О нерациональных дивизорах над негоренштейновыми терминальными особенностями*

Д. А. СТЕПАНОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: stepanov@online.ru

УДК 512.7

Ключевые слова: терминальная особенность, разрешение особенностей, исключительный дивизор, дискрепантность.

Аннотация

Пусть (X, o) — росток трёхмерной терминальной особенности индекса $m \geqslant 2$. Если (X, o) имеет тип $cAx/4$, $cD/3$-3, $cD/2$-2 или $cE/2$, то дополнительно предположим, что стандартное уравнение особенности X в $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_m$ невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Пусть $\pi\colon Y \to X$ — некоторое разрешение. Мы показываем, что на Y существует не более двух нерациональных дивизоров E_i, $i = 1, 2$ со следующими свойствами: $\pi(E_i) = o$ и дискрепантность $a(E_i, X)$ не превосходит 1. Когда такие дивизоры существуют, мы представляем их как исключительные дивизоры некоторых раздутий особенности (X, o) и описываем их бирациональный тип.

Abstract

D. A. Stepanov, On nonrational divisors over non-Gorenstein terminal singularities, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 169—184.

Let (X, o) be a germ of a 3-dimensional terminal singularity of index $m \geqslant 2$. If (X, o) has type $cAx/4$, $cD/3$-3, $cD/2$-2, or $cE/2$, then we assume that the standard equation of X in $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_m$ is nondegenerate with respect to its Newton diagram. Let $\pi\colon Y \to X$ be a resolution. We show that there are at most 2 nonrational divisors E_i, $i = 1, 2$, on Y such that $\pi(E_i) = o$ and the discrepancy $a(E_i, X)$ is at most 1. When such divisors exist, we describe them as exceptional divisors of certain blowups of (X, o) and study their birational type.

1. Введение

В этой работе мы продолжаем изучение разрешений трёхмерных терминальных особенностей, начатое в [1, 10].

Пусть (X, o) — росток трёхмерной терминальной особенности, определённой над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Рассмотрим некоторое разрешение $\pi\colon Y \to X$,

*Работа была поддержана РФФИ, грант № 02-01-00441, и грантами ведущих научных школ № 489.2003.1 и 1910.2003.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 169—184.

и пусть $E \subset Y$ — такой простой дивизор, что $\pi(E) = o$ и дискрепантность $a(E, X)$ не превосходит 1. Заметим, что если π — дивизориальное разрешение, то такой дивизор E найдётся обязательно [4, 6]. С другой стороны, количество таких дивизоров для фиксированной особенности (X, o) конечно (здесь дивизор отождествляется с соответствующим дискретным нормированием поля $k(X)$).

Что можно сказать о бирациональном типе дивизора E как алгебраической поверхности? Известно, что поверхность E бирационально линейчатая [9, следствие 2.14]. Если (X, o) имеет тип cA/m, $m \geqslant 1$, то E оказывается даже рациональной [8, предложение 2.4]. Для особенностей типа cD поверхность E либо рациональна, либо бирационально изоморфна $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — (гипер)эллиптическая кривая, причём если нерациональный дивизор E существует, то он единствен [1]. Для общей особенности типа cE нерациональный дивизор тоже единствен и бирационально изоморфен $\mathbb{P}^1 \times C$, но кривая C не обязательно гиперэллиптическая [10].

В этой работе нами разобран случай, когда (X, o) — общая негоренштейнова (т. е. канонический дивизор K_X не дивизор Картье) трёхмерная терминальная особенность. Условие общности мы понимаем как невырожденность определяющего уравнения особенности по отношению к своей диаграмме Ньютона.

Теорема. *Пусть $\pi\colon Y \to X$ — разрешение трёхмерной негоренштейновой терминальной особенности (X, o). Если (X, o) имеет тип $cAx/4$, $cD/3$-3, $cD/2$-2 или $cE/2$, то дополнительно предположим, что стандартное определяющее уравнение особенности (X, o)* (см. теорему 2.1) *невырожденно по отношению к своей диаграмме Ньютона. Тогда на Y существует не более двух нерациональных дивизоров E_i со свойствами $\pi(E_i) = o$ и $a(E_i, X) \leqslant 1$.*

Во всех случаях, когда нерациональные дивизоры существуют, мы описываем их бирациональный тип и раздутия особенности (X, o), которые их реализуют.

В разделе 2 мы приводим классификацию трёхмерных негоренштейновых терминальных особенностей и некоторые сведения, нужные для работы с разрешениями и дискрепантностями. В разделе 3 мы доказываем нашу теорему отдельно для каждого типа особенностей. Случай cA/m был доказан Ю. Г. Прохоровым, поэтому мы его не рассматриваем.

Ранее настоящая работа депонировалась нами в ВИНИТИ, № 1529-В2004.

2. Предварительные сведения

Пусть циклическая группа $\mathbb{Z}_m$ действует на пространстве $\mathbb{C}^n$ по правилу $x_i \to \varepsilon^{a_i r} x_i$, $i = 1, \ldots, n$, где x_i — координаты на $\mathbb{C}^n$, ε — примитивный корень из 1 степени m, $a_i \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}_m$ — вычет по модулю m. Тогда фактор-пространство $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ мы будем обозначать через $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $\frac{1}{m}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Полная аналитическая классификация трёхмерных негоренштейновых терминальных особенностей была получена Мори, Колларом и Шепард-Барроном [5, 7].

