Представления квантовых порядков*

А. Н. ПАНОВ
Самарский государственный университет
e-mail: panov@ssu.samara.ru

УДК 512.6

Ключевые слова: квантовая алгебра, представление, скобка Пуассона.

Аннотация

В статье изучаются конечномерные алгебры, которые возникают как слои квантовых порядков над заданной точкой многообразия центра. Предложенная формула для числа неприводимых представлений проверена для алгебры скрученных многочленов, квантовой алгебры Вейля и алгебры регулярных функций на квантовой группе.

Abstract

A. N. Panov, Representations of quantum orders, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 157—167.

We study finite-dimensional algebras that appear as fibers of quantum orders over a given point of variety of center. We present a formula for the number of irreducible representations and check it for the algebra of twisted polynomials, the quantum Weyl algebra, and the algebra of regular functions on a quantum group.

§ 1. Введение и формулировки основных утверждений

Квантовые алгебры возникли в работах по математической физике. С алгебраической точки зрения квантовая алгебра R_q является областью и свободным $\mathbb{C}[q,q^{-1}]$-модулем. После специализации по модулю $q-\varepsilon$ получаем алгебру $R_\varepsilon = R_q \bmod (q-\varepsilon)$. Обычно (см. алгебры A1—A4 ниже) R_ε является областью, и, если ε — корень из единицы, то алгебра R_ε конечна над своим центром Z_ε. Будем называть R_ε квантовым порядком (поскольку эта алгебра является порядком в теле $R_\varepsilon \otimes \mathrm{Fract}(Z_\varepsilon)$). Эта алгебра определяет аффинное многообразие $\mathfrak{X} = \mathrm{Maxspec}\, Z_\varepsilon$, которое, вообще говоря, имеет особенности.

Порядок R_ε обладает замечательным свойством: он допускает квантовое присоединённое действие. Для элементов $a, u \in R_q$ обозначим

$$a_\varepsilon, u_\varepsilon := a, u \bmod (q-\varepsilon) \in R_\varepsilon.$$

*Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00313 и 03-01-00167.

Если u_ε лежит в Z_ε, то формула

$$\mathcal{D}_u(a_\varepsilon) = \frac{ua - au}{q - \varepsilon} \bmod (q - \varepsilon)$$

определяет дифференцирование $\mathcal{D}_u\colon R_\varepsilon \to R_\varepsilon$, которое называется квантовым присоединённым действием элемента u [2, 5, 6, 8, 16]. Центр Z_ε является пуассоновой алгеброй по отношению к скобке Пуассона

$$\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\} := \mathcal{D}_u(v_\varepsilon) = -\mathcal{D}_v(u_\varepsilon).$$

Многообразие $\mathfrak{X} = \operatorname{Maxspec} Z_\varepsilon$ — пуассоново многообразие. Оно распадается на симплектические листы [3].

Для произвольной точки $\chi \in \mathfrak{X} = \operatorname{Maxspec} Z_\varepsilon$ рассмотрим конечномерную алгебру $R_\chi = R_\varepsilon / R_\varepsilon m_\chi$. Будем называть её слоем R_ε. Любое неприводимое представление алгебры R_ε с центральным характером χ пропускается через $R_\varepsilon \to R_\chi$. Следовательно, эти представления находятся в однозначном соответствии с неприводимыми представлениями R_χ.

Цель этой работы — получить характеризацию слоя в терминах точки χ пуассонова многообразия $\mathfrak{X}$. Основная теорема будет доказана в случае, когда R_q — одна из следующих алгебр.

A1. Алгебра скрученных многочленов.

A2. Квантовая алгебра Вейля.

A3. $U_q(\mathfrak{b})$ (эта алгебра изоморфна $\mathbb{C}_q[\mathrm{B}]$ для борелевской подгруппы B).

A4. Алгебра $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}]$ регулярных функций на квантовой полупростой группе Ли G.

Определения можно найти, например, в [10].

Введём определение стабилизатора точки коммутативной ассоциативной пуассоновой $\mathbb{C}$-алгебры $\mathcal{F}$. Напомним, что алгебра $\mathcal{F}$ — пуассонова алгебра, если на ней задана скобка Пуассона, которая по определению есть линейное кососимметрическое отображение $\{\cdot,\cdot\}\colon \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, удовлетворяющее тождествам Якоби и Лейбница (т. е. $\{a, bc\} = \{a, b\}c + b\{a, c\}$ для всех $a, b, c \in \mathcal{F}$). Пуассонова алгебра является алгеброй Ли по отношению к скобке Пуассона. Будем говорить, что P — идеал (пуассонов идеал) пуассоновой алгебры $\mathcal{F}$, если P — идеал коммутативной ассоциативной алгебры $\mathcal{F}$ (соответственно P — идеал $\mathcal{F}$ и $\{P, \mathcal{F}\} \subset P$). Будем отождествлять точку $\chi \in \mathfrak{X} = \operatorname{Maxspec} \mathcal{F}$ с характером $\chi\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$. Будем использовать обозначение m_χ для соответствующего максимального идеала $\mathcal{F}$. Подалгебра

$$G_\chi := \{a \in \mathcal{F}\colon \{a, \mathcal{F}\} \in m_\chi\}$$

является пуассоновой подалгеброй $\mathcal{F}$. Идеал m_χ^2 содержится в G_χ и является пуассоновым идеалом в G_χ.

Определение 1.1. Конечномерную $\mathbb{C}$-алгебру Ли

$$\mathfrak{g}_\chi := G_\chi / m_\chi^2$$

будем называть стабилизатором точки $\chi \in \mathfrak{X}$. Если $\mathcal{F}$ порождается (как коммутативная ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра) элементами $a_1, \ldots, a_N$, то $\mathfrak{g}$ линейно порождается $\bar{a}_i := a_i - \chi(a_i) \bmod m_\chi^2$. Определение стабилизатора для случая гладких многообразий можно найти в [1].

