О некоторых расширениях p-ограниченных вполне расщепляемых $\mathrm{GL}(n)$-модулей

В. В. ЩИГОЛЕВ
Ульяновский государственный университет
e-mail: vkshch@vens.ru

УДК 512.743.7+512.547.23

Ключевые слова: полная линейная группа, симметрическая группа, вполне расщепляемые представления, гипер継алгебра.

Аннотация

В работе вычислено пространство $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu))$, где $\mathrm{GL}(n)$ — полная линейная группа порядка n над алгебраически замкнутым полем положительной характеристики, $L_n(\lambda)$ и $L_n(\mu)$ — рациональные неприводимые $\mathrm{GL}(n)$-модули со старшими весами λ и μ соответственно, ограничение модуля $L_n(\lambda)$ на любую подгруппу Леви группы $\mathrm{GL}(n)$ полупросто, λ — p-ограниченный вес и μ не доминирует строго над λ.

Abstract

V. V. Shchigolev, On some extensions of p-restricted completely splittable $\mathrm{GL}(n)$*-modules*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 2, pp. 219—226.

In this paper, we calculate the space $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu))$, where $\mathrm{GL}(n)$ is the general linear group of degree n over an algebraically closed field of positive characteristic, $L_n(\lambda)$ and $L_n(\mu)$ are rational irreducible $\mathrm{GL}(n)$-modules with highest weights λ and μ, respectively, the restriction of $L_n(\lambda)$ to any Levi subgroup of $\mathrm{GL}(n)$ is semisimple, λ is a p-restricted weight, and μ does not strictly dominate λ.

§ 1. Введение

В данной работе мы фиксируем алгебраически замкнутое поле K характеристики $p > 0$. Через Σ_n мы обозначаем симметрическую группу степени n, интерпретируемую в данной работе как группу биекций множества $\{1, \ldots, n\}$. Через $\mathrm{GL}(n)$ мы обозначаем группу всех обратимых над K матриц размера $n \times n$.

Разбиением числа n называется бесконечный счётный невозрастающий набор неотрицательных целых чисел, сумма элементов которого равна n. *Высотой* разбиения λ называется число $h(\lambda)$, равное количеству ненулевых вхождений разбиения λ. Разбиение λ, не содержащее p и более одинаковых вхождений,

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 2, с. 219—226.

называется *p-регулярным*. Считается, что разбиение λ доминирует над разбиением μ, если

$$\sum_{j=1}^{i}\lambda_j \geqslant \sum_{j=1}^{i}\mu_j$$

для любого $i \geqslant 1$. Этот факт записывается в виде $\lambda \trianglerighteq \mu$. Запись $\lambda \triangleright \mu$ означает, что $\lambda \trianglerighteq \mu$ и $\lambda \neq \mu$. Через λ^t обозначается разбиение, сопряжённое разбиению λ, т. е. диаграмма Юнга разбиения λ^t получена транспонированием диаграммы Юнга разбиения λ.

Каждому разбиению λ числа n соответствует $K\Sigma_n$-модуль S^λ, который называется *модулем Шпехта* (см., например, [5, определение 4.3]). Для p-регулярного разбиения λ положим $D^\lambda = S^\lambda / \operatorname{rad} S^\lambda$. Отображение $\lambda \mapsto D^\lambda$ задаёт взаимно-однозначное соответствие между p-регулярными разбиениями числа n и неприводимыми $K\Sigma_n$-модулями.

Под *подгруппой Юнга* группы Σ_n мы понимаем любую подгруппу

$$\{\sigma \in \Sigma_n \colon \sigma A_i = A_i,\ i = 1, \ldots, k\},$$

где $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \{1, \ldots, n\}$ — произвольное разбиение на непересекающиеся подмножества.

Определение 1.1 ([7, определение 0.1]). Неприводимый $K\Sigma_n$-модуль называется *вполне расщепляемым* тогда и только тогда, когда его ограничение на любую подгруппу Юнга группы Σ_n полупросто.

Для каждого разбиения λ положим $\chi(\lambda) = \lambda_1 - \lambda_{h(\lambda)} + h(\lambda)$, если λ ненулевое, и $\chi(\lambda) = 0$ иначе. Критерий вполне расщепляемости модуля D^λ в терминах λ был получен А. С. Клещевым в [7].

