Об относительно асферических копредставлениях и их центральных расширениях*

О. В. КУЛИКОВА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: olga.kulikova@mail.ru

УДК 512.543

Ключевые слова: нормальные замыкания множеств элементов в группах, копредставления групп, картинки, взаимные коммутанты, центральные расширения групп, асферичность, гиперболические группы.

Аннотация

При условии асферичности фактор-группы $G/\bar{N}_R$ изучаются взаимные коммутанты вида $[\bar{N}_R, G]$ в гиперболических группах G и строение центральной подгруппы $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ в центральных расширениях $G/[\bar{N}_R, G]$ группы $G/\bar{N}_R$. В частности, рассмотрены фактор-группы вида $G/[g^m, G]$, где g — элемент бесконечного порядка гиперболической группы G , а m — достаточно большое число (зависящее от g).

Abstract

O. V. Kulikova, On relatively aspherical presentations and their central extensions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 115–125.

Under the condition of asphericity of a quotient group $G/\bar{N}_R$, mutual commutants of the form $[\bar{N}_R, G]$ in hyperbolic groups G are investigated together with the structure of central subgroups $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ in central extensions $G/[\bar{N}_R, G]$ of $G/\bar{N}_R$. In particular, quotients of the form $G/[g^m, G]$ are considered, where g is an element of infinite order from a hyperbolic group G and m is sufficiently large (depending on g).

Введение

Пусть некоторая группа G задана копредставлением $\langle A \mid O \rangle$, где O — множество всех слов в алфавите A , равных единице в G . Через Φ обозначим канонический гомоморфизм из свободной группы $F = F(A)$ на группу G с ядром N .

Рассмотрим группу G_1 , заданную копредставлением

$$\langle A \mid O \cup R \rangle, \quad (1)$$

где R — некоторое симметризованное множество циклически приведённых слов в F . Тогда $G_1 = G/\bar{N}_R$, где $\bar{N}_R$ — образ нормального замыкания N_R множества R в F при гомоморфизме Φ .

*Работа частично поддержана грантом РФФИ № 05-01-00895.

Рассмотрим эпиморфизм $\Psi: G \rightarrow H$,

$$H = \langle A \mid O, [a, r] = 1, a \in A, r \in R \rangle. \quad (2)$$

Его ядром является подгруппа $[\bar{N}_R, G] \subset G$. Действительно, так как $[a, r] \in [N_R, F]$, $O \subset N$, то $\text{Ker } \Psi \subset [\bar{N}_R, G]$. С другой стороны, $\bar{N}_R / \text{Ker } \Psi$ содержится в центре группы H , как видно из соотношений (2). Следовательно, $[\bar{N}_R, G] \subset \text{Ker } \Psi$, и поэтому $\text{Ker } \Psi = [\bar{N}_R, G]$. Группа H является центральным расширением группы G_1 , заданной копредставлением (1). Итак, $H \cong G / [\bar{N}_R, G]$, $G_1 \cong G / \bar{N}_R$.

В первой части данной статьи при условии асферичности фактор-группы $G / \bar{N}_R$ (в смысле определения, данного в [5]) исследуются взаимные коммутанты вида $[\bar{N}_R, G]$ и строение центральной подгруппы $\bar{N}_R / [\bar{N}_R, G]$ в центральном расширении $G / [\bar{N}_R, G]$ группы $G / \bar{N}_R$. Во второй части статьи эти результаты применяются к гиперболическим группам.

Автор хотела бы поблагодарить своего научного руководителя А. Ю. Ольшанского за предложенные задачи и возможные подходы к их решению, а также А. Минасяна за ценные замечания.

1. Соотношения во взаимном коммутанте $[\bar{N}_R, G]$. Строение фактор-группы $\bar{N}_R / [\bar{N}_R, G]$

Выясним устройство ядра $[\bar{N}_R, G]$ гомоморфизма Ψ и центральной подгруппы $\bar{N}_R / [\bar{N}_R, G]$ в центральном расширении H . Для этого рассмотрим произвольную картинку P (см. определение картинок, например, в [3]) над копредставлением (1). Так как множество определяющих соотношений в (1) является объединением двух подмножеств O и R , то вершины в P делятся на O -вершины и R -вершины в зависимости от того, какому подмножеству принадлежит метка вершины. Напомним, что метка любой вершины V (будем обозначать её $\text{Lab}_p^+(C)$ или просто $\text{Lab}(V)$) образуется из меток рёбер, последовательно пересекающих окружность C малого радиуса с центром в V , при обходе по часовой стрелке вокруг V начиная с некоторой точки $p \in C$, не принадлежащей никакому ребру картинки P . Если γ — некоторый путь, не проходящий через вершины картинки P , тогда, проходя вдоль γ , мы сталкиваемся с последовательностью рёбер. Метки на этих рёбрах дают слово, которое будет обозначаться через $\text{Lab}(\gamma)$.