Если $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{n}$ — максимальный нильпотентный идеал (т. е. нильрадикал) в $\mathfrak{g}$, то алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ — редуктивная алгебра Ли. Обозначим через $\operatorname{rank}\mathfrak{g}$ размерность максимальной коммутативной подалгебры в $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$. Если $\mathfrak{g}$ — алгебраическая разрешимая алгебра Ли (т. е. алгебра Ли некоторой алгебраической разрешимой $\mathbb{C}$-группы $\mathfrak{G}$), то $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{t}$ — торическая подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. В этом случае $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{t} = \operatorname{rank}\mathfrak{g}$.

Напомним определение расширения Оре. Пусть дана алгебра A, автоморфизм $\tau\colon A \to A$ и τ-дифференцирование $\delta\colon A \to A$ (т. е. $\delta(ab) = \delta(a)b + \tau(a)\delta(b)$ для всех $a, b \in A$). Алгебра R — расширение Оре A, если R порождается A и переменной x с определяющими соотношениями $xa = \tau(a)x + \delta(a)$ для всех $a \in A$ [10, 14].

Пусть $\mathbb{S} = (s_{ij})_{i,j=1}^N$ — кососимметрическая целочисленная матрица и q — переменная. Положим $q_{ij} = q^{s_{ij}}$ и образуем матрицу $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j}^n$. По определению алгебра R_q — квантовая разрешимая алгебра над $C := \mathbb{C}[q, q^{-1}]$, если она порождается элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}^{\pm 1}, \ldots, x_N^{\pm 1}$ и C и любая её подалгебра

$$R_i := \langle x_i, \ldots, x_n, x_{n+1}^{\pm 1}, \ldots, x_N^{\pm 1}, C\rangle, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

является расширением Оре $R_i = R_{i+1}[x_i; \tau_i, \delta_i]$, где $\tau(x_j) = q_{ij}x_j$, $i+1 \leqslant j \leqslant N$, и $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $n+1 \leqslant j \leqslant N$ [2, 15]. Все алгебры A1—A4 — квантовые разрешимые алгебры (см. [2, 15]). Точнее, алгебра $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}]$ становится квантовой разрешимой алгеброй после некоторой локализации (см. § 3). В дальнейшем будем предполагать, что все квантовые разрешимые алгебры удовлетворяют следующим условиям:

1) «q-косому условию»: $\tau_i\delta_i = q^{s_i}\delta_i\tau_i$ для некоторого $s_i \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $s_i \neq 0$ для $\delta_i \neq 0$ и $s_i = 0$ для $\delta_i = 0$. Назовём набор целых чисел $\{s_i\}$ системой экспонент R_q;
2) все δ_i локально нильпотентные.

Заметим, что все алгебры A1—A4 удовлетворяют этим двум условиям.

Пусть ε — первообразный l-корень из единицы. Для алгебр A1, A2 будем называть l (и ε) допустимым, если l взаимно просто со всеми главными минорами $\mathbb{S}$ и с системой экспонент $s_1, \ldots, s_N$. Для алгебр A3, A4 l (и ε) допустимо, если l нечётно и $l \geqslant 3$ для случая, когда G имеет G_2 компоненты.

Если R_q — одна из алгебр A1—A4 и l — допустимый корень из единицы, то элементы $a_i := x_{i,\varepsilon}^l$, $1 \leqslant i \leqslant N$ (здесь $x_{i,\varepsilon} = x_i \bmod (q - \varepsilon)$) лежат в центре Z_ε алгебры R_ε [2, лемма 2.19]. Центральная подалгебра Z_0, порождённая a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, и a_i^{-1}, $n+1 \leqslant i \leqslant N$, изоморфна $\mathbb{C}[a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}^{\pm 1}, \ldots, a_N^{\pm 1}]$. Подалгебру Z_0 называют l-центром R_ε. Для всех алгебр A1—A4 подалгебра Z_0 является пуассоновой подалгеброй Z_ε. Вложение $Z_0 \subset Z_\varepsilon$ определяет проекцию $\phi\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_0$, где $\mathfrak{X}_0 = \operatorname{Maxspec} Z_0$.

Цель этой работы — доказать следующее утверждение для алгебр A1—A4.

Основная теорема. *Пусть R — одна из алгебр* A1—A4. *Предположим, что l допустимо. Пусть $\phi\colon \chi \mapsto \chi_0$ и $\mathfrak{g}_\chi$ ($\mathfrak{g}_{\chi_0}$) — стабилизатор χ (соответственно χ_0). Тогда*

1) $\mathfrak{g}_\chi$ *и* $\mathfrak{g}_{\chi_0}$ — *алгебраические разрешимые алгебры Ли* $\mathfrak{g}_\chi = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ *и* $\mathfrak{g}_{\chi_0} = \mathfrak{t}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$;
2) *подалгебра* G_{χ_0} (*в алгебре* Z_0) *содержится в* G_χ; *вложение* $G_{\chi_0} \subset G_\chi$ *продолжается до гомоморфизма* $\psi_p\colon \mathfrak{g}_{\chi_0} \to \mathfrak{g}_\chi$, *такого что его ограничение на* $\mathfrak{t}_0$ — *изоморфизм* $\psi_p|_{\mathfrak{t}_0}\colon \mathfrak{t}_{\chi_0} \to \mathfrak{t}_\chi$; $\operatorname{rank} \mathfrak{g}_\chi = \operatorname{rank} \mathfrak{g}_{\chi_0}$;
3) *число* $|\operatorname{Irr} R_\chi|$ *неприводимых представлений* R_ε *с центральным характером* χ *равно* $l^{\operatorname{rank} \mathfrak{g}_\chi}$.