Теорема 2.1 ([7]). *Пусть X — росток трёхмерной терминальной особенности индекса $\geqslant 2$. Тогда X можно вложить в $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_m$ таким образом, что выполнено одно из следующих утверждений*:

(cA/m) $X \simeq \{xy + f(z,u) = 0\} \subset \frac{1}{m}(\alpha, -\alpha, 1, 0)$, *где целое число α взаимно просто с m и $f(z,u) \in \mathbb{C}\{z,u\}$ — инвариант группы $\mathbb{Z}_m$*;

($cAx/4$) $X \simeq \{x^2 + y^2 + f(z,u) = 0\} \subset \frac{1}{4}(1,3,1,2)$, *где $f(z,u) \in \mathbb{C}\{z,u\}$ — полуинвариант группы $\mathbb{Z}_4$ и $u \notin f(z,u)$ (моном u не входит в ряд f)*;

($cAx/2$) $X \simeq \{x^2+y^2+f(z,u) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)$, *где $f(z,u) \in (z,u)^4\mathbb{C}\{z,u\}$ — инвариант группы $\mathbb{Z}_2$*;

($cD/3$) $X \simeq \{\varphi(x,y,z,u) = 0\} \subset \frac{1}{3}(1,2,2,0)$, *где φ имеет одну из следующих форм*:

- **($cD/3$-1)** $\varphi = u^2 + x^3 + yz(y+z)$;
- **($cD/3$-2)** $\varphi = u^2 + x^3 + yz^2 + xy^4\lambda(y^3) + y^6\mu(y^3)$, *где $\lambda(y^3), \mu(y^3) \in \mathbb{C}\{y^3\}$ и $4\lambda^3 + 27\mu^2 \neq 0$*;
- **($cD/3$-3)** $\varphi = u^2 + x^3 + y^3 + xyz^3\alpha(z^3) + xz^4\beta(z^3) + yz^5\gamma(z^3) + z^6\delta(z^3)$, *где $\alpha(z^3), \beta(z^3), \gamma(z^3), \delta(z^3) \in \mathbb{C}\{z^3\}$*;

($cD/2$) $X \simeq \{\varphi(x,y,z,u) = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,0,1)$, *где φ имеет одну из следующих форм*:

- **($cD/2$-1)** $\varphi = u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c$, *где $a, b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$*;
- **($cD/2$-2)** $\varphi = u^2 + y^2z + \lambda yx^{2a+1} + g(x,z)$, *где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \geqslant 1$, $g(x,z) \in (x^4, x^2z^2, z^3)\mathbb{C}\{x,z\}$*;

($cE/2$) $X \simeq \{u^2 + x^3 + g(y,z)x + h(y,z) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1)$, *где $g(y,z) \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\}$, $h(y,z) \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\} \setminus (y,z)^5\mathbb{C}\{y,z\}$.*

Индекс особенности X равен порядку циклической группы $\mathbb{Z}_m$.

Теорема 2.2 ([5]). *Пусть X — одна из особенностей*

$$\{\varphi(x,y,z,u) = 0\} \subset \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_m,$$

перечисленных в теореме 2.1. Допустим, что $\varphi(x,y,z,u) = 0$ определяет изолированную особенность в 0 и что действие группы $\mathbb{Z}_m$ на X свободно вне 0. Тогда X терминальна.

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — сходящийся степенной ряд, причём $f(0) = 0$, $(\{f = 0\}, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ — изолированная особенность. Через $\Gamma(f)$ мы обозначаем диаграмму Ньютона ряда f. Если f невырожден по отношению к своей диаграмме Ньютона (далее просто *невырожден*), то для особенности $(\{f = 0\}, 0)$ существует вложенное торическое разрешение Варченко—Хованского (см. [11], там же определено понятие невырожденности). Однако если на $\mathbb{C}^n$ действует группа $\mathbb{Z}_m$ и f — её полуинвариант, то конструкция вложенного разрешения практически без изменений переносится и на фактор-особенность $(X, o) = (\{f = 0\}, 0)/\mathbb{Z}_m \subset \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$. При этом все необходимые торические многообразия и морфизмы строятся исходя из решётки N', двойственной к решётке M' инвариантных мономов группы $\mathbb{Z}_m$, $M' \subset \mathbb{Z}^n$. На это простое обобщение нам указал С. А. Кудрявцев.

Вложенное торическое разрешение $\pi\colon Y \to X$ особенности (X, o) строится как ограничение торического морфизма, соответствующего определённому разбиению неотрицательного октанта $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. Если Σ — соответствующий этому разбиению веер, то пусть $\widetilde{\mathbb{C}^n} = X(\Sigma, N')$ — торическое многообразие, построенное по вееру Σ, $\tilde{\pi}\colon \widetilde{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ — естественный бирациональный морфизм. Тогда π — это ограничение морфизма $\tilde{\pi}$ на собственный прообраз Y особенности X.

Исключительные дивизоры морфизма $\tilde{\pi}$ взаимно-однозначно соответствуют одномерным конусам веера Σ. Возьмём такой конус τ, рассмотрим его исключительный дивизор $E_\tau \subset \widetilde{\mathbb{C}^n}$ и положим $E_\tau|_Y = \sum m_j E_j$. Кроме этого, пусть $w = (w_1, \ldots, w_n)$ — примитивный вектор решётки N' вдоль конуса τ. Диаграмма $\Gamma(f)$ лежит в пространстве $(\mathbb{R}^n)^*$, двойственном к $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \otimes \mathbb{Z}^n$, соответствующее спаривание мы обозначаем через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Вычислим дискрепантность $a(E_j, X)$.

Лемма 2.3. *$a(E_j, X) = m_j(w_1 + w_2 + \ldots + w_n - 1 - w(f))$, где $w(f) = \min\{\langle w, v\rangle \mid v \in \Gamma(f)\}$.*

Доказательство. Рассуждая как в [11, § 10], получаем, что у общей точки E_τ в $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ есть аффинная окрестность $U \simeq \mathbb{C}^n$ с такими координатами $y_1, \ldots, y_n$, что уравнение $y_1 = 0$ определяет $E_\tau \cap U$ и морфизм $\tilde{\pi}|_U\colon U \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$ задан формулами

$$\begin{gathered} x_1 = y_1^{w_1} y_2^{a_1^2} \ldots y_n^{a_1^n}, \\ \ldots \\ x_n = y_1^{w_n} y_2^{a_n^2} \ldots y_n^{a_n^n} \end{gathered}$$

для некоторых $a^i = (a^i_1, \ldots, a^i_n) \in N' \cap \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$. Чтобы доказать лемму, остаётся только поднять дифференциальную форму $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ на U и применить формулу присоединения. □

Следствие 2.4. *Если $a(E_j, X) \leqslant 1$, то $w_1 + \ldots + w_n - 1 - w(f) \leqslant 1$.*

Заметим, что если векторы w, $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $e_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$, порождают решётку N', то исключительные дивизоры E_j бирационально изоморфны дивизорам $E_{w,j}$, $\sum E_{w,j} = E_w|_{X_w}$, где X_w — собственный прообраз многообразия X при взвешенном раздутии

$$\nu_w\colon \mathbb{C}^n_w \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m.$$

