О трудных проблемах и локально ступенчатых группах

О. МАЦЕДОНЬСКАЯ
Силезский технологический университет,
Гливице, Польша
e-mail: olga@zeus.polsl.gliwice.pl

УДК 512.544.23+512.543.2+512.543.22+512.543.27

Ключевые слова: локально ступенчатые группы, полугрупповые тождества, проблема Бернсайда, функции роста групп, коллапсирующие группы, n-энгелевы группы.

Аннотация

Некоторые проблемы, имеющие отрицательное решение в общем случае, имеют положительное решение в классе локально ступенчатых групп и отрицательное решение вне этого класса. Мы рассмотрим три такие проблемы, а также упомянем ещё три проблемы, которые, возможно, также относятся к подобному типу.

Abstract

O. Macedońska, On difficult problems and locally graded groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 127—133.

Some problems that in general have a negative answer have an affirmative answer in the class of locally graded groups and a negative answer outside of this class. We present three such problems and mention other three, which possibly are of that type.

Пусть $\mathcal{F}$ — свободная полугруппа со свободным порождающим множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $u := u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $v := v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — слова из $\mathcal{F}$, т. е. u, v не содержат элементов, обратных к x_i. Будем говорить, что *полугрупповое тождество* $u = v$ выполнено в группе G, если при любом отображении $\varphi\colon X \to G$ имеем $u^\varphi = v^\varphi$ в G.

Локально ступенчатые группы были введены С. Н. Черниковым [5] в 1970 г.

Определение 1. Группа G называется *локально ступенчатой группой* (*LG-группой*), если каждая нетривиальная конечно порождённая подгруппа группы G имеет собственную подгруппу конечного индекса. Группы, которые не являются LG-группами, называют не-LG-группами.

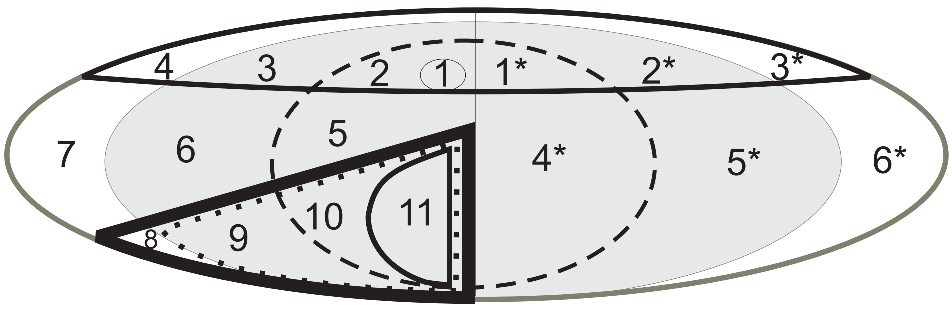
Нетрудно доказать следующие свойства LG-групп.

Следствие 1. *Класс всех LG-групп замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений. Этот класс содержит все группы, конечно порождённые подгруппы которых являются LG-группами, и все группы, которые аппроксимируются LG-группами.*

Примеры LG- и не-LG-групп.

1. Если G является расширением нильпотентной группы при помощи локально конечной группы, то G — LG-группа по следствию 1.
2. Если G имеет конечно порождённую бесконечную простую фактор-группу H/N ($N \lhd H \subseteq G$), то G — не-LG-группа. Действительно, если G имеет такую фактор-группу, то можно считать, что H — конечно порождённая группа. Тогда фактор-группа H/N, будучи простой и бесконечной, не имеет собственной нормальной подгруппы конечного индекса. Поэтому H не имеет собственной нормальной подгруппы конечного индекса. Из теоремы Пуанкаре следует, что H не имеет собственной подгруппы конечного индекса. Значит, H есть не-LG-группа. Из следствия 1 выводим, что G также не-LG-группа.

На рисунке класс локально ступенчатых групп изображён в виде внутреннего затемнённого эллипса (подробнее см. [18]). Левая половина рисунка содержит группы, не содержащие свободных неабелевых подполугрупп. Правая половина содержит группы, содержащие свободные неабелевы подполугруппы. Верхние области рисунка 1—4, 1^*—3^* содержат группы, которые не удовлетворяют никакому тождеству. Сектор, расположенный в нижнем левом углу, содержит группы, удовлетворяющие полугрупповым тождествам. Эллипс, обведённый прерывистой линией, содержит финитно аппроксимируемые группы. Область 11 содержит группы полиномиального роста. Область 1 содержит все известные группы промежуточного роста. Не-LG-группы расположены в областях 4, 7, 8, 3^*, 6^*.



