Построение модуля сизигий автоматной мономиальной алгебры

С. А. ИЛЯСОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: stasyara@inbox.ru

УДК 512.554.5

Ключевые слова: модуль сизигий, регулярный язык.

Аннотация

В статье рассматривается проблема алгоритмического построения левого модуля сизигий конечной системы элементов автоматной мономиальной алгебры. Класс автоматных мономиальных алгебр включает в себя свободные и конечно определённые алгебры, в которых левый модуль сизигий конечной системы элементов конечно порождён. Левый модуль сизигий автоматной мономиальной алгебры, вообще говоря, не будет конечно порождённым, однако его порождающие могут быть рекурсивно заданы с помощью конечных автоматов. Это позволяет решать многие алгоритмические проблемы в автоматных мономиальных алгебрах, такие как решение линейных уравнений, распознавание вхождения в левый идеал и распознавание делителей нуля.

Abstract

S. A. Ilyasov, Construction of the syzygy module in automaton monomial algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 101—113.

In this paper, we consider the problem of algorithmically constructing the left syzygy module for a finite system of elements in an automaton monomial algebra. The class of automaton monomial algebras includes free associative algebras and finitely presented algebras. In such algebras the left syzygy module for a finite system of elements is finitely generated. In general, the left syzygy module in an automaton monomial algebra is not finitely generated. Nevertheless, the generators of the left syzygy module have a recursive specification with the help of regular sets. This allows one to solve many algorithmic problems in automaton monomial algebras. For example, one can solve linear equations, recognize the membership in a left ideal, and recognize zero-divisors.

В работе решается проблема построения левого модуля сизигий конечной системы полиномов автоматной мономиальной алгебры, приводится ряд примеров применения модуля сизигий к наиболее распространённым алгоритмическим вопросам в автоматных мономиальных алгебрах. Кроме того, строится алгоритм распознавания конечной порождённости определяющего идеала автоматной мономиальной алгебры, полезный при отыскании модуля сизигий, поскольку в конечно определённых алгебрах левые модули сизигий конечной системы элементов являются конечно порождёнными и могут быть найдены несколькими способами.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 101—113.

Пусть $A = \mathcal{K}\langle X\rangle/J$ — автоматная мономиальная алгебра с единицей и K_A — минимальный по числу состояний детерминированный автомат ненулевых слов алгебры A, изображаемый конечным графом Γ_A. Здесь $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — образующие алгебры A, а J порождается некоторым множеством M мономов, являющимся регулярным языком.

Определение 1. Для данного конечного автомата K_A, изображаемого ориентированным маркированным графом Γ_A, и соответствующего ему регулярного языка L_A рассмотрим множество путей автомата Γ_A, начинающихся в его начальных состояниях, а заканчивающихся в состоянии θ. Через $\mathcal{L}_\theta^{\mathrm{in}}$ обозначим множество слов, соответствующих этим путям.

Аналогично определяем $\mathcal{L}_\theta^{\mathrm{out}}$ как множество слов, соответствующих путям, начинающимся в θ и заканчивающимся в конечных состояниях Γ_A, а также $\mathcal{L}_{\theta,\theta'}^{\mathrm{io}}$ как множество слов, соответствующих путям, начинающимся в состоянии θ, а заканчивающимся в состоянии θ'.

Отметим, что $\mathcal{L}_\theta^{\mathrm{in}}$, $\mathcal{L}_{\theta'}^{\mathrm{out}}$ и $\mathcal{L}_{\theta',\theta}^{\mathrm{io}}$ — регулярные языки. Они задаются автоматами, образованными из Γ_A объявлением единственной конечной (для in и io) вершиной θ и начальной (для out и io) вершиной θ'.

Определение 2. Для любого регулярного языка L в алфавите X языком обструкций языка L называется множество слов $\mathcal{O}(L)$, не имеющих собственных подслов в языке L.

Известно [4], что дополнение $L' = X^* \setminus L$ любого регулярного языка L в алфавите X является регулярным языком. Поэтому разность и пересечение двух регулярных языков также будут регулярными языками с регулярными выражениями $L_1 \setminus L_2 = (L_1' \cup L_2)'$ и $L_1 \cap L_2 = (L_1' \cup L_2')'$ соответственно.

Определим понятие обобщённого регулярного выражения, для которого будет справедлив аналог теоремы Клини.

Определение 3. Обобщённым выражением называется выражение, полученное из регулярных выражений следующим образом. Если r_1 и r_2 — регулярные или обобщённые регулярные выражения, то $r_1 \setminus r_2$ и $r_1 \cap r_2$ также регулярные выражения.