Возьмём произвольное слово r из подмножества определяющих соотношений R . Все определяющие соотношения из R , которые сопряжены с r в группе G , образуют подмножество в R , называемое *классом сопряжённости относительно группы G* или, кратко, *относительным классом сопряжённости* с представителем r . Отметим, что любой относительный класс сопряжённости либо содержит с каждым словом r и слово r^{-1} , либо в этом классе нет взаимнообратных слов. Поэтому множество R разбивается на непересекающиеся

относительные классы сопряжённости следующим образом:

$$R = \left(\bigsqcup_j R_j^{(2)} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_i R_i^+ \sqcup R_i^- \right),$$

где $R_j^{(2)}$ — относительный класс сопряжённости, в котором представитель сопряжён в G с обратным к себе словом, R_i^+ — относительный класс сопряжённости, в котором представитель не сопряжён в G с обратным к себе словом, а $R_i^- = (R_i^+)^{-1}$. В каждом относительном классе сопряжённости можно выбрать и зафиксировать по представителю (обозначим их соответственно r_i^+ , r_i^- , $r_j^{(2)}$) так, чтобы $r_i^+ r_i^- = 1$ в F . Обозначим также $\bigsqcup_k R_k^{(2)}$ через $R^{(2)}$, $\bigsqcup_l R_l^+$ через R^+ , $\bigsqcup_m R_m^-$ через R^- .

Пусть определяющее соотношение $r \in R$ принадлежит R^+ или R^- . Обозначим через $\sigma_+(r)$ число вершин в P с метками, принадлежащими классу сопряжённости относительно G , которому принадлежит r . Через $\sigma_-(r)$ обозначим $\sigma_+(r^{-1})$. Назовём *алгебраическим числом r -вершин в P* разность $\sigma_P(r) = \sigma_+(r) - \sigma_-(r)$. Пусть определяющее соотношение $r \in R$ принадлежит $R^{(2)}$. Обозначим через $\varsigma_P(r)$ число вершин в P с метками, принадлежащими классу сопряжённости относительно G , которому принадлежит r . Назовём $\varsigma_P(r)$ *суммарным числом r -вершин в P* .

Лемма 1.1. *Если для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$ алгебраическое число r -вершин в дисковой картинке P над копредставлением (1) равно 0, а для любого $r \in R^{(2)}$ суммарное число r -вершин в P чётно, то граничная метка $\text{Lab}(\partial P)$ картинке P принадлежит $[F, N_R]N$.*

Доказательство. Выберем произвольно точку p на ∂P , не принадлежащую никакому ребру. Очевидно, из точки p к границе каждой r -вершины (т. е. к окружности малого радиуса с центром в этой вершине) можно провести простой путь γ_r так, чтобы его конец не принадлежал никакому ребру, сам он не проходил через вершины, пересекал рёбра только трансверсально и конечное число раз и пересекался с другими подобными путями только в точке p . Рассмотрим отрезок $[p_1, p_2]$ границы ∂P , не пересекающийся с ребрами картинке P , такой что $p \in (p_1, p_2)$ (обозначим его через $[p_1, p_2]_p$). Очевидно, можно упорядочить пути $\{\gamma_r\}$ так, что путь γ с началом в точке p_1 и концом в точке p_2 , проходящий последовательно вдоль каждого пути γ_r , вокруг соответствующей r -вершины, а затем снова вдоль γ_r в противоположном направлении, будет простым. При этом путь γ будет делить картинку P на две дисковые картинке, одна из которых (назовём её P_R) содержит все R -вершины, а другая (P_O) — все O -вершины. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Lab}(\partial P) &= \text{Lab}([p_1, p_2]_p) \text{Lab}(\partial P \setminus [p_1, p_2]_p) = \\ &= \text{Lab}([p_1, p_2]_p) \text{Lab}(\gamma^{-1}) \text{Lab}(\gamma) \text{Lab}(\partial P \setminus [p_1, p_2]_p) = \text{Lab}(\partial P_R) \text{Lab}(\partial P_O). \end{aligned}$$

Так как по лемме ван Кампена (см., например, [3, лемма 1.1]) $\text{Lab}(\partial P_O) \in N$, то достаточно доказать, что $\text{Lab}(\partial P_R) \in [F, N_R]N$.