Утверждение 1.2 ([7, теорема 2.1]). *Модуль D^λ вполне расщепляем тогда и только тогда, когда $\chi(\lambda) \leqslant p$.*

В дальнейшем разбиение λ, для которого модуль D^λ вполне расщепляемый, будем также называть *вполне расщепляемым*. Вполне расщепляемое разбиение, содержащее более одной ненулевой части и хотя бы один косой p-крюк, будем называть *большим* (см. [1, определение 4]).

Доказательству результата, аналогичного утверждению 1.2 для общей линейной группы, посвящена работа [3]. В связи с этим возникает вопрос о возможности получения аналога для общей линейной группы следующего результата.

Утверждение 1.3 ([1, теорема 6 и следствие 6]). *Пусть $p > 2$, λ — вполне расщепляемое разбиение и μ — p-регулярное разбиение числа n, $\lambda \not\triangleright \mu$. Тогда*

$$\operatorname{Ext}^1_{\Sigma_n}(D^\lambda, D^\mu) \cong \begin{cases} K, & \text{если } \lambda \text{ большое и } \mu = \tilde{\lambda}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если λ большое, то $\operatorname{rad} S^\lambda$ — ненулевой гомоморфный образ модуля $S^{\tilde{\lambda}}$, иначе $\operatorname{rad} S^\lambda = 0$.

Основной целью данной работы является доказательство упомянутого выше аналога для p-ограниченных вполне расщепляемых весов (см. определения в § 2). Требуемый результат (теорема 3.4) получается из утверждения 1.3 применением функтора Шура и функторов ограничения R_n^{n+m} из [2].

Заметим, что для не p-ограниченных вполне расщепляемых весов вопрос остаётся открытым.

§ 2. Предварительные факты

Для целого $n \geqslant 0$ обозначим через $X(n)$ множество всех наборов целых чисел длины n. Подмножество множества $X(n)$, состоящее из наборов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, таких что $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, обозначим через $X^+(n)$. Элементы из $X(n)$ называются *весами*, а из $X^+(n)$ — *доминантными весами*. Через $\Lambda^+(n, m)$ обозначим подмножество множества $X^+(n)$, состоящее из всех наборов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, таких что $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ и $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = m$.

Считается, что вектор v рационального $\mathrm{GL}(n)$-модуля M имеет вес $\lambda \in X(n)$, если $\mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)v = t_1^{\lambda_1} \ldots t_n^{\lambda_n} v$ для любых $t_1, \ldots, t_n \in K\backslash\{0\}$. Через M^λ обозначается подпространство в M, состоящее из всех векторов веса λ. Считается, что λ — вес модуля M, если $M^\lambda \neq 0$.

Фиксируем следующие веса: $\varepsilon_i = (0^{i-1}, 1, 0^{n-i})$ и $\alpha_{i,j} = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Введём следующий частичный порядок доминирования на весах: $\mu \leqslant \lambda$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \mu$ — это сумма элементов $\alpha_{i,j}$, где $i < j$ (возможно, пустая и с повторениями). Как обычно, $\mu < \lambda$ означает, что $\mu \leqslant \lambda$ и $\mu \neq \lambda$. Доминантный вес $\lambda \in X^+(n)$ называется p-ограниченным, если $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p$ для $1 \leqslant i < n$.

Для доминантного веса $\lambda \in X^+(n)$ строка i называется *удаляемой*, если $1 \leqslant i < n$ и $\lambda_i > \lambda_{i+1}$. Если вес $\lambda \in X^+(n)$ имеет хотя бы одну удаляемую строку, то положим $\psi_n(\lambda) = j - i + \lambda_i - \lambda_{j+1}$, где i и j — наименьшая и наибольшая удаляемые строки веса λ соответственно. Если λ не имеет удаляемых строк, т. е. все вхождения веса λ одинаковые, то положим $\psi_n(\lambda) = 0$.

Через $[V : D]$ будем обозначать композиционную кратность неприводимого модуля D в модуле V, когда однозначно понятно, над каким кольцом оба модуля рассматриваются.