Предложение 1 (аналог теоремы Клини). *Любой язык, задаваемый конечным автоматом, может быть задан обобщённым регулярным выражением. Любой язык, задаваемый обобщённым регулярным выражением, может быть задан конечным автоматом.*

Определение 4. Левым модулем сизигий Σ_g системы полиномов $g_1, \ldots, g_m$ алгебры A называется ядро отображения

$$F\colon {}_A(A^m) \to I = Ag_1 + \ldots + Ag_m,$$

где

$$F(h_1, \ldots, h_m) = h_1 g_1 + \ldots + h_m g_m.$$

Основным результатом настоящей работы является описания линейного $\mathcal{K}$-базиса левого модуля сизигий конечной системы элементов $g_1, \ldots, g_m$ автоматной мономиальной алгебры A с помощью регулярных языков. Этот результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Левый модуль сизигий $\Sigma_{\mathbf{g}}$ систем элементов $g_1, \ldots, g_m$ автоматной мономиальной алгебры A совпадает с линейной оболочкой над полем $\mathcal{K}$ множества*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{[d] \in V(\Gamma_A)} (\mathcal{L}^{\text{in}}_{[d]} F_{[d]}).$$

Здесь индексы $[d]$ пробегают все вершины единственного минимального конечного детерминированного автомата Γ_A, задающего регулярный язык ненулевых слов алгебры A, а $F_{[d]} \subset A^m$ — некоторые множества наборов $(f_1, \ldots, f_m)$ с условием

$$\deg f_i \leqslant m \cdot |V(\Gamma_A)| \cdot r\Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant m} (\deg g_i)\Big),$$

где $r(k)$ — рост алгебры A. Последнее неравенство свидетельствует об ограниченности всех множеств $F_{[d]}$.

Во-первых, следует обратить внимание на то, что левый модуль сизигий конечной системы порождающих автоматной мономиальной алгебры может не быть конечно порождённым. Примером тому является алгебра

$$\mathcal{K}\langle x, y\rangle / (xy^k x \mid k \geqslant 0),$$

в которой левый аннулятор элемента x является свободным левым модулем с бесконечным базисом $\{xy^k \mid k \geqslant 0\}$.

Необходимо отметить, что в случае, когда автоматная мономиальная алгебра является конечно определённой, левый модуль сизигий любой конечной системы элементов этой алгебры всегда конечно порождён, поскольку конечно определённая мономиальная алгебра является алгеброй с двусторонней ограниченной переработкой, а соответствующий результат для таких алгебр можно найти в [3].

Во-вторых, модуль сизигий может быть конечно порождённым и в случае бесконечно определённой алгебры. Примером служит алгебра

$$A = \mathcal{K}\langle X, y, z\rangle / (m_1(X), \ldots, m_l(X), yz^k y \mid k \geqslant 0)$$

с элементами $g_1, \ldots, g_m$, лежащими в подалгебре B, порождённой множеством X ($m_i(X)$ — слова в алфавите X). Любое соотношение между g_i в алгебре A порождается системой порождающих левого модуля сизигий системы $g_1, \ldots, g_m$ как элементов алгебры B. Но эта система порождающих конечна, поскольку алгебра B является конечно определённой. Поэтому и левый модуль сизигий элементов $g_1, \ldots, g_m$ алгебры A конечно порождён, хотя сама алгебра и не является конечно определённой.

В свою очередь, свойство автоматной мономиальной алгебры быть конечно определённой также алгоритмически распознаваемо, поскольку может быть выписано обобщённое регулярное выражение для языка обструкций такой алгебры и, следовательно, может быть построен задающий этот язык конечный автомат. Этот результат описывается в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть L — произвольный регулярный язык в алфавите X, K_L — произвольный конечный автомат, задающий этот язык, а $V(K_L)$ — множество его состояний. Тогда язык обструкций $\mathcal{O}(L)$ языка L также будет регулярным с обобщённым регулярным выражением*

$$\mathcal{O}(L) = L \setminus \Bigl(\bigcup_{\theta_i, \theta_j \in V(K_L)} \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\theta_i} (\mathcal{L}^{\mathrm{io}}_{\theta_i,\theta_j} \cap L)(\mathcal{L}^{\mathrm{out}}_{\theta_j} \setminus \{1\}) \Bigr) \setminus \setminus \Bigl(\bigcup_{\theta_i \in V(K_L)} (\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\theta_i} \setminus \{1\})(\mathcal{L}^{\mathrm{out}}_{\theta_i} \cap L) \Bigr). \quad (1)$$

Доказательство. Действительно, первое вычитание выбрасывает из языка L слова, имеющие собственные подслова в L, не являющиеся суффиксами. Второе вычитание выбрасывает эти суффиксы. □

Из этой теоремы непосредственно вытекает следствие.

Следствие 1. *Пусть A/I — автоматная мономиальная алгебра и идеал I порождается регулярным языком L. В этом случае A является конечно определённой в том и только в том случае, когда $\mathcal{O}(L)$ — конечное множество слов.*

Таким образом, свойство автоматной мономиальной алгебры быть конечно определённой алгоритмически распознаваемо.

