j(\tau_{n+1}) = (-1)^{n+j}$, $1 \leq j \leq n$, и поэтому $\operatorname{sign} \hat{\mu}_j = (-1)^{n+j+1} \operatorname{sign} \hat{\mu}_{n+1}$, $1 \leq j \leq n$, т. е. у чисел $\hat{\mu}_j$, $1 \leq j \leq n + 1$, знаки чередуются. Тогда $\hat{\mu}_j = \pm |\hat{\mu}_j| \operatorname{sign}(y(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j))$, $1 \leq j \leq n + 1$. Подставив это выражение в (iii), затем деля обе части тождества на $\sum_{k=1}^{n+1} |\hat{\mu}_k|$ и обозначая $\alpha_j = |\hat{\mu}_j| / \sum_{k=1}^{n+1} |\hat{\mu}_k|$, придём к тождеству

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j \operatorname{sign}(y(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j))x(\tau_j) = 0 \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_n,$$

которое вместе с равенствами

$$\|y(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([a,b])} = |y(\tau_j) - \hat{x}(\tau_j)|, \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

означает (по следствию теоремы об очистке), что $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (P_1) .

Докажем теперь единственность решения. Пусть $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ — решения задачи (P_1) . Поскольку минимизируемый функционал выпуклый, то функция $\bar{x}(\cdot) = (x_1(\cdot) + x_2(\cdot))/2$ также является решением этой задачи. По доказанному разность $y(\cdot) - \bar{x}(\cdot)$ имеет $(n+1)$ -альтернанс. Пусть это будут точки $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_{n+1} \leq b$. Предположим, что $y(\tau_j) - \bar{x}(\tau_j) > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|y(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{C([a,b])} &= y(\tau_j) - \bar{x}(\tau_j) = \frac{1}{2}(y(\tau_j) - x_1(\tau_j)) + \frac{1}{2}(y(\tau_j) - x_2(\tau_j)) \leq \\ &\leq \frac{1}{2}|y(\tau_j) - x_1(\tau_j)| + \frac{1}{2}|y(\tau_j) - x_2(\tau_j)| \leq \|y(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{C([a,b])}. \end{aligned}$$

Значит, здесь везде равенства, и из этого легко вывести, что $y(\tau_j) - x_1(\tau_j) = y(\tau_j) - x_2(\tau_j)$, т. е. $x_1(\tau_j) = x_2(\tau_j)$. К этому же выводу мы приходим и в случае, когда $y(\tau_j) - \bar{x}(\tau_j) < 0$. Итак, функции $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$ из чебышёвского пространства L_n совпадают в $n+1$ точках, следовательно, совпадают всюду. $\square$

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть $\hat{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(\cdot)$ — решение задачи (P_2) , где $\{e_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ — базис в пространстве L_n . Тогда вектор $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ является решением задачи (P'_2) . Согласно сформулированному выше следствию из теоремы Каруша—Куна—Таккера

$$f_1(\hat{x}) = 1 \tag{i}$$

и существует такое $\lambda > 0$, что функция

$$\begin{aligned} f(x) &= -f_0(x) + \lambda f_1(x) = \\ &= -\sum_{i=1}^n y_i x_i + \lambda \max_{t \in [a,b]} \left| \sum_{i=1}^n x_i e_i(t) \right| = \max_{t \in [a,b]} \left(-\sum_{i=1}^n y_i x_i + \lambda \left| \sum_{i=1}^n x_i e_i(t) \right| \right) \end{aligned}$$

достигает в $\hat{x}$ своего экстремума. Функция под знаком максимума в правой части равенства удовлетворяет условиям следствия теоремы об очистке, и поэтому найдутся $r \leq n+1$ и точки $\tau_j \in [a,b]$, $j = 1, \dots, r$, такие что (с учётом (i))

$$\max_{t \in [a,b]} \left| \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(t) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(\tau_j) \right| = 1, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Отсюда, в частности, следует, что функции

$$x \rightarrow -\sum_{i=1}^r y_i x_i + \lambda \max_{t \in [a,b]} \left| \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(\tau_j) \right|, \quad 1 \leq j \leq r,$$