В § 2 мы докажем основную теорему в частном случае (предложение 2.2) и покажем, что она верна для квантовых разрешимых алгебр с «допустимой стратификацией» (предложение 2.5). В § 3 мы докажем существование допустимых стратификаций для всех алгебр A1—A4. Это завершит доказательство основной теоремы для алгебр (см. предложения 3.1—3.4).

§ 2. Стандартные идеалы

Пусть $\mathbb{S} = (s_{ij})_{i,j=1}^N$, $C := \mathbb{C}[q, q^{-1}]$, как выше. Обозначим через $A_{\mathbb{Q}}$ алгебру скрученных многочленов (см. § 3).

Рассмотрим квантовую разрешимую алгебру $\mathfrak{R}'$ над C, порождённую $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_N$. Предположим, что элементы $x_1, \ldots, x_m$ q-коммутируют, т. е. $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Замкнутое относительно умножения подмножество S, порождённое $x_1, \ldots, x_m$, является множеством знаменателей [4, лемма 2.1]. Обозначим $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}' S^{-1}$. Существуют элементы $\tilde{x}_{m+1}, \ldots, \tilde{x}_N$ в локализации $\mathfrak{R} S_*^{-1}$ (здесь S_* конечно порождённое некоторыми $\{q^i - 1\}$ множество знаменателей в C), такие что $x_i \tilde{x}_j = q_{ij} \tilde{x}_j x_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $m+1 \leqslant j \leqslant N$. Подалгебра, порождённая $\tilde{x}_{m+1}, \ldots, \tilde{x}_N$, изоморфна $\mathfrak{R}_{m+1} = \langle x_{m+1}, \ldots, x_N \rangle$ [4, предложения 2.1—2.3]. Предположим, что идеал $\mathfrak{I}'$ (в $\mathfrak{R} S_*^{-1}$), порождённый $\tilde{x}_j$, $m+1 \leqslant j \leqslant N$, имеет нулевое пересечение с C. Обозначим $\mathfrak{I} := \mathfrak{I}' \cap \mathfrak{R}$. Назовём $(\mathfrak{R}, \mathfrak{I})$ стандартной парой и $\mathfrak{I}$ стандартным идеалом в $\mathfrak{R}$. Заметим, что подалгебра $\mathfrak{B}$, порождённая над C элементами x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, является алгеброй скрученных многочленов Лорана и $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}/\mathfrak{I}$.

Пусть ε — первообразный корень степени l из единицы и l взаимно просто со всеми главными минорами $\mathbb{S}$. Обозначим через $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ центр $\mathfrak{R}_\varepsilon := \mathfrak{R} \bmod (q - \varepsilon)$. Пусть $\mathfrak{X} := \operatorname{Maxspec} \mathfrak{Z}_\varepsilon$. Элементы $a_i := x_{i,\varepsilon}^l$, $1 \leqslant i \leqslant m$, лежат в $\mathfrak{Z}_\varepsilon$. Пусть $\mathfrak{Z}_0$ — некоторая подалгебра $\mathfrak{Z}_\varepsilon$, такая что $\mathfrak{Z}_0 \cap \mathfrak{B}_\varepsilon$ порождается $a_i := x_{i,\varepsilon}^l$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $\mathfrak{R}_\varepsilon$ конечно над $\mathfrak{Z}_0$. Центр $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ конечен над $\mathfrak{Z}_0$. Обозначим $\mathfrak{X}_0 := \operatorname{Maxspec} \mathfrak{Z}_0$, $\mathfrak{I}_\varepsilon = (\mathfrak{I} + \mathfrak{R}(q - \varepsilon)) \bmod (q - \varepsilon)$, $\phi\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{i} := \mathfrak{I}_\varepsilon \cap \mathfrak{Z}_\varepsilon$, $\mathfrak{i}_0 := \mathfrak{I}_\varepsilon \cap \mathfrak{Z}_0$.

Тело $\operatorname{Fract}(\mathfrak{R})$ изоморфно телу частных $\operatorname{Fract}(A_{\mathbb{Q}})$ алгебры $A_{\mathbb{Q}}$ ($= \operatorname{gr}(\mathfrak{R})$) скрученных многочленов (см. § 3) [2, 4, 15]. Мы собираемся доказать основную теорему для случая, когда χ (χ_0) — точка $\mathfrak{X}$ (соответственно $\mathfrak{X}_0$), аннулируемая $\mathfrak{i}$ (соответственно $\mathfrak{i}_0$).

Алгебра $\mathfrak{B}$ имеет новую систему образующих h_i, g_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, z_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, $2k + p = m$ (которая состоит из мономов $x_i^{\pm 1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$), такую что $h_i g_i = q^{d'_i} g_i h_i$ и $\{z_j\}$ порождают центр $\mathfrak{B}$. Согласно предположению l взаимно просто с d'_i. Пересечение центра $\mathfrak{Z}$ алгебры $\mathfrak{R}$ с $\mathfrak{B}$ порождается некоторыми мономами $\{z^a := z_1^{\alpha_1} \dots z_p^{\alpha_p},\ \alpha_j \in \mathbb{Z}\}$. Выбирая согласованные базисы, мы можем предположить, что пересечение $\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{B}$ порождается $z_{t+1}^{n_{t+1}}, \dots, z_p^{n_p}$ для некоторых $n_{t+1}, \dots, n_p \in \mathbb{N}$. Поскольку поле $\mathrm{Center}(\mathrm{Fract}(A_{\mathbb{Q}}))$ алгебраически замкнуто в $\mathrm{Fract}(A_{\mathbb{Q}})$, то из того, что элемент z^d лежит в центре тела $\mathrm{Fract}(A_{\mathbb{Q}})$ (которое изоморфно $\mathrm{Fract}(\mathfrak{R})$), следует, что z также лежит в центре. Это доказывает, что $n_{t+1} = \dots = n_p = 1$.

