

# Унитарные конформные алгебры Ли—Стейнберга

**А. В. МИХАЛЁВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*

**И. А. ПИНЧУК**

*Московский государственный областной университет  
e-mail: irenepin@yandex.ru*

УДК 512.554

**Ключевые слова:** унитарная конформная алгебра Ли, универсальное центральное расширение, ядро универсального центрального расширения, косодиэдральная гомология.

## Аннотация

В работе изучаются унитарные конформные алгебры Ли—Стейнберга, которые являются универсальными центральными расширениями унитарных конформных алгебр Ли. Ядра таких расширений описываются с помощью косодиэдральной гомологии.

## Abstract

*A. V. Mikhalev, I. A. Pinchuk, Steinberg unitary Lie conformal algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 135—155.*

In this paper, we study Steinberg unitary Lie conformal algebras, which are universal central extensions of unitary Lie conformal algebras. We describe the kernels of these extensions by means of skew-dihedral homology.

В работе изучаются унитарные конформные алгебры Ли—Стейнберга, которые являются универсальными центральными расширениями унитарных конформных алгебр Ли. Ядра таких расширений описываются с помощью косодиэдральной гомологии.

Унитарные конформные алгебры Ли—Стейнберга являются аналогом унитарных алгебр Ли—Стейнберга, введенных в [4] для унитарных алгебр Ли и являющихся обобщением алгебр Ли—Стейнберга (см. [7, 8]). Связь между унитарными алгебрами Ли—Стейнберга и косодиэдральной гомологией подробно изучена в [9]. Унитарные конформные алгебры Ли—Стейнберга, в свою очередь, являются обобщением конформных алгебр Ли—Стейнберга, структуре которых посвящена работа [1].

Напомним основные сведения из теории конформных алгебр Ли (см., например, [5, 6]).

Как известно, *конформной алгеброй Ли* называется линейное пространство  $C$  над полем  $k$  ( $\text{char } k = 0$ ), в котором задано линейное отображение  $D: C \rightarrow C$  и для всех неотрицательных целых чисел  $n$  определены билинейные произведения  $(\circ)_n$ , такие что для всех  $a, b, c \in C$  справедливы следующие условия:

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 2, с. 135—155.

© 2005 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

- 1)  $a \circledcirc b = 0$  при всех  $n \geq N(a, b)$ , где  $N(a, b)$  — некоторое целое неотрицательное число, зависящее только от  $a$  и  $b$ ;
- 2)  $D(a \circledcirc b) = Da \circledcirc b + a \circledcirc Db$ ;
- 3)  $Da \circledcirc b = -na \circledcirc b$ , причём  $Da \circledcirc b = 0$ ;
- 4)  $a \circledcirc b = \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)}(b \circledcirc a)$  (условие антикоммутативности);
- 5)  $(a \circledcirc b) \circledcirc c = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} (a \circledcirc b \circledcirc c) - b \circledcirc (a \circledcirc c)$  (тождество Якоби).

Посредством  $D^{(i)}$  обозначено отображение  $\frac{D^i}{i!}$  при  $i \geq 0$ ,  $m$  и  $n$  принадлежат  $\mathbb{Z}_+$  — множеству неотрицательных целых чисел.

Назовём коммутантом  $C \circledcirc C$  конформной алгебры Ли  $C$  идеал в  $C$ , порождённый всеми элементами вида  $a \circledcirc b$ , где  $a, b \in C$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Конформную алгебру Ли  $C$  назовём совершенной, если она совпадает со своим коммутантом, т. е.  $C = C \circledcirc C$ .

Центральным расширением конформной алгебры Ли  $C$  называется конформная алгебра  $U$  и сюръективный гомоморфизм  $\varphi: U \rightarrow C$ , ядро которого лежит в центре алгебры  $U$ .

Центральное расширение  $(U, \varphi)$  конформной алгебры Ли  $C$  называется универсальным, если для любого другого центрального расширения  $(V, \psi)$  алгебры  $C$  существует единственный гомоморфизм  $h: U \rightarrow V$ , такой что  $\psi h = \varphi$ . Это условие может быть задано с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\varphi} & C \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow h & & \downarrow \text{id} \\
 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\psi} & C \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Как отмечено в [6], для задания любого центрального расширения  $(U, \varphi)$  конформной алгебры Ли  $C$  с одномерным центром  $I$  необходимо определить 2-коцикл  $\{\alpha_n\}$  алгебры  $C$ , т. е. счётное множество отображений  $\alpha_n: C \times C \rightarrow I$ , для которых

$$\alpha_n(Da, b) = -n\alpha_{n-1}(a, b); \quad (1)$$

$$\alpha_n(a, b) = (-1)^{n+1} \alpha_n(b, a); \quad (2)$$

$$\alpha_m(a, b \circledcirc c) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \alpha_{m+n-j}(a \circledcirc b, c) + \alpha_n(b, a \circledcirc c). \quad (3)$$

Тогда  $U = C \oplus I$ , билинейные произведения  $\circledcirc$  в  $U$  определяются так: для всех  $a, b \in C \subset U$   $a \circledcirc b = a \circledcirc b + \alpha_n(a, b)$ , где  $\circledcirc$  — произведение, определённое в  $C$ ,  $I \circledcirc U = 0$  и  $DI = 0$ .

В [2] доказано, что конформная алгебра Ли  $C$  имеет универсальное центральное расширение тогда и только тогда, когда алгебра  $C$  совершенна, при

этом центральное расширение  $(U, \varphi)$  конформной алгебры Ли  $C$  является универсальным тогда и только тогда, когда  $U$  — совершенная конформная алгебра Ли и любое центральное расширение алгебры  $U$  расщепляется.

Далее мы будем использовать конформные алгебры Ли, встречающиеся в [5, 6]. Напомним их описание.

Пусть  $R$  — алгебра Ли над полем  $k$ ,  $C_R = k[D] \otimes_k R$ , элементы из  $C_R$  вида  $D^i \otimes r$ , как и в [5], будем записывать в форме  $D^i r$  ( $r \in R$ ). Для любых  $r, s \in R$ ,  $n, i \in \mathbb{Z}_+$  и  $x \in C_R$  зададим следующие соотношения:

$$r \circledast s = [r, s], \quad \text{для } n \geq 1 \quad r \circledast s = 0; \quad (4)$$

$$D^{(i)} r \circledast x = (-1)^i \binom{n}{i} r \circledast x \quad (5)$$

(причём  $r \circledast x = 0$  для  $n < 0$ );

$$r \circledast D^{(i)} s = D^{(i-n)} [r, s] \quad (6)$$

(ясно, что  $D^{(i)} = 0$  для  $i < 0$ ), где  $[\cdot, \cdot]$  — операция коммутирования в  $R$ .

Непосредственная проверка показывает, что соотношения (4)–(6) превращают  $C_R$  в конформную алгебру Ли.

Пусть теперь  $\mathfrak{g}$  — конечномерная простая комплексная алгебра Ли ранга  $l$ ,  $\Delta$  — система ненулевых корней  $\mathfrak{g}$ ,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  — множество простых корней  $\mathfrak{g}$ ,  $\{e_\alpha, h_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$  — базис Шевалле в  $\mathfrak{g}$ , элементы которого удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[h_\alpha, h_\beta] = 0; \quad (7)$$

$$[h_\alpha, e_\beta] = \beta(h_\alpha) e_\beta; \quad (8)$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha; \quad (9)$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta}, \quad (10)$$

где  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ . Коэффициенты  $N_{\alpha, \beta}$  — целые числа, определяемые с точностью до знака и зависящие только от системы корней  $\Delta$ . Если  $\alpha, \beta \in \Delta$ , но  $\alpha + \beta \notin \Delta$ , то положим  $N_{\alpha, \beta} = 0$ .

В алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  условием  $\theta(e_\alpha) = -e_{-\alpha}$  определена инволюция Шевалле  $\theta$  (см. [3]). Заметим также, что для всех  $\alpha, \beta \in \Delta$  и  $\alpha \pm \beta \neq 0$

$$N_{\alpha, \beta} = -N_{\beta, \alpha} = -N_{-\alpha, -\beta}; \quad (11)$$

$$\beta(H_\alpha) + N_{-\alpha, \beta} N_{-\alpha+\beta, \alpha} + N_{\beta, \alpha} N_{\alpha+\beta, -\alpha} = 0 \quad (12)$$

(см., например, [9]).