Рассмотрим отдельно картинку P_R . Очевидно,

$$\text{Lab}(\partial P_R) = (s_1 r_{i_1}^{\pm 1} s_1^{-1}) \dots (s_m r_{i_m}^{\pm 1} s_m^{-1}),$$

где $r_{i_k} \in R$, $s_k = \text{Lab}(\gamma_{r_{i_k}}) \in F$. Каждый из этих сомножителей принадлежит N_R , следовательно, их можно переставлять между собой по модулю $[N_R, F]$. Поэтому в силу условия леммы достаточно доказать, что

$$sr^{-1}s^{-1}tr't^{-1} \in [F, N_R]N$$

для любых сопряжённых в G слов r и r' из R . Но, учитывая, что $r' = uru^{-1}n$ для некоторых $u \in F$ и $n \in N$, получаем

$$\begin{aligned} sr^{-1}s^{-1}tr't^{-1} &= [s^{-1}, r]r^{-1}r'[r', t^{-1}] = \\ &= [s^{-1}, r]r^{-1}uru^{-1}n[r', t^{-1}] = [s^{-1}, r][r, u^{-1}]n[r', t^{-1}] \in [F, N_R]N. \quad \square \end{aligned}$$

Далее будем рассматривать копредставления (1), являющиеся асферическими в смысле определения, данного в [5]. Напомним это определение. Копредставление (1) является *асферическим*, если любая связная сферическая картинка P над (1) содержит диполь, т. е. две R -вершины V_1 и V_2 в P , такие что существует простой путь ψ , соединяющий точки p_1 и p_2 на окружностях C_1 и C_2 вокруг этих вершин, для которого в G выполнено следующее равенство:

$$\text{Lab}^{-1}(\psi)\text{Lab}_{p_1}^+(C_1)\text{Lab}(\psi)\text{Lab}_{p_2}^+(C_2) = 1.$$

Лемма 1.2. Пусть дано асферическое копредставление (1) группы $G_1 = G/\bar{N}_R$. Тогда

- 1) для произвольной сферической картинки P над (1) и любого $r \in R^+ \sqcup R^-$ имеем $\sigma_P(r) = 0$, а для любого $r \in R^{(2)}$ число $\zeta_P(r)$ является чётным;
- 2) если слово x представляет в F элемент из $[F, N_R]N$, то для любой дисковой картинки P с граничной меткой, равной x , $\sigma_P(r) = 0$ для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$, а $\zeta_P(r)$ — чётное число для любого $r \in R^{(2)}$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения проведём индукцией по числу R -вершин. Утверждение очевидно, если в P нет R -вершин. В противном случае, как следует из определения асферичности, в P найдётся пара R -вершин V_1 и V_2 и простой путь γ , соединяющий их, такие что

$$\text{Lab}(V_1)\text{Lab}(\gamma)\text{Lab}(V_2)\text{Lab}^{-1}(\gamma) = 1$$

в G . Опишем простой замкнутый путь $\bar{\gamma}$, проходящий вокруг V_1 , вдоль γ , затем вокруг V_2 и в обратном направлении вдоль γ , с меткой $\text{Lab}(\bar{\gamma}) \in N$. При этом $\bar{\gamma}$ ограничивает дисковую подкартинку $P_{\{V_1, V_2\}}$ в P , из R -вершин содержащую только V_1 и V_2 . Очевидно, $\sigma_{P_{\{V_1, V_2\}}}(r) = 0$ для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$, а $\zeta_{P_{\{V_1, V_2\}}}(r)$ чётно для любого $r \in R^{(2)}$. По лемме ван Кампена существует дисковая картинка P_G над копредставлением $\langle A \mid O \rangle$ группы G с граничной меткой, равной