Лемма 2.1.

1. *Пересечение* $\mathfrak{Z}_\varepsilon \cap \mathfrak{B}_\varepsilon$ *порождается*
$$h_{i,\varepsilon}^l,\ g_{i,\varepsilon}^l,\ \text{где } 1 \leqslant i \leqslant k,\ \text{и } z_{1,\varepsilon}^l, \dots, z_{t,\varepsilon}^l,\ z_{t+1,\varepsilon}, \dots, z_{m,\varepsilon}.$$
2. *Пересечение* $\mathfrak{Z}_0 \cap \mathfrak{B}_\varepsilon$ *порождается*
$$h_{i,\varepsilon}^l,\ g_{i,\varepsilon}^l,\ \text{где } 1 \leqslant i \leqslant k.\ \text{и } z_{1,\varepsilon}^l, \dots, z_{t,\varepsilon}^l,\ z_{t+1,\varepsilon}^l, \dots, z_{m,\varepsilon}^l.$$

Доказательство. Второе утверждение тривиально. Чтобы доказать первое утверждение, покажем, что моном $z_{1,\varepsilon}^{\alpha_1} \dots z_{t,\varepsilon}^{\alpha_t}$ лежит в $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ тогда и только тогда, когда l делит все α_i.

Существует система образующих $\tilde{x}_{k_1}, \dots, \tilde{x}_{k_t}$ в $A_{\mathbb{Q}}$, такая что
$$z_j \tilde{x}_{k_j} = q^{\nu_{i,k_j}} \tilde{x}_{k_j} z_j \quad \text{и} \quad F := \det(\nu_{i,k_j})_{i,j=1}^t \neq 0.$$
Присоединим $\tilde{x}_{k_1}, \dots, \tilde{x}_{k_t}$ к системе $\{x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Обозначим через $\mathbb{S}''$ соответствующую $((m+t)\times(m+t))$-подматрицу $\mathbb{S}$. Ранг матрицы $\mathbb{S}''$ равен $2k+2t$, и наибольший общий делитель D'' всех его $((2k+2t)\times(2k+2t))$-миноров равен $(d'_1)^2 \dots (d'_k)^2 F^2$. Поскольку l допустимо, l взаимно просто с D''. Следовательно, НОД$(l, F) = 1$. Существует элемент $v_i \in \mathrm{Fract}(\mathfrak{R})$, такой что $z_i v_j = q^{p_i \delta_{ij}} v_j z_i$ и НОД$(l, p_i) = 1$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant t$. Отсюда вытекает, что если $z_{1,\varepsilon}^{\alpha_1} \dots z_{t,\varepsilon}^{\alpha_t}$ лежит в центре $\mathfrak{Z}_\varepsilon$, то l делит все α_i. □

Предложение 2.2. *Пусть* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{I}$, ε *определены как выше. Предположим, что* $\mathfrak{Z}_0$ *— пуассонова подалгебра в* $\mathfrak{Z}_\varepsilon$. *Пусть* $\chi \in \mathfrak{X}$ *и* $\chi_0 = \phi(\chi) \in \mathfrak{X}_0$. *Предположим, что* χ (χ_0) *аннулируется идеалом* $\mathfrak{i}$ (*соответственно* $\mathfrak{i}_0$) *и* $\chi(a_i) \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. *Тогда*

1) *число неприводимых представлений* $\mathfrak{R}_\varepsilon$ *с центральным характером* χ *равно* l^t;
2) *идеал* $\mathfrak{i}$ ($\mathfrak{i}_0$) *— пуассонов идеал в* G_χ (*соответственно в* G_{χ_0}); *обозначим через* $\mathfrak{n}'$ ($\mathfrak{n}'_0$) *образ* $\mathfrak{i}$ (*соответственно* $\mathfrak{i}_0$) *в* $\mathfrak{g}_\chi$ (*соответственно в* $\mathfrak{g}_{\chi_0}$);
3) $\mathfrak{n}'$ ($\mathfrak{n}'_0$) *— нильпотентный идеал в* $\mathfrak{g}_\chi$ (*соответственно в* $\mathfrak{g}_{\chi_0}$). *Основная теорема справедлива для* $\mathfrak{R}$ *и* χ. *В частности,* $\mathfrak{g}_\chi$ ($\mathfrak{g}_{\chi_0}$) *— алгебраическая разрешимая алгебра Ли.*

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{I}$ лежит в радикале алгебры $\mathfrak{R}_\varepsilon\mathfrak{i}_0$ (нужно применить [2, лемма 5.1]). Ядро любого любого неприводимого представления π с l-центральным характером χ_0 содержит $\mathfrak{I}$. Любое неприводимое представление с l-центральным характером $\chi_0 \in \mathfrak{X}_0$ однозначно определяется своим ядром, порождённым

$$\mathfrak{i},\quad h^l_{i,\varepsilon} - \chi(h^l_{i,\varepsilon}),\quad g^l_{i,\varepsilon} - \chi(g^l_{i,\varepsilon}) \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k,$$
$$z_{j,\varepsilon} - \chi(z_{j,\varepsilon}) \text{ для } 1 \leqslant j \leqslant t,\quad z_{j,\varepsilon} - \chi(z_{j,\varepsilon}) \text{ для } t+1 \leqslant j \leqslant p.$$

Число неприводимых представлений с центральным характером χ равно l^t. Это доказывает утверждение 1).