Рассмотрим ассоциативную и коммутативную  $k$ -алгебру  $A$  с 1 и инволюцией  $-$  ( $k$  — поле характеристики 0) и определим алгебру Ли  $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} A$  следующими формулами:

$$\lambda(x \otimes a) = x \otimes \lambda a, \quad [x \otimes a, y \otimes b] = [x, y] \otimes ab,$$

где  $x, y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ ,  $a, b \in A$ ,  $\lambda \in k$  (см., например, [7, 9]). Здесь через  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$  обозначена подалгебра Ли в алгебре  $\mathfrak{g}$ , порождённая всеми  $e_\alpha$  с целыми коэффициентами.

Обозначим  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \in k^{\times l}$ ,  $\mu_i \neq 0$ . Будем записывать  $\mu^\alpha = \mu_1^{n_1} \mu_2^{n_2} \dots \mu_l^{n_l}$ , если  $\alpha = n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + \dots + n_l \alpha_l$ . Тогда в  $\mathfrak{g}(A)$  определена подалгебра Ли  $\mathfrak{eu}(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$ , порождённая элементами вида  $e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a})$ ,  $\alpha \in \Delta$ ,  $a \in A$  (см. [9]). Из равенств (7)–(12) нетрудно получить следующие соотношения в  $\mathfrak{eu}(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$ :

$$[e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a}), e_{-\alpha}(b) - \mu^{-\alpha} e_\alpha(\bar{b})] = h_\alpha(ab - \bar{a}\bar{b}), \quad (13)$$

$$[h_\alpha(a - \bar{a}), e_\beta(b) - \mu^\beta e_{-\beta}(\bar{b})] = \beta(h_\alpha)(e_\beta(ab - \bar{a}\bar{b}) - \mu^\beta e_{-\beta}(\bar{a}\bar{b} - ab)); \quad (14)$$

$$[e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a}), e_\beta(b) - \mu^\beta e_{-\beta}(\bar{b})] = N_{\alpha, \beta}(e_{\alpha+\beta}(ab) - \mu^{\alpha+\beta} e_{-\alpha-\beta}(\bar{a}\bar{b})) + \\ + N_{-\alpha, \beta} \mu^\beta (e_{\alpha-\beta}(\bar{a}\bar{b}) - \mu^{\alpha-\beta} e_{-\alpha+\beta}(\bar{a}\bar{b})). \quad (15)$$

Обозначим через  $C_{\mathfrak{g}}(A) = k[D] \otimes_k \mathfrak{g}(A)$  конформную алгебру Ли, заданную условиями (4)–(6). Тогда алгебра  $C_{\mathfrak{g}}(A)$  порождается образующими  $D^{(i)}e_\alpha(a)$  и  $D^{(i)}h_\alpha(a)$  и соотношениями

$$D^{(i)}e_\alpha(a) \oslash D^{(j)}e_{-\alpha}(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n, \\ (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)} h_\alpha(ab), & \text{если } i+j \geq n, \end{cases} \quad (16)$$

$$D^{(i)}h_\alpha(a) \oslash D^{(j)}e_\beta(b) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n, \\ (-1)^i \binom{n}{i} \beta(h_\alpha) D^{(i+j-n)} e_\beta(ab), & \text{если } i+j \geq n, \end{cases} \quad (17)$$

$$D^{(i)}e_\alpha(a) \oslash D^{(j)}e_\beta(b) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n \text{ или } \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha, \beta} D^{(i+j-n)} e_{\alpha+\beta}(ab), & \text{если } i+j \geq n \text{ и } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta. \end{cases} \quad (18)$$

**Определение 1.** Назовём унитарной конформной алгеброй Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  подалгебру в конформной алгебре Ли  $C_{\mathfrak{g}}(A)$ , которая порождается элементами вида  $D^{(i)}(e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a}))$ .

Очевидно, что

$$C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu) = k[D] \otimes_k \mathfrak{eu}(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu). \quad (19)$$

Из условий (13)–(18) следует, что в алгебре  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  выполняются соотношения

$$D^{(i)}(e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a})) \oslash D^{(j)}(e_{-\alpha}(b) - \mu^{-\alpha} e_\alpha(\bar{b})) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n, \\ (-1)^i \binom{n}{i} D^{(i+j-n)} h_\alpha(ab - \bar{a}\bar{b}), & \text{если } i+j \geq n, \end{cases} \\ D^{(i)}h_\alpha(a - \bar{a}) \oslash D^{(j)}(e_\beta(b) - \mu^\beta e_{-\beta}(\bar{b})) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n, \\ (-1)^i \binom{n}{i} \beta(h_\alpha) D^{(i+j-n)} (e_\beta(ab - \bar{a}\bar{b}) - \mu^\beta e_{-\beta}(\bar{a}\bar{b} - ab)), & \text{если } i+j \geq n, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& D^{(i)}(e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a})) \oslash D^{(j)}(e_\beta(b) - \mu^\beta e_{-\beta}(\bar{b})) = \\
& = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n \text{ или } \alpha \pm \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)}(e_{\alpha+\beta}(ab) - \mu^{\alpha+\beta} e_{-\alpha-\beta}(\bar{a}\bar{b})) + \\ + N_{-\alpha,\beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}(e_{\alpha-\beta}(a\bar{b}) - \mu^{\alpha-\beta} e_{-\alpha+\beta}(\bar{a}b))), & \text{если } i+j \geq n, \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \in \Delta \text{ и (или) } \alpha - \beta \in \Delta. \end{cases} \quad (20)
\end{aligned}$$

Пусть теперь  $l \geq 2$ .

**Определение 2.** Назовём унитарной конформной алгеброй Ли—Стейнберга  $\text{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  для унитарной конформной алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  конформную алгебру Ли, порождённую элементами  $D^{(i)}u_\alpha(a)$  ( $\alpha \in \Delta$ ,  $a \in A$ ) и соотношениями

$$\text{отображение } a \rightarrow D^{(i)}u_\alpha(a) \text{ } k\text{-линейно,} \quad (21)$$

$$D^{(i)}u_\alpha(a) = D^{(i)}u_{-\alpha}(-\mu^\alpha \bar{a}), \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& D^{(i)}u_\alpha(a) \oslash D^{(j)}u_\beta(b) = \\
& = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < n \text{ или } \alpha \pm \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)}u_{\alpha+\beta}(ab) + \\ + N_{-\alpha,\beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}u_{\alpha-\beta}(a\bar{b})), & \text{если } i+j \geq n \text{ и } \alpha + \beta \in \Delta \\ \text{и (или) } \alpha - \beta \in \Delta. \end{cases} \quad (23)
\end{aligned}$$

Обозначим

$$D^{(i)}H_\alpha(a, b) = (-1)^i \binom{n}{j}^{-1} D^{(j)}u_\alpha(a) \oslash D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(b).$$

Дальнейшие вычисления существенно опираются на следующие формулы (см. [5]):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{r}{k} \binom{s+k}{n} = (-1)^r \binom{s}{n-r}, \quad (r \geq 0), \\
& \binom{n}{s} \binom{n-s}{i} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{s}, \quad \binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}, \\
& D^{(s)}D^{(t)} = \binom{s+t}{s} D^{(s+t)}, \quad D^{(s)}(a \oslash b) = \sum_{s_1 \geq 0} D^{(s_1)}(a) \oslash D^{(s-s_1)}(b), \\
& \binom{n}{i} (n-i) = \binom{n}{i+1} (i+1).
\end{aligned}$$

**Лемма 1.** Если  $l \geq 2$ , то

$$\begin{aligned}
& D^{(i)}H_\alpha(a, b) \oslash D^{(k)}u_\beta(c) = \\
& = \begin{cases} 0, & \text{если } i+k < m, \\ (-1)^i \binom{m}{i} \beta(h_\alpha) D^{(i+k-m)}u_\beta((ab - \bar{a}\bar{b})c), & \text{если } i+k \geq m. \end{cases}
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай, когда  $\beta \neq \pm\alpha$ . Имеем