Для $\lambda \in X^+(n)$ через $\Delta_n(\lambda)$ и $L_n(\lambda)$ обозначим *модуль Вейля* и *неприводимый модуль* со старшим весом λ соответственно (см. определения в [6]). Так как мы делаем различие между разбиениями и весами, то полезно ввести следующее обозначение. Пусть a — набор длины n и m такое, что из $a_i \neq 0$ следует $i \leqslant m$. Тогда обозначим через $(a)_m$ набор $(a_1, \ldots, a_m)$, если $m < n$, и набор $(a_1, \ldots, a_n, 0^{m-n})$, если $m \geqslant n$. В данном определении n и m — неотрицательные целые числа или $+\infty$. Всегда, когда соответствующие модули и наборы корректно определены, мы будем использовать следующую систему сокращений:

$$S^\lambda = S^{(\lambda)_{+\infty}}, \quad \lambda^t = ((\lambda)_{+\infty})^t, \quad \Delta_n(\lambda) = \Delta_n((\lambda)_n), \quad L_n(\lambda) = L_n((\lambda)_n).$$

Стандартной подгруппой Леви группы $\mathrm{GL}(n)$ называется любая подгруппа вида $\mathrm{GL}(n_1)\times\ldots\times\mathrm{GL}(n_k)$, где $n_1+\ldots+n_k=n$. Подгруппа группы $\mathrm{GL}(n)$ называется *подгруппой Леви* группы $\mathrm{GL}(n)$, если она является сопряжённой некоторой стандартной подгруппе Леви. Неприводимый модуль $L_n(\lambda)$ называется *вполне расщепляемым*, если его ограничение на любую подгруппу Леви группы $\mathrm{GL}(n)$ полупросто. Вес $\lambda\in X^+(n)$, такой что модуль $L_n(\lambda)$ является вполне расщепляемым, будем также называть *вполне расщепляемым*.

В [3] доказан критерий вполне расщепляемости веса λ, который в случае p-ограниченных весов принимает следующий вид.

Утверждение 2.1. *Произвольный p-ограниченный вес $\lambda\in X^+(n)$ вполне расщепляем тогда и только тогда, когда $\psi_n(\lambda)\leqslant p$.*

При доказательстве основного результата мы будем применять следующее утверждение, которое следует из [6, II.2.14(4)].

Утверждение 2.2. *Пусть $\lambda,\mu\in X^+(n)$ и $\lambda\not<\mu$. Тогда*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda),L_n(\mu))\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(n)}(\mathrm{rad}\,\Delta_n(\lambda),L_n(\mu)).$$

Здесь и далее когомологии алгебраических групп понимаются как рациональные когомологии (см. [6, I.4]).

В доказательстве теоремы 3.4 используется гипералгебра $U(n)$ для группы $\mathrm{GL}(n)$. Её преимущество заключается в том, что она порождена элементами, переводящими однородные векторы в однородные. Дадим её точное определение.

Пусть $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{Q})$ — алгебра Ли всех $(n\times n)$-матриц над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ относительно операции коммутирования и $U(n,\mathbb{Q})$ — универсальная обёртывающая алгебра для $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{Q})$. Обозначим через $X_{i,j}$ матрицу с единицей на пересечении i-й строки и j-го столбца и нулями на остальных местах. Таким образом, $X_{i,j}\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{Q})\subset U(n,\mathbb{Q})$. Через $U(n,\mathbb{Z})$ обозначим $\mathbb{Z}$-подалгебру в $U(n,\mathbb{Q})$, порождённую элементами

$$X_{i,j}^{(r)}:=\frac{(X_{i,j})^r}{r!}\qquad\text{для целых } 1\leqslant i,j\leqslant m,\ i\neq j,\ \text{и } r\geqslant 0;$$

$$\binom{X_{i,i}}{r}:=\frac{X_{i,i}(X_{i,i}-1)\ldots(X_{i,i}-r+1)}{r!}\qquad\text{для целых } 1\leqslant i\leqslant m \text{ и } r\geqslant 0.$$

В [6] показано, что любой конечномерный рациональный $\mathrm{GL}(n)$-модуль может быть интерпретирован как $U(n)$-модуль. Подалгебру алгебры $U(n)$, порождённую всеми элементами $X_{i,j}^{(r)}$ для $i<j$, обозначим через $U^+(n)$. Подалгебру алгебры $U(n)$, порождённую всеми элементами $X_{i,j}^{(r)}$ для $i>j$, обозначим через $U^-(n)$. Подалгебру алгебры $U(n)$, порождённую всеми элементами $\binom{X_{i,i}}{r}$, обозначим через $U^0(n)$. Как показано в [6], имеет место разложение $U(n)=U^-(n)U^0(n)U^+(n)$. Наконец, вектор v некоторого $U(n)$-модуля назовём *примитивным*, если $U^+(n)v=Kv$.