Для вычисления подалгебр Ли $\mathfrak{g}_\chi$ и $\mathfrak{g}_{\chi_0}$ найдём образующие подалгебр G_χ и G_{χ_0} алгебры $\mathfrak{R}_\varepsilon$:

$$G_\chi = \langle z^l_{j,\varepsilon} - \chi(z^l_{j,\varepsilon}),\ 1 \leqslant j \leqslant t;\ z_{j,\varepsilon} - \chi(z_{j,\varepsilon}),\ t+1 \leqslant j \leqslant p;\ \mathfrak{i}\rangle,$$
$$G_{\chi_0} = \langle z^l_{j,\varepsilon} - \chi(z^l_{j,\varepsilon}),\ 1 \leqslant j \leqslant p;\ \mathfrak{i}_0\rangle.$$

Непосредственно видим, что $G_{\chi_0} \subset G_\chi$, т. е. определён гомоморфизм $\psi\colon \mathfrak{g}_{\chi_0} \to \mathfrak{g}_\chi$.

Поскольку $\mathfrak{i}$ — пересечение $\mathfrak{R}$-идеала $\mathfrak{I}$ с $\mathfrak{Z}_\varepsilon$, то $\mathfrak{i}$ — пуассонов идеал в $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ [16, лемма 3.12]. То же верно для $\mathfrak{i}_0$. Отсюда вытекает утверждение 2).

Обозначим

$$e_i = z^l_{i\varepsilon} - \chi(z^l_{i\varepsilon}) \bmod m^2_\chi,\quad 1 \leqslant i \leqslant t, \quad \text{и} \quad \mathfrak{t} = \operatorname{span}\{e_i;\ 1 \leqslant i \leqslant t\}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_\chi$ является суммой (как линейное пространство) $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{n}$, порождённого по модулю m^2_χ элементами $z_{j,\varepsilon} - \chi(z_{j,\varepsilon})$, $t+1 \leqslant j \leqslant p$, и $\mathfrak{n}'$. Аналогично, $\mathfrak{g}_{\chi_0}$ — сумма (как линейное пространство) $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}$ и $\mathfrak{n}_0$, порождённого по модулю $m^2_{\chi_0}$ элементами $z^l_{j,\varepsilon} - \chi(z^l_{j,\varepsilon})$, $t+1 \leqslant j \leqslant p$, и $\mathfrak{n}'_0$.

Покажем, что $\mathfrak{n}$ — нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}_\chi$. То же можно показать для $\mathfrak{n}_0$. Любой элемент $\mathfrak{R}S_*^{-1}$ является суммой мономов

$$x_1^{n_1} \ldots x_m^{n_m} \tilde{x}_{m+1}^{n_{m+1}} \ldots \tilde{x}_N^{n_N}.$$

Определим степень $\deg(a) := (n_{m+1}, \ldots, n_N)$ монома a. Для любых двух мономов a, b существует такой элемент $s \in \mathbb{Z}$, что $ab - q^s ba$ — сумма мономов меньшей степени по отношению к лексикографическому упорядочению. Для любых $A, B \in Z_\varepsilon$ имеем $\{A, B\} = \mathrm{const}AB + \{\text{члены меньшей степени}\}$. Отсюда получаем, что $\mathfrak{n}$ — нильпотентный идеал.

Покажем, что подалгебра Ли $\mathfrak{t}$ диагонализуема. Элементы $x_1, \ldots, x_m$ являются FA-элементами в $\mathfrak{R}$ [2,15], т. е. для любых $1 \leqslant i \leqslant m$ и $a \in \mathfrak{R}$ существует многочлен $f(t)$ (с корнями в $\{q^s\}_{s\in\mathbb{Z}}$), такой что $f(\mathrm{Ad}_{x_i})(a) = 0$. Присоединённое действие Ad_{x_i} диагонализуемо [15]. Можно выбрать $f(t)$ с различными корнями $q^{\gamma_1}, \ldots, q^{\gamma_k}$. Для дифференцирования $\mathcal{D}'_i := x_\varepsilon^{-l}\mathcal{D}_{x^l} : \mathfrak{R}_\varepsilon \to \mathfrak{R}_\varepsilon$ при $x = x_i$ выполнено $f_1(\mathcal{D}'_i)(a_\varepsilon) = 0$, где $f_1(t)$ — многочлен с различными корнями $c\gamma_1, \ldots, c\gamma_k$, $c = l\varepsilon^{l-1}$. Отсюда следует, что $\mathcal{D}'_i$ диагонализуемо. То же верно для z^l_i. Наконец, ad_{e_i} одновременно диагонализуемы. $\square$

Определение 2.3. Пусть R — область с единицей. Рассмотрим множество пар $\{(\mathcal{P}_\mu, S_\mu)\}$, где S_μ — подмножество знаменателей R и $\mathcal{P}_\mu$ — первичный идеал в R (т. е. $\mathcal{P}_\mu \in \operatorname{Spec}(R)$) с пустым пересечением с S_μ. Назовём $\{(\mathcal{P}_\mu, S_\mu)\}$ стратификацией $\operatorname{Spec}(R)$, если для любого $I \in \operatorname{Spec}(R)$ существует единственный индекс μ, такой что $I \supset \mathcal{P}_\mu$ и $I \cap S_\mu = \varnothing$. Если R — свободный C-модуль над коммутативным кольцом C, дополнительно предположим, что I и все $\mathcal{P}_\mu$ имеют нулевое пересечение с C.

Определение 2.4. Пусть R_q — квантовая разрешимая алгебра над $C := \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ и $\{(\mathcal{P}_\mu, S_\mu)\}$ — стратификация R_q. Назовём $\{(\mathcal{P}_\mu, S_\mu)\}$ допустимой стратификацией, если

1) для любого μ существует изоморфизм $\theta_\mu\colon R_q S_\mu^{-1} \to \mathfrak{R}_\mu$, такой что $\mathfrak{R}_\mu$ и $\mathfrak{I}_\mu := \theta_\mu(\mathcal{P}_\mu)$ образуют стандартную пару;
2) стратификация $\{(\mathcal{P}_\mu, S_\mu)\}$ допускает специализацию по модулю $q - \varepsilon$ (т. е. $\{(\mathcal{P}_{\mu,\varepsilon}, S_{\mu,\varepsilon})\}$ — стратификация $\mathfrak{R}_\varepsilon$);
3) $S_{\mu,\varepsilon} := S_\mu \bmod (q - \varepsilon) \subset Z_0$ и $\theta_\mu(S_\mu)$ порождается $x_1^l, \ldots, x_m^l$.

