Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$ и вычисление универсальной R-матрицы

В. А. СТУКОПИН
Донской государственный
технический университет
e-mail: stukopin@math.rsu.ru

УДК 512.667.7+512.554.32

Ключевые слова: квантовый дубль, янгиан, янгианный дубль, универсальная R-матрица, алгебра Хопфа, квантовая алгебра.

Аннотация

Дубль янгиана $DY(A(m,n))$ супералгебры Ли типа $A(m,n)$ описан в терминах образующих и соотношений. Для янгиана и его квантового дубля доказана возможность треугольного разложения как следствие PBW теоремы. Введены нормально упорядоченные базисы в янгиане и двойственной ему в квантовом дубле подсупералгебре Хопфа. Вычислены формулы спаривания между элементами этих базисов. Получена формула для универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана. Получена также формула для универсальной R-матрицы янгиана, введённой В. Г. Дринфельдом, в терминах образующих янгиана.

Abstract

V. A. Stukopin, The quantum double of the Yangian of the Lie superalgebra $A(m,n)$ and computation of the universal R-matrix, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 185—208.

The Yangian double $DY(A(m,n))$ of the Lie superalgebra $A(m,n)$ is described in terms of generators and defining relations. We prove the triangular decomposition for Yangian $Y(A(m,n))$ and its quantum double $DY(A(m,n))$ as a corollary of the PBW theorem. We introduce normally ordered bases in the Yangian and its dual Hopf superalgebra in the quantum double. We calculate the pairing formulas between the elements of these bases. We obtain the formula for the universal R-matrix of the Yangian double. The formula for the universal R-matrix of the Yangian, which was introduced by V. Drinfel'd, is also obtained.

1. Введение

В последние годы наряду с янгианами простых (и редуктивных) алгебр Ли стали изучаться янгианы классических супералгебр Ли [4, 15, 16].

Само понятие янгиана простой алгебры Ли было введено В. Г. Дринфельдом как квантование биалгебры Ли полиномиальных токов (со значениями в этой

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 185—208.

простой алгебре Ли и со структурой коалгебры Ли, задаваемой рациональной r-матрицей Янга). Но изучение двойственного к янгиану объекта (для полной линейной алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$) было начато ранее в рамках квантового метода обратной задачи рассеяния. В. Г. Дринфельд показал, что он изоморфен янгиану. Во многих работах используется именно такое задание янгиана в терминах образующих, являющихся матричными элементами неприводимых представлений янгиана в смысле В. Г. Дринфельда. Как отмечено выше, эти два языка, по существу, изоморфны, и их использование диктуется решаемыми задачами. В [4] был определён янгиан супералгебры Ли типа $A(m,n)$ в рамках подхода В. Г. Дринфельда и были сформулированы для него теорема Пуанкаре—Биркгофа—Витта (PBW-теорема) и теорема о существовании псевдотреугольной структуры, т. е. о существовании универсальной R-матрицы. Данная работа является естественным продолжением [4], и конечным её результатом является получение точной формулы для универсальной R-матрицы. Как следствие мы также получаем такую формулу и для частного случая янгиана алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Напомним, что универсальная R-матрица янгиана $Y(\mathfrak{g})$ простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ была введена В. Г. Дринфельдом [3, 9] как формальный ряд

$$R(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} R_k \lambda^{-k-1}$$

с коэффициентами $R_k \in Y(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, который сплетает коумножение Δ и противоположное коумножение $\Delta' = \tau \circ \Delta$, $\tau(x \otimes y = y \otimes x)$ $(\tau(x \otimes y = (-1)^{\deg(x)\deg(y)} y \otimes x)$ для супералгебр Ли; точные определения будут даны ниже). Точнее говоря, $R(\lambda)$ сплетает образы Δ и Δ' под действием оператора $\mathrm{id} \otimes T_\lambda$, где T_λ — квантовый аналог оператора сдвига, а id — тождественный оператор. Матрица $R(\lambda)$ ведёт себя так, как будто она является образом под действием $\mathrm{id} \otimes T_\lambda$ некоторой гипотетической R-матрицы R, сплетающей Δ и Δ' (которой не существует). Наличие такого ряда В. Г. Дринфельд назвал псевдотреугольной структурой и доказал её существование для $Y(\mathfrak{g})$, когда $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Точные формулы для $R(\lambda)$ до сих пор получены не были. Если посмотреть на классические аналоги понятий $R(\lambda)$ и R, именно на классические r-матрицы $r(\lambda)$ и r, то r является элементом топологического тензорного квадрата классического дубля, $r(\lambda) = (\mathrm{id} \otimes T_\lambda)r$, где $T_\lambda f(u) = f(u+\lambda)$ — оператор сдвига. Поэтому естественно ожидать, что и в квантовом случае $R(\lambda)$ будет образом под действием квантового оператора сдвига $\mathrm{id} \otimes T_\lambda$ универсальной R-матрицы квантового дубля янгиана R. Когда В. Г. Дринфельд вводил понятие псевдотреугольной структуры, не было хорошего описания квантового дубля янгиана в терминах образующих и соотношений. Но в середине 90-х годов С. М. Хорошкин и В. Н. Толстой получили описание дубля в терминах образующих и соотношений и вычислили мультипликативную формулу для универсальной R-матрицы дубля янгиана (см. [12]).

В этой работе мы описываем квантовый дубль $DY(\mathfrak{g})$ янгиана для супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$ в терминах образующих и соотношений. Мы также вычисляем универсальную R-матрицу янгианного дубля, следуя схеме работы [12]. Основной результат данной работы — такая формула для универсальной R-матрицы, представленная в факторизованной форме в виде произведения трёх сомножителей, каждый из которых является бесконечным произведением. Здесь следует отметить, что вычисление этой формулы основано, по существу, на тех же идеях, что и вычисление универсальной R-матрицы квантованной универсальной обёртывающей аффинной алгебры Ли (см. [5, 14]). В [14] при получении мультипликативной формулы для универсальной R-матрицы использовалась квантовая группа Вейля. В случае янгианного дубля, и тем более янгианного дубля супералгебры Ли, нет полного аналога группы Вейля. Тем не менее частичные аналоги и наводящие соображения используются в полной мере. (Именно, оператор t^{∞} можно рассматривать как некий аналог бесконечного старшего элемента аффинной группы Вейля, в терминах аналогов элементов группы Вейля может быть проинтерпретирован твист F, который используется при построении универсальной R-матрицы.) После того как формула для универсальной R-матрицы дубля янгиана получена, мы вычисляем универсальную R-матрицу янгиана, просто применяя к полученной формуле оператор $\mathrm{id} \otimes T_{\lambda}$. Существенным при этом оказывается вычисление действия оператора T_{λ} на образующих двойственной к янгиану супералгебры Хопфа.

2. Квантовый дубль янгиана супералгебры Ли типа $A(m,n)$

Напомним, что янгиан $Y(\mathfrak{g})$ базисной супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [10, 11]) — это деформация универсальной обёртывающей супералгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}[t]$ полиномиальных токов. При этом структура бисупералгебры Ли определяется коциклом $\delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$

$$\delta\colon a(u) \to [a(u) \otimes 1 + 1 \otimes a(v), r(u,v)], \tag{2.1}$$

где

$$r(u,v) = \frac{\mathfrak{t}}{u-v},$$

а $\mathfrak{t}$ — оператор Казимира, определяемый невырожденным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ на базисной супералгебре Ли $\mathfrak{g}$ (которое существует на базисной супералгебре Ли [10]). Другими словами, пусть $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ двойственные относительно этого скалярного произведения базисы в $\mathfrak{g}$, тогда $\mathfrak{t} = \sum\limits_i e_i \otimes e^i$. Ниже пусть $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Как и всякая базисная супералгебра Ли, $\mathfrak{g}$ определяется своей матрицей Картана $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m+n+1}$. Её ненулевые элементы имеют следующий вид: $a_{i,i} = 2$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1$ при $i < m+1$, $a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1$, $a_{i,i} = -2$ при $m+1 < i$, $i \in I = \{1, \ldots, m+n+1\}$. Базисная супералгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается образующими h_i, $x_i^{\pm}$, $i \in I$, причём образующие $x_{m+1}^{\pm}$ нечётные, а остальные образующие чётные, т. е. функция чётности принимает на них следующие значения: $p(h_i) = 0$, $i \in I$, $p(x_j^\pm) = 0$, $j \neq m+1$, $p(x_{m+1}^\pm) = 1$. Эти образующие удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, x_j^\pm] = \pm a_{ij} x_j^\pm, \quad [x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i,$$
$$[[x_{m+1}^\pm, x_{m+2}^\pm], [x_{m+2}^\pm, x_{m+1}^\pm]] = 0, \quad [x_i^\pm, [x_i^\pm, x_j^\pm]] = 0.$$

Как обычно, $[\cdot,\cdot]$ обозначает суперкоммутатор:

$$[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba.$$

Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n+1}\}$ — множество простых корней, Δ (Δ_+) — множество всех корней (положительных корней). Пусть также $\{x_\alpha, x_{-\alpha}\}$, $\alpha \in \Delta_+$, — базис Картана—Вейля, нормализованный условием $(x_\alpha, x_{-\alpha}\}) = 1$. Будем также использовать обозначение $(\alpha_i, \alpha_j) = a_{ij}$.

Ниже, если не оговорено противное, мы будем использовать обозначение $\mathfrak{g} := A(m, n)$.