Это следует из того, что у любых двух разбиений неотрицательного октанта $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ есть общее подразбиение. Исключительный дивизор E_w взвешенного раздутия ν_w изоморфен взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$, а дивизор $\sum E_{w,j}$ задан в $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$ уравнением

$$f_{\rho(w)}(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где f_ρ — часть ряда f, соответствующая грани $\rho(w) = \{v \in \Gamma(f) \mid \langle w, v\rangle = w(f)\}$,

$$f_{\rho(w)} = \sum_{(m_1,\dots,m_n)\in\rho(w)} a_{m_1\dots m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

если

$$f = \sum_{(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} a_{m_1\dots m_n} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}.$$

Теперь буквами $x_1, \dots, x_n$ мы обозначаем квазиоднородные координаты в пространстве $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$. Далее мы часто используем эту вольность в обозначениях, их настоящий смысл везде ясен из контекста.

Пусть теперь векторы w, $e_1, \dots, e_n$ порождают некоторую подрешётку $N'' \subset N'$. Рассмотрим разбиение октанта $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ с помощью вектора w, т. е. веер Σ_w, состоящий из конусов $\sigma_i = \langle e_1, \dots, \underset{i}{w}, \dots, e_n\rangle$ и всех их граней. Полученный морфизм

$$\mu_w \colon \widetilde{\mathbb{C}^n_w} \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_m$$

уже не будет взвешенным раздутием. Мы будем называть его *псевдораздутием с весом* w. Легко показать, что его исключительный дивизор $\tilde{E}_w$ изоморфен $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)/G$, где $G = N'/N''$ — циклическая группа, а уравнение для $\sum \tilde{E}_{w,j}$ то же, что и выше.

Пусть теперь (X, o) — одна из терминальных особенностей теоремы 2.1, ν_w — её взвешенное раздутие или псевдораздутие, E_w — исключительный дивизор морфизма $\nu_w \colon X_w \to X$. Обозначим E' поверхность в $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$, накрывающую E_w (если ν_w — взвешенное раздутие, то $E' = E_w$).

Лемма 2.5. *Предположим, что поверхность E' неприводима и имеет только рациональные особенности. Тогда поверхность E_w рациональна.*

Доказательство. Поверхность E' можно рассматривать как дивизор над некоторой терминальной cDV-точкой. Возьмём разрешение $\pi \colon \tilde{E}' \to E'$ особенностей поверхности E'. По [9, следствие 2.14] E' бирационально линейчата. Значит, $P_2(\tilde{E}') = h^0(2K_{\tilde{E}'}) = 0$. С другой стороны, E' — гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$, следовательно, $h^1(\mathcal{O}_{E'}) = 0$. Так как E' имеет только рациональные особенности, $h^1(\mathcal{O}_{\tilde{E}'}) = h^1(\mathcal{O}_{E'}) = 0$. Поэтому $\tilde{E}'$ рациональна по критерию Кастельнуово, а следовательно, рациональна и E_w. □

Если у раздутия ν есть нерациональный исключительный дивизор, то мы будем иногда говорить, что раздутие ν нерационально.

3. Доказательство теоремы

3.1. Терминальные особенности типа $cAx/4$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cAx/4$, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = x^2 + y^2 + f(z,u) = 0\} \subset \frac{1}{4}(1,3,1,2),$$

где $f(z,u) \in \mathbb{C}\{z,u\}$ — полуинвариант группы $\mathbb{Z}_4$ и $u \notin f(z,u)$. Далее мы будем предполагать, что определяющий ряд φ невырожден. Тогда у особенности (X, o) есть вложенное торическое разрешение $\pi\colon Y \to X$. Дивизоры с центром в o и дискрепантностью $a \leqslant 1$ входят в любое дивизориальное разрешение X, поэтому если над (X, o) есть нерациональный дивизор E, $\operatorname{center}(E) = o$, $a(E,X) \leqslant 1$, то E присутствует и в разрешении π. Как мы видели в разделе 2, дивизор E бирационально изоморфен исключительному дивизору (или его неприводимой компоненте) некоторого взвешенного раздутия или псевдораздутия ν_w, который задаётся в $\mathbb{P}(w_1,w_2,w_3,w_4)$ (или в $\mathbb{P}(w_1,w_2,w_3,w_4)/G$) частью φ_w ряда φ. Очевидно, что для того чтобы E был нерациональным, многочлен φ_w должен содержать хотя бы один из мономов x^2 или y^2. Но если он содержит их оба, т. е. $\varphi_w = x^2 + y^2 + f_w(z,u)$, то в аффинной карте $u \neq 0$ поверхность E_w представляется как

$$\{x^2 + y^2 + f_w(z,1) = 0\} \subset \mathbb{C}^4/G_1,$$

а в карте $z \neq 0$ как

$$\{x^2 + y^2 + f_w(1,u) = 0\} \subset \mathbb{C}^4/G_2,$$

где G_1, G_2 — конечные циклические подгруппы в $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(3)$. Отсюда видно, что E_w имеет только рациональные особенности, а значит, по лемме 2.5 поверхность E_w рациональна. Следовательно, мы можем предполагать, что $\varphi_w = x^2 + f_w(z,u)$ или $\varphi_w = y^2 + f_w(z,u)$.

Так как φ — полуинвариант группы $\mathbb{Z}_4(1,3,1,2)$ и особенность (X, o) является изолированной, ряд f должен содержать моном u^{2n+1}. Если n — наименьшее число со свойством $u^{2n+1} \in f$, то будем говорить, что (X, o) имеет тип $cA_{2n}x/4$. Выясним теперь, какие раздутия и псевдораздутия особенности (X, o) типа $cA_{2n}x/4$ могут иметь нерациональные исключительные дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

Нам нужно найти такие примитивные векторы $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{4}(1,3,1,2)\mathbb{Z}$, что удовлетворяется одна из следующих групп условий:

(i) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_1 \leqslant 1$, $w_2 > w_1$, $(2n+1)w_4 \geqslant 2w_1$;
(ii) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_2 \leqslant 1$, $w_1 > w_2$, $(2n+1)w_4 \geqslant 2w_2$.