$\text{Lab}(\bar{\gamma})$, P_G содержит только O -вершины. Вырежем $P_{\{V_1, V_2\}}$ из P и вклеим вместо неё P_G . В результате получим картинку P' с меньшим числом R -вершин. По предположению индукции $\sigma_{P'}(r) = 0$ для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$, а $\zeta_{P'}(r)$ является чётным для любого $r \in R^{(2)}$. Поскольку при замене $P_{\{V_1, V_2\}}$ на P_G алгебраическое число r -вершин в P не менялось для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$, так же как и чётность суммарного числа r -вершин в P для любого $r \in R^{(2)}$, первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Слово x можно записать в F в виде

$$\left(\prod [y_k, s_k r_k^{\pm 1} s_k^{-1}] \right) n, \quad (3)$$

где $s_k, y_k \in F$, $r_k \in R$, $n \in O$, так как в F тождественно соотношение

$$[w, uv] = [w, u][uwu^{-1}, wvu^{-1}].$$

При геометрической интерпретации равенства $x = 1$ в G_1 получается дисковая картинка P_0 с нулевым $\sigma_{P_0}(r)$ для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$ и чётным $\zeta_{P_0}(r)$ для любого $r \in R^{(2)}$, так как в (3) каждый из коммутаторов есть произведение двух слов, сопряжённых с r_k и r_k^{-1} . Если теперь P — другая дисковая картинка с граничной меткой, равной x , то P вместе с зеркальной копией P^0 картинки P_0 дают сферическую картинку $\bar{P}$. В силу первого утверждения $\sigma_{\bar{P}}(r) = 0$ для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$, а $\zeta_{\bar{P}}(r)$ является чётным для любого $r \in R^{(2)}$. Значит,

$$\sigma_P(r) = \sigma_{\bar{P}}(r) - \sigma_{P^0}(r) = \sigma_{\bar{P}}(r) + \sigma_{P_0}(r) = 0$$

для любого $r \in R^+ \sqcup R^-$. Аналогично, суммарное число $\zeta_P(r)$ является чётным для любого $r \in R^{(2)}$, как разность чётных чисел. $\square$

Теорема 1.3. Пусть дано асферическое копредставление (1) группы $G_1 = G/\bar{N}_R$. Тогда

1) следующие условия для слова $x \in N_R N$ эквивалентны:

- а) $x \in [F, N_R]N$;
- б) в записи $o \prod s_k r_k^{\pm 1} s_k^{-1}$, представляющей слово x в F (где $o \in O$, $r_k \in R$, $s_k \in F$), сумма показателей при всех $r \in R_m^+$ равна нулю для каждого $R_m^+ \subset R$, а сумма показателей при всех $r \in R_n^{(2)}$ является чётной для каждого $R_n^{(2)} \subset R$;
- 2) $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G] \simeq N_R N/[\bar{N}_R, F]N$ является абелевой группой, представляющей в виде $A \oplus A_2$, где A свободно порождается множеством элементов $\{a_i^+\}$, являющихся образами представителей $\{r_i^+\}$, а A_2 порождается множеством элементов $\{a_i^{(2)}\}$ второго порядка, являющихся образами представителей $\{r_i^{(2)}\}$ (т. е. A_2 — прямое произведение подгрупп $\langle a_i^{(2)} \rangle$ второго порядка).

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из б) следует а) по лемме 1.1. Для объяснения обратной импликации нужно по записи $o \prod s_k r_k^{\pm 1} s_k^{-1}$ построить дисковую картинку и применить к ней второе утверждение леммы 1.2.

Докажем второе утверждение. Группа $N_R N$ порождается всеми $r \in R$ вместе с сопряжёнными им в F словами и всеми $o \in O$. Но сопряжённые в G слова имеют одинаковые в $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ образы, а образы $o \in O$ равны единичному элементу в $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$. Значит, абелева группа $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ действительно порождается представителями относительных классов сопряжённости R по группе G (причём $\{r_i^-\}$ не учитываются, так как они представляют обратные элементы к $\{r_i^+\}$).

Докажем, что подгруппа A свободно порождается образами $\{r_i^+\}$. Достаточно убедиться, что для различных $R_{i_1}^+, \dots, R_{i_k}^+ \subset R$ из равенства

$$a_{i_1}^{+m_1} \dots a_{i_k}^{+m_k} = 1$$

в $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ следуют равенства $m_1 = \dots = m_k = 0$. Действительно, имеем равенство в свободной группе

$$r_{i_1}^{+m_1} \dots r_{i_k}^{+m_k} = x \in [N_R, F]N.$$

Отсюда

$$w = r_{i_1}^{+m_1} \dots r_{i_k}^{+m_k} x^{-1} = 1$$

в F . Применяя первое утверждение теоремы к x и к w , получаем $m_1 = \dots = m_k = 0$.