$$\begin{aligned}
D^{(i)} H_\alpha(a, b) \overline{(m)} D^{(k)} u_\beta(c) &= \\
&= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} (D^{(j)} u_\alpha(a) \overline{(n)} D^{(i-j+n)} u_{-\alpha}(b)) \overline{(m)} D^{(k)} u_\beta(c) = \\
&= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} \times \\
&\times \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} (D^{(j)} u_\alpha(a) \overline{(n-s)} (D^{(i-j+n)} u_{-\alpha}(b) \overline{(m+s)} D^{(k)} u_\beta(c)) - \\
&- D^{(i-j+n)} u_{-\alpha}(b) \overline{(m+s)} (D^{(j)} u_\alpha(a) \overline{(n-s)} D^{(k)} u_\beta(c))) = \\
&= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \left( D^{(i)} u_\alpha(a) \overline{(n-s)} (-1)^{i-j+n} \binom{m+s}{i-j+n} \times \right. \\
&\times (N_{-\alpha, \beta} D^{(i-j+n+k-m-s)} u_{-\alpha+\beta}(bc) + N_{\alpha, \beta} \mu^\beta (D^{(i-j+n+k-m-s)} u_{-\alpha-\beta}(b\bar{c})) - \\
&- D^{(i-j+n)} u_{-\alpha}(b) \overline{(m+s)} (-1)^j \binom{n-s}{j} \times \\
&\times (N_{\alpha, \beta} D^{(i+k-n+s)} u_{\alpha+\beta}(ac) + N_{-\alpha, \beta} \mu^\beta D^{(j+k-n+s)} u_{\alpha-\beta}(a\bar{c}))) \Big) = \\
&= (-1)^{i+j+n} \binom{n}{j}^{(-1)} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \binom{n-s}{j} \binom{m+s}{i-j+n} \times \\
&\times (N_{-\alpha, \beta} N_{\alpha, -\alpha+\beta} D^{(i+k-m)} u_\beta(abc) + \\
&+ N_{-\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\alpha+\beta} \mu^{-\alpha+\beta} D^{(i+k-m)} u_{2\alpha-\beta}(a\bar{b}\bar{c}) + \\
&+ N_{\alpha, \beta} N_{\alpha, -\alpha-\beta} \mu^\beta D^{(i+k-m)} u_{-\beta}(ab\bar{c}) + \\
&+ N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, -\alpha-\beta} \mu^{-\alpha} D^{(i+k-m)} u_{2\alpha+\beta}(a\bar{b}c) - N_{\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} D^{(i+k-m)} u_\beta(abc) - \\
&- N_{\alpha, \beta} N_{\alpha, \alpha+\beta} \mu^{\alpha+\beta} D^{(i+k-m)} u_{-2\alpha-\beta}(b\bar{a}\bar{c}) - \\
&- N_{-\alpha, \beta} N_{-\alpha, \alpha-\beta} \mu^\beta D^{(i+k-m)} u_{-\beta}(ab\bar{c}) - \\
&- N_{-\alpha, \beta} N_{\alpha, \alpha-\beta} \mu^\alpha D^{(i+k-m)} u_{-2\alpha+\beta}(a\bar{b}c)) = \\
&= (-1)^i \binom{m}{i} \beta(h_\alpha) D^{(i+k-m)} u_\beta((ab - \bar{a}\bar{b})c).
\end{aligned}$$

Пусть теперь  $\alpha = \beta$ . Так как  $l \geq 2$ , то существуют такие корни  $\gamma, \delta \in \Delta$ , что  $\alpha = \gamma + \delta$ ,  $\alpha \neq \pm(\gamma - \delta)$ ,  $\alpha \neq \pm\gamma$ ,  $\alpha \neq \pm\delta$ , откуда следует, что  $N_\gamma \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$ . Учитывая, что

$$\begin{aligned}
(-1)^p \binom{r}{p} N_{\gamma, \delta} D^{(k)} u_{\gamma+\delta}(c) &= \\
&= D^{(p)} u_\gamma(c) \overline{(r)} D^{(k+r-p)} u_\delta(1) - (-1)^p \binom{r}{p} N_{-\gamma, \delta} \mu^\delta D^{(k)} u_{\gamma-\delta}(c),
\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} (-1)^p \binom{r}{p} N_{\gamma, \delta} D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) \binom{m}{p} D^{(k)} u_{\gamma+\delta}(c) = \\ = D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) \binom{m}{p} (D^{(p)} u_{\gamma}(c) \oplus D^{(k+r-p)} u_{\delta}(1)) - \end{aligned} \quad (24)$$

$$- (-1)^p \binom{r}{p} N_{-\gamma, \delta} \mu^{\delta} D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) \binom{m}{p} D^{(k)} u_{\gamma-\delta}(c). \quad (25)$$

Выполняя преобразования выражений (24) и (25), аналогичные использован-  
ным в доказательстве первой части леммы 1, записываем разность выражений  
(24) и (25) так:

$$\begin{aligned} (-1)^{i+p} \binom{m}{i} \binom{r}{p} \alpha(h_{\alpha}) N_{\gamma, \delta} D^{(i+k-m)} u_{\gamma+\delta}((ab - \bar{a}b)c) - \\ - (-1)^{i+p} \binom{m}{i} \binom{r}{p} (\delta(h_{\alpha}) - \gamma(h_{\alpha})) N_{-\gamma, \delta} \mu^{\delta} D^{(i+k-m)} u_{\gamma-\delta}((ab - \bar{a}b)c) + \\ + (-1)^{i+p} \binom{m}{i} \binom{r}{p} N_{-\gamma, \delta} \mu^{\delta} (\delta(h_{\alpha}) - \gamma(h_{\alpha})) D^{(i+k-m)} u_{\gamma-\delta}((ab - \bar{a}b)c) = \\ = (-1)^{i+p} \binom{m}{i} \binom{r}{p} \alpha(h_{\alpha}) N_{\gamma, \delta} D^{(i+k-m)} u_{\gamma+\delta}((ab - \bar{a}b)c). \end{aligned}$$

Отсюда, используя условие  $(-1)^p \binom{r}{p} N_{\gamma, \delta} \neq 0$ , получаем утверждение лем-  
мы 1, чем и завершаем её доказательство.

Обозначим через  $H$  подмодуль в конформной алгебре  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, -, \mu)$ , поро-  
ждённый всеми элементами  $D^{(i)} H_{\alpha}(a, b)$ , где  $\alpha \in \Delta$ ,  $a, b \in A$ .

Пусть  $\varphi: \mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, -, \mu) \rightarrow C_u(\mathfrak{g}, A, -, \mu)$  — сюръективный гомоморфизм,  
определённый условием  $\varphi D^{(i)} u_{\alpha}(a) = D^{(i)}(e_{\alpha}(a) - \mu^{\alpha} e_{-\alpha}(\bar{a}))$ .

**Предложение 2.** Унитарная конформная алгебра Ли—Стейнберга  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, -, \mu)$  с гомоморфизмом  $\varphi$  является центральным расширением  
унитарной конформной алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, -, \mu)$ , справедливо включение  
 $\text{Ker } \varphi \subseteq H$ .

**Доказательство.** Обозначая через  $U$  подмодуль в конформной алгебре  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, -, \mu)$ , порождённый всеми элементами  $D^{(i)} u_{\alpha}(a)$  ( $\alpha \in \Delta$ ,  $a \in A$ ),  
получаем, что  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, -, \mu) = H \oplus U$ . Кроме того, по лемме 1  $H \oplus U \subseteq U$ .  
Отсюда и из инъективности ограничения гомоморфизма  $\varphi$  на подмодуль  $U$  сле-  
дует выполнение включения  $\text{Ker } \varphi \subseteq H$ , а также центральность построенного  
расширения.

Пусть  $A_+ = \{a + \bar{a} \mid a \in A\}$  — подалгебра в алгебре  $A$ . Ясно, что  $a \in A_+$   
тогда и только тогда, когда  $a = \bar{a}$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ . Тогда

- 1)  $D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) = -D^{(i)} H_{-\alpha}(b, a) = -D^{(i)} H_{\alpha}(\bar{b}, \bar{a})$ ;
- 2)  $N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(ab, c) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(a, bc) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(b, ac)$ ;

- 3)  $D^{(i)}H_\beta(1, c) = D^{(i)}H_\beta(c, 1)$ ;  
 4)  $D^{(i)}H_\beta(1, c) = 0$  для всех  $c \in A_+$ .