дифференцируемы и

$$-(y_1, \dots, y_n) + \lambda \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(\tau_j) (e_1(\tau_j), \dots, e_n(\tau_j)), \quad j = 1, \dots, r, -$$

их производные. Снова согласно упомянутому следствию из теоремы об очистке найдутся такие $\alpha_j > 0$, $1 \leq j \leq r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_j = 1$, что

$$\sum_j^r \alpha_j \left(- \sum_{i=1}^n y_i x_i + \lambda \left(\text{sign} \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e_i(\tau_j) \right) \sum_{i=1}^n x_i e_i(\tau_j) \right) = 0$$

для любого $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а это означает, что

$$l(x(\cdot)) = \lambda \sum_{j=1}^r \alpha_j \text{sign} \hat{x}(\tau_j) x(\tau_j) \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_n, \quad (\text{ii})$$

и притом $|\hat{x}(\tau_j)| = 1$, $j = 1, \dots, r$, согласно (i).

Покажем, что $r \leq n$. Действительно, если функции $e_1(\cdot), \dots, e_n(\cdot)$ подставить в (ii), то получим, что вектор $\eta = (l(e_1(\cdot)), \dots, l(e_n(\cdot)))$ является конической оболочкой векторов $\xi_j = (\text{sign} \hat{x}(\tau_j) e_1(\tau_j), \dots, \text{sign} \hat{x}(\tau_j) e_n(\tau_j))$, $j = 1, \dots, r$. По теореме Каратеодори (см. [25, с. 70]) найдётся $s \leq n$, векторы $\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_s}$ и положительные числа $\mu_1, \dots, \mu_s$, такие что $\eta = \sum_{k=1}^s \mu_k \xi_{j_k}$. Обозначая $\lambda = \sum_{k=1}^s \mu_k$ и $\alpha_k = \mu_k / \lambda$, $k = 1, \dots, s$, можно считать, что $r \leq n$ в (ii). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено (ii) для некоторой допустимой в задаче (P₂) функции $\hat{x}(\cdot)$ и $|\hat{x}(\tau_j)| = 1$, $j = 1, \dots, r$. Если $x(\cdot)$ — допустимая функция в (P₂), то из (ii) следует, что

$$l(x(\cdot)) \leq \lambda \sum_{j=1}^r \alpha_j |x(\tau_j)| \leq \lambda.$$

С другой стороны, $l(\hat{x}(\cdot)) = \lambda$, и поэтому $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (P₂). $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть L_n — СТ-пространство в $C([a, b])$ и $\{e_i(\cdot)\}_{i=1}^n$ — базис в L_n . Тогда подпространство $L_{n-1} = \text{span}\{e_i(\cdot)\}_{i=1}^{n-1}$ пространства L_n является чебышёвским, и по теореме 1 существует единственная функция $\hat{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^{n-1} \hat{x}_i e_i(\cdot)$, служащая решением задачи

$$\|e_n(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([a, b])} \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in L_{n-1},$$

и при этом разность $e_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot)$ имеет n -альтернанс, т. е. является обобщённым полиномом Чебышёва.

Предположим, что функция $\bar{x}(\cdot) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i e_i(\cdot)$ также имеет n -альтернанс. Тогда $\bar{x}_n \neq 0$, так как в противном случае функция $\bar{x}(\cdot)$ принадлежала бы L_{n-1} , где не может быть нетривиальной функции с n -альтернансом. По теореме 1 функция $\sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}_i e_i(\cdot)$ есть решение задачи

$$\|\bar{x}_n e_n(\cdot) - x(\cdot)\|_{C([a, b])} \rightarrow \min, \quad x(\cdot) \in L_{n-1},$$

и в силу единственности $\bar{x}(\cdot) = \bar{x}_n(e_n(\cdot) - \hat{x}(\cdot))$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Задача (P₃) при любом фиксированном значении $1 \leq k \leq n$ имеет ту же структуру, что и задача (P₂). Поэтому точно так же доказывается, что если $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (P₃), то найдутся $r \leq n$, точки $a' \leq \tau_1 < \dots < \tau_r \leq b'$, числа $\alpha_j > 0$, $i = 1, \dots, r$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, и $\lambda > 0$, такие что

$$D^k x(\tau) = \lambda \sum_{j=1}^r \alpha_j \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j) x(\tau_j) \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_n \quad (\text{i})$$

и $|\hat{x}(\tau_j)| = 1$, $j = 1, \dots, r$.