Аналогично можно доказать, что для различных $R_{j_1}^{(2)}, \dots, R_{j_n}^{(2)} \subset R$ равенство

$$a_{j_1}^{(2)m_1} \dots a_{j_n}^{(2)m_n} = 1$$

в $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ невозможно при нечётных $m_1, \dots, m_n$. При этом $\{a_i^{(2)}\}$ будут элементами второго порядка в $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$, так как каждый $r_i^{(2)}$ и $(r_i^{(2)})^{-1}$ сопряжены друг с другом в G . Отметим, что элементы $a_i^{(2)}$ не являются тривиальными.

Так как в подгруппе A_2 все элементы второго порядка, а A — свободная абелева группа, A и A_2 не пересекаются. Следовательно, $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G] = A \oplus A_2$. $\square$

2. Применение

В [6] А. Ю. Ольшанский рассмотрел гиперболическую группу G , заданную копредставлением $\langle A \mid O \rangle$, и группу $G_1 = \langle A \mid O \cup R \rangle$, где R — некоторое симметризованное множество дополнительных соотношений. Для построения фактор-групп кручения и многих других фактор-групп гиперболических групп А. Ю. Ольшанский ввёл понятие $C(\varepsilon, \mu, \lambda, c, \rho)$ -условия на R .

Аналогично доказательству леммы 6.6 в [6] (неточность в формулировке которой была устранена в [2]) можно показать (см., например, [5, п. 1.3.(2)]), что для любого $\lambda > 0$ существует $\mu_0 > 0$, такое что для всех $\mu \in (0, \mu_0]$ и $c \geq 0$ существуют $\varepsilon \geq 0$ и $\rho > 0$, такие что если симметризованное копредставление $G_1 = \langle A \mid O \cup R \rangle$ удовлетворяет $C(\varepsilon, \mu, \lambda, c, \rho)$ -условию, то оно является асферическим.

Следовательно, к гиперболическим группам можно применить результаты предыдущего раздела.

В обозначениях предыдущего раздела имеем следующую теорему.

Теорема 2.1. Пусть $G = \langle A \mid O \rangle$ — гиперболическая группа. Для любого $\lambda > 0$ существует такое $\mu_0 > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu_0]$ и $c \geq 0$ существуют $\varepsilon \geq 0$ и $\rho > 0$, такие что если симметризованное копредставление $G_1 = G/\bar{N}_R = \langle A \mid O \cup R \rangle$ удовлетворяет $C(\varepsilon, \mu, \lambda, c, \rho)$ -условию, тогда

- 1) следующие условия для слова $x \in N_R N$ эквивалентны:
 - а) $x \in [F, N_R]N$;
 - б) в записи $o \prod s_k r_k^\pm s_k^{-1}$, представляющей слово x в F (где $o \in O$, $r_k \in R$, $s_k \in F$), сумма показателей при всех $r \in R_m^+$ равна нулю для каждого $R_m^+ \subset R$, а сумма показателей при всех $r \in R_n^{(2)}$ чётная для каждого $R_n^{(2)} \subset R$;
- 2) $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G] \simeq N_R N/[N_R, F]N$ является абелевой группой, представляющей в виде $A \oplus A_2$, где A свободно порождается множеством элементов $\{a_i^+\}$, являющихся образами представителей $\{r_i^+\}$, а A_2 порождается множеством элементов $\{a_i^{(2)}\}$ второго порядка, являющихся образами представителей $\{r_i^{(2)}\}$ (т. е. A_2 — прямое произведение подгрупп $\langle a_i^{(2)} \rangle$ второго порядка).

Легко получаются следующие следствия.

Предложение 2.2. Пусть $G = \langle A \mid O \rangle$ — гиперболическая группа и симметризованное копредставление $G_1 = \langle A \mid O \cup R \rangle$ является асферическим. Тогда

- 1) если множество относительных классов сопряжённости $\{R_m^+\} \subset R$ непусто, то фактор-группа $G/[\bar{N}_R, G]$ является элементарной гиперболической тогда и только тогда, когда $\#\{R_m^+\} = 1$, $\#\{R_n^{(2)}\} < \infty$, а G_1 конечная, в других случаях она не является гиперболической;
- 2) если множество относительных классов сопряжённости $\{R_m^+\} \subset R$ пусто, а число классов $\{R_n^{(2)}\} \subset R$ бесконечно, то $G/[\bar{N}_R, G]$ не является гиперболической;
- 3) если множество относительных классов сопряжённости $\{R_m^+\} \subset R$ пусто, а число классов $\{R_n^{(2)}\} \subset R$ конечно, то $G/[\bar{N}_R, G]$ гиперболическая тогда и только тогда, когда G_1 гиперболическая.