Несмотря на то, что левый модуль сизигий конечной системы элементов автоматной мономиальной алгебры, вообще говоря, бесконечно порождён, теорему 1 можно применять при решении большинства задач, аналогичных тем, для которых применяются конечные порождающие системы модулей сизигий в других алгебрах. Главной такой задачей является распознавание зависимости элементов алгебры как порождающих левого A-модуля. Приведём описывающее этот результат следствие.

Следствие 2. *Алгоритмически разрешимо следующее свойство алгебры A: является ли свободным с базисом $g_1, \ldots, g_m$ левый A-модуль, порождённый элементами $g_1, \ldots, g_m$.*

Заметим, что если для некоторой вершины $[d] \in V(\Gamma_A)$ и некоторого слова $w \in \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]}$ выполняется равенство $wF_{[d]} = 0$, то вследствие несократимости слов, начинающихся с различных x_i, любой элемент $f \in F_{[d]}$ представляется в виде $f = \sum_i w_i f_i$, где w_i — слова, а $f_i = (f_{i1}, \ldots, f_{im}) \in V^0_{[d_i],N}$, причём для каждого i хотя бы один элемент f_{ij} содержит ненулевой свободный член. Поэтому можно считать, что

$$\Sigma_{\mathbf{g}} = \mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \Bigl(\bigcup_{[d]} \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]} F_{[d]} \Bigr),$$

где объединение берётся по тем вершинам $[d]$ графа Γ_A, для которых $wF_{[d]} \neq 0$ при любом слове $w \in \mathcal{L}^{\text{in}}_{[d]}$.

В случае, если хотя бы для одной вершины $[d]$ графа Γ_A ограниченное множество $F_{[d]}$ непусто, взяв любое слово $w \in \mathcal{L}^{\text{in}}_{[d]}$ и элемент $(f_1, \ldots, f_m)$ множества $F_{[d]}$, такой что $w(f_1, \ldots, f_m) \neq 0$, получим нетривиальное соотношение $wf_1g_1 + \ldots + wf_mg_m = 0$. Это соотношение говорит о том, что левый модуль ${}_A(g_1, \ldots, g_m)$ не является свободным.

С другой стороны, если все множества $F_{[d]}$ пусты, то из соотношения $f_1g_1 + \ldots + f_mg_m = 0$ вытекает $f_1 = \ldots = f_m = 0$. Это означает, что $g_1, \ldots, g_m$ является базисом свободного левого модуля ${}_A(g_1, \ldots, g_m)$.

Другие полезные следствия будут приведены после доказательства основного результата в конце работы, когда устройство $\mathcal{K}$-базиса левого модуля сизигий станет более ясным.

Напомним для начала о двух классах ассоциативных конечно порождённых алгебр, для которых проблема алгоритмического построения левого (правого) модуля сизигий конечной системы элементов решена.

Во-первых, это коммутативные алгебры. Процедуру построения модуля сизигий в таких алгебрах можно найти в [5, с. 243—256]. Во-вторых, это так называемые алгебры с ограниченной левой (правой) переработкой. В таких алгебрах проблема построения левого (соответственно правого) модуля сизигий положительно решена Д. И. Пионтковским (2001) в [3]. Такая алгебра всегда стандартно конечно определённая, т. е. существует конечный базис Грёбнера её определяющего идеала; более того, этот базис Грёбнера эффективно строится. Наличие стандартной конечной определённости и левой и/или правой переработки позволяет положительно решать многие алгоритмические вопросы в таких алгебрах.

Автоматная мономиальная алгебра, вообще говоря, не является алгеброй с конечной переработкой (кроме случаев конечно определённой мономиальной алгебры). Кроме того, в общем случае левый (правый) модуль сизигий не будет порождаться конечным числом элементов. Тем не менее он может быть описан в терминах регулярных языков, и в данной работе будет получен алгоритм построения конечной системы элементов A-модуля A^m и конечной системы регулярных языков, с помощью которых задаётся базис левого (правого) модуля сизигий как линейного $\mathcal{K}$-пространства.

В [2] была решена проблема распознавания правого (левого) делителя нуля для автоматных мономиальных алгебр, и мы будем использовать некоторые методы и обозначения из этой работы (см. [2, с. 152—157]).

Положим $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$, $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)$ и $h_1 * g_1 + \ldots + h_m * g_m = \mathbf{hg}$. Обозначим $D = \max\limits_j(\deg g_j)$.

На нормальных словах алгебры A введём отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: будем считать $a \sim b$ в том и только в том случае, когда для всех нормальных слов u выполняется равносильность $au = 0 \iff bu = 0$. Через $[a]$ обозначим класс эквивалентности слова a.