Предложение 2.5. *Пусть R_q — квантовая разрешимая алгебра и l допустимо для R_q. Предположим, что $x_{1,\varepsilon}^l, \ldots, x_{N,\varepsilon}^l$ лежат в центре R_ε и образуют центральную пуассонову подалгебру (обозначим её Z_0). Предположим, что R_q имеет допустимую стратификацию $\{(\mathcal{P}_\mu, S_\mu)\}$. Тогда основная теорема верна для χ.*

Доказательство. Пусть $\chi \in \mathfrak{X}$. Выберем μ так, что $\chi(S_{\mu,\varepsilon}) \neq 0$ и χ аннулируется $\mathfrak{i}_\mu$. Применим предложение 2.2. □

§ 3. Существование допустимой стратификации

Для того чтобы доказать основную теорему, предъявим допустимую стратификацию для каждой из алгебр A1—A4.

A1. Алгебра скрученных многочленов

Пусть матрицы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{S}$ такие, как выше. Алгебра $R = A_{\mathbb{S}}$ скрученных многочленов порождается элементами $x_1, \ldots x_n, x_{n+1}^{\pm 1}, \ldots, x_N^{\pm 1}$ с соотношениями $x_i x_j = q_{ij} x_j x_i$.

Выберем подмножество $T \subset \Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим идеал $\mathcal{P}_T$, порождённый $\{x_i\colon i \in T\}$, и подмножество знаменателей S_T, порождённое $\{x_i^l\colon i \notin T\}$.

Предложение 3.1. *Основная теорема верна для алгебры скрученных многочленов.*

Доказательство. Множество пар $\{(\mathcal{P}_T, S_T)\}$ — допустимая стратификация. Прямыми вычислениями показывается, что $\{a_i, a_j\} = c s_{ij} a_i a_j$, где $a_i = x_{i,\varepsilon}^l$ и $c = l\varepsilon^{l-1}$. Применим предложение 2.5. □

A2. Квантовая алгебра Вейля

Пусть $\mathbb{S} = (s_{ij})_{i,j}^n$ — кососимметрическая целочисленная матрица и q — переменная. Как выше, положим $q_{ij} = q^{s_{ij}}$ и образуем матрицу $\mathbb{Q} = (q_{ij})_{i,j=1}^n$. По данным ненулевым целым числам $s_1, \ldots, s_n$ определим $q_1 = q^{s_1}, \ldots, q_n = q^{s_n}$. Рассмотрим две новые матрицы. Первая матрица $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^n$ с элементами, удовлетворяющими условию $p_{ii} = p_{ij}p_{ji} = 1$, такими что $p_{ij} = q_i q_{ij}$ для $i < j$. Вторая матрица $\mathbb{R} = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ имеет элементы

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ji}, & \text{если } i < j, \\ q_i, & \text{если } i = j, \\ p_{ji} = q_j q_{ji}, & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Образуем кососимметрическую целочисленную матрицу $\mathbb{T} = (t_{ij})_{i,j=1}^n$, такую что $p_{ij} = q^{t_{ij}}$, и целочисленную матрицу $\mathbb{U} = (u_{ij})_{i,j=1}^n$, такую что $r_{ij} = q^{u_{ij}}$. Построим матрицы

$$\mathbb{Q}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & -\mathbb{R} \\ \mathbb{R} & \mathbb{P} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{S}^* = \begin{pmatrix} \mathbb{S} & -\mathbb{U} \\ \mathbb{U} & \mathbb{T} \end{pmatrix}.$$

Определение 3.2. Квантовая алгебра Вейля W порождается элементами $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n$ со следующими соотношениями:

$$y_i y_j = q_{ij} y_j y_i, \quad x_i x_j = p_{ij} x_j x_i, \quad x_i y_j = r_{ij} y_j y_i \ \text{ для } \ i \neq j,$$
$$x_i y_i = q_i y_i x_i + \sum_{k<i} (q_k - 1) y_k x_k + 1. \tag{3.1}$$

Алгебра W является квантовой разрешимой алгеброй $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ с системой экспонент $s_1, \ldots, s_n$. Обозначим $h_k = y_k x_k$. Из соотношений получаем

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} h_k = h_k \begin{pmatrix} q_i x_i \\ q_i^{-1} y_i \end{pmatrix} \quad \text{для } i < k,$$
$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} h_k = h_k \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad \text{для } i > k.$$

Для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ обозначим $w_i = 1 + \sum\limits_{k \leqslant i} (q_k - 1) y_k x_k$.

Соотношения (3.1) можно переписать следующим образом:

$$x_i y_i = q_i y_i x_i + w_{i-1}.$$

Переменные x_i, y_i, w_i удовлетворяют соотношениям

$$y_i w_j = \begin{cases} q_i^{-1} w_j y_i & \text{для } i \leqslant j, \\ w_j y_i & \text{для } i > j, \end{cases} \qquad x_i w_j = \begin{cases} q_i w_j x_i & \text{для } i \leqslant j, \\ w_j x_i & \text{для } i > j. \end{cases}$$

По определению ε — допустимый корень степени l из единицы, если l взаимно просто со всеми главными минорами S^* и с $s_1, \ldots, s_n$. Элементы $a_i := x_{i,\varepsilon}^l$,

$b_i := y^l_{i,\varepsilon}$ лежат в центре Z_ε алгебры W_ε и порождают центральную подалгебру Z_0.