Определение 2.1 (см. [4]). Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g}$ — это супералгебра Хопфа на $\mathcal{C}$, порождённая как ассоциативная супералгебра образующими $h_{i,k} := h_{\alpha_i,k}$, $x_{i,k}^\pm := x_{\alpha_i,k}^\pm$, $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$[h_{i,k}, h_{j,l}] = 0, \tag{2.2}$$

$$\delta_{i,j} h_{i,k+l} = [x_{i,k}^+, x_{j,l}^-], \tag{2.3}$$

$$[h_{i,k+1}, x_{j,l}^\pm] = [h_{i,k}, x_{j,l+1}^\pm] + \left(\frac{b_{ij}}{2}\right)(h_{i,k} x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm h_{i,k}), \tag{2.4}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,l}^\pm] = \pm b_{ij} x_{j,l}^\pm, \tag{2.5}$$

$$[x_{i,k+1}^\pm, x_{j,l}^\pm] = [x_{i,k}^\pm, x_{j,l+1}^\pm] + \left(\frac{b_{ij}}{2}\right)(x_{i,k}^\pm x_{j,l}^\pm + x_{j,l}^\pm x_{i,k}^\pm), \tag{2.6}$$

$$\sum_\sigma [x_{i,k_{\sigma(1)}}^\pm, \ldots [x_{i,k_{\sigma(r)}}^\pm, x_{j,l}^\pm] \ldots] = 0, \quad i \neq j, \quad r = n_{ij} = 2, \tag{2.7}$$

$$[[x_{m,k}^\pm, x_{m+1,k}^\pm], [x_{m+2,k}^\pm, x_{m+1,k}^\pm]] = 0. \tag{2.8}$$

Сумма берётся по всем перестановкам σ множества $\{1, \ldots, r\}$. Функция чётности принимает следующие значения на образующих: $p(x_{j,k}^\pm) = 0$ для $k \in \mathbb{Z}_+$, $j \in I \setminus \tau$, $p(h_{i,k}) = 0$ для $i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $p(x_{i,k}^\pm) = 1$ для $i \in \tau$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Коумножение на образующих $h_{i,k}$, $x_{i,k}^\pm$, $i \in I$, $k = 0, 1$, определяется следующими формулами:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad x \in \mathfrak{g}; \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \Delta(h_{i,1}) = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + [h_{i,0} \otimes 1, \mathfrak{t}_0] + h_{i,0} \otimes h_{i,0} = \\ = h_{i,1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,1} + h_{i,0} \otimes h_{i,0} - \sum_{\alpha \in \Delta_+} (-1)^{\deg(x_\alpha)} (\alpha_i, \alpha) x_{-\alpha} \otimes x_\alpha; \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x_{i,1}^{-}) &= x_{i,1}^{-}\otimes 1 + 1\otimes x_{i,1}^{-} + [1\otimes x_{i,0}^{-}, \mathfrak{t}_0] = \\ &= x_{i,1}^{-}\otimes 1 + 1\otimes x_{i,1}^{-} + \sum_{\alpha\in\Delta_+}(-1)^{\deg(x_\alpha)}[x_{-\alpha_i}, x_{-\alpha}]\otimes x_\alpha;\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\Delta(x_{i,1}^{+}) &= x_{i,1}^{+}\otimes 1 + 1\otimes x_{i,1}^{+} + [x_{i,0}^{+}\otimes 1, \mathfrak{t}_0] = \\ &= x_{i,1}^{+}\otimes 1 + 1\otimes x_{i,1}^{+} - \sum_{\alpha\in\Delta_+}(-1)^{\deg(x_\alpha)}x_{-\alpha}\otimes [x_{\alpha_i}, x_\alpha].\end{aligned} \tag{2.12}$$

Отметим, что универсальная обёртывающая супералгебра $U(\mathfrak{g})$ естественно вложена в $Y(\mathfrak{g})$.

Введём квантовый дубль $DY(\mathfrak{g})$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Напомним определение квантового дубля [1]. Пусть A — супералгебра Хопфа. Обозначим через A^0 двойственную супералгебру Хопфа A^* с противоположным коумножением. Тогда квантовым дублем DA супералгебры Хопфа A называется такая квазитреугольная супералгебра Хопфа (DA, R), что DA содержит A, A^0 в качестве подсупералгебр Хопфа; R является образом канонического элемента $A\otimes A^0$, отвечающего единичному оператору, при вложении в $DA\otimes DA$; линейное отображение $A\otimes A^0\to DA$, $a\otimes b\to ab$, — биекция. Отметим, что если супералгебра Хопфа A является квантованием бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, то квантовый дубль DA является квантованием классического дубля $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ бисупералгебры Ли $\mathfrak{g}$, причём коумножение в классическом дубле определяется формулой $\delta = \delta_{\mathfrak{g}}\oplus(-\delta_{\mathfrak{g}^*})$. Так как янгиан является квантованием бесконечномерной бисупералгебры Ли, то при определении его квантового дубля требуется некоторая аккуратность.

Пусть $C(\mathfrak{g})$ (см. [2,12]) — супералгебра, порождённая образующими $h_{i,k}$, $x_{i,k}^{\pm}$, $i\in I$, $k\in\mathbb{Z}$, которые удовлетворяют соотношениям (2.2)—(2.8). Если определить степень элементов в $C(\mathfrak{g}$ формулой $\deg(h_{i,k}) = \deg(x_{i,k}^{\pm}) = k$, то получаем фильтрацию на $C(\mathfrak{g})$

$$\ldots C_{-n}\subset\ldots\subset C_{-1}\subset C_0\subset\ldots\subset C_m\subset\ldots\subset C(\mathfrak{g}), \tag{2.13}$$

где $C_k = \{x\in C(\mathfrak{g})\colon \deg(x)\leqslant k\}$.

Пусть $\bar{C}(\mathfrak{g})$ — формальное пополнение $C(\mathfrak{g})$ относительно этой фильтрации. Образующие $x_{i,k}^{\pm}$, $h_{i,k}$, $i\in I$, $k\in\mathbb{Z}_+$, порождают подсупералгебру Хопфа $Y^+(\mathfrak{g})$ в $\bar{C}(\mathfrak{g})$, изоморфную $Y(\mathfrak{g})$. Пусть $Y^-(\mathfrak{g})$ — замкнутая подсупералгебра в $\bar{C}(\mathfrak{g})$, порождённая образующими $x_{i,k}^{\pm}$, $h_{i,k}$, $i\in I$, $k<0$.

Теорема 2.1. *Супералгебра Хопфа $Y^0(\mathfrak{g})$ изоморфна $Y^-(\mathfrak{g})$.*

Эта теорема будет вытекать из формулируемых ниже результатов. Из теоремы 2.1 вытекает, что супералгебра Хопфа $Y^-(\mathfrak{g})$ является квантованием бисупералгебры Ли $t^{-1}\mathfrak{g}[[t^{-1}]]$ (с коциклом (2.1)).

Для описания $DY(\mathfrak{g})$ удобно ввести порождающие функции

$$e_i^+(u) := \sum_{k\geqslant 0} x_{i,k}^{+}u^{-k-1}, \qquad e_i^-(u) := -\sum_{k<0} x_{i,k}^{+}u^{-k-1},$$

$$f_i^+(u) := \sum_{k\geqslant 0} x_{i,k}^{-}u^{-k-1}, \qquad f_i^-(u) := -\sum_{k<0} x_{i,k}^{-}u^{-k-1},$$

$$h_i^+(u) := 1 + \sum_{k \geqslant 0} h_{i,k} u^{-k-1}, \quad h_i^-(u) := 1 - \sum_{k < 0} h_{i,k} u^{-k-1}.$$

Предложение 2.1. *Определяющие соотношения* (2.2)—(2.8) *в супералгебре* $\bar{C}(\mathfrak{g})$ *эквивалентны следующим соотношениям для порождающих функций*:

$$[h_i^\pm(u), h_j^\pm(v)] = 0, \quad [h_i^+(u), h_j^-(u)] = 0,$$

$$[e_i^\pm(u), f_j^\pm(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h_i^\pm(u) - h_i^\pm(v)]}{u-v}, \quad [e_i^\pm(u), f_j^\mp(v)] = -\delta_{i,j} \frac{h_i^\mp(u) - h_i^\pm(v)]}{u-v},$$

$$[h_i^\pm(u), e_j^\pm(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^\pm(u), (e_j^\pm(u) - e_j^\pm(v))\}}{u-v},$$

$$[h_i^\pm(u), e_j^\mp(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^\pm(u), (e_j^\pm(u) - e_j^\mp(v))\}}{u-v},$$

$$[h_i^\pm(u), f_j^\pm(v)] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^\pm(u), (f_j^\pm(u) - f_j^\pm(v))\}}{u-v},$$

$$[h_i^\pm(u), f_j^\mp(v)] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{h_i^\pm(u), (e_j^\pm(u) - e_j^\mp(v))\}}{u-v},$$

$$[e_i^\pm(u), e_j^\pm(v)] + [e_j^\pm(u), e_i^\pm(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(e_i^\pm(u) - e_i^\pm(v)), (e_j^\pm(u) - e_j^\pm(v))\}}{u-v},$$

$$[e_i^+(u), e_j^-(v)] + [e_j^+(u), e_i^-(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(e_i^+(u) - e_i^-(v)), (e_j^+(u) - e_j^-(v))\}}{u-v},$$

$$[f_i^\pm(u), f_j^\pm(v)] + [f_j^\pm(u), f_i^\pm(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(f_i^\pm(u) - f_i^\pm(v)), (f_j^\pm(u) - f_j^\pm(v))\}}{u-v},$$

$$[f_i^+(u), f_j^-(v)] + [f_j^+(u), f_i^-(v)] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2} \frac{\{(f_i^+(u) - f_i^-(v)), (f_j^+(u) - f_j^-(v))\}}{u-v},$$

$$[e_i^{\epsilon_1}(u_1), [e_i^{\epsilon_2}(u_2), e_j^{\epsilon_3}(u_3)]] + [e_i^{\epsilon_2}(u_2), [e_i^{\epsilon_1}(u_1), e_j^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0,$$

$$[f_i^{\epsilon_1}(u_1), [f_i^{\epsilon_2}(u_2), f_j^{\epsilon_3}(u_3)]] + [f_i^{\epsilon_2}(u_2), [f_i^{\epsilon_1}(u_1), f_j^{\epsilon_3}(u_3)]] = 0,$$

$$[[e_m^{\epsilon_1}(u_1), e_{m+1}^{\epsilon_2}(u_2)], [e_{m+2}^{\epsilon_3}(u_3), e_{m+1}^{\epsilon_4}(u_4)]] = 0,$$

$$[[f_m^{\epsilon_1}(u_1), f_{m+1}^{\epsilon_2}(u_2)], [f_{m+2}^{\epsilon_3}(u_3), f_{m+1}^{\epsilon_4}(u_4)]] = 0.$$

3. Треугольное разложение и формулы спаривания

Пусть Y'_+, Y'_0, Y'_- — подсуперbegin алгебры (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порождённые элементами x_{ik}^+, h_{ik}, x_{ik}^- ($i \in I$, $k \in \mathbb{Z}_+$) соответственно. Пусть Y_+, Y_0, Y_- тоже подсупералгебры Y'_+, Y'_0, Y'_- с единичным элементом.