Пусть $a \in \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\theta_1}$, $a_2 \in \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\theta_2}$ для некоторых состояний θ_1, θ_2 автомата Γ_A. Тогда

$$a_i u \neq 0 \iff u \in \mathcal{L}^{\mathrm{out}}_{\theta_i}. \tag{2}$$

Напомним, что минимальный детерминированный автомат Γ_A обладает тем свойством, что $\mathcal{L}^{\mathrm{out}}_{\theta_i} \neq \mathcal{L}^{\mathrm{out}}_{\theta_j}$ при $\theta_i \neq \theta_j$. Иначе, склеив вершины θ_i и θ_j, мы получили бы автомат с меньшим числом состояний, задающий тот же, что и Γ_A, язык. Поэтому мы имеем

$$a_1 \sim a_2 \iff \theta_1 = \theta_2. \tag{3}$$

Из импликации $\Longrightarrow$ мы можем заключить, что $[a_1]$ как множество слов, эквивалентных между собой, содержится в регулярном языке $\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\theta_1}$. Если же $a_1, a_2 \in \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\theta_1}$, то из (2) получаем $a_1 \sim a_2$, что даёт обратное включение. Выражение (3) даёт нам возможность отождествлять также вершины θ_i автомата Γ_A с соответствующими классами эквивалентности $[a_i]$ слов $a_i \in \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{\theta_i}$. Тогда можно условно записать $[a] = \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[a]}$, где перед знаком равенства символ $[a]$ означает язык слов, а после знака равенства — вершину графа Γ_A. Мы будем использовать оба обозначения.

Кроме того, в мономиальной алгебре разные слова — это разные элементы алгебры A. Поэтому для двух слов d и d' из одного класса эквивалентности $[d]$ их левые аннуляторы в алгебре A совпадают. По этой причине корректно будет определить векторные пространства $V^0_{[d],k}$ для описания левого модуля сизигий $\Sigma_{\mathbf{g}}$ и векторные пространства $V_{[d],k}$, которые содержат $V^0_{[d],k}$ и будут использоваться при доказательстве вспомогательных результатов.

Множества

$$V^0_{[d],k} = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \mid u_i \in A,\ \deg(u_i) \leqslant k,\ d\mathbf{ug} = 0\}$$

тесно связаны с левым модулем сизигий, а именно

$$\Sigma_{\mathbf{g}} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V^0_{[1],k}, \tag{4}$$

что непосредственно вытекает из определения модуля сизигий и пространств $V^0_{[d],k}$.

Пространства $V_{[d],k}$ определим следующим образом:

$$V_{[d],k} = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m) \mid u_i \in A,\ \deg(u_i) \leqslant k,\ \deg(d\mathbf{ug}) < D + \deg d\},$$

$$V^{(l)}_{[d],k} = \{(\pi_l(u_1), \ldots, \pi_l(u_m)) \mid \mathbf{u} \in V_{[d],k}\}, \quad \pi_l \colon A \to A/\{w \in A \mid \deg(w) > l\},$$

где d — любое слово, принадлежащее вершине $[d]$ графа Γ_A как классу эквивалентности.

Эти пространства обладают следующими очевидными свойствами:

$$V_{[d],k} \subseteq V_{[d],k+1}, \quad V^{(l)}_{[d],k} \subseteq V^{(l)}_{[d],k+1} \ \text{ для всех } l, \tag{5}$$

$$V^{(l)}_{[d],k} \subseteq (\pi_l(A))^m \ \text{ для всех } k, \quad \dim \pi_l(A) < \infty. \tag{6}$$

Сначала нам необходимо показать, что для всех $l \geqslant D$ верна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть для каждой вершины $[d] \in V(\Gamma_A)$ выполняется равенство*

$$V^{(l)}_{[d],k} = V^{(l)}_{[d],k-1}.$$

Тогда для каждой вершины $[d] \in V(\Gamma_A)$ будет верно равенство

$$V^{(l)}_{[d],k} = V^{(l)}_{[d],k+1}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{z} \in V^{(l)}_{[d],k+1}$, тогда найдётся элемент $\mathbf{u} \in V_{[d],k+1}$, такой что $\pi_l(u_i) = z_i$. Представим компоненты u_i в виде

$$u_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} x_j u_{ij}, \quad a_i \in \mathcal{K}, \quad u_{ij} \in A,$$

или $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{x}U$, где U — матрица (u_{ij}), такая что если элемент u_i не содержит члена, начинающегося с буквы x_j, то $u_{ij} = 0$.

По определению пространства $V_{[d],k+1}$ должно выполняться

$$\deg(d\mathbf{ug}) = \deg(d\mathbf{ag} + d\mathbf{x}U\mathbf{g}) < D + \deg d.$$

Поскольку $\deg a_i = 0$, мы имеем

$$\deg(d\mathbf{ag}) \leqslant D + \deg d.$$

Поэтому

$$\deg(d\mathbf{x}U\mathbf{g}) = \deg(d\mathbf{ug} - d\mathbf{ag}) \leqslant \max(\deg(d\mathbf{ug}), \deg(d\mathbf{ag})) \leqslant D + \deg d.$$

Вследствие несократимости слов, начинающихся с разных x_i, из последней цепочки неравенств следует n неравенств

$$\deg(dx_j) \sum_{i=1}^{m} u_{ij} g_i < D + (\deg d + 1),$$

а это, в свою очередь, в точности означает, что j-й столбец $U_j = (u_{1j}, \ldots, u_{mj})$ матрицы U принадлежит пространству $V_{[dx_j],k}$, так как $\deg u_{ij} \leqslant k$.