§ 3. Основной результат

Докажем следующий простой факт.

Утверждение 3.1. *Пусть S — некоторая K-алгебра, V — S-модуль, L — неприводимый S-модуль и $e \in S$ — такой идемпотент, что $eL \neq 0$. Тогда $\mathrm{Hom}_S(V, L)$ изоморфно K-подпространству в $\mathrm{Hom}_{eSe}(eV, eL)$.*

Доказательство. Рассмотрим K-линейное отображение из $\mathrm{Hom}_S(V, L)$ в $\mathrm{Hom}_{eSe}(eV, eL)$, заданное формулой $\varphi \mapsto \varphi|_{eV}$. Докажем, что это вложение. Пусть φ — ненулевой элемент из $\mathrm{Hom}_S(V, L)$. По условию $ex \neq 0$ для некоторого $x \in L$. В силу неприводимости модуля L получаем, что $x = \varphi(v)$ для некоторого $v \in V$. Отсюда $\varphi(ev) = ex \neq 0$ и $\varphi|_{eV} \neq 0$. □

Лемма 3.2. *Пусть $\lambda, \mu \in \Lambda^+(n, m)$, $m \leqslant n$, $\lambda \not< \mu$ и λ^t, μ^t — p-регулярные разбиения. Тогда*

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu)) \leqslant \dim \mathrm{Ext}^1_{\Sigma_m}(D^{\lambda^t}, D^{\mu^t}).$$

Доказательство. Из утверждения 2.2 получаем

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu)) \cong \mathrm{Hom}_{S(n,m)}(\mathrm{rad}\,\Delta_n(\lambda), L_n(\mu)),$$

где $S(n, m)$ — алгебра Шура (см. [4, § 2.3]). Из утверждения 3.1, применённого к $e := \xi_{u,u}$, где $u = (1, 2, \ldots, m, 0^{n-m})$ (см. [4, § 2.3, 6]), $V := \mathrm{rad}\,\Delta_n(\lambda)$, $L := L_n(\mu)$ и $S := S(n, m)$, следует, что

$$\dim \mathrm{Hom}_{S(n,m)}(\mathrm{rad}\,\Delta_n(\lambda), L_n(\mu)) \leqslant \dim \mathrm{Hom}_{\Sigma_m}(\mathrm{rad}\, S^{\lambda^t}, D^{\mu^t}).$$

Применяя $\mathrm{Hom}_{\Sigma_m}(\text{-}, D^{\mu^t})$ к точной последовательности

$$0 \to \mathrm{rad}\, S^{\lambda^t} \to S^{\lambda^t} \to D^{\lambda^t} \to 0,$$

получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\Sigma_m}(D^{\lambda^t}, D^{\mu^t}) \to \mathrm{Hom}_{\Sigma_m}(S^{\lambda^t}, D^{\mu^t}) \to \\ \to \mathrm{Hom}_{\Sigma_m}(\mathrm{rad}\, S^{\lambda^t}, D^{\mu^t}) \xrightarrow{\iota} \mathrm{Ext}^1_{\Sigma_m}(D^{\lambda^t}, D^{\mu^t}).$$

Отсюда ι — вложение и

$$\dim \mathrm{Hom}_{\Sigma_m}(\mathrm{rad}\, S^{\lambda^t}, D^{\mu^t}) \leqslant \dim \mathrm{Ext}^1_{\Sigma_m}(D^{\lambda^t}, D^{\mu^t}).$$

Лемма доказана. □

Определение 3.3. Пусть λ — p-ограниченный вес из $X^+(n)$. Назовём λ большим, если λ имеет удаляемую строку и