Доказательство. Напомним, что через H обозначается группа $G/[\bar{N}_R, G]$. Напомним также, что по теореме 1.3 число классов $\{R_m^+\} \subset R$ равно числу свободных порождающих подгруппы $A \subset H$, а подгруппа $A_2 \subset H$ раскладывается в прямое произведение циклических подгрупп второго порядка, число которых равно числу классов $\{R_n^{(2)}\} \subset R$.

Так как любая гиперболическая группа содержит конечное число классов сопряжённости элементов кручения [4, следствие 2.2B], то если A_2 бесконеч-

на, т. е. $\#\{R_n^{(2)}\} = \infty$, H не гиперболическая. Поэтому далее считаем, что A_2 конечна, т. е. $\#\{R_n^{(2)}\} < \infty$.

Далее будем использовать утверждение (см., например, [6, лемма 1.15]) о том, что если элемент g в гиперболической группе $\tilde{G}$ имеет бесконечный порядок, то циклическая подгруппа $\langle g \rangle$ имеет конечный индекс в централизаторе $C_{\tilde{G}}(g)$.

Если $\#\{R_m^+\} \geq 1$, т. е. если свободная абелева группа A не является тривиальной, тогда любой свободный порождающий a группы A имеет бесконечный порядок. Так как подгруппа A принадлежит центру группы H , $C_H(a) = H$. Следовательно, если H — гиперболическая группа, то $|H : \langle a \rangle| < \infty$, т. е. H является элементарной. В частности, A должна быть циклической группой, а G_1 конечной. Обратное утверждение пункта 1) очевидно.

В случае, когда A — тривиальная группа, A_2 — конечная группа, группы H и $G_1 = H/A_2$ либо одновременно гиперболические, либо одновременно негиперболические, как следует из замечания в [4]. $\square$

Из [6, лемма 7.4] и предложения 2.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3. *В условиях теоремы 2.1, если G — неэлементарная группа, а множество R в (1) содержит t слов, то $G/[\bar{N}_R, G]$ гиперболическая тогда и только тогда, когда множество относительных классов сопряжённости $\{R_m^+\} \subset R$ пусто, а число относительных классов сопряжённости $\{R_n^{(2)}\} \subset R$ конечно (выбор ρ зависит от t).*

Отметим, что если G элементарная гиперболическая, то H тоже элементарная гиперболическая.

Предложение 2.4. *Пусть G — гиперболическая группа и $\lambda > 0$. Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu_0]$ и $c \geq 0$ существуют $\varepsilon \geq 0$ и $\rho > 0$, такие что если симметризованное множество R в (1) удовлетворяет $C(\varepsilon, \mu, \lambda, c, \rho)$ -условию, то слово x имеет конечный порядок в $H = G/[\bar{N}_R, G]$ тогда и только тогда, когда либо $x \in A_2$, либо $x = byb^{-1}a$ в H , где $a \in A_2$, b — произвольный элемент из H , слово y конечного порядка в G или принадлежит централизатору $C_G(r) \subset G$ элемента $r \in R_i^{(2)}$ для некоторого $R_i^{(2)} \subset R$.*

Доказательство. Выберем такие же константы, как в [6, лемма 7.2], тогда копредставление (1) является асферическим.

Пусть слово x имеет конечный порядок в H . Тогда x либо равен единице в $G_1 \simeq G/\bar{N}_R \simeq H/(\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G])$, либо будет конечного порядка в G_1 . В первом случае $x \in \bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ и, значит, по теореме 1.3 2) $x \in A_2$.