Предложение 3.1.1. *Пусть примитивный вектор $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{4}(1,3,1,2)\mathbb{Z}$ удовлетворяет группе условий* (i) *или* (ii). *Тогда w может быть только одним из следующих*:

1) $\frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant \frac{n}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
2) $\frac{1}{4}(4k+3, 4k+5, 3, 2)$, $k \leqslant \frac{n-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
3) $\frac{1}{4}(4k+5, 4k+3, 1, 2)$, $k \leqslant \frac{n-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
4) $\frac{1}{4}(4k+3, 4k+1, 3, 2)$, $k \leqslant \frac{n}{2}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Доказательство. Доказательство состоит в простой арифметической проверке. Например, пусть выполнено (i). Благодаря неравенству $w_2 > w_1$ неравенство для дискрепантности принимает вид $w_3 + w_4 < 2$. Учитывая, что $w_3 \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$, $w_4 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ и $2w_3 \equiv w_4 \mod \mathbb{Z}$, получаем следующие возможности:

$$w_4 = \frac{1}{2}, \quad w_3 = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4};$$
$$w_4 = 1, \quad w_3 = \frac{1}{2};$$
$$w_4 = \frac{3}{2}, \quad w_3 = \frac{1}{4}.$$

Пусть $(w_3, w_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Тогда имеем $w_2 - w_1 + \frac{3}{4} - 1 \leqslant 1$, т. е. $w_2 - w_1 \leqslant \frac{5}{4}$. С другой стороны, $w_1 \leqslant (2n+1)w_4 = \frac{n}{2} + \frac{1}{4}$. Из этих неравенств, учитывая также, что $w_1 \equiv w_3 \mod \mathbb{Z}$, получаем $w_1 = \frac{1}{4}(4k+1)$, $w_2 = \frac{1}{4}(4k+3)$, $k \leqslant \frac{n}{2}$, т. е. имеет место случай 1).

Если же, например, $(w_3, w_4) = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$, то $w_2 - w_1 \leqslant \frac{1}{4}$. Но этого не может быть, так как разность $w_2 - w_1$ всегда кратна $\frac{1}{2}$.

Аналогично рассматриваются и все остальные случаи. Далее подобные вычисления мы будем опускать. □

Заметим, что все векторы 1)—4) задают настоящие взвешенные раздутия, а не псевдораздутия.

Исключительный дивизор E_1 раздутия $\nu_1 = \frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$ (так мы коротко обозначаем взвешенное раздутие с весом $\frac{1}{4}(4k+1, 4k+3, 1, 2)$) определяется уравнением

$$\left\{x^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z, u) = 0\right\} \subset \mathbb{P}(4k+1, 4k+3, 1, 2).$$

Чтобы E_1 был нерациональным, он должен быть неприводим и приведён. Тогда

$$a(E_1, X) = \frac{1}{4}(4k+1+4k+3+1+2) - 1 - 2k - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Очевидно, E_1 представляет собой конус над гиперэллиптической кривой

$$C = \left\{x^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z, u) = 0\right\} \subset \mathbb{P}(4k+1, 1, 2).$$

Род кривой на взвешенной проективной плоскости может быть найден методами [2]. Род кривой C равен $g(C) \leqslant 2k$.

Исключительный дивизор E_2 раздутия $\nu_2 = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+5, 3, 2)$ определяется уравнением

$$\left\{x^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z, u) = 0\right\} \subset \mathbb{P}(4k+3, 4k+5, 3, 2).$$

Если он неприводим и приведён, то $a(E_2) = \frac{3}{4}$. Дивизор E_2 является конусом над гиперэллиптической кривой рода

$$g \leqslant \begin{cases} 2m-1, & k=3m, \\ 2m+1, & k=3m+1, \\ 2m+2, & k=3m+2. \end{cases}$$

Исключительный дивизор E_3 раздутия $\nu_3 = \frac{1}{4}(4k+5, 4k+3, 1, 2)$ определяется уравнением

$$\left\{y^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z,u) = 0\right\} \subset \mathbb{P}(4k+5, 4k+3, 1, 2).$$

Если E_3 неприводим и приведён, то $a(E_3) = \frac{1}{4}$. Как поверхность E_3 представляет собой конус над гиперэллиптической кривой рода $g \leqslant 2k+1$.

Исключительный дивизор E_4 раздутия $\nu_4 = \frac{1}{4}(4k+3, 4k+1, 3, 2)$ определяется уравнением

$$\left\{y^2 + f_{2k+\frac{1}{2}}(z,u) = 0\right\} \subset \mathbb{P}(4k+3, 4k+1, 3, 2).$$

Если E_4 неприводим и приведён, то $a(E_4) = \frac{3}{4}$. Дивизор E_4 является конусом над гиперэллиптической кривой рода

$$g \leqslant \begin{cases} 2m, & k=3m, \\ 2m+1, & k=3m+1 \text{ или } k=3m+2. \end{cases}$$

Ясно, что для фиксированной особенности (X,o) раздутия ν_1 и ν_3, ν_2 и ν_4 не могут одновременно иметь нерациональные исключительные дивизоры. Действительно, допустим, что ν_1 нерационально. Тогда при весах $w(z)=1$, $w(u)=2$ функция f имеет вес $w(f) = 8k_1+2$. Но если ν_3 тоже нерационально, то $w(f) = 8k_2+6$, противоречие. Остальные пары раздутий могут быть одновременно нерациональными.

Пример 3.1.2. Рассмотрим особенность

$$\{x^2+y^2+z^{18}+z^6u^6+u^{15}=0\} \subset \frac{1}{4}(1,3,1,2)$$

типа $cA_{14}x/4$. Сделаем раздутия $\nu_1 = \frac{1}{4}(9,11,1,2)$ и $\nu_2 = \frac{1}{4}(15,17,3,2)$. Исключительный дивизор первого

$$E_1\colon \{x^2+z^{18}+z^6u^6=0\} \subset \mathbb{P}(9,11,1,2)$$

является конусом над особой кривой рода $g=2$. Исключительный дивизор второго

$$E_2\colon \{x^2+z^6u^6+u^{15}=0\} \subset \mathbb{P}(15,17,3,2)$$

является конусом над особой кривой рода $g=1$.