**Доказательство.** Для проверки утверждения 1) запишем

$$\begin{aligned}
 D^{(i)}H_\alpha(a, b) &= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} D^{(j)}u_\alpha(a) \circledast D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(b) = \\
 &= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)}(D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(b) \circledast D^{(j)}u_\alpha(a)) = \\
 &= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} \sum_{s \geq 0} (-1)^{n+s+1} D^{(s)} \left( (-1)^{i-j+n} \binom{n+s}{i-j+n} D^{(i-s)}H_{-\alpha}(b, a) \right) = \\
 &= (-1)^{i+1} \binom{n}{j}^{(-1)} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{n+s}{i-j+n} D^{(i)}H_{-\alpha}(b, a) = -D^{(i)}H_{-\alpha}(b, a),
 \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
 D^{(i)}H_{-\alpha}(b, a) &= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} D^{(j)}u_{-\alpha}(b) \circledast D^{(i-j+n)}u_\alpha(a) = \\
 &= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} (-\mu^{-\alpha} D^{(j)}u_\alpha(\bar{b}) \circledast (-\mu^\alpha D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(\bar{a}))) = \\
 &= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} D^{(j)}u_\alpha(\bar{b}) \circledast D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(\bar{a}) = D^{(i)}H_\alpha(\bar{b}, \bar{a}).
 \end{aligned}$$

Докажем условие 2). Имеем

$$(-1)^k \binom{r}{k} N_{\alpha, \beta} D^{(i)}u_{\alpha+\beta}(ab) = D^{(k)}u_\alpha(a) \circledast D^{(j-k+r)}u_\beta(b),$$

откуда, используя определение алгебры  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, -, \mu)$  и соотношения, выполняемые в ней, получаем

$$\begin{aligned}
 (-1)^k \binom{r}{k} N_{\alpha, \beta} D^{(i)}H_{\alpha+\beta}(ab, c) &= \\
 &= (-1)^j \binom{n}{j}^{(-1)} \left( \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{r}{t} \left( (-1)^{j-k+r} \binom{n+t}{j-k+r} \times \right. \right. \\
 &\times \left( N_{\beta, -\alpha-\beta} (-1)^k \binom{r-t}{k} \left( D^{(i)}H_\alpha(a, bc) + N_{-\beta, -\alpha+\beta} \mu^{-\alpha-\beta} \left( (-1)^k \binom{r-t}{k} \times \right. \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \left( N_{\alpha, \alpha+2\beta} D^{(i)}u_{2\alpha+2\beta}(ab\bar{c}) + N_{-\alpha, \alpha+2\beta} \mu^{\alpha+2\beta} D^{(i)}u_{-2\beta}(a\bar{b}\bar{c}) \right) \right) \right) - \\
 &- (-1)^k \binom{r-t}{k} \left( N_{\alpha, -\alpha-\beta} (-1)^{j-k+r} \binom{n+t}{j-k+r} D^{(i)}H_\beta(b, ac) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ N_{-\alpha, -\alpha-\beta} \mu^{-\alpha-\beta} \left( (-1)^{j-k+r} \binom{n+t}{j-k+r} (N_{\beta, 2\alpha+\beta} D^{(i)} u_{2\alpha+2\beta}(ba\bar{c}) + \right. \\ \left. + N_{-\beta, 2\alpha+\beta} \mu^{2\alpha+\beta} D^{(i)} u_{-2\alpha}(b\bar{a}\bar{c}) \right) \Bigg) \Bigg) \Bigg) \Bigg).$$

Если  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$ , то  $2\alpha, 2\beta, 2\alpha + 2\beta \notin \Delta$ , откуда

$$N_{\alpha, \alpha+2\beta} = N_{\beta, 2\alpha+\beta} = N_{-\alpha, \alpha+2\beta} = N_{-\beta, 2\alpha+\beta} = 0.$$

Используя то, что  $(-1)^k \binom{r}{k} \neq 0$ , завершаем доказательство условия 2).

Для доказательства условий 3) и 4) подставим в равенство 2)  $a = b = 1$ :

$$N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(1, c) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(1, c) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, c), \quad (26)$$

при  $a = \bar{c}$ ,  $b = c = 1$  получим

$$N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(\bar{c}, 1) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(\bar{c}, 1) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, \bar{c}). \quad (27)$$

Перепишем равенство (27), используя условие (1):

$$-N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(1, c) = -N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(1, c) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, \bar{c}). \quad (28)$$

Складывая равенства (26) и (28), получаем

$$-N_{\alpha, -\alpha-\beta} (D^{(i)} H_{\beta}(1, c) + D^{(i)} H_{\beta}(1, \bar{c})) = 0.$$

Так как  $N_{\alpha, -\alpha-\beta} \neq 0$ , то

$$D^{(i)} H_{\beta}(1, c) + D^{(i)} H_{\beta}(1, \bar{c}) = 0.$$

Отсюда

$$D^{(i)} H_{\beta}(1, c) = -D^{(i)} H_{\beta}(1, \bar{c}) = D^{(i)} H_{\beta}(c, 1),$$

что доказывает утверждение 3). Также  $D^{(i)} H_{\beta}(1, c + \bar{c}) = 0$ , что означает выполнение условия 4). Доказательство леммы 3 завершено.

Обозначим

$$D^{(i)} t_{\alpha}(a, b) = D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) - D^{(i)} H_{\alpha}(1, ab),$$

где  $\alpha \in \Delta$ ,  $a, b \in A$ .

**Лемма 4.** Элементы  $D^{(i)} t_{\alpha}(a, b)$  удовлетворяют следующим условиям:

- 1)  $N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\alpha}(a, b) = -N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\beta}(a, b)$ ;
- 2)  $N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\alpha}(a, b) = N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\alpha}(b, a)$ .

**Доказательство.** В равенстве 2) леммы 3 положим  $a = 1$ ,  $b = a$ ,  $c = b$ , тогда

$$N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(a, b) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(1, ab) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(a, b). \quad (29)$$

При  $b = 1$ ,  $c = b$  получим

$$N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(a, b) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, ab). \quad (30)$$

Вычисляя разность (29) и (30), имеем

$$N_{\beta, -\alpha-\beta} (D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) - D^{(i)} H_{\alpha}(1, ab)) = -N_{\alpha, -\alpha-\beta} (D^{(i)} H_{\beta}(a, b) - D^{(i)} H_{\beta}(1, ab)),$$

или

$$N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\alpha}(a, b) = -N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\beta}(a, b).$$

Аналогично последовательно выполняя замены  $c = 1$  и  $a = ab$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$  в равенстве 2) леммы 3, получаем

$$N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(ab, 1) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(b, a), \quad (31)$$

$$N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(ab, 1) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(ab, 1) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, ab). \quad (32)$$

Вычисляя разность (31) и (32) и используя свойство 3) леммы 3, имеем

$$N_{\beta, -\alpha-\beta} (D^{(i)} H_{\alpha}(a, b) - D^{(i)} H_{\alpha}(1, ab)) = N_{\alpha, -\alpha-\beta} (D^{(i)} H_{\beta}(b, a) - D^{(i)} H_{\beta}(1, ab)),$$

что означает

$$N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\alpha}(a, b) = N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\beta}(b, a).$$

Доказательство леммы 4 завершено.

**Лемма 5.** Для всех  $\alpha \in \Delta$  и  $a, b \in A$  справедливы следующие равенства:

- 1)  $D^{(i)} t_{\beta}(a, b) + D^{(i)} t_{\beta}(b, a) = 0$ ;
- 2)  $D^{(i)} t_{\beta}(a, b) - D^{(i)} t_{\beta}(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ ;
- 3)  $D^{(i)} t_{\beta}(ab, c) + D^{(i)} t_{\beta}(bc, a) + D^{(i)} t_{\beta}(ac, b) = 0$ ;
- 4)  $D^{(i)} t_{\beta}(a, 1) = D^{(i)} t_{\beta}(1, a) = 0$ .

**Доказательство.** Вычитая из равенства 2) леммы 4 почленно равенство 1) той же леммы, получаем

$$N_{\alpha, -\alpha-\beta} (D^{(i)} t_{\beta}(a, b) + D^{(i)} t_{\beta}(b, a)) = 0. \quad (33)$$

Так как  $l \geq 2$ , то для любого  $\alpha \in \Delta$  существует корень  $\beta \in \Delta$ , такой что  $\alpha + \beta \in \Delta$ , что означает  $N_{\alpha, -\alpha-\beta} \neq 0$ . После сокращения равенства (33) на  $N_{\alpha, -\alpha-\beta}$  получаем условие 1).