Предложение 3.1. *Умножение в* $Y(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных суперпространств*

$$Y_+ \otimes Y_0 \otimes Y_- \to Y(\mathfrak{g}).$$

Это предложение — частный случай теоремы 3 из [4]. Обобщим это предложение на $DY(\mathfrak{g})$. Для этого нам потребуются некоторые простые свойства операции коумножения на $Y(\mathfrak{g})$, доказываемые по индукции с учётом формул (2.9)—(2.12) и соотношений (2.2)—(2.8), а также факта, что операция коумножения является гомоморфизмом, т. е. что $\Delta(a\cdot b)=\Delta(a)\cdot\Delta(b)$.

Предложение 3.2.

1) $\Delta(x)=x\otimes 1\ (\mathrm{mod}\ Y\otimes Y'_{+})$ *для произвольного* $x\in Y'_{+}$;
2) $\Delta(y)=1\otimes y\ (\mathrm{mod}\ Y'_{-}\otimes Y)$ *для произвольного* $y\in Y'_{-}$.

Следствие 3.1.

1) $\Delta(Y_{+})\subset Y\otimes Y_{+}$;
2) $\Delta(Y_{-})\subset Y_{-}\otimes Y$.

Таким образом, мы получаем, что Y_{+} (Y_{-}) является правым (левым) коидеалом в $Y=Y(\mathfrak{g})$.

Пусть $BY'_{\pm}$ — подсупералгебра (без единицы) в $Y(\mathfrak{g})$, порождённая элементами $x^{\pm}_{ik}$, h_{jr} $(i,j\in I,\ k,r\in\mathbb{Z}_{+})$.

Предложение 3.3.

1) $\Delta(e)=e\otimes 1\ (\mathrm{mod}\ Y\otimes BY'_{+})$ *для произвольного* $e\in BY'_{+}$;
2) $\Delta(f)=1\otimes f\ (\mathrm{mod}\ BY'_{-}\otimes Y)$ *для произвольного* $f\in BY'_{-}$;
3) $\Delta(h)=h\otimes 1\ (\mathrm{mod}\ Y\otimes BY'_{+})=1\otimes h\ (\mathrm{mod}\ BY'_{-}\otimes Y)$ *для произвольного* $f\in Y'_{0}$.

Свойства 1), 2) доказываются так же, как и аналогичные свойства в предыдущем предложении, а свойство 3) вытекает из свойств 1), 2).

Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon Y(\mathfrak{g})\otimes Y^{0}(\mathfrak{g})\to C$ — каноническое билинейное спаривание $Y(\mathfrak{g})$ и двойственной супералгебры Хопфа $Y^{*}(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением. (Мы обозначаем через $Y^{0}(\mathfrak{g})$ янгиан $Y^{*}(\mathfrak{g})$ с противоположным коумножением.) Из определения вытекают следующие свойства этого спаривания.

$$\langle xy,x'y'\rangle=\langle\Delta(xy),x'\otimes y'\rangle=(-1)^{p(x)p(y)}\langle y\otimes x,\Delta(x'y')\rangle,$$
$$\langle x\otimes y\rangle\langle x'\otimes y'\rangle=(-1)^{p(x)p(y)}\langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle$$

для любых $x,y\in Y(\mathfrak{g})$, $x',y'\in Y^{0}(\mathfrak{g})$.

Пусть A, B — подсупералгебры в $Y(\mathfrak{g})$. Пусть также

$$(AB)_{\perp}:=\{x'\in Y^{0}(\mathfrak{g})\colon\langle ab,x'\rangle=0\ \text{для любых}\ a\in A,\ b\in B\}.$$

Легко проверить, что $(Y\cdot BY'_{-})_{\perp}$, $(BY'_{+}\cdot Y)_{\perp}$, $(Y\cdot Y'_{-})_{\perp}$, $(Y'_{+}\cdot Y)_{\perp}$ являются подсупералгебрами в $Y^{0}(\mathfrak{g})$. Пусть

$$BY^{*}_{+}:=(Y\cdot Y'_{-})_{\perp},\quad (BY)^{*}_{-}:=(Y'_{+}\cdot Y)_{\perp},$$
$$Y^{*}_{+}:=(Y\cdot BY'_{-})_{\perp},\quad Y^{*}_{-}:=(BY'_{+}\cdot Y)_{\perp},\quad Y^{*}_{0}:=BY^{*}_{+}\cap BY^{*}_{-}.$$

Предложение 3.4.

1. *Для любых* $x \in Y_+$, $h \in Y_0$, $y \in Y_-$, $x' \in Y_+^*$, $h' \in Y_0^*$, $y' \in Y_-^*$ *каноническое спаривание факторизуется*:
$$\langle xhy, x'h'y'\rangle = (-1)^{\deg(x')\deg(y)}\langle x, x'\rangle\langle h, h'\rangle\langle y, y'\rangle.$$
2. *Умножение в* $Y^0(\mathfrak{g})$ *индуцирует изоморфизм векторных пространств* $Y_+^* \otimes Y_0^* \otimes Y_-^* \to Y^0(\mathfrak{g})$.
3. *Имеет место PBW-теорема для* $Y^0(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Докажем утверждение 1.

$$\langle xhy, x'h'y'\rangle = \langle \Delta(xh)\cdot\Delta(y), x'h'\otimes y'\rangle = \langle \Delta(x)\Delta(h)\Delta(y), x'h'\otimes y'\rangle =$$
$$= \Big\langle\Big(x\otimes 1+\sum a_n\otimes x_n\Big)\Big(h\otimes 1+\sum \tilde{a}_s\otimes\tilde{x}_s\Big)\Big(1\otimes y+\sum y_m\otimes a_m'\Big), x'h'\otimes y'\Big\rangle =$$
$$= \langle xh\otimes y, x'h'\otimes y'\rangle + \Big\langle\sum c_r\otimes d_r, x'h'\otimes y'\Big\rangle = (-1)^{\deg(x')\deg(y)}\langle xh, x'h'\rangle\langle y, y'\rangle.$$

Отметим, что
$$\Big\langle\sum c_r\otimes d_r, x'h'\otimes y'\Big\rangle = \sum_r (-1)^{\deg(x')\deg(d_r)}\langle c_r, x'h'\rangle\langle d_r, y'\rangle = 0,$$
так как $\langle d_r, y'\rangle = 0$ в силу того, что $d_r \in Y_+'Y$, $y' \in (BY_+'Y)_\perp$. С другой стороны,
$$\langle xh, x'h'\rangle = \Big\langle\Big(x\otimes 1+\sum a_n\otimes x_n\Big)\Big(1\otimes h+\sum y_m\otimes b_m\Big), x'\otimes h'\Big\rangle =$$
$$= \langle x\otimes h, x'\otimes h'\rangle + 0 = \langle x, x'\rangle\langle h, h'\rangle.$$
Отсюда и вытекает доказываемое утверждение пункта 1.

Отметим, что утверждение 2 вытекает из утверждения 3. Докажем третье утверждение. Выберем PBW-базис в $Y(\mathfrak{g})$. Каждый вектор этого базиса имеет вид xhy, где $x \in Y_+$, $h \in H$, $y \in Y_-$. Тогда биортогональные векторы в соответствии с 1) будут иметь вид $x'h'y'$, где $x' \in Y_+^*$, $h \in H^*$, $y \in Y_-^*$. Эти векторы также образуют базис в $Y^0(\mathfrak{g})$, что доказывает утверждение 3. ☐

Изучим это спаривание более детально. Сначала более подробно опишем PBW-базис для $Y(\mathfrak{g})$ (ср. [4]). Пусть, как и выше, Δ и Δ_+ — множество корней и множество положительных корней супералалгебры Ли $A(m,n)$. Рассмотрим также $\hat{\Delta}^{\mathrm{re}}$ — множество вещественных корней соответствующей аффинной (нескрученной) супералгебры Ли $A(m,n)^{(1)}$ (см. [10]). Для образующих $DY(\mathfrak{g})$ $x_{i,k}^{\pm}$ будем использовать следующие обозначения:
$$x_{\alpha_i+k\delta} := x_{i,k}^{+},\quad x_{-\alpha_i+k\delta} := x_{i,k}^{-},\quad i\in I,\quad k\in\mathbb{Z},\quad \alpha_i\in\Delta_+.$$
В этом случае $\pm\alpha_i + k\delta \in \hat{\Delta}^{\mathrm{re}}$. Пусть $\Xi \subset \hat{\Delta}^{\mathrm{re}}$. Линейный порядок $\precneqq$ на Ξ называется выпуклым (нормальным), если для любых корней $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$, таких что $\gamma = \alpha + \beta$, имеет место одно из следующих отношений порядка: $\alpha \precneqq \gamma \precneqq \beta$ или $\beta \precneqq \gamma \precneqq \alpha$. Введём подмножества Ξ_+, Ξ_- множества $\hat{\Delta}^{\mathrm{re}}$:
$$\Xi_\pm := \{\pm\gamma + k\delta\colon \gamma \in \hat{\Delta}_+^{\mathrm{re}}\}.$$

Введём на Ξ_+, Ξ_- выпуклые порядки $\precneqq_+$, $\precneqq_-$, удовлетворяющие условиям

$$\gamma+k\delta \precneqq_+ \gamma+l\delta \quad \text{и} \quad -\gamma+l\delta \precneqq_- -\gamma+k\delta, \quad \text{если} \quad k \leqslant l, \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Delta_+. \tag{3.1}$$

Определим теперь корневые векторы $x_{\pm\beta}$, $\beta \in \Xi_+ \cup \Xi_-$, по индукции следующим образом. Пусть векторы x_{β_1}, x_{β_2} уже построены. Если корень x_{β_3} таков, что

$$x_{\beta_1} \precneqq x_{\beta_3} \precneqq x_{\beta_2}$$

и в интервале $(x_{\beta_1}, x_{\beta_2})$ нет корней, для которых уже построены корневые векторы, то определим корневые векторы $x_{\pm\beta_3}$ формулами

$$x_{\beta_3} = [x_{\beta_1}, x_{\beta_2}], \quad x_{-\beta_3} = [x_{-\beta_2}, x_{-\beta_1}].$$

Отметим, что выпуклый (нормальный) порядок связан с естественным упорядочиванием элементов аффинной группы Вейля.