Теперь мы можем написать

$$\mathbf{u} \in V_{[d],k+1} \iff \begin{cases} \deg(d\mathbf{ug}) < D + \deg d + 1, \\ \deg(\pi_{D+\deg d}(d\mathbf{ug})) < D + \deg d \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} \text{для каждого } j, 1 \leqslant j \leqslant n,\ U_j \in V_{[dx_j],k}, \\ \deg(\pi_{D+\deg d}(d\mathbf{ug})) < D + \deg d. \end{cases} \tag{7}$$

По условию для каждого $x_j \in X$ справедливо $V^{(l)}_{[dx_j],k} = V^{(l)}_{[dx_j],k-1}$, поэтому существуют матрица $Y_{m\times n}$ со столбцами $Y_j \in V_{[dx_j],k-1}$, такая что для всех i, j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $\pi_l(y_{ij}) = \pi_l(u_{ij})$. Так как $\deg(y_{ij}) \leqslant k - 1$, то степень любого элемента y_i (где $(y_1, \ldots, y_m) = \mathbf{y} = \mathbf{a} + \mathbf{x}Y$) не превосходит k.

Более того,

$$\pi_l(y_{ij}) = \pi_l(u_{ij}) \implies \pi_l(y_i) = \pi_l(u_i) = z_i \implies \pi_D(y_i) = \pi_D(u_i),$$

поскольку по условию $l \geqslant D$. Так как члены степени не выше $D + \deg d$ элементов $d\mathbf{yg}$ зависят только от членов степени не выше D элементов y_i, которые совпадают с соответствующими членами элементов u_i, то $\pi_{D+\deg d}(d\mathbf{yg}) = \pi_{D+\deg d}(d\mathbf{ug})$, откуда $\deg(\pi_{D+\deg d}(d\mathbf{yg})) < D + \deg d$.

Пользуясь (7), получаем

$$\begin{cases} \text{для каждого } j, 1 \leqslant j \leqslant n,\ Y_j \in V_{[dx_j],k-1}, \\ \deg(\pi_{D+\deg d}(d\mathbf{yg})) < D + \deg d \end{cases} \implies \mathbf{y} \in V_{[d],k}.$$

Теперь, используя равенство $\pi_l(y_i) = \pi_l(u_i) = z_i$, заключаем, что $z_i \in V^{(l)}_{[d],k}$. $\square$

Теперь, воспользовавшись включениями (5) и (6), а также леммой 1, мы можем заключить, что для любого $l \geqslant D$ и для некоторого $N \in \mathbb{N}$ наступает стабилизация: для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $[d] \in V(\Gamma_A)$ справедливо $V^{(l)}_{[d],N+k} = V^{(l)}_{[d],N}$, причём для любого $k < N$ выполнено

$$\sum_{[d]\in V(\Gamma_A)} V^{(l)}_{[d],k} \subsetneq \sum_{[d]\in V(\Gamma_A)} V^{(l)}_{[d],k+1}.$$

Последнее включение означает, что

$$\sum_{[d]\in V(\Gamma_A)} \dim V^{(l)}_{[d],k+1} \geqslant \sum_{[d]\in V(\Gamma_A)} \dim V^{(l)}_{[d],k} + 1$$

при $k < N$, а значит,

$$\sum_{[d]\in V(\Gamma_A)} \dim V^{(l)}_{[d],N} \geqslant N.$$

Попробуем оценить величину N. Имеем соотношение

$$\dim V^{(l)}_{[d],k} \leqslant \dim \pi_l(A)^m = m \cdot r(l),$$

где $r(l)$ — функция роста алгебры A. Поэтому

$$N \leqslant \dim \sum_{[d]\in V(\Gamma_A)} V^{(l)}_{[d],N} \leqslant |V(\Gamma_A)| \dim V^{(l)}_{[d],N} \leqslant m \cdot r(l) \cdot |V(\Gamma_A)|.$$

Ясно, что N зависит от l и не убывает с ростом l, поэтому с точки зрения практического построения модуля сизигий целесообразно рассматривать только случай $l = D$. Тогда $N \leqslant m \cdot r(D) \cdot |V(\Gamma_A)|$.

Лемма 2. *Пусть при $k = N$ наступает стабилизация пространств $V^{(D)}_{[d],k}$. Тогда для всех k и $[d]$ каждый элемент $\mathbf{u} \in V^0_{[d],k}$ может быть представлен в виде $\mathbf{u} = \sum_i b_i \mathbf{y}_i$, где b_i — слова, а $\mathbf{y}_i \in V^0_{[db_i],N}$.*

Доказательство. При $k \leqslant N$ утверждение леммы тривиально, поэтому рассмотрим сначала произвольный элемент $\mathbf{u} \in V^0_{[d],N+k}$ для любого k.