Во втором случае из [6, лемма 7.2] следует, что x сопряжён в G_1 со словом конечного порядка в G или со словом, принадлежащим централизатору $C_G(r) \subset G$. Следовательно, в H имеем следующие равенства:

$$1) \quad x = b_1 y_1 b_1^{-1} n_1, \text{ где } n_1 \in \bar{N}_R/[\bar{N}_R, G], y_1 \text{ конечного порядка в } G,$$

или

$$2) \quad x = b_2 y_2 b_2^{-1} n_2, \text{ где } n_2 \in \bar{N}_R/[\bar{N}_R, G], y_2 \in C_G(r) \text{ для некоторого } r \in R.$$

В случае 1) y_1 имеет конечный порядок в H , так как y_1 имеет конечный порядок в G . Следовательно, n_1 должен быть также конечного порядка в H , т. е. $n_1 \in A_2$, так как $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G] = A \oplus A_2$ принадлежит центру группы H , а x имеет конечный порядок в H .

Рассмотрим случай 2). По [6, лемма 1.15] $y_2^k = r^l$ в G для некоторых целых чисел $k, l > 0$.

Если y_2 имеет конечный порядок в H , то то же верно для n_2 и r . Следовательно, $n_2 \in A_2$, а включение $y_2 \in C_G(r)$ имеет место для $r \in R_i^{(2)}$ для некоторого $R_i^{(2)} \subset R$.

Итак, предположим, что y_2 — элемент бесконечного порядка в H . Тогда r имеет бесконечный порядок в H . Поэтому элемент a_r , являющийся образом элемента r в H , является одним из свободных порождающих свободной абелевой подгруппы $A \subset H$. Имеем $y_2^k = a_r^l$ в H . Отметим, что $n_2 = ac$, где $a \in A$ и $c \in A_2$. Поэтому, так как $A \oplus A_2$ принадлежит центру группы H , получаем

$$x^k = b_2 y_2^k b_2^{-1} n_2^k = b_2 a_r^l b_2^{-1} n_2^k = a_r^l n_2^k = a_r^l a^k c^k.$$

По нашему предположению $x^t = 1$ в H для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Следовательно, элемент $a_r^l a^k$ из A имеет конечный порядок в H . Так как A — свободная абелева группа, а a_r — один из её свободных порождающих, $a = a_r^m$ для целого числа $m = -l/k$. Итак, $y_2^k = r^{-km}$ в G . Так как $y_2 \in C_G(r)$, $(y_2 r^m)^k = 1$ в G , т. е. $y_2' = y_2 r^m$ имеет конечный порядок в G . Таким образом, получаем в H

$$x = b_2 y_2 b_2^{-1} n_2 = b_2 y_2' b_2^{-1} a_r^{-m} n_2 = b_2 y_2' b_2^{-1} c,$$

что возвращает нас к случаю 1).

Для доказательства обратного утверждения используются аналогичные рассуждения. $\square$

Следствие 2.5. В условиях предложения 2.4 и обозначениях теоремы 2.1, если A_2 — тривиальная группа, то слово x имеет конечный порядок в $H = G/[\bar{N}_R, G]$ тогда и только тогда, когда x сопряжён в H с элементом конечного порядка в G .

Следующее утверждение использует понятие соизмеримости двух элементов, данное в [6]. Напомним его. Два элемента бесконечного порядка g, h в гиперболической группе G называются *соизмеримыми*, если $g^k = ah^l a^{-1}$ для некоторых ненулевых целых чисел k, l и некоторого $a \in G$.

Предложение 2.6. Для гиперболической группы G выберем ε, μ, ρ как в предложении 2.4 и предположим дополнительно, что $\lambda\rho > 3\|x\|$ для элемента бесконечного порядка $x \in G$. Пусть симметризованное множество R удовлетворяет $C(\varepsilon, \mu, \lambda, c, \rho)$ -условию. Тогда x конечного порядка в H тогда и только тогда, когда он соизмерим в G с $r \in R_i^{(2)}$ для некоторого $R_i^{(2)} \subset R$.

Доказательство. В этих условиях можно использовать [6, лемма 7.3] и теорему 2.1. По [6, лемма 7.3], если x не соизмерим ни с каким $r \in R$, то x —

элемент бесконечного порядка в группе G_1 с копредставлением (1). Следовательно, x имеет бесконечный порядок и в H . Если же x соизмерим с каким-нибудь $r \in R$, тогда из теоремы 2.1 следует, что если $r \in R_i^{(2)}$ для некоторого $R_i^{(2)} \subset R$, то x — элемент конечного порядка в H , иначе x бесконечного порядка в H .