Таким образом, мы видим, что над невырожденной особенностью типа $cAx/4$ может быть не более двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

3.2. Терминальные особенности типа $cAx/2$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cAx/2$, т. е.

$$X \simeq \{x^2 + y^2 + f(z, u) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1), \tag{3.2.1}$$

где $f(z, u) \in (z, u)^4\mathbb{C}\{z, u\}$ — инвариант группы $\mathbb{Z}_2$. Здесь наше рассуждение не зависит от того, вырожденна данная особенность или нет. Следуя [3, § 8], допустим, что при весах $w(z) = w(u) = \frac{1}{2}$ вес $w(f)$ ряда f равен k. При чётном k сделаем взвешенное раздутие $\nu_0 = \frac{1}{2}(k, k+1, 1, 1)$, а при нечётном — $\nu_1 = \frac{1}{2}(k+1, k, 1, 1)$. Далее мы рассмотрим только ν_0, раздутие ν_1 рассматривается аналогично.

Имеем $\nu_0\colon \widetilde{\mathbb{C}^4} \to \mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_2(0, 1, 1, 1)$, и многообразие $\widetilde{\mathbb{C}^4}$ покрывается четырьмя аффинными картами. В первой карте $U_1 \simeq \frac{1}{k}(1, -1, -1, -1)$ собственный прообраз $\tilde{X}$ особенности X задан уравнением

$$1 + xy^2 + f_k(z, u) + x(\ldots) = 0.$$

Легко видеть, что в U_1 многообразие $\tilde{X}$ неособо. Во второй карте $U_2 \simeq \frac{1}{k+1}(1, 1, -1, -1)$ многообразие $\tilde{X} \cap U_2$ задано уравнением

$$x^2 + y + f_k(z, u) + y(\ldots) = 0.$$

Здесь $\tilde{X}$ негоренштейново только в начале координат, где имеет циклическую терминальную фактор-особенность типа $\frac{1}{k+1}(1, -1, -1)$. Третья и четвёртая карты изоморфны $\mathbb{C}^4$. Например, в третьей $\tilde{X} \cap U_3$ задано уравнением

$$x^2 + y^2 z + f_k(1, u) + z(\ldots) = 0.$$

Так как (X, o) — изолированная особенность, здесь особенности могут лежать только на исключительном дивизоре $\{z = 0\}$. Ясно, что все они — изолированные cDV-точки. Аналогично и в четвёртой карте многообразие $\tilde{X}$ может иметь только изолированные cDV-особенности.

Пусть E — исключительный дивизор раздутия ν_0 особенности (X, o). Имеем

$$E \simeq \{x^2 + f_k(z, u) = 0\} \subset \mathbb{P}(k, k+1, 1, 1).$$

Если E нерационален, то он неприводим и приведён, дискрепантность $a(E, X)$ равна $\frac{1}{2}(k + k + 1 + 1 + 1) - 1 - k = \frac{1}{2}$, и как поверхность E представляет собой конус над гиперэллиптической кривой рода $g \leqslant k - 1$.

Возьмём произвольное разрешение $\pi\colon Y \to \tilde{X} \xrightarrow{\nu_0} X$. Все нерациональные дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$ должны присутствовать в π. Но cDV-особенности многообразия $\tilde{X}$ дают дивизоры с дискрепантностями $a(E_i, \tilde{X}) \geqslant 1$, а следовательно, $a(E_i, X) > 1$. Разрешение циклической фактор-особенности из второй карты многообразия $\tilde{X}$ содержит с дискрепантностями $\leqslant 1$ только рациональные дивизоры. Значит, E — единственный нерациональный дивизор с $a \leqslant 1$ над особенностью (X, o). Мы доказали следующее утверждение.

Предложение 3.2.1. *Произвольное разрешение особенности* (X, o) *типа* $cAx/2$ *содержит не более одного нерационального дивизора* E, *такого что* $a(E, X) \leqslant 1$ *и* $\mathrm{center}_X(E) = o$. *Пусть* (X, o) *задана уравнением* (3.2.1). *Тогда если* k *чётно, то нерациональный дивизор* E *является исключительным дивизором раздутия* $\nu_0 = \frac{1}{2}(k, k+1, 1, 1)$, *а если* k *нечётно, то раздутия* $\nu_1 = \frac{1}{2}(k+1, k, 1, 1)$. *В обоих случаях* E *представляет собой конус над гиперэллиптической кривой рода* $g \leqslant k - 1$.

Пример 3.2.2. Рассмотрим особенность

$$\{x^2 + y^2 + z^6 + u^6 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1)$$

и её взвешенное раздутие $\frac{1}{2}(4, 3, 1, 1)$. Его исключительный дивизор

$$E \simeq \{y^2 + z^6 + u^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(4, 3, 1, 1) \text{ —}$$

конус над кривой рода 2.

3.3. Терминальные особенности типа $cD/3$

3.3.1. $cD/3$-1

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/3$-1, т. е.

$$X \simeq \{u^2 + x^3 + yz(y + z) = 0\} \subset \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0).$$

Это совершенно конкретная особенность, и для неё можно явно построить разрешение. Нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$ над (X, o) нет.

3.3.2. $cD/3$-2

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/3$-2, т. е.

$$X \simeq \{u^2 + x^3 + yz^2 + xy^4\lambda(y^3) + y^6\mu(y^3) = 0\} \subset \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0), \tag{3.3.1}$$

где $\lambda(y^3), \mu(y^3) \in \mathbb{C}\{y^3\}$ и $4\lambda^3 + 27\mu^2 \neq 0$. Заметим, что последнее условие обеспечивает невырожденность особенности (X, o). Однако мы не будем использовать вложенное торическое разрешение, а поступим как при исследовании случая $cAx/2$ в разделе 3.2.