Чтобы доказать условие 2), запишем

$$\begin{aligned} D^{(i)} t_{\beta}(\bar{a}, \bar{b}) &= D^{(i)} H_{\beta}(\bar{a}, \bar{b}) - D^{(i)} H_{\beta}(1, \bar{a}\bar{b}) = -D^{(i)} H_{\beta}(b, a) + D^{(i)} H_{\beta}(ab, 1) = \\ &= -(D^{(i)} H_{\beta}(b, a) - D^{(i)} H_{\beta}(1, ab)) = -D^{(i)} t_{\beta}(b, a) = D^{(i)} t_{\beta}(a, b). \end{aligned}$$

Для доказательства условия 3) подставим в равенство (30)  $a = ab$ ,  $b = c$ :

$$N_{\alpha, \beta} D^{(i)} H_{\alpha+\beta}(ab, c) = N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(ab, c) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, abc). \quad (34)$$

Сопоставляя равенство (34) и условие 2) леммы 3, получаем

$$\begin{aligned} &N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(ab, c) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, abc) = \\ &= N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\alpha}(a, bc) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(b, ac), \\ &N_{\beta, -\alpha-\beta} (D^{(i)} t_{\alpha}(ab, c) + D^{(i)} H_{\alpha}(1, abc)) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(1, abc) = \\ &= N_{\beta, -\alpha-\beta} (D^{(i)} t_{\alpha}(a, bc) + D^{(i)} H_{\alpha}(1, abc)) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} H_{\beta}(b, ac), \\ &N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\alpha}(ab, c) + N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\beta}(b, ac) - N_{\beta, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\alpha}(a, bc) = 0. \quad (35) \end{aligned}$$

Применяем к равенству (35) условия 1) леммы 4 и 1) леммы 5:

$$-N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\beta}(ab, c) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\beta}(ac, b) - N_{\alpha, -\alpha-\beta} D^{(i)} t_{\beta}(bc, a) = 0.$$

Так как  $N_{\alpha, -\alpha-\beta} \neq 0$ , получаем условие 3).

Для доказательства утверждения 4) запишем, что

$$D^{(i)} t_{\beta}(1, a) = D^{(i)} H_{\beta}(1, a) - D^{(i)} H_{\beta}(1, a) = 0.$$

Учитывая условие 1), получаем утверждение 4), что завершает доказательство леммы 5.

**Предложение 6.** Любой элемент  $\omega \in \text{Ker } \varphi$  может быть записан в виде

$$\omega = \sum_i D^{(0)} t_{\alpha_1}(a_i, b_i),$$

где  $\alpha_1$  — некоторый простой корень относительно выбранного упорядочения системы корней  $\Delta$ ,  $a_i, b_i \in A$ .

**Доказательство.** Любой корень  $\lambda \in \Delta$  является линейной комбинацией простых корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , следовательно,  $D^{(i)} H_{\lambda}(a, b)$  является линейной комбинацией элементов  $D^{(i)} H_{\alpha_j}(a_j, b_j)$ , где  $\alpha_j$  — простые корни системы корней  $\Delta$ ,  $a_j, b_j \in A$  (это следует из леммы 3).

Запишем  $D^{(i)} H_{\alpha_j}(a, b)$  в виде

$$D^{(i)} H_{\alpha_j}(a, b) = D^{(i)} t_{\alpha_j}(a, b) + D^{(i)} H_{\alpha_j}(1, ab).$$

Из леммы 4 следует, что элементы  $D^{(i)} t_{\alpha_j}(a, b)$  и  $D^{(i)} t_{\alpha_k}(a, b)$  линейно зависимы только тогда, когда  $\alpha_j + \alpha_k$  — корень, поэтому любой элемент  $\omega \in H$  может быть записан так:

$$\omega = \sum_j D^{(i)} t_{\alpha_1}(a_j, b_j) + \sum_{k=1}^l D^{(i)} H_{\alpha_k}(1, c_k),$$

где  $l$  — ранг системы корней  $\Delta$ . Если  $\omega \in \text{Ker } \varphi$ , то  $\varphi(\omega) = 0$  и  $D\omega = 0$  (см. [6]). Имеем

$$\varphi(\omega) = \varphi\left(\sum_j D^{(i)} t_{\alpha_1}(a_j, b_j) + \sum_{k=1}^l D^{(i)} H_{\alpha_k}(1, c_k)\right) = \sum_{k=1}^l D^{(i)} h_{\alpha_k}(c_k) = 0,$$

следовательно,  $c_1 = c_2 = \dots = c_l = 0$ , т. е.

$$\omega = \sum_j D^{(i)} t_{\alpha_1}(a_j, b_j).$$

Так как  $D\omega = 0$ , то  $D^{(i)} t_{\alpha_1}(a, b) = 0$  для всех  $i \geq 1$ , откуда  $i = 0$ , что доказывает предложение 6.

Для описания ядра центрального расширения  $(\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \cdot, \mu), \varphi)$  напомним определение косоидэдральной гомологии  $k$ -алгебры  $A$ .

Рассмотрим тензорное произведение алгебры  $A$

$$A^{\otimes(n+1)} = \underbrace{A \otimes_k A \otimes_k \dots \otimes_k A}_{n+1},$$

где  $A^{\otimes 0} = k$ , и граничный оператор  $d_n: A^{\otimes(n+1)} \rightarrow A^{\otimes n}$ , заданный условием

$$\begin{aligned} d_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

где  $a_i \in A$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Так как  $d^2 = 0$  ( $d_0 = 0$ ), то комплекс  $(A^{\otimes(n+1)}, d)$  определяет гомологию Хохшильда  $H_*(A)$  ассоциативной алгебры  $A$ .

Пусть также в алгебре  $A^{\otimes(n+1)}$  определено действие диэдральной группы

$$D_{n+1} = \langle t_{n+1}, s_{n+1} \mid t_{n+1}^{n+1} = s_{n+1}^2 = 1, s_{n+1} t_{n+1} s_{n+1}^{-1} = t_{n+1}^{-1} \rangle$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{n+1}(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= (-1)^n a_n \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1}, \\ s_{n+1}(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{a}_0 \otimes \bar{a}_n \otimes \bar{a}_{n-1} \otimes \dots \otimes \bar{a}_1, \end{aligned}$$

где  $a_i \in A$ ,  $0 \leq i \leq n$ .

Введём обозначение

$$-1D_n(A) = \frac{A^{\otimes(n+1)}}{\text{Im}(t_{n+1} - 1) + \text{Im}(s_{n+1} + 1)}.$$

Так как  $t_n d_n = d_n t_{n+1}$  и  $s_n d_n = d_n s_{n+1}$ , то оператор  $d_n$  индуцирует отображение

$$d_n: -1D_n(A) \rightarrow -1D_{n-1}(A),$$

для которого  $d^2 = 0$ .

Косодиэдральной гомологией  $-1HD_*(A)$  алгебры  $A$  называется гомология комплекса  $(-1D_*(A), d)$ .

Следуя [9], опишем первую группу косодиэдральной гомологии алгебры  $A$  в следующем виде. Пусть  $\langle A, A \rangle_d = A \otimes_k A / I_d$ , где  $I_d$  — подпространство тензорного произведения  $A \otimes_k A$ , порождённое элементами вида  $a \otimes b + b \otimes a$ ,  $a \otimes b - \bar{a} \otimes \bar{b}$ ,  $ab \otimes c + bc \otimes a + ca \otimes b$  для  $a, b, c \in A$ , и пусть  $\langle a, b \rangle_d = a \otimes b + I_d$ . Тогда

$$-1HD_{-1}(A) = \left\{ \sum_i \langle a_i, b_i \rangle_d \mid \sum_i \overline{a_i b_i - b_i a_i} = \sum_i (a_i b_i - b_i a_i) \right\}.$$

Если алгебра  $A$  коммутативна, то

$$-1HD_1(A) = \langle A, A \rangle_d.$$

**Теорема 7.**  $\text{Ker } \varphi \cong -1HD_1(A)$ .

**Доказательство.** Определим отображение  $\eta: {}_{-1}HD_1(A) \rightarrow \text{Ker } \varphi$  условием

$$\eta(a \otimes b) = D^{(0)}t_{\alpha_1}(a, b).$$

Очевидно, что  $\eta$  определено корректно (в силу свойств элементов  $D^{(0)}t_{\alpha_1}(a, b)$ ), причём  $\eta$  — сюръекция.

Для доказательства инъективности отображения  $\eta$  определим 2-коцикл  $\{f_n\}$  на  $C_u(\mathfrak{g}, A, \cdot, \mu)$ .

**Лемма 8.** Счётное множество отображений

$$f_n: C_{\mathfrak{g}}(A) \times C_{\mathfrak{g}}(A) \rightarrow {}_{-1}HD_1(A),$$

задаваемых условиями

$$\begin{aligned} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) &= (x, y)a \otimes b, \\ f_n(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)) &= \begin{cases} (-1)^i \binom{n}{i} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)), & \text{если } n = i + j, \\ 0, & \text{если } n \neq i + j, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $(x, y)$  — форма Киллинга алгебры Ли  $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , является 2-коциклом.