Нам потребуется следующее описание $Y(\mathfrak{g})$, являющееся аналогом описания квантованной аффинной супералгебры. Сначала зафиксируем следующий нормальный порядок на $\mathfrak{g} = A(m,n)$:

$$\begin{aligned}&(\epsilon_1-\epsilon_2, \epsilon_1-\epsilon_3, \ldots, \epsilon_1-\epsilon_{m+n+2}),\\ &\qquad\qquad (\epsilon_2-\epsilon_3, \epsilon_2-\epsilon_4, \ldots, \epsilon_2-\epsilon_{m+n+2}), \ldots, (\epsilon_{m+n+1}-\epsilon_{m+n+2}).\end{aligned}$$

Здесь $\epsilon_i - \epsilon_j = \alpha_i + \ldots + \alpha_{j-1}$.

К простым корням $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n+1}$ добавим ещё аффинный корень $\alpha_0 = \delta - \theta$, $\theta := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{m+n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_{m+n+1}$ — старший корень, δ — минимальный мнимый корень. Рассмотрим следующий нормальный порядок на множестве $\hat{\Delta}^{\mathrm{re}}$ аффинных вещественных корней:

$$\begin{aligned}&(\alpha_1, \alpha_1+\delta, \alpha_1+2\delta, \ldots, \alpha_1+n\delta, \ldots),\\ &\quad(\ldots\alpha_1+\alpha_2+n\delta, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\delta, \alpha_1+\alpha_2),\\ &\quad(\ldots\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+n\delta, \ldots, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\delta, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \ldots,\\ &\quad(\ldots\alpha_{n+m+1}+n\delta, \ldots, \alpha_{n+m+1}+\delta, \alpha_{n+m+1}).\end{aligned}$$

Вычислим формулы спаривания для корневых векторов. Пусть $h^*_{i,k}$, $e^*_{i,k}$, $f^*_{i,k}$ — образующие $Y^* = Y_-$. Пусть $e_{i,k} := x^+_{i,k}$, $f_{i,k} := x^-_{i,k}$.

Предложение 3.5. *Следующие два условия равносильны.*

1.

$$\langle e_{i,k}, e^*_{j,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l}, \quad \langle f_{i,k}, f^*_{j,-l-1}\rangle = -\delta_{i,j}\delta_{k,l},$$
$$\langle h_{i,k}, h^*_{j,-l-1}\rangle = -\left(-\frac{a_{ij}}{2}\right)^{k-l} \frac{a_{ij}k!}{l!(k-l)!} \quad \text{для} \quad k \geqslant l \geqslant 0.$$

2.

$$[h^*_{i,-k}, h^*_{j,-l}] = 0, \quad \delta_{i,j}h^*_{i,-k-l} = [e_{i,-k}, f_{j,-l}],$$
$$[h^*_{i,-k-1}, e^*_{j,-l}] = [h^*_{i,-k}, e^*_{j,-l-1}] + \left(\frac{b_{ij}}{2}\right)(h^*_{i,-k}e_{j,-l} + e^*_{j,-l}h^*_{i,-k}),$$

$$[h^*_{i,-k-1}, f^*_{j,-l}] = [h^*_{i,-k}, f^*_{j,-l-1}] - \left(\frac{b_{ij}}{2}\right)(h^*_{i,-k}f_{j,-l} + f^*_{j,-l}h^*_{i,-k}),$$
$$[h^*_{i,0}, e^*_{j,l}] = b_{ij}e^*_{j,l}, \quad [h^*_{i,0}, f^*_{j,l}] = -b_{ij}f^*_{j,l},$$
$$[e^*_{i,-k+1}, e^*_{j,-l}] = [e^*_{i,-k}, e^*_{j,-l+1}] + \left(\frac{b_{ij}}{2}\right)\{e^*_{i,-k}, e^*_{j,-l}\},$$
$$[f^*_{i,-k+1}, f^*_{j,-l}] = [f^*_{i,-k}, f^*_{j,-l+1}] - \left(\frac{b_{ij}}{2}\right)\{f^*_{i,-k}, f^*_{j,-l}\},$$
$$\sum_\sigma [e^*_{i,-k_{\sigma(1)}}, \dots [e^*_{i,-k_{\sigma(r)}}, e^*_{j,-l}] \dots] = 0, \quad i \neq j, \quad r = n_{ij} = 2,$$
$$\sum_\sigma [f^*_{i,-k_{\sigma(1)}}, \dots [f^*_{i,-k_{\sigma(r)}}, f^*_{j,-l}] \dots] = 0, \quad i \neq j, \quad r = n_{ij} = 2,$$
$$[[e^*_{m,-k_1}, e^*_{m+1,-k_2}], [e^*_{m+2,-k_3}, e^*_{m+1,-k_4}]] = 0,$$
$$[[f^*_{m,-k_1}, f^*_{m+1,-k_2}], [f^*_{m+2,-k_3}, f^*_{m+1,-k_4}]] = 0.$$

Доказательство. Доказательство этого утверждения довольно громоздко, и мы, отметив основные моменты доказательства, опустим некоторые технические детали. Доказательство будет вестись по индукции по значениям индексов k, l.

Несложно доказываются следующие формулы:

$$\Delta(e_{i,k}) = e_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes e_{i,k-r} \pmod{YY_- \otimes Y'_+},$$
$$\Delta(f_{i,k}) = f_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes e_{i,k-r} \pmod{Y'_- \otimes Y'_+ Y},$$
$$\Delta(h_{i,k}) = h_{i,k} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,k} + \sum_{r=0}^{k-1} h_{i,r} \otimes h_{i,k-r} \pmod{YY'_- \otimes Y'_+ Y}.$$

Из этих формул вытекают равенства

$$\begin{aligned}
\Delta(e_{i,k}e_{j,l}) &= e_{i,k}e_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes e_{i,k}e_{j,l} + e_{i,k} \otimes e_{j,l} + \\
&\quad + (-1)^{\deg(e_{i,k})\deg(e_{j,l})} e_{j,l} \otimes e_{i,k} \pmod{YY'_- \otimes Y'_+},\\
\Delta(f_{i,k}f_{j,l}) &= f_{i,k}f_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes f_{i,k}f_{j,l} + f_{i,k} \otimes f_{j,l} + \\
&\quad + (-1)^{\deg(f_{i,k})\deg(f_{j,l})} f_{j,l} \otimes f_{i,k} \pmod{Y'_- \otimes Y'_+ Y},\\
\Delta(h_{i,k}h_{j,l}) &= h_{i,k}h_{j,l} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,k}h_{j,l} + \\
&\quad + h_{i,k} \otimes h_{j,l} + h_{j,l} \otimes h_{i,k} \pmod{YY'_- \otimes Y'_+ Y}.
\end{aligned}$$

Используя эти формулы и определение спаривания в дубле, можно по индукции доказать инвариантность этого спаривания на образующих дубля:

$$\langle [a, b], c \rangle = \langle a, [b, c] \rangle. \tag{3.2}$$

Доказательство этого факта мы опускаем, сознавая, что доказательство столь простого фундаментального факта должно быть коротким и идейным. Мы располагаем доказательством, основанном на индукции с привлечением написанных выше формул и следующего определения хопфова спаривания:

$$\langle ab, cd\rangle = \langle \Delta(ab), c\otimes d\rangle = (-1)^{\deg(a)\deg(b)}\langle b\otimes a, \Delta(cd)\rangle, \tag{3.3}$$

$$\langle a, 1\rangle = \epsilon(a), \quad \langle 1, b\rangle = \epsilon(b). \tag{3.4}$$

Теперь мы можем показать, как условие 1 следует из условия 2. Покажем, например, как по индукции выводится формула спаривания на картановских образующих дубля из коммутационных соотношений с использование формулы (3.2). При $m=n=0$ доказываемые формулы совпадают с их квазиклассическим пределом, при котором они, очевидно, справедливы. Пусть эти формулы верны при $m\geqslant k$, $n<l+1$. Покажем их справедливость при $n=l+1$:

$$\begin{aligned}
&\langle h_{i,k}, h_{j,l}\rangle = -\langle e_{i,0}, [f_{i,k}, h_{j,l}]\rangle = \\
&\quad = \Bigl\langle e_{i,0}, [h_{j,0}, f_{i,k-l-1}] + \frac{1}{2}a_{ij}\sum_{s=0}^{l}\{h_{j,s-l-1}, f_{k-s-1}\}\Bigr\rangle = \\
&\quad = -\frac{1}{2}a_{ij}\biggl(\Bigl\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}([h_{j,s-l-1}, f_{k-s-1}] + 2f_{i,k-s-1}h_{j,s-l-1})\Bigr\rangle\biggr) = \\
&\quad = -\frac{1}{2}a_{ij}\biggl(\Bigl\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}[h_{j,s-l-1}, f_{k-s-1}]\Bigr\rangle + 2\Bigl\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}[f_{i,k-s-1}, h_{j,s-l-1}]\Bigr\rangle\biggr).
\end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю в силу индукционного предположения. Преобразуем первое слагаемое. Используя определяющие соотношения в янгиане, понизим степень правой части в формуле спаривания:

$$\begin{aligned}
&\langle h_{i,k}, h_{j,l}\rangle = a_{ij}\Bigl\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}(l+s-1)[h_{j,-s}, f_{k-l+s-2}]\frac{a_{ij}}{2}\Bigr\rangle = \\
&\quad = -\Bigl(\frac{1}{2}a_{ij})^2\Bigl\langle e_{i,0}, \sum_{s=0}^{l}(l+s-1)[h_{j,-s}, f_{k-l+s-2}]\Bigr\rangle = \ldots = \\
&\quad = -\left(\frac{1}{2}a_{ij}\right)^{k-l}\bigl(\langle e_{i,0}, [h_{j,0}, f_{i,-1}]\rangle C_{k-l-1}^{k-l-1} + C_{k-l}^{k-l-1} + \ldots + C_{k-l+l-1}^{k-l-1}\bigr) = \\
&\quad = -\left(\frac{1}{2}a_{ij}\right)^{k-l} C_k^{k-l}a_{ij}.
\end{aligned}$$

Первая формула спаривания доказана. Вторая доказывается проще аналогичными рассуждениями.