Рассмотрим взвешенное раздутие $\nu = \frac{1}{3}(2, 1, 4, 3)$ (см. [3, § 9]) данной особенности. Легко проверить, что в первой, второй и четвёртой аффинных картах раздутое многообразие $\tilde{X}$ неособо, а в третьей карте $U_3 \simeq \frac{1}{4}(2, 3, 3, 1)$

$$\tilde{X}_3 = \tilde{X} \cap U_3 \simeq \{u^2 + x^3 + yz + \lambda_0 xy^4 + \mu_0 y^6 + z(\ldots) = 0\}.$$

В начале координат $\tilde{X}_3$ имеет особенность, аналитически изоморфную

$$\{u^2 + y^2 + z^2 + x^3 = 0\} \subset \frac{1}{4}(2, 3, 3, 1).$$

Она, очевидно, имеет тип $cAx/4$ и невырожденна. Все раздутия $cAx/4$-особенностей с нерациональными дивизорами малых дискрепантностей описаны нами в разделе 3.1. Проверив их все поочерёдно, убеждаемся, что в данном случае их исключительные дивизоры рациональны. Отсюда следует, что для исходной особенности (X, o) нерациональным может быть только раздутие ν. Его исключительный дивизор имеет вид

$$E = \{u^2 + x^3 + \lambda_0 xy^4 + \mu_0 y^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 1, 4, 3).$$

Это конус над кривой рода $g \leqslant 1$. Дискрепантность $a(E, X)$ равна $\frac{1}{3}(2+1+4+3) - 1 - 2 = \frac{1}{3}$. Нами доказано следующее утверждение.

Предложение 3.3.1. *Над терминальной особенностью (X, o) типа $cD/3$-2 может быть не более одного нерационального дивизора E с дискрепантностью $a \leqslant 1$. Если X задана уравнением* (3.3.1)*, то нерациональный дивизор E бирационально изоморфен исключительному дивизору раздутия $\frac{1}{3}(2, 1, 4, 3)$ и является конусом над кривой рода* 1.

3.3.3. $cD/3$-3

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/3$-3, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + x^3 + y^3 + xyz^3\alpha(z^3) + xz^4\beta(z^3) + yz^5\gamma(z^3) + z^6\delta(z^3)\},$$

где $\alpha(z^3), \beta(z^3), \gamma(z^3), \delta(z^3) \in \mathbb{C}\{z^3\}$. Здесь мы дополнительно предположим, что определяющий ряд φ невырожден. Если E — нерациональный дивизор с $a(E, X) \leqslant 1$ и $\operatorname{center}_X(E) = o$, то, как и в разделе 3.1, мы можем рассматривать его как исключительный дивизор некоторого взвешенного раздутия или псевдораздутия. Пусть w — вес этого раздутия. Диаграмма Ньютона $\Gamma(f)$ натянута на мономы u^2, x^3, y^3, xyz^{3b_1}, xz^{4+3b_2}, yz^{5+3b_3}, z^{6+3b_4}, где $b_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Поэтому если E нерационален, то его уравнение φ_w содержит мономы u^2 и x^3, u^2 и y^3 или x^2 и y^3. Воспользовавшись ещё условием $a(E) \leqslant 1$, мы приходим к следующей задаче: найти такие примитивные векторы $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)\mathbb{Z}$, что удовлетворяется одна из следующих групп условий:

(i) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_4 \leqslant 1$, $2w_4 = 3w_1$, $3w_2 \geqslant 2w_4$;
(ii) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_4 \leqslant 1$, $2w_4 < 3w_1$, $3w_2 = 2w_4$;
(iii) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_1 \leqslant 1$, $w_1 = w_2$, $2w_4 > w_1$.

Предложение 3.3.2. *Пусть примитивный вектор $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{3}(1, 2, 2, 0)\mathbb{Z}$ удовлетворяет одной из групп условий* (i), (ii) *или* (iii). *Тогда w может быть только одним из следующих*:

1) $\frac{1}{3}(5, 4, 1, 6)$;
2) $\frac{1}{3}(2, 4, 1, 3)$;
3) $\frac{1}{3}(4, 5, 2, 6)$;
4) $(2, 2, 1, 3)$.

Доказательство. Доказательство состоит в простой арифметической проверке. □

Заметим, что вес 4) соответствует псевдораздутию, остальные — обычным взвешенным раздутиям.

Исключительный дивизор E_1 раздутия $\nu_1 = \frac{1}{3}(5,4,1,6)$ определяется в $\mathbb{P}(5,4,1,6)$ уравнением

$$u^2 + y^3 + \gamma_1 yt^8 + \delta_2 z^{12} = 0.$$

(Напомним, что мы предполагаем, что E_1 нерационален. Отсюда следует, что $\alpha_0 = \beta_0 = \beta_1 = \gamma_0 = \delta_0 = \delta_1 = 0$.) Дискрепантность $a(E)$ равна $\frac{1}{3}$. Дивизор E представляет собой конус над кривой рода 1.

Исключительный дивизор E_2 раздутия $\nu_2 = \frac{1}{3}(2,4,1,3)$ определяется в $\mathbb{P}(2,4,1,3)$ уравнением

$$u^2 + x^3 + \beta_0 xz^4 + \delta_0 z^6 = 0.$$

Дискрепантность $a(E_2)$ равна $\frac{1}{3}$, и E_2 снова оказывается конусом над кривой рода 1.

Исключительный дивизор E_3 раздутия $\nu_3 = \frac{1}{3}(4,5,2,6)$ определяется в $\mathbb{P}(4,5,2,6)$ уравнением

$$u^2 + x^3 + \beta_0 xz^4 + \delta_0 z^6 = 0.$$

Следовательно,

$$E_3 \simeq \{u^2 + x^3 + \beta_0 xz^4 + \delta_0 z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,5,1,3).$$

Это снова конус над кривой рода 1. Дискрепантность $a(E_3)$ равна $\frac{2}{3}$.

Исключительный дивизор E_4 раздутия $\nu_4 = (2,2,1,3)$ определяется как

$$E_4 \simeq \{u^2 + x^3 + y^3 + \beta_0 xz^4 + \delta_0 z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,2,1,3)/G,$$

где G — некоторая циклическая группа. Но поверхность

$$\{u^2 + x^3 + y^3 + \beta_0 xz^4 + \delta_0 z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,2,1,3)$$

имеет лишь рациональные особенности. По лемме 2.5 поверхность E_4 рациональна.

Ясно, что раздутия ν_1 и ν_2, ν_1 и ν_3 не могут быть одновременно нерациональными. Раздутия ν_2 и ν_3 могут, и, более того, если одно из них нерационально, то и другое тоже.