**Доказательство.** Проверим, что отображения  $f_n$  удовлетворяют условиям (1)–(3).

Во-первых,

$$\begin{aligned} f_n(DD^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)) &= \frac{1}{i!} f_n(D^{(i+1)}x(a), D^{(j)}y(b)) = \\ &= (i+1)f_n(D^{(i+1)}x(a), D^{(j)}y(b)) = \\ &= (i+1)(-1)^{i+1} \binom{n}{i+1} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) = \\ &= -n(-1)^i \binom{n-1}{i} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) = -nf_{n-1}(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} f_n(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b)) &= (-1)^i \binom{n}{i} f_0(D^{(0)}x(a), D^{(0)}y(b)) = \\ &= (-1)^i \binom{n}{i} (x, y)adb = (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (y, x)bda = \\ &= (-1)^{i+1} \binom{n}{i} f_0(D^{(0)}y(b), D^{(0)}x(a)) = \\ &= (-1)^{i+j+1} (-1)^j \binom{n}{n-i} f_0(D^{(0)}y(b), D^{(0)}x(a)) = \\ &= (-1)^{n+1} (-1)^j \binom{n}{j} f_0(D^{(0)}y(b), D^{(0)}x(a)) = (-1)^{n+1} f_n(D^{(j)}y(b), D^{(i)}x(a)). \end{aligned}$$

Наконец,

$$f_m(D^{(i)}x(a), D^{(j)}y(b) \oplus D^{(k)}z(c)) =$$

$$\begin{aligned}
&= f_m \left( D^{(i)} x(a), (-1)^j \binom{n}{j} D^{(j+k-n)} [y(b), z(c)] \right) = \\
&= (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{n}{j} f_0(D^{(0)} x(a), D^{(0)} [y(b), z(c)]). \tag{36}
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
&f_n(D^{(j)} y(b), D^{(i)} x(a) \circledast D^{(k)} z(c)) = \\
&= f_n \left( D^{(j)} y(b), (-1)^i \binom{m}{i} D^{(i+k-m)} [x(a), z(c)] \right) = \\
&= (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{n}{j} f_0(D^{(0)} y(b), D^{(0)} [x(a), z(c)]), \tag{37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^m \binom{m}{r} f_{m+n-r}(D^{(i)} x(a) \circledast D^{(j)} y(b), D^{(k)} z(c)) = \\
&= \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} f_{m+n-r} \left( (-1)^i \binom{r}{i} D^{(i+j-r)} [x(a), y(b)], D^{(k)} z(c) \right) = \\
&= \sum_{r=0}^m (-1)^{j-r} \binom{r}{i} \binom{m}{r} \binom{m+n-r}{i+j-r} f_0(D^{(0)} [x(a), y(b)], D^{(0)} z(c)). \tag{38}
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^m (-1)^{j-r} \binom{r}{i} \binom{m}{r} \binom{m+n-r}{i+j-r} = \\
&= (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \sum_{r=0}^m (-1)^{r-i} \binom{m-i}{r-i} \binom{m+n-r}{i+j-r} = (-1)^{i+j} \binom{m}{i} \binom{n}{j},
\end{aligned}$$

то выражение (36) равно сумме выражений (37) и (38), так как отображение  $f_0$  является 2-коциклом на алгебре Ли  $\mathfrak{g}(A)$ , и лемма 8 доказана.

Рассмотрим ограничение коцикла  $\{f_n\}$  на подалгебру  $C_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu)$  и получим 2-коцикл на  $C_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu)$ .

Построим центральное расширение  $\tilde{C}_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu)$  унитарной конформной алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu)$  с центром  ${}_{-1}HD_1(A)$ :

$$\tilde{C}_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu) = \tilde{C}_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu) \otimes {}_{-1}HD_1(A),$$

операции  $\circledast$  в алгебре  $\tilde{C}_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu)$  задаются следующими условиями:

$$(x_1, \tau_1) \circledast (x_2, \tau_2) = x_1 \circledast x_2 + f_n(x_1, x_2),$$

где  $x_1, x_2 \in C_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu)$ ,  $\tau_1, \tau_2 \in {}_{-1}HD_1(A)$ ,  $\{f_n\}$  — 2-коцикл, определённый ранее,  $\circledast$  — билинейные произведения, определённые в алгебре  $C_u(\mathfrak{g}, A, ^-, \mu)$ .

Если  $\alpha \pm \beta \neq 0$  и  $i + j = n$ , то

$$\begin{aligned}
&f_n(D^{(i)}(e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a})), D^{(j)}(e_\beta(b) - \mu^\beta e_{-\beta}(\bar{b}))) = \\
&= f_n(D^{(i)} e_\alpha(a), D^{(j)} e_\beta(b)) - \mu^\beta f_n(D^{(i)} e_\alpha(a), D^{(j)} e_{-\beta}(\bar{b})) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu^\alpha f_n(D^{(i)}e_{-\alpha}(\bar{a}), D^{(j)}e_\beta(b)) + \mu^{\alpha+\beta} f_n(D^{(i)}e_{-\alpha}(\bar{a}), D^{(j)}e_{-\beta}(\bar{b})) = \\
& = (-1)^i \binom{n}{i} (e_\alpha, e_\beta) a \otimes b - (-1)^i \binom{n}{i} \mu^\beta (e_\alpha, e_{-\beta}) a \otimes \bar{b} - \\
& - (-1)^i \binom{n}{i} \mu^\alpha (e_{-\alpha}, e_\beta) \bar{a} \otimes b + (-1)^i \binom{n}{i} \mu^{\alpha+\beta} (e_{-\alpha}, e_{-\beta}) \bar{a} \otimes \bar{b} = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, элементы  $(D^{(i)}(e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a})), 0)$  удовлетворяют соотношениям (21)–(23), поэтому существует гомоморфизм

$$\rho: \mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu) \rightarrow \tilde{C}_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu),$$

такой что

$$\rho D^{(i)}u_\alpha(a) = (D^{(i)}(e_\alpha(a) - \mu^\alpha e_{-\alpha}(\bar{a})), 0).$$

При этом

$$\begin{aligned}
& f_0(D^{(0)}(e_{\alpha_1}(a) - \mu_1 e_{-\alpha_1}(\bar{a})), D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(b) - \mu_1^{-1} e_{\alpha_1}(\bar{b}))) = \\
& = f_0(D^{(0)}(e_{\alpha_1}(a), D^{(0)}e_{-\alpha_1}(b)) - \mu_1 f_0(D^{(0)}e_{-\alpha_1}(\bar{a}), D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(b)) - \\
& - \mu_1^{-1} f_0(D^{(0)}e_{\alpha_1}(a), D^{(0)}e_{\alpha_1}(\bar{b})) + f_0(D^{(0)}e_{-\alpha_1}(\bar{a}), D^{(0)}e_{\alpha_1}(\bar{b})) = \\
& = (e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) a \otimes b - \mu_1 (e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) \bar{a} \otimes b - \mu_1^{-1} (e_{\alpha_1}, e_{\alpha_1}) a \otimes \bar{b} + \\
& + (e_{-\alpha_1}, e_{\alpha_1}) \bar{a} \otimes \bar{b} = 2(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) a \otimes b.
\end{aligned}$$

Тогда для любого  $a \otimes b \in {}_{-1}HD_1(A)$

$$\begin{aligned}
\rho\eta(a \otimes b) & = \rho(\eta(a \otimes b)) = \rho(D^{(0)}t_{\alpha_1}(a, b)) = \\
& = \rho(D^{(0)}H_{\alpha_1}(a, b) - D^{(0)}H_{\alpha_1}(1, ab)) = \rho(D^{(0)}H_{\alpha_1}(a, b)) - \rho(D^{(0)}H_{\alpha_1}(1, ab)) = \\
& = \rho(D^{(0)}u_{\alpha_1}(a) \oplus D^{(0)}u_{-\alpha_1}(b)) - \rho(D^{(0)}u_{\alpha_1}(1) \oplus D^{(0)}u_{-\alpha_1}(ab)) = \\
& = (D^{(0)}(e_{\alpha_1}(a) - \mu_1 e_{-\alpha_1}(\bar{a})), 0) \oplus (D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(b) - \mu_1^{-1} e_{\alpha_1}(\bar{b})), 0) - \\
& - (D^{(0)}(e_{\alpha_1}(1) - \mu_1 e_{-\alpha_1}(1)), 0) \oplus (D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(ab) - \mu_1^{-1} e_{\alpha_1}(\bar{ab})), 0) = \\
& = D^{(0)}(e_{\alpha_1}(a) - \mu_1 e_{-\alpha_1}(\bar{a})) \oplus D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(b) - \mu_1^{-1} e_{\alpha_1}(\bar{b})) + \\
& + f_0(D^{(0)}(e_{\alpha_1}(a) - \mu_1 e_{-\alpha_1}(\bar{a})), D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(b) - \mu_1^{-1} e_{\alpha_1}(\bar{b}))) - \\
& - D^{(0)}(e_{\alpha_1}(1) - \mu_1 e_{-\alpha_1}(1)) \oplus D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(ab) - \mu_1^{-1} e_{\alpha_1}(\bar{ab})) - \\
& - f_0(D^{(0)}(e_{\alpha_1}(1) - \mu_1 e_{-\alpha_1}(1)), D^{(0)}(e_{-\alpha_1}(ab) - \mu_1^{-1} e_{\alpha_1}(\bar{ab}))) = \\
& = D^{(0)}h_{\alpha_1}(ab - \bar{ab}) + 2(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) a \otimes b - \\
& - D^{(0)}h_{\alpha_1}(ab - \bar{ab}) - 2(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) 1 \otimes ab = 2(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) a \otimes b \neq 0,
\end{aligned}$$

так как  $(e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}) \neq 0$ . Отсюда следует, что отображение  $\eta$  инъективно, что завершает доказательство теоремы 7.