Обратное утверждение очевидно. $\square$

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть G — произвольная гиперболическая группа, а g — элемент бесконечного порядка в G . По [6, леммы 1.15, 1.16] существует такое $n > 0$, что $xg^nx^{-1} = g^{\pm n}$ для всех x из элементарной подгруппы

$$E(g) = \{x \in G \mid \exists k = k(x) > 0: xg^kx^{-1} = g^{\pm k}\}.$$

Пусть w — кратчайшее слово, представляющее элемент g . Определим R_m как множество циклических перестановок слов $w^{\pm nm}$. По [6, лемма 4.1] существуют $\lambda > 0$, $c \geq 0$, такие что для любых $\mu > 0$, $\varepsilon \geq 0$, $\rho > 0$ существует такое $m_0 > 0$, что для любого $m \geq m_0$ множество R_m удовлетворяет $C(\varepsilon, \mu, \lambda, c, \rho)$ -условию. Поэтому можно считать, что существует такое $m_0 > 0$, что для любого $m \geq m_0$ копредставление $\langle A \mid O \cup R_m \rangle$ асферично. Следовательно, $\bar{N}_R/[\bar{N}_R, G]$ либо бесконечная циклическая группа (что эквивалентно тому, что $E(g) = E^+(g)$, где $E^+(g) = \{x \in G \mid \exists k = k(x) > 0: xg^kx^{-1} = g^k\}$), либо циклическая группа второго порядка (что эквивалентно тому, что $E(g) \neq E^+(g)$). По предложению 2.2 имеем:

- 1) если $E(g) = E^+(g)$, то $H = G/[\bar{N}_{R_m}, G]$ является элементарной тогда и только тогда, когда $G_1 = G/\bar{N}_{R_m}$ конечная, в других случаях она не является гиперболической;
- 2) если $E(g) \neq E^+(g)$, то H — гиперболическая группа тогда и только тогда, когда G_1 — гиперболическая группа.

Из следствия 2.3 получаем, что если G — неэлементарная гиперболическая группа, а g — элемент бесконечного порядка в G , то $H = G/[\bar{N}_{R_m}, G]$ является гиперболической тогда и только тогда, когда $E(g) \neq E^+(g)$, при условии что m — достаточно большое число.

В рассматриваемом частном случае также имеет место предложение 2.4. В частности, из следствия 2.5 получаем, что если $E(g) = E^+(g)$, то слово x имеет конечный порядок в $H = G/[\bar{N}_{R_m}, G]$ тогда и только тогда, когда x сопряжён в H с элементом конечного порядка в G . Следующее предложение, по сути, аналогично предложению 2.6.

Предложение 2.7. Пусть h — элемент бесконечного порядка в неэлементарной гиперболической группе G . Тогда, используя обозначения, данные выше, получаем, что существует целое число m_0 (зависящее от h), такое что для всех $m \geq m_0$ образ элемента h в $H = G/[\bar{N}_{R_m}, G]$ имеет бесконечный порядок тогда и только тогда, когда или h и g несоизмеримы в G , или $E(g) = E^+(g)$.

Доказательство. Если h и g несоизмеримы, то утверждение верно по [6, лемма 7.3]. Пусть h и g соизмеримы. Тогда h и g^{mn} соизмеримы. Следовательно, они имеют в H одинаковый порядок. Из теоремы 2.1 следует, что элемент g^{mn}

имеет конечный порядок в H тогда и только тогда, когда g^{mn} сопряжён в G с g^{-nm} , т. е. тогда и только тогда, когда $E(g) \neq E^+(g)$. $\square$

Литература

- [1] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.
- [2] Ольшанский А. Ю. SQ -универсальность гиперболических групп // *Мат. сб.* — 1995. — Т. 186, № 8. — С. 119—133.
- [3] Bogley W. A., Pride S. J. Aspherical relative presentations // *Proc. Edinburgh Math. Soc. II ser.* — 1992. — Vol. 35, no. 1. — P. 1—39.
- [4] Gromov M. Hyperbolic groups // *Essays in Group Theory* / ed. S. M. Gersten. — Springer, 1987. — M.S.R.T. Pub. 8. — P. 75—263.
- [5] Kulikova O. V. On intersections of normal subgroups in groups // *Algebra Discrete Math.* — 2004. — No. 4. — P. 32—47.
- [6] Ol'shanskii A. Yu. On residualizing homomorphisms and G -subgroups of hyperbolic groups // *Internat. J. Algebra Comput.* — 1993. — Vol. 3, no. 4. — P. 365—409.