1) $j - i + \lambda_i - \lambda_{j+1} \leqslant p$ (т. е. λ вполне расщепляемый);
2) $\lambda_i - \lambda_{j+1} > 1$, $j - 1 + \lambda_i - \lambda_{j+1} \geqslant p$, $i - \lambda_i + \lambda_{j+1} + p + 1 \leqslant n$,

где i и j — наименьшая и наибольшая удаляемые строки веса λ соответственно. Для большого $\lambda \in X^+(n)$ положим

$$\hat{\lambda} = \lambda - \sum_{k=1}^{i-j-\lambda_i+\lambda_{j+1}+p+1} \alpha_{j+\lambda_i-\lambda_{j+1}-p-1+k,j+k}.$$

Другими словами, p-ограниченный вес λ большой, если λ вполне расщепляемый и возможно нетривиально переместить $i-j-\lambda_i+\lambda_{j+1}+p+1$ клеток из последнего столбца в столбец $\lambda_{j+1}+1$ и получить вес из $X^+(n)$, который обозначается $\hat{\lambda}$.

Пример. Пусть $p = 7$ и $\lambda = (5,5,5,4,3,1,1,1)$. Тогда λ большой и $\hat{\lambda} = (5,4,4,4,3,2,2,1)$.

Теорема 3.4. *Пусть вполне расщепляемый p-ограниченный вес из $X^+(n)$ λ и $\mu \in X^+(n)$ таковы, что $\lambda \not< \mu$. Тогда*

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu)) \cong \begin{cases} K, & \text{если } \lambda \text{ большой и } \mu = \hat{\lambda}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если λ большой, то $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)$ — ненулевой гомоморфный образ модуля $\Delta_n(\hat{\lambda})$, иначе $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda) = 0$.

Доказательство. Умножая модули $L_n(\lambda)$ и $L_n(\mu)$ на соответствующую степень представления $\det_n = \Delta_n(1^n)$, можно считать, что $\lambda_n = 0$ (см. утверждение 2.2). Положим $m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Случай 1: $\lambda \not> \mu$. В силу утверждения 2.2 получаем $\operatorname{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu)) = 0$. С другой стороны, для большого λ имеем $\lambda > \hat{\lambda}$.

Случай 2: $\lambda > \mu$ и $n \geqslant m$. В случае $p = 2$ мы получили бы $\lambda = (1^m, 0^{n-m})$ и условия $\mu < \lambda$ и $\mu \in X^+(n)$ одновременно не выполнены. Поэтому $p > 2$. Имеем $h(\lambda^t) < p$, $\lambda^t \lhd \mu^t$ и $h(\mu^t) < p$. Следовательно, μ^t и λ^t p-регулярны. В силу леммы 3.2 имеем

$$\dim \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu)) \leqslant \dim \operatorname{Ext}^1_{\Sigma_m}(D^{\lambda^t}, D^{\mu^t}). \tag{1}$$

В рассматриваемом случае разбиение λ^t большое тогда и только тогда, когда вес λ большой; в случае выполнения этих условий $\tilde{\lambda}^t = \hat{\lambda}^t$. Отсюда, из неравенства (1) и утверждения 1.3 получаем

$$\dim \operatorname{Ext}^1_{\mathrm{GL}(n)}(L_n(\lambda), L_n(\mu)) \leqslant \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda \text{ большой и } \mu = \hat{\lambda}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, осталось доказать, что если вес λ большой, то $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)$ — ненулевой гомоморфный образ модуля $\Delta_n(\hat{\lambda})$.

В силу [4, 6.6b] и утверждения 1.3 имеем

$$[\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda) : L_n(\hat{\lambda})] = [\Delta_n(\lambda) : L_n(\hat{\lambda})] = [S^{\lambda^t} : D^{\hat{\lambda}^t}] = [S^{\lambda^t} : D^{\tilde{\lambda}^t}] = 1. \tag{3}$$

Поэтому существует ненулевой вектор $v \in \operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)$ веса $\hat{\lambda}$. Пусть V — $U(n)$-подмодуль в $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)$, порождённый вектором v, $\gamma \in X(n)^+$ — какой-нибудь максимальный относительно порядка $\geqslant$ вес модуля V и w — ненулевой элемент из V^γ. Понятно, что w — примитивный вектор и $w \in U^+(n)v$. Отсюда $\operatorname{Hom}_{\mathrm{GL}(n)}(\Delta_n(\gamma), \Delta_n(\lambda)) \neq 0$ и $\gamma \geqslant \hat{\lambda}$. Следовательно, в силу утверждения 1.3 получаем

$$0 \neq [\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda) : L_n(\gamma)] = [\operatorname{rad} S^{\lambda^t} : D^{\gamma^t}] \leqslant [S^{\tilde{\lambda}^t} : D^{\gamma^t}].$$