Обозначим $f_i = w^l_{i,\varepsilon}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Аналогично [12] можно показать, что существует последовательность ненулевых комплексных чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$, таких что

$$f_i = 1 + \sum_{k<i} \gamma_k a_k b_k.$$

Отсюда вытекает, что $f_i \in Z_0$. Прямыми вычислениями показывается, что

$$\{a_i, a_j\} = \gamma t_{ij} a_i a_j, \quad \{b_i, b_j\} = \gamma s_{ij} b_i b_j,$$
$$\{a_i, b_j\} = \gamma u_{ij} a_i b_j, \quad \{a_i, b_i\} = \gamma s_i a_i b_i + f_{i-1},$$

где $\gamma = l^2 \varepsilon^{-1}$. Видим, что Z_0 — пуассонова подалгебра в Z_ε.

Обозначим $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$. Будем называть тройку $T = (T_1, T_2, T_3)$ подмножеств Λ допустимой тройкой, если $T_1 \subseteq T_2 \subseteq T_3$ и имеет место следующее свойство: если $i \in T_2$, то $i, i-1 \in T_3$.

Рассмотрим идеал $\mathcal{P}_T$ алгебры W, порождённый x_i, y_j и w_k, где $i \in T_1$, $j \in T_2$ и $k \in T_3$. Построим множество знаменателей S_T, порождённое следующими q-коммутирующими элементами: $\{x^l_i,\ i \in T_2 - T_1\}$, $\{y^l_i,\ i \in \Lambda - T_2\}$ и $\{w^l_i,\ i \in \Lambda - T_3\}$. Подмножество S_T имеет пустое пересечение с $\mathcal{P}_T$. Множество пар $\{(\mathcal{P}_T, S_T)\}$ является стратификацией W (см. [11, 17]).

Предложение 3.3. *Основная теорема справедлива для квантовой алгебры Вейля.*

Доказательство. Множество пар $(\mathcal{P}_T, S_T)$ образует допустимую стратификацию. □

A3, A4. Случай алгебр $U_q(\mathfrak{b}) = \mathbb{C}_q[\mathrm{B}]$ и $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}]$

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли с системой простых корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Пусть G — её односвязная группа Ли. Обозначим $d_i := (\alpha_i, \alpha_i)/2$ и $C := \mathbb{C}[q, q^{-1}, (q^{d_i} - q^{-d_i})^{-1}]$. Квантовая универсальная обёртывающая алгебра является алгеброй Хопфа C, порождённой элементами E_i, F_i, $K_i^{\pm 1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, удовлетворяющими соотношениям Дринфельда—Джимбо. Алгебра $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}]$, подалгебра в двойственной алгебре Хопфа к $U_q(\mathfrak{g})$, порождается матричными элементами неприводимых конечномерных представлений $c_{f,v}(a) := f(av)$, $v \in V$, $f \in V^*$, $a \in U_q(\mathfrak{g})$.

Предположим, что l допустимо. Для алгебр A3, A4 l допустимо, если l нечётно и $l \geqslant 3$ в случае, когда G имеет G_2 компоненты. Алгебра $C_\varepsilon[\mathrm{G}]$ имеет центральную пуассонову подалгебру Z_0, изоморфную $\mathbb{C}[\mathrm{G}]$ со стандартной скобкой Белавина—Дринфельда [7]. Алгебра $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}]$ имеет подалгебру R_q^+, порождённую матричными элементами $c_{f,v_{-\lambda}}$, где $v_{-\lambda}$ — вектор младшего веса в неприводимом представлении V_λ со старшим весом λ. Алгебра R_q^+ изоморфна $\mathbb{C}_q[\mathrm{B}]$, где $\mathrm{B} := \mathrm{B}^+$. С помощью спаривания Дринфельда можно показать, что алгебра $\mathbb{C}_q[\mathrm{B}]$ изоморфна $U_q(\mathfrak{b}^-)$.

Предложение 3.4. *Основная теорема справедлива для алгебр* A3, A4.

Доказательство. Алгебра $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}]$ имеет множество знаменателей S, порождённое матричным элементом $c_{\rho,v_{-\rho}}$, где ρ — полусумма положительных корней. Локализация $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}S^{-1}]$ изоморфна подалгебре в $U_q(\mathfrak{b}^-)\otimes U_q(\mathfrak{b}^+)$, порождённой $K_\lambda\otimes K_{-\lambda}$, $F_i\otimes 1$, $1\otimes E_i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Достаточно построить допустимую стратификацию для $\mathbb{C}_q[\mathrm{B}]$.

Алгебра R_q^+ (которая совпадает с $\mathbb{C}_q[\mathrm{B}] = U_q(\mathfrak{b}^-)$) имеет стратификацию $(\mathcal{P}_w, S_w)$, где w — элемент группы Вейля W [7,9,13]. По определению идеал $\mathcal{P}_w$ порождается (как идеал) элементами $c_{f,v_{-\lambda}}$, где f ортогонален подпространству $U_q(\mathfrak{b}^-)t_w v_{-\lambda}$ (здесь t_w — соответствующий элемент группы кос). Множество знаменателей S_w порождается элементом $z_w := c_{wf^\rho,v_{-\rho}}$, где f^ρ — элемент старшего веса в V_ρ^*.