Для оператора D^k справедливо представление Пойа (см. [19, с. 126])

$$D^k x(t) = \frac{W_k(t)}{W_{k-1}(t)} \left(\frac{W_{k-1}^2(t)}{W_{k-2}(t)W_k(t)} \left(\dots \left(\frac{W_1^2(t)}{W_0(t)W_2(t)} \left(\frac{x(t)}{W_1(t)} \right)' \right)' \dots \right)' \right)', \quad (\text{ii})$$

где

$$W_0(\cdot) = 1, \quad W_1(\cdot) = e_1(\cdot), \quad W_j(\cdot) = W(e_1(\cdot), \dots, e_j(\cdot)), \quad j = 2, \dots, k,$$

а $\{e_j(\cdot)\}_{j=1}^n$ — базис пространства L_n , являющийся ЕСТ-системой порядка n на отрезке $[a, b]$. Так как функции $W_j(\cdot)$, $0 \leq j \leq k$, не имеют нулей на $[a, b]$, то из (ii) и обычной теоремы Ролля следует её обобщённый вариант: между двумя нулями функции $D^s x(\cdot)$, $s \geq 0$, есть нуль функции $D^{s+1}x(\cdot)$. Из этого утверждения вытекает *правило корней*, согласно которому в ЕСТ-пространстве L_n для любого нетривиального обобщённого полинома $x(\cdot)$ число корней (с учётом их кратностей) на $[a, b]$ его k -й обобщённой производной $D^k x(\cdot)$ не превосходит $n - k - 1$.

Покажем, что в соотношении (i) при любом k справедливо $r = n$. Допустим, что $r \leq n - 1$. Если $r < n - 1$, то добавим к точкам τ_j , $1 \leq j \leq r$, ещё $n - 1 - r$ различных точек из $[a', b']$ и построим нетривиальный обобщённый полином $\xi_1(\cdot) \in L_n$, зануляющийся во всех этих точках, т. е. имеющий $n - 1$ нуль на $[a', b']$. Подставляя его в (i), получим, что $D^k \xi_1(\tau) = 0$. Но это невозможно, так как, с одной стороны, обобщённая производная $D^k \xi_1(\cdot)$ имеет $n - k$ нулей на $[a, b]$ ($n - k - 1$ нуль на $[a', b']$ по обобщённой теореме Ролля и один нуль в точке τ), а с другой, согласно правилу корней, $D^k \xi_1(\cdot)$ не может иметь на $[a, b]$ больше чем $n - k - 1$ нуль. Тем самым в равенстве (i) должно быть $r = n$.

Покажем, что $\hat{x}(\cdot)$ в точках $\{\tau_i\}_{i=1}^n$ имеет n -альтернанс. Допустим, что $\hat{x}(\tau_j) = \hat{x}(\tau_{j+1})$ для некоторого $1 \leq j \leq n - 1$. Существует нетривиальный обобщённый полином $\xi_2(\cdot) \in L_n$, зануляющийся в $(n - 2)$ точках $\{\tau_1, \dots, \tau_{j-1}, \tau_{j+2}, \dots, \tau_n\}$, для которого $D^k \xi_2(\tau) = 0$ (это следствие того, что алгебраическая система из $n - 1$ уравнения с n неизвестными имеет нетривиальное решение). Покажем, что этот обобщённый полином в точках τ_j и τ_{j+1} принимает ненулевые значения одного знака.

Действительно, если хотя бы в одной из этих точек он обращается в нуль или в них принимает значения разных знаков, то $\xi_2(\cdot)$ на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ имеет нуль и, значит, $n - 1$ нуль на отрезке $[a', b']$. Тогда $D^k \xi_2(\cdot)$ имеет $n - k$ нулей на $[a, b]$ ($n - k - 1$ нуль на $[a', b']$ по обобщённой теореме Ролля и один нуль

в точке τ). Но по правилу корней функция $D^k \xi_2(\cdot)$ не может иметь больше чем $n - k - 1$ нуль.