По условию найдётся $\mathbf{z} \in V_{[d],N}$, такой что $\pi_D(u_i) = \pi_D(z_i)$. Значит, можно написать следующую цепочку неравенств:

$$\deg(d(\mathbf{u}-\mathbf{z})\mathbf{g} \leqslant \max(\deg(d\mathbf{ug}), \deg(d\mathbf{zg}))) < \max(0, D+\deg d) = D+\deg d,$$

т. е.

$$\mathbf{u}-\mathbf{z} \in V_{[d],N+k}. \tag{8}$$

Кроме того,

$$\pi_D(u_i) = \pi_D(z_i) \implies \pi_{D+\deg d}(d(\mathbf{u}-\mathbf{z})\mathbf{g}) = 0, \tag{9}$$

а из (8) и (9) следует, что $\mathbf{u}-\mathbf{z} \in V^0_{[d],N+k}$. Последнее включение вместе с тем, что $\mathbf{u} \in V^0_{[d],N+k}$, означает, что $\mathbf{z} \in V^0_{[d],N+k}$. Поэтому $\mathbf{z} \in V^0_{[d],N+k} \cap V_{[d],N} = V^0_{[d],N}$.

Соотношение (9), в свою очередь, означает, что степень любого одночлена в любом $u_i - z_i$ превосходит D, а значит, элемент $\mathbf{u}-\mathbf{z}$ может быть представлен в виде $\mathbf{u}-\mathbf{z} = \mathbf{b}W$, или $u_i - z_i = \sum\limits_{j=1}^{s} b_j w_{ij}$, где b_j — различные слова степени не ниже D, $\deg w_{ij} \leqslant N+k-D$ и некоторые $w_{ij} \in A$ могут быть нулевыми.

Далее, $0 = d(\mathbf{u}-\mathbf{z})\mathbf{g} = d\mathbf{b}W\mathbf{g}$, следовательно, для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant s$, имеем $db_j(W_j\mathbf{g}) = 0$, где W_j — j-й столбец матрицы W. Отсюда получаем по определению пространств $V^0_{[d],k}$, что $W_j \in V^0_{[db_j],N+k-D}$.

Итак,

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \mathbf{b}W = \mathbf{z} + \sum_{j=1}^{s} b_j W_j,$$

$W_j \in V^0_{[db_j],N+k-D}$, $\mathbf{z} \in V^0_{[d],N}$. Воспользовавшись индукцией по k, мы по индуктивному предположению находим для каждого j, что

$$W_j = \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^{t_j} b_{ij}\mathbf{y}_{ij}$$

для некоторых слов b_{ij} и $\mathbf{v}_j \in V^0_{[db_j],N}$, $\mathbf{y}_{ij} \in V^0_{[db_j b_{ij}],N}$.

Теперь мы можем заключить, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} + \sum_{j=1}^{s} b_j\mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{t_j} b_j b_{ij}\mathbf{y}_{ij},$$

причём $\mathbf{z} \in V^0_{[d],N}$, $\mathbf{v}_j \in V^0_{[db_j],N}$, а $\mathbf{y}_{ij} \in V^0_{[db_j b_{ij}],N}$, а это и требовалось доказать. □

Для каждой вершины $[d] \in V(\Gamma_A)$ выберем произвольный базис $F_{[d]} = \{f^1_{[d]}, \ldots, f^{r_{[d]}}_{[d]}\}$ в конечномерном пространстве $V^0_{[d],N}$. Теперь можно приступить к доказательству теоремы 1.

Напоминаем, что требуется доказать совпадение левого модуля сизигий $\Sigma_{\mathbf{g}}$ системы $g_1, \dots, g_m$ с линейной оболочкой множества

$$\mathcal{F} = \bigcup_{[d] \in V(\Gamma_A)} (\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]} F_{[d]}),$$

т. е. доказать, что

$$\Sigma_{\mathbf{g}} = \mathrm{Span}_{\mathcal{K}}(\mathcal{F}).$$

Доказательство теоремы 1. Если элемент лежит в множестве $\mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \mathcal{F}$, то по построению он лежит в модуле сизигий $\Sigma_{\mathbf{g}}$. Поэтому

$$\Sigma_{\mathbf{g}} \supseteq \mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \mathcal{F}.$$

Пусть теперь $\mathbf{f} \in \Sigma_{\mathbf{g}}$, т. е. $\mathbf{fg} = 0$. Это соотношение вместе с (4) означает, что найдётся такое натуральное k, что $\mathbf{f} \in V^0_{[1],k}$. Если $k \leqslant N$, то

$$\mathbf{f} \in V^0_{[1],k} \subseteq \mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \mathcal{F}.$$