Автор полагает, что класс LG-групп указывает на различие между группами, построенными стандартным способом, т. е. построенными из разрешимых и локально конечных групп, и группами, обладающими бесконечными конечно порождёнными простыми факторами. Если группа G есть не-LG-группа, то G должна содержать бесконечную конечно порождённую простую фактор-группу, так как если конечно порождённая подгруппа $H \subseteq G$ не имеет собственной подгруппы конечного индекса и N является максимальной нормальной подгруппой в H (такая подгруппа существует по лемме Цорна), то фактор-группа H/N является простой и бесконечной группой.

Некоторые проблемы, имеющие отрицательное решение в общем случае, имеют положительное решение в классе всех LG-групп и отрицательное решение в классе всех не-LG-групп.

Вначале рассмотрим проблему Бернсайда.

Проблема 1. Каждая ли группа конечной экспоненты локально конечна?

Теорема 1. *Группа G конечной экспоненты является локально конечной группой тогда и только тогда, когда G есть LG-группа.*

Доказательство. Так как локально конечные группы локально ступенчаты, то часть «только тогда» очевидна. Для доказательства части «тогда» достаточно рассмотреть конечно порождённую локально ступенчатую группу G конечной экспоненты. Тогда из положительного решения ограниченной проблемы Бернсайда (см. [25]) следует, что G содержит конечно порождённую минимальную нормальную подгруппу N конечного индекса. Если $N \neq 1$, то, будучи локально ступенчатой, N содержит собственную подгруппу H конечного индекса. Группа H содержит подгруппу, которая нормальна в G и имеет конечный индекс в G. Это противоречит минимальности N. Значит, $N = 1$, и G — конечная группа. □

Согласно результату Мальцева [3] (см. также [20]) группа, содержащая нильпотентную подгруппу конечного индекса, удовлетворяет полугрупповому тождеству. Вопрос о справедливости обратного утверждения оставался открытым более тридцати лет. В общем случае ответ отрицателен [22], однако для класса LG-групп ситуация похожа на предыдущую.

Проблема 2. Каждая ли группа, удовлетворяющая полугрупповому тождеству, есть расширение нильпотентной группы посредством локально конечной группы конечной экспоненты?

Теорема 2. *Группа G, удовлетворяющая полугрупповому тождеству, является расширением нильпотентной группы посредством локально конечной группы конечной экспоненты тогда и только тогда, когда G есть LG-группа.*

Доказательство. Часть «только тогда» следует из следствия 1. Часть «тогда» доказана в [12, следствие 1], где утверждается, что LG-группы, удовлетворяющие полугрупповому тождеству, являются расширениями нильпотентных групп посредством локально конечных групп конечной экспоненты (см. также [7, теорема 1]). □

Согласно результатам Громова [13], Милнора [19] и Вулфа [26] конечно порождённая группа имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда она есть расширение нильпотентной группы посредством конечной группы. Поэтому по теореме 2 справедливо следствие 2.

Следствие 2. *Конечно порождённая группа G, удовлетворяющая полугрупповому тождеству, имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда G есть LG-группа.*

Согласно результатам Адяна [1] бесконечные бернсайдовы группы $B(m,n)$ простой экспоненты $m \geqslant 665$ и конечного ранга $n > 1$ имеют экспоненциальный рост. Из следствия 2 выводим, что эти бернсайдовы группы есть не-LG-группы, содержащиеся в области 8 рисунка. То же самое следует из теоремы 1.

Следующая проблема касается так называемых коллапсирующих групп, введённых Шалевом в [23]. Группа G называется *n-коллапсирующей*, если для каждого n-элементного подмножества $S \subseteq G$ выполнено неравенство $|S^n| < n^n$. Группа называется *коллапсирующей*, если она n-коллапсирующая для некоторого n.

Проблема 3. Каждая ли коллапсирующая группа есть расширение нильпотентной группы посредством локально конечной группы конечной экспоненты?