Ниже мы предъявим другую конструкцию пар $(\mathcal{P}_w, S_w)$. Разложим элемент w_0 (наибольшей длины в группе W) в произведение простых отражений

$$w_0 = s_1\dots s_k s_{k+1}\dots s_N,\quad s_t := s_{\alpha_{i_t}},$$

так, что $w = s_1\dots s_k$. Обозначим $w_t = s_1\dots s_t$ (здесь $w_k = w$) и $z_t = z_{w_t}$. Элементы z_i q-коммутируют [9, следствие 3.2]. Как обычно, обозначим $\beta_t := s_1\dots s_{t-1}(\alpha_{i_t})$. Алгебра R_q^+ является квантовой разрешимой алгеброй по отношению к последовательности образующих

$$K_1^{\pm1},\dots,K_n^{\pm1},F_{\beta_1},\dots,F_{\beta_1},\dots,F_{\beta_N}.$$

Обозначим через B_t подалгебру, порождённую $K_1^{\pm1},\dots,K_n^{\pm1},F_{\beta_k},\dots,F_{\beta_t}$. Получаем фильтрацию

$$B_1\subset\dots\subset B_k\subset B_N = R_q^+.$$

Подалгебра B_k зависит только от w (обозначим $B_w := B_k$) [9]. Элемент z_t лежит в B_t и не лежит в B_{t-1} [9, лемма 3.2]. Обозначим через S_t подмножество знаменателей, порождённое z_t. Идеал $\mathcal{P}_w$ имеет нулевое пересечение с B_k и $B_kS_k^{-1} = R_q^+S_k^{-1}/\mathcal{P}_wS_k^{-1}$. Пусть S_w — множество знаменателей, порождённое S_t, $1\leqslant t\leqslant k$, и $\mathfrak{R}_w := R_q^+S_w^{-1}$. Элементы z_t являются FA-элементами в квантовой разрешимой алгебре $\mathfrak{R}_w$ [2, 15]. Присоединённое действие Ad_{z_i} диагонализуемо. Выберем образующие $z_1^{\pm1},\dots,z_k^{\pm1},\tilde F_{\beta_{k+1}},\dots,\tilde F_{\beta_N}$ в локализации $R_q^+S_*^{-1}$ (см. определение S_* в § 2). Идеал $\mathcal{P}_wS_*^{-1}$ порождается $\tilde F_{\beta_t}$, $k+1\leqslant t\leqslant N$. Элементы $z_{t,\varepsilon}^l$ лежат в Z_0 [9, теорема 1.6]. Пара $(R_q^+,\mathcal{P}_w)$ является стандартной парой, и стратификация $(\mathcal{P}_w, S_w)$ — допустимая стратификация. Это доказывает утверждения для $\mathbb{C}_q[\mathrm{B}]$ (и следовательно, для $\mathbb{C}_q[\mathrm{G}]$). □

Литература

[1] Карасёв М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. — М.: Наука, 1991.

[2] Панов А. Н. Неприводимые представления квантовых разрешимых алгебр в корнях из 1 // Алгебра и анализ. — 2003. — Т. 15, № 4. — С. 229—259.

[3] Brown K. A., Gordon I. Poisson orders, symplection reflection algebras and representation theory // J. Reine Angew. Math. — 2003. — Vol. 559. — P. 193—216.

[4] Cauchon G. Effacement des dérivations et spèctres premiers des algèbres quantiques // J. Algebra. — 2003. — Vol. 260, no. 2. — P. 476—518.

[5] De Concini C., Kac V. G. Representations of quantum groups at roots of 1 // Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory, Proc. Colloq. in Honour of J. Dixmier, Paris 1989, Progress in Math. Vol. 92. — Birkhäuser, 1990. — P. 471—506.

[6] De Concini C., Kac V. G., Procesi C. Quantum coadjoint action // J. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 5. — P. 151—189.

[7] De Concini C., Lyubashenko V. Quantum function algebra at roots of 1 // Adv. Math. — 1994. — Vol. 108. — P. 205—262.

[8] De Concini C., Procesi C. Quantum Groups // D-modules, representation theory, and quantum groups. Lectures given at the 2nd session of the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) held in Venezia, Italy, June 12–20, 1992 / G. Zampieri et al., ed. — Lect. Notes Math. Vol. 1565. — Berlin: Springer, 1993. — P. 31—140.

[9] De Concini C., Procesi C. Quantum Schubert cells and representations at roots of 1 // Algebraic Groups and Lie Groups / G. I. Lehrer, ed. — Australian Math. Soc. Lecture Series. Vol. 9. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[10] Goodearl K. R. Prime Spectra of Quantized Coordinate Rings // Interactions between ring theory and representations of algebras. Proceedings of the conference, Murcia, Spain / F. Van Oystaeyen et al., ed. — Lect. Notes Pure Appl. Math. Vol. 210. — New York: Marcel Dekker, 2000. — P. 205—237.

[11] Horton K. L. The prime and primitive spectra of multilinear quantum symplectic and Euclidean spaces // Comm. Algebra. — 2003. — Vol. 31, no. 10. — P. 4713—4743.

[12] Jakobsen H., Zhang H. Quantized Heisenberg spaces // Algebras Represent. Theory. — 2000. — Vol. 2, no. 2. — P. 151—174.

[13] Joseph A. Quantum Groups and Their Primitive Ideals. — Berlin: Springer, 1995.

[14] McConnel J. C., Robson J. C. Noncommutative Noetherian Rings. — New York: Wileys—Interscience, 1987.

[15] Panov A. N. Fields of fractions of quantum solvable algebras // J. Algebra. — 2001. — Vol. 236. — P. 110—121.

[16] Panov A. N. Quantum solvable algebras. Ideals and representations at roots of 1 // Transform. Groups. — 2002. — Vol. 7, no. 4. — P. 379—402.

[17] Oh Sei-Qwon. Primitive ideals of the coordinate ring of quantum symplectic space // J. Algebra. — 1995. — Vol. 174. — P. 531—552.

[18] Zhang H. The irreducible representations of the coordinate ring of the quantum matrix space // Algebra Colloq. — 2002. — Vol. 9, no. 4. — P. 383—392