Доказательство достаточности довольно громоздко, и мы его здесь не приводим. Отметим лишь, что, по существу, оно также проводится по индукции и основано на формулах (3.3), (3.4). □

Теорема 3.1.

1. *Подсупералгебры* Y_+^*, H^*, Y_-^* *супералгебры* Y_- *порождаются полями* $e_i^-(u)$, $h_i^-(u)$, $f_i^-(u)$.
2. *Спаривание образующих подсупералгебр* Y_+, Y_- *супералгебры* $DY(\mathfrak{g})$ *задаётся следующими соотношениями для* $|v| < 1 < |u|$:

$$\langle e_i^+(u), f_j^-(v)\rangle = \langle f_i^+(u), e_j^-(v)\rangle = \frac{\delta_{i,j}}{u-v},$$
$$\langle h_i^+(u), h_j^-(v)\rangle = \frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}.$$

Доказательство. Теорема вытекает из предложения 3.5. □

4. Вычисление универсальной R-матрицы дубля янгиана $DY(\mathfrak{g})$

Сначала напомним определение универсальной R-матрицы для квазитреугольной топологической супералгебры Хопфа, которое естественным образом обобщает понятия универсальной R-матрицы для квазитреугольной алгебры Хопфа (см. [1]) и универсальной R-матрицы для квазитреугольной топологической алгебры Хопфа.

Универсальной R-матрицей для квазитреугольной супералгебры Хопфа A называется обратимый элемент R, лежащий в некотором расширении тензорного произведения $A\hat{\otimes}A$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\Delta^{\mathrm{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1} \quad \text{для всех} \quad x \in A,$$
$$(\Delta\otimes\mathrm{id})R = R^{13}R^{23}, \quad (\mathrm{id}\otimes\Delta)R = R^{13}R^{12},$$

где $\Delta^{\mathrm{op}} = \sigma\circ\Delta$, $\sigma(x\otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)}y\otimes x$.

Если A является квантовым дублем супералгебры Хопфа A^+, т. е. $A \cong A^+\otimes A^-$, $A^- := A^0$ — двойственная к A супералгебра Хопфа с противоположным коумножением, то A — квазитреугольная супералгебра Хопфа, и универсальная R-матрица в A допускает следующее каноническое представление:

$$R = \sum e_i\otimes e^i,$$

где $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ — двойственные базисы в A^+, A^- соответственно.

Пусть $Y_+^\pm$, $Y_0^\pm$, $Y_-^\pm$ — подсупералгебры в $DY(\mathfrak{g})$, порождённые полями $e_i^\pm(u)$, $h_i^\pm(u)$, $f_i^\pm(u)$, $i\in I$, соответственно.

Предложение 4.1.

1. *Универсальная* R*-матрица дубля может быть представлена в факторизованной форме*
$$R = R_+R_0R_-,$$
где $R_+\in Y_+^+\otimes Y_-^-$, $R_0\in Y_0^+\otimes Y_0^-$, $R_-\in Y_-^+\otimes Y_+^-$.

2. *Спаривание на базисных элементах может быть вычислено по следующим формулам:*
$$\begin{aligned}&\langle e_{\beta_0}^{n_0}e_{\beta_1}^{n_1}\ldots e_{\beta_k}^{n_k}, e_{-\beta_0-\delta}^{m_0}e_{-\beta_1-\delta}^{m_1}\ldots e_{-\beta_k-\delta}^{m_k}\rangle = \\ &\quad = (-1)^{n_0+\ldots+n_k}\delta_{n_0,m_0}\ldots\delta_{n_0,m_0}n_0!n_1!\ldots n_k!\times \\ &\quad \times \alpha(\gamma_0)^{n_0}\ldots\alpha(\gamma_k)^{n_k}(-1)^{\theta(\beta_0)+\ldots+\theta(\beta_k)}, \\ &\langle e_{-\beta_k}^{n_k}\ldots e_{-\beta_1}^{n_1}e_{\beta_0}^{n_0}, e_{-\beta_k-\delta}^{m_k}\ldots e_{-\beta_1-\delta}^{m_1}e_{-\beta_0-\delta}^{m_0}\rangle = \\ &\quad = (-1)^{n_0+\ldots+n_k}\delta_{n_0,m_0}\ldots\delta_{n_0,m_0}n_0!n_1!\ldots n_k!\times \\ &\quad \times \alpha(\gamma_0)^{n_0}\ldots\alpha(\gamma_k)^{n_k}(-1)^{\theta(\beta_0)+\ldots+\theta(\beta_k)}.\end{aligned}$$
Здесь $\beta_k = \beta_k' + n_k'\delta$, а коэффициенты $\alpha(\beta)$ вычисляются из условия $[e_\beta, e_{-\beta}] = \alpha(\beta)h_{\beta'}$.

Из предложения 4.1 вытекает лемма 4.1.

Лемма 4.1. *Элементы R_+, R_- в разложении универсальной R-матрицы для $DY(\mathfrak{g})$ могут быть представлены в форме*
$$R_+ = \overrightarrow{\prod_{\beta\in\Xi_+}} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta\otimes e_{-\beta}), \tag{4.1}$$
$$R_- = \overleftarrow{\prod_{\beta\in\Xi_-}} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)}a(\beta)e_\beta\otimes e_{-\beta}), \tag{4.2}$$
где произведения берутся в соответствии с нормальными порядками $\precneqq_+$, $\precneqq_-$, удовлетворяющими условиям (3.1), *соответственно. Нормализующие константы $a(\beta)$ находятся из условия*
$$[e_\beta, e_{-\beta}] = (a(\beta))^{-1}h_\gamma, \quad \text{если} \quad \beta = \gamma + n\delta \in \Xi_+, \quad \gamma\in\Delta_+(\mathfrak{g}),$$
а $\theta(\beta) = \deg(e_\beta) = \deg(e_{-\beta})$ означает чётность элемента $e_{\pm\beta}$.

Для описания члена R_0 нам потребуются некоторые вспомогательные понятия.

Прежде всего введём «логарифмические» образующие $\phi_i^\pm(u)$, $i = 1,\ldots,r$, посредством формул
$$\phi_i^+(u) := \sum_{k=0}^{\infty}\phi_{i,k}u^{-k-1} = \ln h_i^+(u),$$
$$\phi_i^-(u) := \sum_{k=0}^{\infty}\phi_{i,-k-1}u^{k} = \ln h_i^-(u).$$
Введём также вектор-функции
$$\phi^\pm(u) = \begin{pmatrix}\phi_1^\pm(u)\\ \phi_2^\pm(u)\\ \ldots\\ \phi_r^\pm(u)\end{pmatrix}, \quad h^\pm(u) = \begin{pmatrix}h_1^\pm(u)\\ h_2^\pm(u)\\ \ldots\\ h_r^\pm(u)\end{pmatrix}.$$

Из теоремы 3.1 вытекает формула спаривания в терминах производящих вектор-функций

$$\langle((h^+(u))^T, h^-(v))\rangle = \left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right)^r_{i,j=1}.$$

Следовательно, для производящих функций $\phi_i^+(u)$, $\phi_j^-(u)$ формула спаривания имеет вид

$$\langle\phi_i^+(u), \phi_j^-(v)\rangle = \ln\left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right). \tag{4.3}$$

В матричной форме эти формулы мы можем переписать следующим образом:

$$\langle(\phi^+(u))^T, \phi^-(v)\rangle = \left(\ln\left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}\right)\right)^r_{i,j=1},$$
$$\langle(\phi^+(u))^T, \phi^-(v)\rangle = \left(\ln\left(\frac{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}\right)\right)^r_{i,j=1}.$$

Дальнейшие вычисления будем проводить по схеме, предложенной в [12]. Это позволит придать им некоторый геометрический смысл.