Теорема 3. *Коллапсирующая группа G является расширением нильпотентной группы посредством локально конечной группы конечной экспоненты тогда и только тогда, когда G есть LG-группа.*

Доказательство. Как показано в [7], коллапсирующая LG-группа удовлетворяет полугрупповому тождеству. По теореме 2 отсюда следует, что G есть расширение нильпотентной группы посредством локально конечной группы конечной экспоненты. Часть «тогда» доказана. Справедливость части «только тогда» следует из того, что расширения нильпотентных групп посредством локально конечных групп конечной экспоненты есть LG-группы. $\square$

Группа G называется *n-энгелевой*, если она удовлетворяет коммутаторному тождеству $[\ldots[[x,y],y],\ldots,y] = 1$, где y повторяется n раз. В 1963 г. Ширшов поставил вопрос: всякая ли n-энгелева группа удовлетворяет полугрупповому тождеству [2, 2.82]. Вопрос остаётся открытым для $n > 4$ [24], однако возможные контрпримеры должны быть не-LG-группами.

Проблема 4. Всякая ли n-энгелева группа удовлетворяет полугрупповому тождеству?

Теорема 4. *Если G есть n-энгелева LG-группа, то G удовлетворяет полугрупповому тождеству.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_c$ означает многообразие нильпотентных групп ступени нильпотентности $\leqslant c$ и $\mathfrak{B}_e$ означает локально конечное многообразие экспоненты e [25]. В [15] показано, что каждая локально ступенчатая n-энгелева группа G локально нильпотентна. Тогда из [11] следует, что G содержится в многообразии $\mathfrak{N}_{c(n)}\mathfrak{B}_{e(n)} \cap \mathfrak{B}_{e(n)}\mathfrak{N}_{c(n)}$, где $c(n)$ и $e(n)$ зависят только от n. Согласно [3] многообразие $\mathfrak{N}_{c(n)}\mathfrak{B}_{e(n)}$ удовлетворяет полугрупповому тождеству. Значит, в G выполнено полугрупповое тождество. $\square$

Через $\mathfrak{A}$ обозначим многообразие всех абелевых групп, через $\mathfrak{A}_p$ — многообразие всех абелевых групп экспоненты p. Если группа G удовлетворяет полугрупповому тождеству, то многообразие $\operatorname{var}(G)$, порождённое этой группой, имеет базис, состоящий из полугрупповых тождеств [17]. Многообразие всех метабелевых групп, например, не удовлетворяет никакому полугрупповому тождеству [3], однако каждое многообразие содержит абелево подмногообразие, имеющее базис, состоящий из полугрупповых тождеств. По лемме Цорна среди многообразий, в которых не выполняются полугрупповые тождества, существуют минимальные многообразия. Единственные известные примеры таких многообразий — это $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$ для простого p [14]. Проблема, поставленная в [6, 19.2], эквивалентна следующей.

Проблема 5. Пусть $\mathrm{var}(G)$ — многообразие, в котором не выполнено ни одно полугрупповое тождество. Существует ли такое простое число p, что

$$\mathrm{var}(G) \supseteq \mathfrak{A}_p\mathfrak{A}?$$

Теорема 5. *Положительный ответ для проблемы* 5 *известен только для некоторых LG-групп. В общем случае ответ отрицателен.*

Доказательство. Положительный ответ известен для SC-групп [14], т. е. для групп, принадлежащих произведению многообразий, каждое из которых либо разрешимо, либо является кроссовым многообразием. Так как каждое кроссово многообразие порождается конечной группой [21], то кроссовы многообразия локально конечны. Таким образом, каждая SC-группа может быть получена с помощью расширений из разрешимых и локально конечных групп. Значит, SC-группы являются LG-группами.

Отрицательный ответ для этой проблемы дан в [16]. Показано, что существует такая группа G, содержащая свободную неабелеву подполугруппу (и, следовательно, не удовлетворяющая никакому полугрупповому тождеству), что $\mathrm{var}(G)$ не содержит $\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}$ ни для какого p. Группа G является конечно порождённой относительно свободной группой (подробно эта группа рассматривается в [4, глава 9]). Группа G определяет псевдоабелево многообразие, в котором все метабелевы и все конечные группы являются абелевыми группами. Однако неизвестно, является ли G не-LG-группой. $\square$

Следующая проблема была сформулирована Г. Бергманом в 1981 г. [8, 9] и в несколько иной форме содержится также в [6].

Проблема 6. Каждая ли группа G удовлетворяет всем полугрупповым тождествам, выполненным в подполугруппе S, порождающей G?

Известно, что ответ утвердителен, если G есть LG-группа, не содержащая свободных неабелевых подполугрупп (результат не опубликован). Существование контрпримера было анонсировано С. Ивановым и А. Сторожевым на алгебраической конференции в Москве в 2004 г. Построенная ими полугруппа S удовлетворяет тождеству, подобному тому, что было определено в [22]. Относительно свободная группа с тождеством, сконструированным в [22], есть не-LG-группа, однако неизвестно, является ли группа G не-LG-группой в случае, если это тождество выполнено на полугруппе S, порождающей G.