Отсюда $\hat{\lambda}^t = \tilde{\lambda}^t \trianglelefteq \gamma^t$, $\hat{\lambda} \geqslant \gamma$ и $\hat{\lambda} = \gamma$. То, что образ произвольного ненулевого гомоморфизма из $\Delta_n(\hat{\lambda})$ в $\Delta_n(\lambda)$ совпадает с $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)$, следует из (2) и (3).

Случай 3: $\lambda > \mu$. Положим $\nu = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0^m)$. Предположим сначала, что λ большой. Тогда ν тоже большой, $\hat{\nu} = (\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n, 0^m)$, и, как показано для случая 2, существует точная последовательность

$$\Delta_{n+m}(\hat{\nu}) \to \Delta_{n+m}(\nu) \to L_{n+m}(\nu) \to 0.$$

Применяя к этой последовательности функтор R_n^{n+m}, определённый в [2, § 2], и учитывая [2, 2.3], получаем точную последовательность

$$\Delta_n(\hat{\lambda}) \to \Delta_n(\lambda) \to L_n(\lambda) \to 0.$$

Отсюда $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)$ — гомоморфный образ модуля $\Delta_n(\hat{\lambda})$. С учётом утверждения 2.2 остаётся только доказать, что модуль $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda)$ ненулевой. Как показано для случая 2, $1 = [\Delta_{n+m}(\nu) : L_{n+m}(\hat{\nu})]$. Применяя функтор R_n^{n+m} и учитывая [2, 2.3], получаем

$$1 = [\Delta_n(\lambda) : L_n(\hat{\lambda})] = [\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda) : L_n(\hat{\lambda})].$$

Предположим теперь, что λ не большой. В силу предложения 2.2 нам достаточно показать, что $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda) = 0$.

Если ν тоже не большой, то $\Delta_{n+m}(\nu) \cong L_{n+m}(\nu)$ в силу случая 2. Применяя функтор R_n^{n+m} и учитывая [2, 2.3], получаем $\Delta_n(\lambda) \cong L_n(\lambda)$ и $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda) = 0$.

Если же ν большой, то $n < m$, $\hat{\nu}_{n+1} > 0$ и, как показано для случая 2, существует точная последовательность

$$\Delta_{n+m}(\hat{\nu}) \to \Delta_{n+m}(\nu) \to L_{n+m}(\nu) \to 0.$$

Применяя к этой последовательности функтор R_n^{n+m} и учитывая [2, 2.4 и 2.3], получаем $\Delta_n(\lambda) \cong L_n(\lambda)$ и $\operatorname{rad}\Delta_n(\lambda) = 0$. □

Литература

[1] Щиголев В. В. О некоторых расширениях вполне расщепляемых модулей // Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — Т. 68, № 4. — С. 131—150.

[2] Brundan J., Kleshchev A. S. Modular Littlewood—Richardson coefficients // Math. Z. — 1999. — Vol. 232. — P. 287—320.

[3] Brundan J., Kleshchev A. S., Suprunenko I. D. Semisimple restrictions from $\mathrm{GL}(n)$ to $\mathrm{GL}(n-1)$ // J. Reine Angew. Math. — 1998. — Vol. 500. — P. 83—112.

[4] Green J. A. Polynomial Representations of $\mathrm{GL}_n(K)$. — Berlin: Springer, 1980. — Lecture Notes in Mathematics. Vol. 830.

[5] James G. D. The Representation Theory of the Symmetric Groups. — Berlin: Springer, 1978. — Lecture Notes in Mathematics. Vol. 682.

[6] Jantzen J. C. Representations of Algebraic Groups. — Boston: Academic Press, 1987. — Pure and Applied Mathematics. Vol. 131.

[7] Kleshchev A. S. Completely splittable representations of symmetric groups // J. Algebra. — 1996. — Vol. 181, no. 2. — P. 584—592.