Выясним, при каких условиях унитарные конформные алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  и  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  являются совершенными.

**Предложение 9.** Если алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  не является алгеброй типа  $C_l$ ,  $l \geq 1$ , то унитарные конформные алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  и  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  являются совершенными.

**Доказательство.** Как видно из (20) и (23), для того чтобы конформные алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  и  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  были совершенными, необходимо, чтобы для любого корня  $\gamma \in \Delta$  существовали корни  $\alpha, \beta \in \Delta$ , такие что  $\gamma = \alpha + \beta$  (тогда  $N_{\alpha, \beta} \neq 0$ ), но  $\alpha - \beta \notin \Delta$  (т. е.  $N_{-\alpha, \beta} = 0$ ). В [9] показано, что во всех перечисленных в условии предложения 9 случаях это требование выполняется, откуда и следует утверждение предложения 9.

Если алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  является простой алгеброй типа  $C_l$ , то унитарные конформные алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  и  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  окажутся совершенными лишь в том случае, когда алгебра  $A$  удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Введём обозначение  $A_- = \{a \mid a \in A, \bar{a} = -a\}$ , и пусть существует элемент  $e \in A$ , такой что

$$e \in A_-, \text{ т. е. } \bar{e} = -e, \quad (39)$$

$$e \in Z(A) \text{ (} e \text{ является центральным элементом алгебры } A), \quad (40)$$

$$e \text{ является обратимым элементом.} \quad (41)$$

**Предложение 10.** Если алгебра  $A$  удовлетворяет условиям (39)–(41), то унитарные конформные алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  и  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  при  $\mathfrak{g} = C_l$ ,  $l \geq 2$ , являются совершенными.

**Доказательство.** Из равенства (19) следует, что унитарная конформная алгебра Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  является совершенной тогда и только тогда, когда совершенной является унитарная алгебра Ли  $\mathfrak{eu}(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$ . В [9] показано, что если алгебра  $A$  удовлетворяет условиям, перечисленным в предложении 10, то унитарная алгебра Ли  $\mathfrak{eu}(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  при  $\mathfrak{g} = C_l$  является совершенной, что означает совершенность конформной алгебры  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$ . Аналогичные рассуждения справедливы и для унитарной конформной алгебры Ли–Стейнберга, что завершает доказательство предложения 10.

**Теорема 11.** Если алгебра  $A$  удовлетворяет условиям (39)–(41), то центральное расширение  $(\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu), \varphi)$  унитарной конформной алгебры Ли  $C_u(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  является её универсальным центральным расширением.

**Доказательство.** Для доказательства универсальности центрального расширения  $(\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu), \varphi)$  достаточно доказать, что алгебра  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  является центрально замкнутой, т. е. любая короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow I \rightarrow V \xrightarrow{\pi} \mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu) \rightarrow 0 \quad (42)$$

расщепляется. При доказательстве теоремы 11 мы следуем плану, предложенному в [9].

Для любого элемента  $D^{(i)}u_\alpha(a)$  из унитарной конформной алгебры Ли—Стейнберга  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, -, \mu)$  выберем его прообраз при гомоморфизме  $\pi$ . Для этого зафиксируем  $\{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  — базис алгебры  $A$ , содержащий 1 ( $\Lambda$  — множество индексов), и выберем прообраз  $D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)$  элемента  $D^{(i)}u_\alpha(a)$  для любого  $a \in \{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  и любого положительного корня  $\alpha$  из  $\Delta^+$  — системы положительных корней алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Далее по линейности расширим наш выбор на все элементы  $D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)$  для всех  $a \in A$  и  $\alpha \in \Delta^+$ . Пусть также

$$D^{(i)}\tilde{H}_\alpha(a, b) = (-1)^j \binom{n}{j}^{-1} D^{(j)}\tilde{u}_\alpha(a) \circledcirc D^{(i-j+n)}\tilde{u}_{-\alpha}(b).$$

Используя лемму 1, нормируем выбор элемента  $D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)$ . Имеем

$$\begin{aligned} D^{(i)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \circledcirc D^{(k)}\tilde{u}_\alpha(e^{-1}a) &= \\ &= (-1)^i \binom{m}{i} \alpha(h_\alpha) D^{(i+k-m)}\tilde{u}_\alpha((e - \bar{e})e^{-1}a) + \omega_\alpha(a) = \\ &= (-1)^i 4 \binom{m}{i} D^{(i+k-m)}\tilde{u}_\alpha(a) + \omega_\alpha(a), \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\omega_\alpha(a) \in I$ ,  $e$  — фиксированный элемент алгебры  $A$ , удовлетворяющий условиям (39)—(41).

Заменим элемент  $D^{(k)}\tilde{u}_\alpha(a)$  на элемент  $D^{(k)}\tilde{u}_\alpha(a) + \frac{1}{4}\omega_\alpha(a)$ , тогда равенство (43) переписывается в виде

$$D^{(i)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \circledcirc D^{(k)}\tilde{u}_\alpha(e^{-1}a) = (-1)^i 4 \binom{m}{i} D^{(i+k-m)}\tilde{u}_\alpha(a). \quad (44)$$

По равенству (22) получаем также элементы  $D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)$  для всех отрицательных корней  $\alpha$ .

Далее покажем, что  $D^{(i)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \circledcirc D^{(k)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \in I$ . Для этого вычислим  $D^{(i)}H_\alpha(1, e) \circledcirc D^{(k)}H_\alpha(1, e)$ :

$$\begin{aligned} D^{(i)}H_\alpha(1, e) \circledcirc D^{(k)}H_\alpha(1, e) &= \\ &= (-1)^j \binom{n}{j}^{-1} (D^{(i)}u_\alpha(1) \circledcirc D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(e)) \circledcirc D^{(k)}H_\alpha(1, e) = \\ &= (-1)^j \binom{n}{j}^{-1} \left( \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \times \right. \\ &\quad \times (D^{(j)}u_\alpha(1) \circledcirc D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(e) \circledcirc D^{(k)}H_\alpha(1, e)) - \\ &\quad \left. - D^{(i-j+n)}u_{-\alpha}(e) \circledcirc (D^{(j)}u_\alpha(1) \circledcirc D^{(k)}H_\alpha(1, e)) \right) = \\ &= (-1)^j \binom{n}{j}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \times \\ &\quad \times \left( D^{(j)}u_\alpha(1) \circledcirc 2(-1)^{i-j+n} \binom{m+s}{i-j+n} \left( D^{(i+k-j-n-m-s)}u_{-\alpha}(2e^2) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - D^{(i-j+n)} u_{-\alpha}(e) \overline{(m+s)} 2(-1)^{j+1} \binom{n-s}{j} (D^{(k+j-n+s)} u_{\alpha}(2e)) \Big) = \\
& = 2 \binom{n}{j}^{-1} \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{n}{s} \left( (-1)^{i+j-n} \binom{m+s}{i-j+n} \binom{n-s}{j} D^{(i+k-m)} H_{\alpha}(1, 2e^2) + \right. \\
& \left. + 4 \binom{n+s}{j} \mu^{-\alpha} D^{(i-j+n)} u_{\alpha}(e) \overline{(m+s)} D^{(k+j-n+s)} u_{\alpha}(e) \right) = 0,
\end{aligned}$$

так как  $\overline{2e^2} = 2e^2$ , откуда  $2e^2 \in R_+$  и  $D_{(i+k-m)} H_{\alpha}(1, 2e^2) = 0$  по свойству 4) леммы 3.