Вместе с дублем янгиана $DY(\mathfrak{g})$ рассмотрим супералгебру Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, изоморфную как супералгебра $DY(\mathfrak{g})$, но с другим коумножением, определяемым формулами

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(h_i^\pm(u)) &= h_i^\pm(u)\otimes h_i^\pm(u), \\ \tilde{\Delta}(e_i(u)) &= e_i(u)\otimes 1 + h_i^-(u)\otimes e_i(u), \\ \tilde{\Delta}(f_i(u)) &= 1\otimes f_i(u) + f_i(u)\otimes h_i^+(u).\end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь

$$e_i(u) := e_i^+(u) - e_i^-(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_{i,k}u^{-k-1},$$
$$f_i(u) := f_i^+(u) - f_i^-(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{i,k}u^{-k-1}.$$

Такое коумножение впервые было введено В. Г. Дринфельдом [2] для янгианов простых супералгебр Ли и удобно тем, что формулы спаривания относительно этого коумножения имеют простой вид. Можно проверить (см. [12]), что коумножения Δ и $\tilde{\Delta}$ сплетаются предельным оператором

$$\hat{t}^{\,\infty} := \lim_{n\to\infty}\hat{t}^{\,n},$$
$$\hat{t}(e_{i,k}) = e_{k+1}, \quad \hat{t}(f_{i,k}) = f_{k-1}, \quad \hat{t}(h_{i,k}) = h_k.$$

Другими словами,

$$\tilde{\Delta}(x) = \lim_{n\to\infty}(\hat{t}^{\,n}\otimes\hat{t}^{\,n})\Delta(\hat{t}^{\,-n}(x))$$

для всех $x \in DY(\mathfrak{g})$. (Сходимость подразумевается в подходящей топологии $DY(\mathfrak{g}) \otimes DY(\mathfrak{g})$.)

Пусть $\widehat{DY}^{+}(\mathfrak{g})$ $(\widehat{DY}^{-}(\mathfrak{g}))$ — подсупералгебра Хопфа супералгебры Хопфа $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$, порождённая элементами $e_{i,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $h_{i,m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ $(f_{i,k}$, $k \in \mathbb{Z}$, $h_{i,m}$, $m < 0)$. Тогда $\widehat{DY}^{-}(\mathfrak{g})$ изоморфна двойственной супералгебре Хопфа $(\widehat{DY}^{-}(\mathfrak{g}))^*$. Из формулы для коумножения (4.4) вытекает, что элементы $\phi^{\pm}_{i,k}$ являются примитивными элементами в $\widehat{DY}(\mathfrak{g})$.

Пусть

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= \langle \phi^+_{i,k} \colon i \in I = \{1, \dots, r\},\ k \in \mathbb{Z}_+ \rangle, \\ \Phi^- &= \langle \phi^-_{i,-k-1} \colon i \in I = \{1, \dots, r\},\ k \in \mathbb{Z}_+ \rangle \ — \end{aligned}$$

линейные пространства, порождённые указанными в скобках множествами векторов. Пусть также $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}$, $\{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ — двойственные относительно формы (4.3) базисы в пространствах Φ^+, Φ^- соответственно.

Предложение 4.2. *Элемент* R_0 *из предложения* 4.1 *имеет вид*

$$R_0 = \exp\biggl(\sum_{i,m} (-1)^{\deg(\tilde{\phi}_{i,m})} \tilde{\phi}_{i,m} \otimes \tilde{\phi}^{i,m} \biggr).$$

Доказательство. Пусть $B_+ = C[\Phi^+]$, $B_- = C[\Phi^-]$ — коммутативные алгебры функций на Φ^+, Φ^- соответственно, а $\{\tilde{\phi}_{i,m}\}$, $\{\tilde{\phi}^{i,m}\}$ — упомянутые выше двойственные базисы. Зафиксируем некоторый линейный порядок базисных векторов и ниже будем писать $\{\tilde{\phi}_a\}$, $\{\tilde{\phi}^a\}$, $a \in \mathbb{N}$. Докажем по индукции следующую формулу:

$$\langle \tilde{\phi}^{n_1}_{i_1} \dots \tilde{\phi}^{n_k}_{i_k}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{m_1} \dots (\tilde{\phi}^{i_k})^{m_k} \rangle = \delta_{n_1,m_1} \dots \delta_{n_k,m_k} n_1! \dots n_k!.$$

Легко проверяется база индукции при $k = 1$, $n_1 = 1$:

$$\langle \tilde{\phi}_{i_1}, \tilde{\phi}^{i_1} \rangle = 1, \quad \langle \tilde{\phi}_{i_1}, 1 \rangle = 0.$$

Пусть теперь

$$\langle \tilde{\phi}^{n}_{i_1}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{n} \rangle = n!.$$

Покажем, что

$$\langle \tilde{\phi}^{n+1}_{i_1}, (\tilde{\phi}^{i_1})^{n+1} \rangle = (n+1)!.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} &\langle \tilde{\phi}^{n+1}_{i}, (\tilde{\phi}^{i})^{n+1} \rangle = \langle \Delta(\tilde{\phi}_i) \Delta((\tilde{\phi}_i)^n), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}_i)^n \rangle = \\ &= \biggl\langle (\tilde{\phi}_i \otimes 1 + 1 \otimes \tilde{\phi}_i) \biggl(\sum_{k=0}^{n} C^k_n (\tilde{\phi}_i)^k (\tilde{\phi}_i)^{n-k} \biggr), \tilde{\phi}^i \otimes (\tilde{\phi}_i)^n \biggr\rangle = \\ &= (n+1) \langle \tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}^i \rangle \langle (\tilde{\phi}_i)^n, (\tilde{\phi}^i)^n \rangle = (n+1)!. \end{aligned}$$

С использованием доказанной формулы аналогично индукцией по k доказывается утверждение предложения. □

Пусть теперь

$$(f(u))' = \frac{d}{du}(f(u)).$$

Продифференцируем равенство (4.3) по параметру u. Получим

$$\frac{d}{du}\langle \phi_i^+(u), \phi_j^-(u)\rangle = \langle (\phi_i^+(u))', \phi_j^-(u)\rangle = \frac{1}{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)} - \frac{1}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)}.$$

Пусть

$$\tilde{\phi}_i^+(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,k} u^{-k-1}, \quad \tilde{\phi}_i^-(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\phi}_{i,-k-1} u^{k}.$$

Тогда в терминах производящих функций спаривание

$$\langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}_{j,l}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}$$

переписывается следующим образом:

$$\langle \tilde{\phi}_i^+(u), \tilde{\phi}_j^-(v)\rangle = \sum_{k,l} \langle \tilde{\phi}_{i,k}, \tilde{\phi}^{j,l}\rangle u^{-k-1} v^{l} = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} u^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)^{k} = \frac{\delta_{ij}}{u-v}.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\langle \tilde{\phi}_i^+(u), \tilde{\phi}_j^-(v)\rangle = \frac{\delta_{ij}}{u-v}. \tag{4.5}$$

Введём теперь производящие вектор-функции

$$\tilde{\phi}^{\pm}(u) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1^{\pm}(u) \\ \tilde{\phi}_2^{\pm}(u) \\ \dots \\ \tilde{\phi}_r^{\pm}(u) \end{pmatrix}.$$

Тогда спаривание (4.5) можно переписать как матричное равенство

$$\langle (\tilde{\phi}^+(u))^T, \tilde{\phi}^-(u)\rangle = \frac{E_r}{u-v},$$

где E_r — единичная $(r \times r)$-матрица.

Пусть $T\colon f(v) \to f(v-1)$ — оператор сдвига. Ясно, что

$$\begin{aligned} \langle (\phi_i^-(v))', \phi_j^+(v)\rangle &= \frac{1}{u-v+\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)} - \frac{1}{u-v-\frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)} = \\ &= (\mathrm{id} \otimes (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}}))\frac{\delta_{ij}}{u-v} = \langle \tilde{\phi}_i^-(v), (T^{b_{ij}} - T^{-b_{ij}})\tilde{\phi}_j^+(u)\rangle. \end{aligned}$$

Здесь $b_{ij} = \frac{1}{2}a_{ij} = \frac{1}{2}(\alpha_i,\alpha_j)$. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ — симметризованная матрица Картана супералгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. $a_{ij} = (\alpha_i,\alpha_j)$. Пусть $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^{r}$ — q-аналог матрицы Картана, где

$$a_{ij}(q) = [a_{ij}]_q = [(\alpha_i,\alpha_j)]_q = \frac{q^{a_{ij}} - q^{-a_{ij}}}{q-q^{-1}}.$$

Пусть также $D(q)$ — матрица, обратная к матрице $A(q)$, а A^T означает операцию транспонирования матрицы A. Тогда предыдущее равенство можно переписать в матричной форме следующим образом:

$$\langle(\phi^+(v))^T, \phi^-(u)\rangle = \langle(\tilde{\phi}^+(u))^T, A(T^{-1/2})(T-T^{-1})\tilde{\phi}^-(v)\rangle.$$

Поэтому

$$\langle(\tilde{\phi}^-(v))^T, \tilde{\phi}^+(u)\rangle = \langle((T-T^{-1})^{-1}D(T^{-1/2})(\phi^-(v))^T, (\phi^+(u))'\rangle.$$

Таким образом, мы получаем равенство

$$\frac{E_r}{u-v} = \langle((T-T^{-1})^{-1}D(T^{-1/2})(\phi^-(v)), ((\phi^+(u))')^T\rangle.$$

Итак, мы диагонализовали спаривание. Представим матрицу $D(q)$ в виде $D(q) = \frac{1}{[l(\mathfrak{g})]}C(q)$, где $C(q)$ — матрица с коэффициентами, являющимися полиномами от q, q^{-1} с целыми коэффициентами, т. е. $c_{ij} \in Z[q, q^{-1}]$, а $l(\mathfrak{g}) = \check{h}(\hat{\mathfrak{g}})$ — дуальное число Кокстера. Тогда предыдущая формула перепишется в виде

$$\frac{E_r}{u-v} = \langle((T^{l(\mathfrak{g})} - T^{-l(\mathfrak{g})})^{-1}C(T^{-\frac{1}{2}})(\phi^-(v)), ((\phi^+(u))')^T\rangle.$$

Из этого равенства и вытекает формула для члена R_0 в факторизованной формуле для универсальной R-матрицы.