Полученные результаты представлены в таблице.

Проблема	Ответ для LG-групп	Ответ для не-LG-групп
1	$\forall G$, ДА	$\forall G$, НЕТ
2	$\forall G$, ДА	$\forall G$, НЕТ
3	$\forall G$, ДА	$\forall G$, НЕТ
4	$\forall G$, ДА	ничего не известно
5	$\exists G$, ДА	$\exists G$, НЕТ (является ли G не-LG-группой?)
6	$\exists G$, ДА	$\exists G$, НЕТ (является ли G не-LG-группой?)

Литература

[1] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. — М.: Наука, 1975.

[2] Коуровская тетрадь: нерешённые задачи теории групп. 12-е изд. — Новосибирск, 1993.

[3] Мальцев А. И. Нильпотентные полугруппы // Учёные записки Ивановск. пед. ин-та. — 1953. — Т. 4. — С. 107—111.

[4] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

[5] Черников С. Н. Бесконечные неабелевы подгруппы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // ДАН СССР. — 1970. — Т. 194. — С. 1280—1283.

[6] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Полугрупповые тождества // Изв. высш. учебн. завед. Мат. — 1985. — Т. 11. — С. 3—47.

[7] Bajorska B., Macedońska O. On positive law problems in the class of locally graded groups // Comm. Algebra. — 2004. — Vol. 32, no. 5. — P. 1841—1846.

[8] Bergman G. Hyperidentities of groups and semigroups // Aequationes Math. — 1981. — Vol. 23. — P. 55—65.

[9] Bergman G. Questions in algebra. — Preprint. — Berkeley, 1986.

[10] Boffa M. Elimination of inverses in groups // Model Theory of Groups and Automorphism Groups. — 1997. — P. 134—143. — London Math. Soc. Lecture Notes Series. Vol. 224.

[11] Burns R. G., Medvedev Yu. A note on Engel groups and local nilpotence // J. Austral. Math. Soc. — 1998. — Vol. 64. — P. 92—100.

[12] Burns R. G., Medvedev Yu. Group laws implying virtual nilpotence // J. Austral. Math. Soc. — 2003. — Vol. 74. — P. 295—312.

[13] Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps // Publs. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. — 1981. — Vol. 53. — P. 53—73.

[14] Groves J. R. J. Varieties of soluble groups and a dichotomy of P. Hall // Bull. Austral. Math. Soc. — 1971. — Vol. 5. — P. 391—410.

[15] Kim Y., Rhemtulla A. H. On locally graded groups // Groups—Korea'94. — Berlin: Walter de Gruyter, 1995. — P. 189—197.

[16] Kozhevnikov P., Macedońska O. On varieties of groups without positive laws // Comm. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 9. — P. 4331—4334.

[17] Lewin J., Lewin T. Semigroup laws in varieties of soluble groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1969. — Vol. 65. — P. 1—9.

[18] Macedońska O. Groupland // Groups St Andrews 2001 in Oxford / eds.: C. Campbell, E. Robertson, G. Smith. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003. — P. 400—404.

[19] Milnor J. Growth of finitely generated solvable groups // J. Differential Geom. — 1968. — Vol. 2. — P. 447—449.

[20] Neumann B. H., Taylor T. Subsemigroups of nilpotent groups // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1963. — Vol. 274. — P. 1—4.

[21] Oates S., Powell M. B. Identical relations in finite groups // J. Algebra. — 1964. — Vol. 1. — P. 11—39.

[22] Ol'shanskii A. Yu., Storozhev A. A group variety defined by a semigroup law // J. Austral. Math. Soc. (Ser. A). — 1996. — Vol. 60. — P. 255—259.

[23] Shalev A. Combinatorial conditions in residually finite groups. II // J. Algebra. — 1993 — Vol. 157. — P. 51—62.

[24] Traustason G. Semigroup identities in 4-Engel groups // J. Group Theory. — 1999. — Vol. 2. — P. 39—46.

[25] Vaughan-Lee M. On Zelmanov's solution of the restricted Burnside problem // J. Group Theory. — 1998. — Vol. 1. — P. 65—94.

[26] Wolf J. A. Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds // J. Differential Geom. — 1968. — Vol. 2. — P. 421—446.