Умножим обе части равенства (44) на  $D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e)$ :

$$\begin{aligned}
& D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e) \overline{(r)} (D^{(i)} \tilde{H}_{\alpha}(1, e) \overline{(m)} D^{(k)} \tilde{u}_{\alpha}(e^{-1}a)) = \\
& = (-1)^i 4 \binom{m}{i} D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e) \overline{(r)} D^{(i+k-m)} \tilde{u}_{\alpha}(a), \tag{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e) \overline{(r)} (D^{(i)} \tilde{H}_{\alpha}(1, e) \overline{(m)} D^{(k)} \tilde{u}_{\alpha}(e^{-1}a)) = \\
& = \sum_{s \geq 0} (-1)^{r+s+1} D^s ((D^{(i)} \tilde{H}_{\alpha}(1, e) \overline{(m)} D^{(k)} \tilde{u}_{\alpha}(e^{-1}a)) \overline{(r+s)} D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e)) = \\
& = \sum_{s \geq 0} (-1)^{r+s+1} D^s \left( \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{m}{t} \times \right. \\
& \times (D^{(i)} \tilde{H}_{\alpha}(1, e) \overline{(m-t)} (D^{(k)} \tilde{u}_{\alpha}(e^{-1}a) \overline{(r+s+t)} D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e)) - \\
& \left. - D^{(k)} \tilde{u}_{\alpha}(e^{-1}a) \overline{(r+s+t)} (D^{(i)} \tilde{H}_{\alpha}(1, e) \overline{(m-t)} D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e))) \right) = \\
& = \sum_{s \geq 0} (-1)^{r+s+1} D^s \left( \sum_{t \geq 0} (-1)^t \binom{m}{t} (-1)^{k+1} 2\alpha(h_{\beta}) \binom{r+s+t}{k} \times \right. \\
& \times D^{(i)} \tilde{H}_{\alpha}(1, e) \overline{(m-t)} D^{(j+k-r-s-t)} \tilde{u}_{\alpha}(a) \Big) = \\
& = (-1)^{i+j} 8\alpha(h_{\beta}) \binom{m}{i} \binom{r}{j} D^{(i+j+k-r-m)} \tilde{u}_{\alpha}(ea), \tag{46}
\end{aligned}$$

так как  $D^{(i)} \tilde{H}_{\alpha}(1, e) \overline{(m-t)} D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e) \in I$ .

Из равенств (45) и (46) имеем

$$\begin{aligned}
& (-1)^i 4 \binom{m}{i} D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e) \overline{(r)} D^{(i+k-m)} \tilde{u}_{\alpha}(a) = \\
& = (-1)^{i+j} 8\alpha(h_{\beta}) \binom{m}{i} \binom{r}{j} D^{(i+j+k-r-m)} \tilde{u}_{\alpha}(ea),
\end{aligned}$$

откуда получаем

$$D^{(j)} \tilde{H}_{\beta}(1, e) \overline{(r)} D^{(i+k-m)} \tilde{u}_{\alpha}(a) = (-1)^j 2\alpha(h_{\beta}) \binom{r}{j} D^{(i+j+k-r-m)} \tilde{u}_{\alpha}(ea).$$

Если  $\alpha \pm \beta \neq 0$  и  $\alpha, \beta \in \Delta$ , то

$$\begin{aligned} D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) &= \\ &= (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(ab) + N_{-\alpha,\beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(a\bar{b})) + \omega, \end{aligned}$$

где  $\omega \in I$ . Преобразуем выражение

$$(D^{(0)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \oslash D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b)$$

двумя способами. С одной стороны,

$$\begin{aligned} (D^{(0)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \oslash D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) &= \\ &= \alpha(h_\alpha) D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(2ea) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) = 4D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(ea) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b). \end{aligned} \quad (47)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (D^{(0)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \oslash D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) &= \\ &= (D^{(0)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \oslash (D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b))) - \\ &- D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \oslash (D^{(0)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b)) = \\ &= D^{(0)}\tilde{H}_\alpha(1, e) \oslash \left( (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(ab) + \right. \\ &+ N_{-\alpha,\beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(a\bar{b})) + \omega \Big) - D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \oslash 2\beta(h_\alpha) D^{(j)}\tilde{u}_\beta(eb) = \\ &= (-1)^i \binom{n}{i} N_{\alpha,\beta} 2(\alpha + \beta)(h_\alpha) D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(eab) + \\ &+ (-1)^i \binom{n}{i} N_{-\alpha,\beta} \mu^\beta 2(\alpha - \beta)(h_\alpha) D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(ea\bar{b}) - \\ &- 2\beta(h_\alpha) D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(eb). \end{aligned} \quad (48)$$

Приравняем выражения (47) и (48) и переписываем полученное равенство в виде

$$\begin{aligned} &4 \left( D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(ea) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) - \right. \\ &- (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(eab) + N_{-\alpha,\beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(ea\bar{b})) \Big) + \\ &+ 2\beta(h_\alpha) \left( D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \oslash D^{(j)}\tilde{u}_\beta(eb) - \right. \\ &- (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha,\beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(aeb) + N_{-\alpha,\beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(a\bar{e}b)) \Big) = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Аналогично вычисляя  $(D^{(0)}\tilde{H}_\beta(1, e) \circledast D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)) \circledast D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b)$  двумя способами, получаем

$$\begin{aligned} & 2\alpha(h_\beta) \left( D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(ea) \circledast D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) - \right. \\ & \quad \left. - (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha, \beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(eab) + N_{-\alpha, \beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(ea\bar{b})) \right) + \\ & \quad + 4 \left( D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \circledast D^{(j)}\tilde{u}_\beta(eb) - \right. \\ & \quad \left. - (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha, \beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(aeb) + N_{-\alpha, \beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(a\bar{e}\bar{b})) \right) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Равенства (49) и (50) образуют систему линейных уравнений относительно элементов

$$\begin{aligned} & D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(ea) \circledast D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) - \\ & \quad - (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha, \beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(eab) + N_{-\alpha, \beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(ea\bar{b})) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a) \circledast D^{(j)}\tilde{u}_\beta(eb) - \\ & \quad - (-1)^i \binom{n}{i} (N_{\alpha, \beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(aeb) + N_{-\alpha, \beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(a\bar{e}\bar{b})). \end{aligned}$$

Определитель этой системы  $4(4 - \beta(h_\alpha)\alpha(h_\beta))$  отличен от нуля, так как  $\alpha \pm \beta \neq 0$ . Отсюда

$$\begin{aligned} & D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(ea) \circledast D^{(j)}\tilde{u}_\beta(b) = \\ & \quad = (-1)^n \binom{n}{i} (N_{\alpha, \beta} D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha+\beta}(eab) + N_{-\alpha, \beta} \mu^\beta D^{(i+j-n)}\tilde{u}_{\alpha-\beta}(ea\bar{b})). \end{aligned}$$

Так как элемент  $e$  обратим, элементы  $D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)$  удовлетворяют всем соотношениям (21)–(23). Отсюда следует, что существует единственный гомоморфизм

$$\psi: \mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu) \rightarrow V,$$

задаваемый условием  $\psi(D^{(i)}u_\alpha(a)) = D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)$ . Из определения элементов  $D^{(i)}\tilde{u}_\alpha(a)$  видно, что  $\pi\psi = \text{id}$ , т. е. короткая последовательность (42) расщепляется, и конформная алгебра Ли–Стейнберга  $\mathfrak{stu}_c(\mathfrak{g}, A, \bar{\cdot}, \mu)$  является центрально замкнутой, что завершает доказательство теоремы 11.

## Литература

- [1] Михалёв А. В., Пинчук И. А. Конформные алгебры Стейнберга // Мат. сб. — 2005. — Т. 196, № 5. — С. 32–52.

- [2] Михалёв А. В., Пинчук И. А. Универсальные центральные расширения конформных алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2005. — № 1. — С. 26—31.
- [3] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.: МЦНМО, 2003.
- [4] Allison B. N., Faulkner J. R. Nonassociative coefficient algebras for Steinberg unitary Lie algebras // J. Algebra. — 1993. — Vol. 161. — P. 1—19.
- [5] Bokut L. A., Fong Y., Ke W.-F. Gröbner—Shirshov bases and composition lemma for associative conformal algebras: an example // Contemp. Math. — 2000. — Vol. 264. — P. 63—90.
- [6] Кас В. Vertex Algebras for Beginners. — Providence, RI: AMS, 1996. — University Lecture Series, vol. 10.
- [7] Kasser C. Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra // J. Pure Appl. Algebra. — 1984. — Vol. 34. — P. 265—275.
- [8] Kasser C., Loday J. L. Extensions centrales d'algèbres de Lie // Ann. Inst. Fourier. — 1982. — Vol. 32. — P. 119—142.
- [9] Yun Gao. Steinberg Lie algebras and skew-dihedral homology // J. Algebra. — 1996. — Vol. 179. — P. 261—304.