Подставляя теперь $\xi_2(\cdot)$ в (i), приходим (как и при доказательстве теоремы 1) к противоречию: слева нуль, а справа число, отличное от нуля. Таким образом, точки $\tau_1, \dots, \tau_n$ образуют для обобщённого полинома $\hat{x}(\cdot)$ его n -альтернанс, и значит, при любом k функция $\hat{x}(\cdot)$ является соответствующим обобщённым полиномом Чебышёва. $\square$

Доказательство теоремы 5. Покажем сначала, что $E(D_\tau^k, L_n, \delta)$ не меньше чем значение задачи

$$D^k x(\tau) \rightarrow \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta, \quad x(\cdot) \in L_n, \quad (i)$$

где $[a', b'] \subset [a, b]$ и $\tau \in [a, b] \setminus [a', b']$ (т. е. значение задачи (P₃) с заменой в ней неравенства $\|x(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq 1$ на неравенство $\|x(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta$). Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (i). Тогда $-x(\cdot)$ также допустима в (i), и мы имеем для любого метода $m: C([a', b']) \rightarrow \mathbb{R}$ соотношения

$$\begin{aligned} 2D^k x(\tau) &= |D^k x(\tau) - m(0) + D^k x(\tau) + m(0)| \leq \\ &\leq |D^k x(\tau) - m(0)| + |D^k(-x(\tau)) - m(0)| \leq \\ &\leq 2 \sup_{\|x(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta} |D^k x(\tau) - m(0)| \leq 2 \sup_{\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta} |D^k x(\tau) - m(y(\cdot))|, \end{aligned}$$

откуда

$$\sup_{\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta} |D^k x(\tau) - m(y(\cdot))| \geq D^k x(\tau). \quad (ii)$$

Переходя слева в (ii) к верхней грани по всем допустимым функциям $x(\cdot)$ для (i), а затем справа к нижней грани по всем методам $m = m(y(\cdot))$, получаем высказанное утверждение. Но если $\hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (P₃), то, очевидно, $\delta \hat{x}(\cdot)$ — решение задачи (i), и значит,

$$E(D_\tau^k, L_n, \delta) \geq \delta D^k \hat{x}(\tau). \quad (iii)$$

Нам уже известно, что для задачи (P₃) справедливо тождество

$$D^k x(\tau) = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_j \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j) x(\tau_j) \quad \text{для всех } x(\cdot) \in L_n, \quad (iv)$$

где $a \leq \tau_1 < \dots < \tau_n \leq b$ — точки альтернанса обобщённого полинома $\hat{x}(\cdot)$. Подставляя в (iv) функции $\zeta_j(\cdot)$ ($j = 1, \dots, n$) из формулировки теоремы, получаем, что $D^k \zeta_j(\tau) = \lambda \alpha_j \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j)$, $1 \leq j \leq n$. Подставляя же $\hat{x}(\cdot)$ в (iv), находим, что $D^k \hat{x}(\tau) = \lambda$. Учитывая всё это и само равенство (iv), для $x(\cdot) \in L_n$ и $y(\cdot) \in C([a', b'])$, таких что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C([a', b'])} \leq \delta$, будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \left| D^k x(\tau) - \sum_{j=1}^n D^k \zeta_j(\tau) y(\tau_j) \right| &= \left| \sum_{j=1}^n D^k \zeta_j(\tau) (x(\tau_j) - y(\tau_j)) \right| \leq \\ &\leq \delta \left| \sum_{j=1}^n D^k \zeta_j(\tau) \right| = \delta \left| \sum_{j=1}^n \lambda \alpha_j \operatorname{sign} \hat{x}(\tau_j) \right| \leq \lambda \delta \sum_{j=1}^n \alpha_j = \delta D^k \hat{x}(\tau). \quad (v) \end{aligned}$$

Из (v) и (iii) следует, что $E(D_r^k, L_n, \delta) = \delta D^k \hat{x}(\tau)$ и что $\hat{m} = \sum_{j=1}^n D^k \zeta_j(\tau) y(\tau_j)$ — оптимальный метод восстановления. $\square$