Теорема 4.1.

$$R_0 = \prod_{n\geqslant 0} \exp \sum_{i,j=1}^{r} \sum_{k\geqslant 0} ((\phi_i^+(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-1/2}) \left(\phi_j^-\left(v + \left(n+\frac{1}{2}\right) l(\mathfrak{g})\right)\right)_{-k-1}.$$

5. Вычисление универсальной R-матрицы янгиана $Y(\mathfrak{g})$

Прежде всего рассмотрим классический аналог проводимых ниже рассуждений. Классическая r-матрица $r(u,v)$ классического дубля $(\mathfrak{g}((u^{-1})), u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]], \mathfrak{g}[u])$ алгебры токов $\mathfrak{g}[u]$ имеет следующий вид:

$$r(u,v) = \sum_{i,k} e_{i,k} \otimes e^{i,k},$$

где $\{e_{i,k} = e_i u^k\}$, $\{e^{i,k} = e^i u^{-k-1}\}$ — двойственные базисы в $\mathfrak{g}[u]$, $u^{-1}\mathfrak{g}[[u^{-1}]]$ соответственно относительно спаривания

$$\langle f, g\rangle = \operatorname{res}(f(u), g(u)),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — инвариантная билинейная форма в $\mathfrak{g}$, а $\{e_i\}$, $\{e^i\}$ — двойственные относительно этой формы базисы в $\mathfrak{g}$. Легко видеть, что

$$r = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot v^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_i e_i \otimes e^i \cdot v^{-1} \left(\frac{u}{v}\right)^k = \sum_i e_i \otimes e^i \frac{v^{-1}}{1-\frac{u}{v}} = \frac{\mathfrak{t}}{v-u},$$

где $\mathfrak{t} = \sum\limits_i e_i \otimes e^i$ — оператор Казимира универсальной обёртывающей супералгебры $U(\mathfrak{g})$ супералгебры Ли $\mathfrak{g} = A(m,n)$. Таким образом, мы получили, что

$$r = \frac{\mathfrak{t}}{v-u}.$$

Отметим, что полученная классическая r-матрица не принадлежит $\mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$. Введём следующий оператор сдвига:

$$T_\lambda \colon f(u) \to f(u+\lambda).$$

Подействуем оператором $\mathrm{id} \otimes T_\lambda$ на r. Получим

$$(\mathrm{id} \otimes T_\lambda) r(u,v) = \frac{\mathfrak{t}}{\lambda - (u-v)} = \frac{\mathfrak{t}}{\lambda(1-\lambda^{-1}(u-v))} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{t}(u-v)^k \lambda^{-k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \lambda^{-k-1},$$

где $r_k \in \mathfrak{g}[t]^{\otimes 2}$.

Для того чтобы сделать аналогию с квантовым случаем более прозрачной, проведём эти же рассуждения другим эквивалентным способом:

$$(\mathrm{id} \otimes T_\lambda) r(u,v) = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot (v+\lambda)^{-k-1} = \\ = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot \frac{1}{\bigl(\lambda\bigl(1-\bigl(-\frac{v}{\lambda}\bigr)\bigr)\bigr)^{k+1}} = \\ = \sum_i \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_i \cdot u^k \otimes e^i \cdot (-1)^m C_{m+k}^k v^m \lambda^{-m-k-1} \overset{n=m+k}{=} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_i (-1)^{n-k} C_n^k e_i u^k \otimes e^i v^{n-k} \lambda^{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_i e_i \otimes e^i (u-v)^n \lambda^{-n-1}.$$

Проведённые выше рассуждения попробуем повторить и в квантовом случае, имея в виду, что янгиан является квантованием бисупералгебры полиномиальных токов $\mathfrak{g}[t]$, его дубль — квантование классического дубля $\mathfrak{g}((t))$, универсальная R-матрица дубля является квантовым аналогом классической r-матрицы r, а рассмотренная выше r-матрица $(\mathrm{id} \otimes T_\lambda) r(u,v)$ и есть тот классический объект, аналогом которого является универсальная R-матрица янгиана, которую мы и будем ниже вычислять.

Определим в квантовом случае гомоморфизм

$$T_\lambda \colon Y(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$$

следующим образом: $T_\lambda(x) = x$ для $x \in \mathfrak{g}$, $T_\lambda(a_{i,1}) = a_{i,1} + \lambda a_{i,0}$ для $a \in \{e, f, h\}$.

Предложение 5.1. *Действие* T_λ *на образующих* $a_{i,n}$, $a \in \{e, f, h\}$, $n \in \mathbb{Z}$, *дубля янгиана* $DY(\mathfrak{g})$ *определяется формулами*

$$T_\lambda a_{i,n} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_{i,k}\lambda^{n-k}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.1}$$

$$T_\lambda a_{i,-n} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} a_{i,k}\lambda^{-n-k-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что такими же формулами действие T_λ определяется и в классическом случае. Пусть

$$\tilde{h}_{i,1} = h_{i,1} - \frac{1}{2}h_{i,0}^2.$$

Тогда, как нетрудно видеть, выполняются следующие соотношения в дубле янгиана $DY(\mathfrak{g})$:

$$[\tilde{h}_{i,1}, e_{j,n}] = a_{ij}e_{i,n+1}, \quad [\tilde{h}_{i,1}, f_{j,n}] = -a_{ij}f_{i,n+1}, \quad [e_{i,k}, f_{j,m}] = \delta_{ij}h_{j,k+m}. \tag{5.3}$$

Достаточно проверить формулы для образующих $e_{j,n}$, $f_{j,n}$, так как справедливость формул (5.1), (5.2) для образующих $h_{j,n}$ вытекает из их справедливости для образующих $e_{j,n}$, $f_{j,n}$ и формулы (5.3). Докажем справедливость формул (5.1), (5.2) для образующих $e_{j,n}$. Для образующих $f_{j,n}$ рассуждения точно такие же.

Докажем формулу (5.1). При $n = 0$ формула (5.1) справедлива по определению. Пусть она справедлива при всех $k \leqslant n$. Докажем её справедливость при $k = n + 1$. Пусть j таково, что $a_{j,i} \neq 0$. Отметим, что T_λ — гомоморфизм. Тогда

$$\begin{aligned}
T_\lambda(e_{i,n+1}) &= T_\lambda(a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1}, e_{i,n}]) = a_{ji}^{-1}[T_\lambda\tilde{h}_{j,1}, T_\lambda e_{j,n+1}] = \\
&= a_{ji}^{-1}\left[\tilde{h}_{j,1} + \frac{1}{2}h_{j,0}, \sum_{k=0}^{n} C_n^k e_{i,k}\lambda^{n-k}\right] = \\
&= a_{ji}^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k[\tilde{h}_{j,1}, e_{i,k}]\lambda^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k[h_{j,0}, e_{i,k}]\lambda^{n+1-k}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k e_{i,k}\lambda^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Формула (5.1) доказана.

Докажем формулу (5.2). Пусть $n = 1$. Тогда $a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1}, e_{i,-1}] = e_{i,0}$. Подействуем на левую и правую части этой формулы оператором T_λ. Сначала подействуем на левую часть. Получим

$$\begin{aligned}
a_{ji}^{-1}[T_\lambda(\tilde{h}_{j,1}), T_\lambda(e_{i,-1})] &= a_{ji}^{-1}\left[\tilde{h}_{j,1} + \frac{1}{2}h_{j,0}, \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^0 e_{i,k}\lambda^{-k-2}\right] = \\
&= a_{ji}^{-1}\left[\tilde{h}_{j,1} + \frac{1}{2}h_{j,0}, \sum_{k=0}^{\infty} e_{i,k}\lambda^{-k-2}\right] =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e_{i,k+1}\lambda^{-k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e_{i,k}\lambda^{-k-1} =$$

$$= e_{i,0} + \sum_{k=0}^{\infty}((-1)^k + (-1)^{k+1})e_{i,k+1}\lambda^{-k-2} = e_{i,0}.$$

Так как правая часть по определению действия T_λ не меняется, то получили, что левая и правая части совпадают. Формула для $n = 1$ проверена. Пусть формула доказана для всех $k \leqslant n$. Докажем её для $k = n + 1$. Подействуем, как и выше, оператором T_λ на левую и правую части формулы

$$a_{ji}^{-1}[\tilde{h}_{j,1}, e_{i,-n-1}] = e_{i,-n}.$$

Действуем на левую часть:

$$a_{ji}^{-1}[T_\lambda\tilde{h}_{j,1}, T_\lambda e_{i,-n-1}] = a_{ji}^{-1}\left[\tilde{h}_{j,1} + \frac{1}{2}h_{j,0}, \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n}^{n} e_{i,k}\lambda^{-n-k-2}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n}^{n} e_{i,k+1}\lambda^{-n-k-2} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n}^{n} e_{i,k}\lambda^{-n-k-1} =$$

$$= e_{i,0} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\bigl(-C_{k+n}^{n} + C_{k+n+1}^{n}\bigr)e_{i,k}\lambda^{-n-k-2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{k+n-1}^{n-1} e_{i,k}\lambda^{-n-k-1} = T_\lambda e_{i,-n}.$$

Получили опять, что левая часть равна правой, и, следовательно, формула (5.2) доказана по индукции для всех натуральных n. $\square$

Замечание. Отметим, что ряд, определяющий значение оператора T_λ на образующих $a_{i,-n}$, сходится при достаточно больших значениях λ.

Теперь мы можем вычислить универсальную R-матрицу $R(\lambda)$ янгиана $Y(\mathfrak{g})$ посредством формулы

$$R(\lambda) = (\mathrm{id} \otimes T_{-\lambda})R,$$

где R — универсальная R-матрица в дубле $DY(\mathfrak{g})$. Так как $R = R_+R_0R_-$, то, действуя оператором $\mathrm{id}\otimes T_\lambda$ на R и пользуясь тем, что T_λ — гомоморфизм, а следовательно, и $\mathrm{id} \otimes T_\lambda$ — гомоморфизм, получаем

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda),$$

где $R_+(\lambda) = (\mathrm{id} \otimes T_{-\lambda})R_+$, $R_0(\lambda) = (\mathrm{id} \otimes T_{-\lambda})R_0$, $R_-(\lambda) = (\mathrm{id} \otimes T_{-\lambda})R_-$.