В противном случае по лемме 2 имеем $\mathbf{f} = \sum\limits_i b_i \mathbf{y}_i$, где $\mathbf{y}_i \in V^0_{[b_i],N}$. Поэтому

$$\mathbf{f} \in \mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \left(\bigcup_i ([b_i] F_{[b_i]}) \right) \subseteq \mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \mathcal{F},$$

откуда

$$\Sigma_{\mathbf{g}} \subseteq \mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \mathcal{F}.$$

Теорема доказана. □

Приведённые выше леммы позволяют алгоритмически построить пространства $V^0_{[d],N}$, $N \leqslant m * r\big(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} (\deg g_i)\big) * |V(\Gamma_A)|$. Поэтому становится возможным решение некоторых алгоритмических вопросов, связанных с модулем сизигий.

Предложение 2. *Существует алгоритм распознавания принадлежности произвольного элемента h левому идеалу автоматной мономиальной алгебры A, порождённому элементами $g_1, \dots, g_m$, и алгоритм вычисления коэффициентов $f_1, \dots, f_m$ представления $h = f_1 g_1 + \ldots + f_m g_m$ в этом идеале.*

Доказательство. То, что элемент h лежит в идеале $I =_A (g_1, \dots, g_m)$, означает, что найдутся такие элементы $f_1, \dots, f_m \in A$, что $f_1 g_1 + \ldots + f_m g_m = h$. Предста́вим последнее выражение в виде $f_1 g_1 + \ldots + f_m g_m + (-1)h = 0$. Это означает, что $(f_1, \dots, f_m, -1)$ лежит в модуле сизигий элементов $g_1, \dots, g_m, h$. Из (4) и леммы 2 получаем, что

$$(f_1, \dots, f_m, -1) \in \mathrm{Span}_{\mathcal{K}} \left(\bigcup_{[d] \in V(\Gamma_A)} \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]} V^0_{[d],N} \right).$$

Поэтому

$$(f_1, \dots, f_m, -1) = (f'_1, \dots, f'_m, -1) + (f''_1, \dots, f''_m, 0),$$

где

$$(f'_1, \ldots, f'_m, -1) \in \sum_{[d]}{}' V^0_{[d],N}$$

и

$$(f''_1, \ldots, f''_m, 0) \in \mathrm{Span}_{\mathcal{K}}\Bigl(\bigcup_{[d]\in V(\Gamma_A)} (\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]} \setminus \{1\}) V^0_{[d],N}\Bigr).$$

Здесь суммирование $\sum'$ происходит по тем вершинам $[d]$ графа Γ_A, для которых $\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]} \ni 1$. Тогда $f'_1, \ldots, f'_m$ являются коэффициентами представления элемента h в идеале I по определению пространств $V^0_{[d],N}$.

Таким образом, алгоритм действует так.

Если регулярный язык $\bigcup\limits_{[d]\in V(\Gamma_A)} \mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]}$ не содержит 1, то $h \notin I$. В противном случае определяем конечномерное пространство $V^0_N = \sum\limits_{[d]}{}' V^0_{[d],N}$, где сумма такая же, как описанная выше, а степень любой координаты любого вектора из V^0_N не больше N. Если V^0_N не содержит векторов с последней координатой, равной -1, то $h \notin I$, иначе $h \in I$ и любой вектор $(f_1, \ldots, f_m, -1) \in V^0_N$ определяет коэффициенты $f_1, \ldots, f_m$ представления h в идеале I. Алгоритм распознавания вхождения элемента с заданной последней координатой, равной -1, в конечномерное линейное пространство с известным базисом очевиден. Можно взять соответствующие координаты $r_1, \ldots, r_k$ векторов базиса V^0_N, образовать их линейную комбинацию и с помощью линейных редукций над полем $\mathcal{K}$ проверить, существует ли нетривиальная линейная комбинация $\lambda_1 r_1 + \ldots + \lambda_k r_k = -1$. В случае положительного ответа соответствующая линейная комбинация элементов базиса пространства V^0_N даст нам искомый вектор $(f_1, \ldots, f_m, -1)$. $\square$

Следствие 3. *Общее решение $\{f_1, \ldots, f_m\}$ линейного уравнения*

$$f_1 g_1 + \ldots + f_m g_m = h$$

представляет собой сумму модуля сизигий системы элементов $g_1, \ldots, g_m$ и некоторого частного решения, которое может быть найдено алгоритмически, если оно существует, или алгоритмически может быть определено его отсутствие.