Литература

- [1] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Гостехиздат, 1965.
- [2] Бернштейн С. Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов // Записки Императорского Харьковского университета. — 1913. — Вып. 4. — С. 1—8.
- [3] Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. — М.—Л.: ГОНТИ, 1937.
- [4] Вороновская Е. В. Метод функционалов и его приложения. — Л.: ЛЭИС, 1963.
- [5] Демидович В. Б. Приближённые вычисления с помощью обобщённых полиномов из чебышёвских пространств: чебышёвские обобщённые полиномы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
- [6] Демидович В. Б. Приближённые вычисления с помощью обобщённых полиномов из чебышёвских пространств: простое интегрирование, кратное интегрирование, формулы тейлоровского типа. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994.
- [7] Демидович В. Б., Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Об экстремумах линейных функционалов на конечномерных пространствах // Успехи математических наук. — 2000. — Т. 55, вып. 4. — С. 133—134.
- [8] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.
- [9] Зингер М. Я. Элементы дифференциальной теории чебышёвских приближений. — М.: Наука, 1975.
- [10] Золотарёв Е. И. Об одном вопросе о наименьших величинах. — Санкт-Петербургск. ун-т. Диссертация. — 1868. (См. также: Золотарёв Е. И. Собр. соч. Т. II. — Л.: АН СССР, 1932. — С. 130—166.)
- [11] Золотарёв Е. И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее уклоняющихся от нуля // Известия Санкт-Петербургск. Акад. Наук. — 1877. — Т. XXX, вып. 5. (См. также: Золотарёв Е. И. Собр. соч. Т. II. — Л.: АН СССР, 1932. — С. 1—59.)
- [12] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
- [13] Карлин С., Стадден В. Чебышёвские системы и их применение в анализе и статистике. — М.: Наука, 1976.
- [14] Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблемы моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.
- [15] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. Оптимальное восстановление и теория экстремума // Докл. РАН. — 2001. — Т. 379, вып. 2. — С. 161—164.

- [16] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
- [17] Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева // Известия Санкт-Петербургск. Акад. Наук. — 1889. — Т. LXII. — С. 1—24. (См. также: Марков А. А. Избр. труды. — М.—Л.: АН СССР, 1948. — С. 57—75.)
- [18] Марков В. А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. — Санкт-Петербургск. ун-т, 1892.
- [19] Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа: часть вторая. — М.: Наука, 1978.
- [20] Пшиборский А. П. О некоторых полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке // Сообщ. Харьк. мат. общ-ва. — 1913. — Т. XIV, вып. 1—2. — С. 65—80.
- [21] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
- [22] Чебышёв П. Л. О функциях, мало уклоняющихся от нуля при некоторых величинах переменной // Прилож. к Известиям Санкт-Петербургск. Акад. Наук. — 1881. — Т. XL. — С. 1—15. (См. также: Чебышёв П. Л. Собр. соч. Т. II. — М.—Л.: АН СССР, 1947. — С. 335—356.)
- [23] Akhiezer N. Über einige Funktionen, die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. Казанск. физ.-мат. общ-ва. — 1928. — Т. III. — С. 1—69.
- [24] Magaril-Il'yaev G., Osipenko K., Tikhomirov V. Optimal recovery and extremum theory // Comput. Math. Funct. Theory. — 2002. — Vol. 2, no. 1. — P. 87—112.
- [25] Nürnberger G. Approximation by Spline Functions. — Berlin: Springer, 1989.
- [26] Pólia G. On the mean-value theorem corresponding to a given linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1924. — Vol. 24. — P. 312—324.
- [27] Tchebycheff P. Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes // Mémoires présentés à l'Acad. Imp. des Sci. de St.-Pétersbourg par divers savants. — 1853. — No. 7. — P. 539—568. (Русский перевод: Чебышёв П. Л. Собр. соч. Т. II. — М.—Л.: АН СССР, 1947. — С. 23—51.)
- [28] Tchebycheff P. Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions // Mémoires présentés à l'Acad. Imp. des Sci. de St.-Pétersbourg par divers savants. — 1857. — No. 7. — P. 1—91. (Русский перевод: Чебышёв П. Л. Собр. соч. Т. II. — М.—Л.: АН СССР, 1947. — С. 151—235.)
- [29] Tikhomirov V. Optimal recovery and extremum theory // Approximation Theory (A Volume Dedicated to Blagovest Sendov). — Sofia: DARBA, 2002. — P. 374—396.