Отметим, что

$$R(\lambda) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} R_k\lambda^{-k-1},$$

где 1 — единичный элемент в $Y(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, $R_k \in Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g})$. Такая форма не очень удобна, так как коэффициенты R_k имеют труднообозримый вид. Поэтому окончательный ответ мы представим в другом, более обозримом виде. Подействуем оператором $\mathrm{id} \otimes T_{-\lambda}$ на правую часть формулы (4.1). Получим

$$R_{+}(\lambda) = \overrightarrow{\prod_{\beta \in \Xi_{+}}} \exp(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) e_{\beta} \otimes T_{-\lambda} e_{-\beta}).$$

Вычислим отдельно элемент $T_{-\lambda} e_{-\beta}$. Так как $\beta = \beta' + n\delta$, то в силу формулы (5.2) получаем

$$R_{-}(\lambda) = \overleftarrow{\prod_{\beta \in \Xi_{-}}} \exp\biggl(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} C_{k+n-1}^{n-1} (e_{\beta} \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\biggr)\biggr).$$

Аналогично вычисляется элемент $R_{-}(\lambda)$.

Предложение 5.2. *Члены $R_{+}(\lambda)$, $R_{-}(\lambda)$ универсальной R-матрицы янгиана имеют следующий вид:*

$$R_{+}(\lambda) = \overrightarrow{\prod_{\beta \in \Xi_{+}}} \exp\biggl(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} C_{k+n-1}^{n-1} (e_{\beta} \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\biggr)\biggr),$$

$$R_{-}(\lambda) = \overleftarrow{\prod_{\beta \in \Xi_{-}}} \exp\biggl(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k} C_{k+n-1}^{n-1} (e_{\beta} \otimes e_{-\beta+(n+m)\delta}) \lambda^{-n-k-1}\biggr)\biggr).$$

Пример 5.1. Рассмотрим пример вычисления членов $R_{+}(\lambda)$, $R_{-}(\lambda)$ в случае простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Имеем

$$\begin{aligned} R_{+}(\lambda) &= \overrightarrow{\prod_{n \geqslant 0}} \exp(-e_{n} \otimes T_{\lambda}(f_{-n-1})) = \\ &= \overrightarrow{\prod_{n \geqslant 0}} \exp\biggl((-1)^{n} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n}^{n} e_{n} \otimes f_{m} \lambda^{-n-m-1}\biggr) = \\ &= \exp\biggl(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+n}^{n} (-1)^{n} e_{n} \otimes f_{m} \lambda^{-n-m-1}\biggr) = \\ &= \exp\biggl(\sum_{k=0}^{\infty} \biggl(\sum_{m=0}^{k} C_{k}^{n} (-1)^{n} e_{n} \otimes f_{k-n}) \lambda^{-k-1}\biggr)\biggr) = \\ &= \overrightarrow{\prod_{n \geqslant 0}} \exp\biggl(\biggl(\sum_{m=0}^{k} C_{k}^{n} (-1)^{n} e_{n} \otimes f_{k-n}\biggr) \lambda^{-k-1}\biggr). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется и член $R_{-}(\lambda)$. Таким образом, получаем следующие формулы:

$$R_{+}(\lambda) = \overrightarrow{\prod_{n \geqslant 0}} \exp\biggl(\biggl(\sum_{m=0}^{k} C_{k}^{n} (-1)^{n} e_{n} \otimes f_{k-n}\biggr) \lambda^{-k-1}\biggr),$$

$$R_{-}(\lambda) = \overleftarrow{\prod_{n \geqslant 0}} \exp\biggl(\biggl(\sum_{m=0}^{k} C_{k}^{n} (-1)^{n} f_{n} \otimes e_{k-n}\biggr) \lambda^{-k-1}\biggr).$$

Пусть $\operatorname{ord}(\beta) := n$, если $\beta = \beta' + n\delta$, $\beta' \in \Delta_+(\mathfrak{g})$. Тогда предложение 5.2 можно переписать в виде следующих формул:

$$\begin{aligned} R_+(\lambda) = \overrightarrow{\prod_{\beta\in\Xi_+}} \exp\Bigg(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+\operatorname{ord}(\beta)-1}^{\operatorname{ord}(\beta)-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(\operatorname{ord}(\beta)+k)\delta}) \lambda^{-\operatorname{ord}(\beta)-k-1}\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} R_-(\lambda) = \overleftarrow{\prod_{\beta\in\Xi_-}} \exp\Bigg(-(-1)^{\theta(\beta)} a(\beta) \times \\ \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{k+\operatorname{ord}(\beta)-1}^{\operatorname{ord}(\beta)-1} (e_\beta \otimes e_{-\beta+(\operatorname{ord}(\beta)+k)\delta}) \lambda^{-\operatorname{ord}(\beta)-k-1}\right)\Bigg). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Вычислим теперь член $R_0(\lambda)$. Для этого нам потребуется вспомогательное утверждение.

Предложение 5.3. *Оператор сдвига действует на производящую функцию картановских образующих по формуле*

$$T_\lambda(h_i^-(u)) = h_i^+(u+\lambda).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} T_\lambda(h_i^-(u)) = T_\lambda\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,-k-1} u^k\right) = \\ = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} T_\lambda(h_{i,-k-1}) u^k = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}^k h_{i,m})\lambda^{-m-k-1} u^k = \\ = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} h_{i,m}(\lambda^+ u)^{-m-1} = h_i^+(u+\lambda). \end{aligned}$$

Предложение доказано. □

Следствие 5.1. $T_\lambda(\varphi_i^-(u)) = \varphi_i^+(u+\lambda)$.

Доказательство. Действительно,

$$T_\lambda(\varphi_i^-(u)) = T_\lambda(\ln(h_i^-(u))) = \ln(T_\lambda(h_i^-(u))) = \ln(h_i^+(u+\lambda)) = \varphi_i^+(u+\lambda).$$

Следствие доказано. □

Теперь мы можем вычислить член $R_0(\lambda)$.

Предложение 5.4. *Член* $R_0(\lambda)$ *имеет следующий вид*:

$$\begin{aligned} R_0(\lambda) = \prod_{n\geqslant 0} \exp\Bigg(\sum_{i,j\in I}\sum_{k\geqslant 0} ((\phi_i^+(u))')_k \otimes c_{ji}(T^{-1/2}) \times \\ \times \left(\phi_j^+\left(v + \left(n+\frac{1}{2}\right) l(\mathfrak{g}) + \lambda\right)\right)_k\Bigg). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Пример 5.2. В случае простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ формула (5.6) принимает следующий простой вид:

$$R_0(\lambda) = \prod_{n\geqslant 0} \exp\biggl(-\sum_{k\geqslant 0}((\phi^+(u))')_k \otimes (\phi^+(v-2n-1+\lambda))_k\biggr).$$

Результаты этого пункта можно представить в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть члены* $R_+(\lambda)$, $R_0(\lambda)$, $R_-(\lambda)$ *описываются соответственно формулами* (5.4), (5.5), (5.6). *Тогда формула для универсальной* R*-матрицы янгиана имеет следующий вид*:

$$R(\lambda) = R_+(\lambda)R_0(\lambda)R_-(\lambda).$$

Автор благодарит С.М. Хорошкина за полезные обсуждения данной работы.

Литература

[1] Дринфельд В. Г. Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга—Бакстера // ДАН СССР. — 1985. — Т. 283, № 5. — С. 1060—1064.

[2] Дринфельд В. Г. Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр // Препринт ФТИНТ. 30-86. — 1986.

[3] Дринфельд В. Г. Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр // ДАН СССР. — 1988. — Т. 36. — С. 212—216.

[4] Стукопин В. А. О янгианах супералгебр Ли типа $A(m,n)$ // Функцион. анализ и его прил. — 1994. — Т. 28, № 3. — С. 217—219.

[5] Толстой В. Н., Хорошкин С. М. Универсальная R-матрица для квантовых нескрученных аффинных алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил. — 1992. — Т. 26, № 3. — С. 85—88.

[6] Chari V., Pressley A. Yangians and R-matrices // Enseignment Math. — 1990. — Vol. 36. — P. 267—302.

[7] Chari V., Pressley A. Fundamental representations of Yangians and singularities of R-matrices // J. Reine Angew. Math. — 1991. — Vol. 417. — P. 87—128.

[8] Chari V., Pressley A. A guide to quantum groups. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[9] Drinfeld V. Quantum groups // Proc. Int. Cong. Math., Berkeley. Vol. 1. — 1986. — P. 798—820.

[10] Frappat L., Sorba P. Dictionary on Lie Superalgebras. — hep-th/9607161. — 1996.

[11] Kac V. A sketch of Lie superalgebra theory // Comm. Math. Phys. — 1977. — Vol. 53. — P. 31—64.

[12] Khoroshkin S. M., Tolstoy V. N. Yangian double // Lett. Math. Phys. — 1996. — Vol. 36. — P. 373—402.

[13] Levendorskii S. On generators and defining relations of Yangians // J. Geom. Phys. — 1993. — Vol. 12. — P. 1—11.

[14] Levendorskii S., Soibelman Ya., Stukopin V. Quantum Weyl group and universal R-matrix for quantum affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ // Lett. Math. Phys. — 1993. — Vol. 27. — P. 1—11.

[15] Nazarov M. Quantum Berezinian and the classical Capelly identity // Lett. Math. Phys. — 1991. — Vol. 21. — P. 123—131.

[16] Nazarov M. Yangian of the queer Lie superalgebra // Comm. Math. Phys. — 1999. — Vol. 208. — P. 195—223.

[17] Smirnov F. Dynamical symmetries of massive integrable models // Internat. J. Modern Phys. A. — 1992. — Vol. 7, suppl. 1B. — P. 813—838.

[18] Stukopin V. Representation theory and doubles of Yangians of classical Lie superalgebras // Asymptotic Combinatorics with Applications to Math. Phys. — Dordrecht, Kluwer, 2002. — P. 255—265.