Доказательство. Действительно, решение однородного уравнения является левым модулем сизигий элементов $g_1, \ldots, g_m$, а частное решение представляет собой набор коэффициентов $f_1, \ldots, f_m$ представления элемента $h = f_1 g_1 + \ldots + f_m g_m$ в идеале $I =_A (g_1, \ldots, g_m)$, если $h \in I$. $\square$

Предложение 3. *Пусть в автоматной мономиальной алгебре A левые идеалы I и J порождаются соответственно элементами $g_1, \ldots, g_m$ и $h_1, \ldots, h_k$. Пусть $\Sigma_{\mathbf{g},-\mathbf{h}}$ — левый модуль сизигий системы элементов $g_1, \ldots, g_m, -h_1, \ldots, -h_k$, векторы $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$ принадлежат A^{m+k}, $M_{i,j} = {}_A(e_{i+1}, \ldots, e_{i+j})$. Тогда*

$$I \cap J = (\Sigma_{\mathbf{g},-\mathbf{h}} \cap M_{0,m}) * \mathbf{g} = (\Sigma_{\mathbf{g},-\mathbf{h}} \cap M_{m,k}) * \mathbf{h}. \tag{10}$$

Здесь $*$ понимается в смысле

$$(f_1,\dots,f_m,0\dots,0)*(g_1,\dots,g_m)=(f_1,\dots,f_m)(g_1,\dots,g_m)=\mathbf{fg}=\sum_i f_ig_i.$$

Доказательство. Действительно, пересечением идеалов I и J является множество

$$\{f_1g_1+\dots+f_mg_m, f_i\in A \mid \text{найдутся } f_{m+1},\dots,f_{m+k}\in A, \text{ такие что } f_1g_1+\dots+f_mg_m=f_{m+1}h_1+\dots+f_{m+k}h_k\},$$

совпадающее с множеством

$$\{f_1h_1+\dots+f_kh_k, f_i\in A \mid \text{найдутся } f_{k+1},\dots,f_{k+m}\in A, \text{ такие что } f_1h_1+\dots+f_kh_k=f_{k+1}g_1+\dots+f_{k+m}g_m\}.$$

Равенства (10) получаются сразу же.

Теперь согласно теореме 1 представим модуль сизигий $\Sigma_{\mathbf{g},-\mathbf{h}}$ в виде

$$\mathrm{Span}_{\mathcal{K}}\Big(\bigcup_{[d]\in V(\Gamma_A)}\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]}F_{[d]}\Big),$$

где $F_{[d]}=\{f^1_{[d]},\dots,f^{r[d]}_{[d]}\}$. Вместо $F_{[d]}$ возьмём ограничения $F'_{[d]}=F_{[d]}|_{M_{0,m}}$ и $F''_{[d]}=F_{[d]}|_{M_{m,k}}$ этих конечных множеств векторов на пространства $M_{0,m}$ и $M_{m,k}$ соответственно. Тогда, очевидно, будут иметь место равенства

$$(\Sigma_{\mathbf{g},-\mathbf{h}}\cap M_{0,m})*\mathbf{g}=\mathrm{Span}_{\mathcal{K}}\Big(\bigcup_{[d]\in V(\Gamma_A)}\bigcup_{\mathbf{f}\in F'_{[d]}}\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]}(\mathbf{fg})\Big),$$

$$(\Sigma_{\mathbf{g},-\mathbf{h}}\cap M_{m,k})*\mathbf{h}=\mathrm{Span}_{\mathcal{K}}\Big(\bigcup_{[d]\in V(\Gamma_A)}\bigcup_{\mathbf{f}\in F''_{[d]}}\mathcal{L}^{\mathrm{in}}_{[d]}(\mathbf{fh})\Big).$$

Эти соотношения обеспечивают возможность алгоритмического нахождения пересечения двух конечно порождённых левых идеалов автоматной мономиальной алгебры.

Нужно отметить, что пересечение конечно порождённых левых идеалов не обязано быть конечно порождённым. Примером тому служит алгебра $A=\mathcal{K}\langle x,y\rangle/(xy^kx\mid k\geqslant 0)$ с левыми идеалами Ay и $A(x+y)$. В этом случае, очевидно, $\Sigma_{x+y,-y}$ порождается всеми парами (xy^k,xy^k), $k\geqslant 0$, а пересечение идеалов $Ay\cap A(x+y)$ порождается мономами xy^k, $k\geqslant 1$. □

В заключение необходимо отметить, что, возможно, интересно было бы рассмотреть упомянутые вопросы в связи с алгоритмом Белова проверки существования и нахождения нетривиального решения системы линейных рекуррент на дереве, который можно найти в [1].

Литература

[1] Белов А. Я. Линейные рекуррентные уравнения. — International University of Bremen, Moscow Institute of Open Education, 2003.

[2] Белов А. Я., Борисенко В. В., Латышев В. Н. Мономиальные алгебры // Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. Т. 26. — М.: ВИНИТИ, 2002. — С. 35—214.

[3] Пионтковский Д. И. Некоммутативные базисы Грёбнера, когерентность ассоциативных алгебр и делимость в полугруппах // Фундам. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 2. — С. 495—513.

[4] Саломаа А. Жемчужины теории формальных языков. — М.: Мир, 1986.

[5] Becker T., Weispfenning V. Gröbner Bases. — Springer, 1993.