Пример 3.3.3. Рассмотрим особенность

$$\{u^2 + x^3 + y^3 + z^6 = 0\} \subset \frac{1}{3}(1,2,2,0)$$

типа $cD/3$-3 и её раздутия ν_2 и ν_3. Их исключительные дивизоры

$$E_2 = \{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,4,1,3) \text{ и } E_3 = \{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2,5,1,3) —$$

конусы над эллиптическими кривыми. Интересно, что они заданы одинаковыми уравнениями. Но раздутия ν_2 и ν_3 не изоморфны, например, потому, что их дискрепантности различны: $a(E_2) = \frac{1}{3}$, $a(E_3) = \frac{2}{3}$.

Таким образом, над особенностью типа $cD/3$-3 может быть не более двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

3.4. Терминальные особенности типа $cD/2$

3.4.1. $cD/2$-1

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/2$-1, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + xyz + x^{2a} + y^{2b} + z^c = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,0,1),$$

где $a, b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$. Эта особенность невырожденна. Значит, все дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$ соответствуют граням диаграммы Ньютона $\Gamma(\varphi)$. Простым перебором всех граней можно убедиться, что нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$ над данной особенностью нет.

3.4.2. $cD/2$-2

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cD/2$-2, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + y^2 z + \lambda y x^{2a+1} + g(x,z) = 0\} \subset \frac{1}{2}(1,1,0,1),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \geqslant 1$, $g(x,z) \in (x^4, x^2z^2, z^3)\mathbb{C}\{x,z\}$. Здесь мы будем предполагать, что ряд φ невырожден. Так как особенность (X, o) является изолированной и функция g $\mathbb{Z}_2$-инвариантна, в g входит моном вида z^{n-1}. Если n — наименьшее натуральное число с таким свойством, то будем говорить, что (X, o) имеет тип $cD_n/2$-2.

Дивизоры с дискрепантностью $a \leqslant 1$ над (X, o) соответствуют граням диаграммы Ньютона $\Gamma(\varphi)$. Аналогично тому, как это делалось в разделах 3.1 и 3.3.3, мы приходим к следующей задаче: найти такие примитивные векторы $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, что удовлетворяется одна из следующих групп условий:

(i) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_4 \leqslant 1$, $2w_2 + w_3 \geqslant 2w_4$, $(n-1)w_3 \geqslant 2w_4$;

(ii) $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 - 1 - 2w_2 - w_3 \leqslant 1$, $2w_4 > 2w_2 + w_3$, $(n-1)w_3 \geqslant 2w_4$.

Ответ даёт следующее утверждение.

Предложение 3.4.1. *Пусть примитивный вектор $w \in \mathbb{Z}^4 + \frac{1}{2}(1,1,0,1)\mathbb{Z}$ удовлетворяет условиям одной из групп* (i) *или* (ii). *Тогда w может быть только одним из следующих*:

1) $\frac{1}{2}(1, m, 2, m)$, $m = 2k-1$, $m \leqslant n-1$;
2) $\frac{1}{2}(1, m-2, 4, m)$, $m = 2k-1$, $m \leqslant 2(n-1)$;
3) $\frac{1}{2}(1, m-1, 2, m+1)$, $m = 2k$, $m \leqslant n-1$;
4) $(1, k, 2, k)$, $k \leqslant \frac{n-1}{2}$;
5) $(1, k-1, 2, k)$, $k \leqslant n-1$;
6) $(1, k-1, 1, k)$, $k \leqslant \frac{n}{2}$.

Доказательство. Доказательство состоит в простой арифметической проверке. □

Раздутия $\nu_1 = \frac{1}{2}(1, m, 2, m)$, $\nu_2 = \frac{1}{2}(1, m-2, 4, m)$, $\nu_3 = \frac{1}{2}(1, m-1, 2, m+1)$ являются взвешенными раздутиями, а $\nu_4 = (1, k, 2, k)$, $\nu_5 = (1, k-1, 2, k)$ и $\nu_6 = (1, k-1, 1, k)$ — псевдораздутиями. Можно проверить, что на самом деле только раздутия ν_1, ν_3 (с дискрепантностью $a = \frac{1}{2}$), ν_4, ν_6 (с дискрепантностью $a = 1$) могут быть нерациональными.

Пример 3.4.2. Рассмотрим особенность

$$\{u^2 + y^2 z + z^{2k} + x^{2k} = 0\} \subset \frac{1}{2}(1, 1, 0, 1)$$

типа $cD_{2k+1}/2$ и её псевдораздутие $\nu_4 = (1, k, 1, k)$. Допустим, что k чётное. Тогда аффинная карта $U_1 = X(\sigma_1, N')$ раздутого многообразия $\widetilde{\mathbb{C}^4}_{(1,k,1,k)}$ (обозначения из раздела 2) изоморфна $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_2(1, 1-k, -1, 1-k) = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$. Имеем

$$\tilde{X} \cap U_1 = \{y_4^2 + y_1 y_2^2 y_3 + y_3^{2k} + 1 = 0\} \subset \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1),$$

исключительный дивизор $(y_1 = 0)$

$$E \simeq \{y_4^2 + y_3^{2k} + 1 = 0\} \subset \frac{1}{2}(1, 1, 1) \text{ — }$$

конус над кривой

$$\{y_4^2 + y_3^{2k} + 1 = 0\} \subset \frac{1}{2}(1, 1).$$

Здесь y_i — координаты в U_1. Это гиперэллиптическая кривая рода $\frac{k}{2}$.

Для раздутий ν_1, ν_3, ν_4, ν_6 исключительный дивизор — конус над гиперэллиптической кривой рода $g \leqslant k-1$ для ν_1, $g \leqslant k$ для ν_3, $g \leqslant \frac{k}{2}$ при чётном k и $g \leqslant \frac{k-1}{2}$ при нечётном k для ν_4, $g \leqslant \frac{k-1}{2}$ при нечётном k и $g \leqslant \frac{k-2}{2}$ при чётном k для ν_6. В последнем случае исключительный дивизор E_6 распадается на две компоненты, одна из которых рациональна.

Пары раздутий ν_1 и ν_3, ν_4 и ν_6 не могут, а остальные могут быть одновременно нерациональными.

Пример 3.4.3. Рассмотрим особенность

$$\{u^2 + y^2 z + z^{12} + z^6 x^6 + x^{18} = 0\} \subset \frac{1}{2}(1, 1, 0, 1)$$

типа $cD_{13}/2$-2 и её взвешенное раздутие $\nu_1 = \frac{1}{2}(1, 9, 2, 9)$ и псевдораздутие $\nu_4 = (1, 6, 1, 6)$.

Для исключительных дивизоров имеем

$$E_1 = \{u^2 + z^6 x^6 + x^{18} = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 9, 2, 9) \text{ — }$$

конус над особой кривой рода 2,

$$E_4 = \{u^2 + z^{12} + z^6 x^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 6, 1, 6)/\mathbb{Z}_2 \text{ — }$$

конус над особой кривой рода 1.

Таким образом, над особенностью типа $cD/2$-2 может быть не больше двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

3.5. Терминальные особенности типа $cE/2$

Рассмотрим особенность (X, o) типа $cE/2$, т. е.

$$X \simeq \{\varphi = u^2 + x^3 + g(y,z)x + h(y,z) = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1),$$

где $g(y,z) \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\}$, $h(y,z) \in (y,z)^4\mathbb{C}\{y,z\} \setminus (y,z)^5\mathbb{C}\{y,z\}$. Мы будем предполагать, что ряд φ невырожден. Кроме этого, переставляя, если нужно, y и z, можно считать, что либо $y^4 \in h(y,z)$, либо $y^3z \in h(y,z)$, либо $y^2z^2 \in h(y,z)$. Рассуждения в этом случае полностью аналогичны проведённым в разделах 3.1, 3.3.3 и 3.4.2, поэтому мы ограничимся формулировкой окончательных результатов.

Для $cE/2$-особенностей, как и для других, нерациональные дивизоры реализуются некоторыми взвешенными раздутиями и псевдораздутиями и оказываются конусами. В следующем предложении мы перечислим все возможные нерациональные раздутия и для каждого из них укажем дискрепантность исключительного дивизора и род соответствующей кривой.

Предложение 3.5.1 (ср. [3, § 10]). *Пусть E — такой дивизор над особенностью (X, o), что $\operatorname{center}_X(E) = o$ и $a(E,X) \leqslant 1$. Тогда E бирационально изоморфен исключительному дивизору одного из следующих раздутий:*

1) $\nu_1 = \frac{1}{2}(2,3,1,3)$, $a = \frac{1}{2}$, $g = 1$;
2) $\nu_2 = \frac{1}{2}(2,1,3,3)$, $a = \frac{1}{2}$, $g = 1$;
3) $\nu_3 = \frac{1}{2}(4,3,1,5)$, $a = \frac{1}{2}$, $g = 1$;
4) $\nu_4 = \frac{1}{2}(4,3,1,7)$, $a = \frac{1}{2}$, $g \leqslant 3$;
5) $\nu_5 = \frac{1}{2}(6,5,1,9)$, $a = \frac{1}{2}$, $g = 1$;
6) $\nu_6 = (2,2,1,3)$, $a = 1$, $g = 1$;
7) $\nu_7 = (3,2,1,4)$, $a = 1$, $g = 1$.

Заметим, что кривая для раздутия ν_4 не обязательно гиперэллиптическая.

Пример 3.5.2. Имеем

$$\{u^2 + x^3 + y^3 + z^{12} = 0\} \subset \frac{1}{2}(0,1,1,1).$$

Исключительный дивизор псевдораздутия ν_4 задаётся уравнением

$$\{x^3 + y^4 + z^{12} = 0\} \subset \mathbb{P}(4,3,1,7).$$

Он представляет собой конус над негиперэллиптической кривой рода 3.

Одновременно нерациональными могут быть только следующие пары раздутий: ν_1 и ν_2, ν_1 и ν_6.

Пример 3.5.3. Имеем

$$\{u^2 + x^3 + y^2z^2 + y^6 + z^6 = 0\} \subset \frac{1}{2}(0, 1, 1, 1).$$

Исключительный дивизор раздутия ν_1

$$\{u^2 + x^3 + z^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 3, 1, 3)$$

и раздутия ν_2

$$\{u^2 + x^3 + y^6 = 0\} \subset \mathbb{P}(2, 1, 3, 3)$$

являются конусами над эллиптическими кривыми.

Следовательно, над невырожденной особенностью типа $cE/2$ существует не более двух нерациональных дивизоров с дискрепантностью $a \leqslant 1$.

Литература

[1] Степанов Д. А. О разрешениях терминальных особенностей // Мат. заметки. — В печати.

[2] Dolgachev I. Weighted projective spaces // Group Actions and Vector Fields. Lecture Notes in Math. Vol. 956. — Springer, 1982. — P. 34—71.

[3] Hayakawa T. Blowing ups of 3-dimensional terminal singularities // Publ. RIMS, Kyoto Univ. — 1999. — Vol. 35. — P. 515—570.

[4] Kawamata Y. The minimal discrepancy of a 3-fold singularity, appendix to Shokurov, V. V., 3-fold logflips // Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Mat. — 1993. — Vol. 40, no. 1. — P. 93—202.

[5] Kollár J., Shepard-Barron N. Threefolds and deformations of surface singularities. — Invent. Math. — 1988. — Vol. 91. — P. 299—338.

[6] Markushevich D. Minimal discrepancy for a terminal cDV singularity is 1 // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. — 1996. — Vol. 3. — P. 445—456.

[7] Mori S. On 3-dimensional terminal singularities // Nagoya Math. J. — 1985. — Vol. 98. — P. 43—66.

[8] Prokhorov Yu. G. $\mathbb{E}$1-blowing ups of terminal singularities // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 115, no. 3. — P. 2395—2427.

[9] Reid M. Canonical 3-folds // Journées Géométrie Algébrique d'Angers / ed. A. Beauville. — Alphen: Sijthoff and Noordhoff, 1980. — P. 273—310.

[10] Stepanov D. A. Non-rational divisors over non-degenerate cDV-points. — arXiv:math.AG/0407350.

[11] Varchenko A. N. Zeta-function of monodromy and Newton's diagram // Invent. Math. — 1976. — Vol. 37. — P. 253—262.